

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

基於隨機 Cantor 集表面模型的接觸熱阻分析 研究成果報告(精簡版)

計畫類別：個別型
計畫編號：NSC 95-2221-E-002-050-
執行期間：95年08月01日至96年09月30日
執行單位：國立臺灣大學機械工程學系暨研究所

計畫主持人：盧中仁

計畫參與人員：碩士班研究生-兼任助理：林宗信

報告附件：出席國際會議研究心得報告及發表論文

處理方式：本計畫可公開查詢

中華民國 96 年 10 月 31 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

基於隨機 Cantor 集表面模型的接觸熱阻分析

Thermal Contact Resistance Analysis Based on a Random Cantor Set Surface Model

計畫編號：NSC 95-2221-E-002-050

執行期限：95 年 8 月 1 日至 96 年 9 月 30 日

主持人：盧中仁 台灣大學機械系

計畫參與人員：林宗信 台灣大學機械系

一、中文摘要

兩物體相接面上實際上只有較高的凸起會接觸，熱量只能經由這些凸起傳遞，因此阻礙了接觸面間的熱傳導，這樣的阻抗稱為接觸熱阻。在系統元件間的接觸熱阻會妨害散熱，在接觸面上造成溫度差，導致熱應力，降低工作效率和可靠度。實驗顯示接觸熱阻會隨著接觸面上壓力的增加而減少，但對於接觸熱阻和表面粗度間的關係尚無定論。計畫申請人曾經提出一個規則且具有碎形特性的表面模型，並成功的得到接觸熱阻和正向接觸力、碎形參數、接觸溫度間的關係。本計畫更進一步將原先規律的表面模型中固定的碎形參數，擴展為隨機變數；由熱彈性分析探討這些隨機變數的機率分佈對粗糙面間接觸熱阻的影響，並用 Monte-Carlo 法驗證理論分析所得的結果。

關鍵詞：接觸熱阻、碎形、隨機、熱變形

Abstract

On the interface between two apparently conforming solids, only some higher asperities are really in contact. The real contact area is much less than the apparent contact area. Most of the heat or energy crossing the interface can only pass through these small contact areas. This distortion of the heat flow causes an increase in thermal resistance, which is called the thermal contact resistance. Thermal contact resistance may create a temperature drop across the interface, induce thermal stresses,

and deteriorate the efficiency and reliability of the system. Previous experimental results indicate that thermal contact resistance decreases with increasing contact pressure. However, the influence of surface roughness on the contact resistance has not been clearly identified. We have constructed a regular fractal surface model. Based on this model, we successfully derived the relationship between the thermal contact resistance and important system parameters. In this project, we extend the previous model to a random fractal surface model by introducing random parameters at each stage of construction. With this surface model we analyze the effects of the random fractal parameters on the thermal contact resistance. Finally, Monte-Carlo simulations are conducted to verify the analytic results.

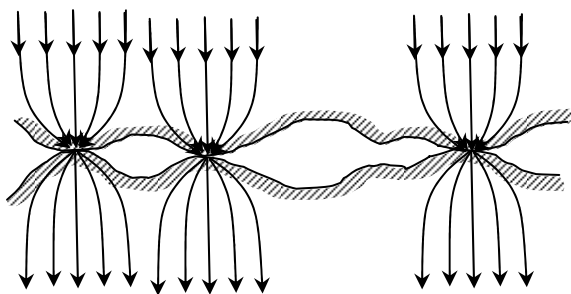
Keywords: thermal contact resistance, fractal, random, thermal deformation

二、緣由與目的

當兩物體相接觸時，接觸面對兩物體間的熱傳導形成額外的阻抗，因此兩物體在接觸面上的溫度並不相同，這個因接觸面而造成的阻抗稱為接觸熱阻（thermal contact resistance），或者也可用接觸熱傳導係數（thermal contact conductance）來描述接觸面間熱傳遞的難易程度。接觸面間熱阻抗的大小對許多工業應用有重大的影響。事實上，早期關於接觸熱阻的廣泛研究即肇因於核電廠對迅速散放大量熱量的

需求 [1, 2]。近年來隨著科技的進步，接觸熱阻的研究在各個領域的應用也益形重要。在微電子方面，隨著產品尺寸的微小化，散熱的問題成為限制元件大小、密度的主要因素之一 [3]，甚至影響產品的效能和可靠度 [4]。在生物醫學方面，隨著各種人造器官的發展，使得對於生理組織的熱性質的了解益形迫切。研究顯示植入組織失敗的原因之一為人工器官的熱性質和原生理組織不匹配。例如，人工關節和人骨接觸面間過大的熱阻抗會造成接合處附近的疲勞破壞 [5]。另一方面，應用局部的高溫加熱去除腫瘤時必需嚴格監控加熱點及其附近組織的溫度，以避免破壞正常組織。這裏主要的問題之一為如何減少熱電偶和注射器間的接觸熱阻，以確保量測溫度的準確性。有關接觸熱阻在各個領域的重要應用，請見參考文獻 [6]。

許多學者研究接觸熱阻產生的原因以及影響接觸熱阻的重要物理參數 [1、2、4、6~13]，目前公認合理的機制為：因為物體的表面不是完全平滑，當兩物體相接觸時，實際接觸的部分只有兩物體鄰接面上較高的凸起 (asperity)，因此真實接觸面積只是公稱接觸面積 (nominal contact area) 的一小部分。當熱對流和熱輻射的效應可忽略時，因為熱量被限制只能經由相接觸的凸起傳導 (參見圖一)，所以產生熱阻。由此可知接觸熱阻除了和兩物體的熱傳導能力有關外，也受接觸面的特性如氧化層的有無、表面粗度等的影響。



圖一、通過接觸凸起所傳導的熱量

近幾十年來有許多實驗探討接觸熱阻的特性 [1、2、7、8、10、11]，結果顯示接觸熱阻隨著接觸面間壓力和溫度的增加而減少；接觸熱阻和表面粗度的關係則因沒有公認標準的描述表面型態的參數而

沒有明確的定論。Clusing 和 Chao [2] 的結果顯示熱阻隨著等效真平度偏差量 (equivalent flatness deviation) 的不同而變化；另一方面 Parmenter 和 Marschall [10] 量測發現在相同的測試條件下不同表面粗度試片的接觸熱阻並沒有顯著的不同。另外一個有趣的現象是接觸熱阻的整流性 (thermal rectification) 或方向性 - 接觸熱阻會隨著熱量傳遞的方向的改變而不同，這個效應的大小和兩物體熱變形的程度有關 [8、15-17]。

為了明瞭接觸熱阻的機制以解決工業應用上對熱傳導效率日益嚴苛的要求，許多學者提出接觸熱阻的理論模型 [1、2、7-9、13、14、18-24]，希望能夠預測接觸熱阻。Lambert 和 Fletcher 在 1997 年的論文中對現存的各個模型作了完整的比較和分析 [13]。接觸熱阻的分析可分為三部分：熱傳導分析、變形分析和表面模型。在熱傳導分析方面較無爭議，在給定接觸面的形狀 (一般假設為圓形) 和大小後，可以求得通過接觸面的熱量和接觸面兩邊溫度差間的關係。接觸面的大小則由變形分析決定。最後以單一接觸凸起上的關係為基礎，加上表面型態模型可以得到粗糙面間的接觸熱阻。各個理論模型的不同處主要在於所使用的表面型態模型和變形分析的方法。一般的變形分析可分為彈性變形、塑性變形和彈 - 塑性變形。至於常用的表面型態模型可分為兩類：第一類將粗糙表面視為幾何形狀已知的凸起的組合，並利用適當的機率分佈函數來描述表面型態。常用的模型有 Greenwood 和 Williamson 模型 [25]、Whitehouse 和 Archard 模型 [26] 以及 Cooper、Mikic 和 Yovanovich 模型 [7] 等。近來的研究顯示這類模型的機率分佈參數和所用的量測儀器的解析度有關，換言之，物體表面具有碎形的特性。因此合理的表面模型亦應有碎形的特性 [27-31]。有鑑於此，一些學者開始分析碎形表面模型下的接觸溫度 [22-24、32]。這些研究增進了我們對接觸溫度的了解。

以上的模型大都由接觸壓力來估算接觸面積，忽略熱變形所導致的耦合效應。以往的研究顯示熱變形對接觸面間的行為

有重大的影響：熱變形可造成高的快閃溫度，甚至導致接觸面間的不穩定性。忽略熱變形的效應會低估接觸溫度〔38〕，並可能無法模擬接觸熱阻的方向性〔39〕。

有鑑於此，本計畫將建立隨機碎形的表面模型。考慮熱變形對表面凸起變形的影響。在熱彈性的範圍內，由統計分析研究接觸面上的熱阻和各重要物理參數的關係。

三、研究方法

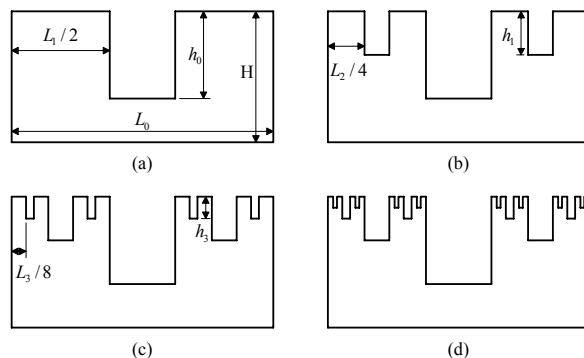
本計採用的分析過程為：首先建立隨機碎形表面模型；利用熱彈性分析計算各個相接觸凸起的變形和受力及所傳遞熱量間的關係；由力平衡和位移的一致性（compatibility）求出經由接觸凸起間所傳遞的總熱量，和接觸面的溫度，由此計算出接觸熱阻；由統計機率分析得到各個隨機變數對接觸熱阻的影響。詳述說明分析的過程如下。

前人的研究顯示兩粗糙面相接觸的問題經由適當的轉換後等價於一個粗糙面和一平滑剛體相接觸的問題〔41〕，所以我們將探討一粗糙面和一平滑剛體在正向力作用下的接觸熱阻。這樣的模型不但可大幅簡化分析工作，同時也不會降低所得結果的一般性。

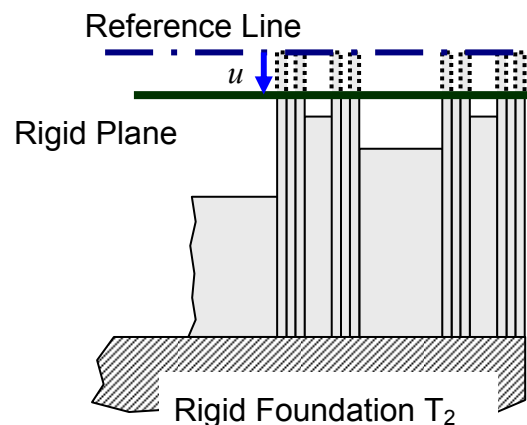
首先應用 Cantor 集建立描述粗糙面的碎形模型。利用規則的 Cantor 集建立表面模型的過程為：先決定分歧數目 s ，水平縮減比例 f_x 、垂直縮減比例 f_z 。在第 n 個階段時，共有 s^n 個最高的凸起，其水平總長度為 l_n ，每個凸起的水平長度為 (l_n / s^n) ；相鄰的兩個最高凸起間有一凹陷，其深度為 h_n 。在第 $(n+1)$ 個階段時，將第 n 個階段中每個最高凸起分為 $(2s-1)$ 段，將其中 $s-1$ 段下移 $h_{n+1} = h_n / f_z$ 。同時使得第 $(n+1)$ 個階段中最高凸起的總長度 $l_{n+1} = l_n / f_x$ 。重覆這個過程可以得到規律的 Cantor 集表面模型。圖二所示為 $s=2$ 時的 Cantor 集表面模型建構過程。

圖二建立的模型的缺點為太規律。在真實世界裡，表面凸起的大小應為隨機分佈。因此應將每一層的 f_x 和 f_z 視為獨立的隨機變數。但為簡化問題在此假設 f_z 為常

數， f_x 則為隨機變數。建立碎形模型後，我們考慮平滑剛體和碎形表面接觸的情形如圖三所示。基底的溫度固定，希望求得不同的正向接觸力下的接觸面的溫度和凸起的受力。將碎形表面視為由許多大小、高度不等的柱體所組成，各個柱體間無交互作用，熱量沿著柱體的軸向傳遞。



圖二、Cantor 集表面模型建構過程 ($s=2$)



圖三、接觸模型示意圖

每一階段間的 f_x 為隨機變數，定義第 $i+1$ 和第 i 個階段的長度比為 $1/f_{i+1}$ 。同時為了計算方便，令

$$z = 1/f_z, \quad x_i = 1/f_{x_i} \quad (1)$$

則第 i 個階段柱體下陷深度可表為

$$h_i = \frac{1}{f_z} h_{i-1} = \dots = \frac{1}{f_z^i} h_0 = z^i h_0 \quad (2)$$

第 i 個階段的柱體頂端水平長度為

$$L_i = \frac{1}{f_{x_i}} L_{i-1} = \dots = \left(\prod_{j=1}^i f_{x_j} \right)^{-1} L_0 \quad (3)$$

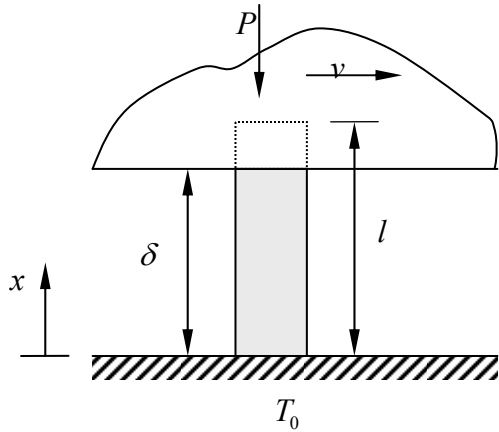
$$= L_0 \prod_{j=1}^i x_j$$

參考圖三，第 n 層柱體柱高度為

$$l_n = H - h_{n-1} = H - z^{n-1} h_0 \quad (4)$$

假設厚度為 1，則第 n 層柱體總面積為

$$A_n = (L_{n-1} - L_n) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} x_i - \prod_{i=1}^n x_i \right) L_0 \quad (5)$$



圖四、單一柱體與平滑熱絕緣剛體的滑動摩擦接觸

首先討論一平滑熱絕緣的剛體平面和單一柱體相接觸的情形，參考圖四。由熱傳導方程式，假設內部無熱源，穩態時

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

其中 k 為熱傳導係數。柱體與剛體平面接觸部位由於庫侖摩擦所產生的熱量為平滑剛體的速度 v 與下壓力 P 及其與柱體之間表面摩擦係數 μ 三者之乘積。假設柱底保持在溫度 T_0 ，則邊界條件可表示為

$$T(0) = T_0$$

$$\dot{Q}|_{x=l} = kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=l} = \mu P v$$

因此可解出柱體溫度分佈函數

$$T(x) = \frac{\mu P v}{kA} x + T_0 \quad (6)$$

平滑剛體下壓所造成的壓縮應變，以及相互滑動所造成的熱膨脹應變對柱體所造成的淨應變

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_p - \varepsilon_T = \frac{P}{EA} - \alpha \Delta T$$

其中 E 為楊氏係數 (Young's modulus); α 為熱膨脹係數。代入式(6)積分可得柱體的淨變形

$$u = \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{Pl}{EA} - \frac{\alpha \mu P v}{2kA} l^2 \quad (7)$$

剛體平面下壓位移 $u = l - \delta$ ，結合式(7)可換算出下壓力

$$P = \left(1 - \frac{\delta}{l}\right) \frac{2kAE}{2k - \alpha \mu v E l} \quad (8)$$

引入無因次化參數

$$l^* = \frac{l}{h_0}, \quad H^* = \frac{H}{h_0}, \quad \delta^* = \frac{\delta}{h_0}, \quad A^* = \frac{A}{A_0},$$

$$P^* = \frac{P}{EA_0}, \quad T^* = \frac{T}{T_0}, \quad \text{其中 } A_0 = L_0 \times 1$$

則溫度分佈函數式(6)可改寫成

$$T^*(x) = \frac{2\beta}{\alpha T_0} \frac{P^*}{T^*} x^* + 1 \quad (9)$$

其中 $\beta = \frac{\alpha \mu v E h_0}{2k}$ 。總下壓力 (式(8))，可改寫成

$$P^* = \left(1 - \frac{\delta^*}{l^*}\right) \left(\frac{A^*}{1 - \beta l^*}\right) \quad (10)$$

另外由式(4)和(5)，第 n 層柱體柱高和柱頂總面積可分別表為無因次的形式如下

$$l_n^* = \frac{l_n}{h_0} = \frac{H - z^{n-1} h_0}{h_0} = H^* - z^{n-1} \quad (11)$$

$$A_n^* = \frac{A_n}{A_0} = \prod_{i=1}^{n-1} x_i - \prod_{i=1}^n x_i \quad (12)$$

接著將單一柱體的結果推廣到 Cantor 集表面模型。為求討論方便，以下無因次符號皆省略星號(*)。

首先分析當剛體下壓至恰好和第 n 層柱頂接觸時所需的總力。此時第一層到第 n 層柱體皆無產生變形，總力應為第 $(n+1)$ 層以上柱體所受下壓力之總合，利用式(10)

$$P_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} P_i = \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\delta}{l_i}\right) \left(\frac{A_i}{1 - \beta l_i}\right)$$

$$= \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\delta}{l_i}\right) \left(\frac{A_i}{1 - \beta(H - z^{i-1})}\right)$$

令參數 $\gamma = 1 - \beta H$ 且假設 $(\beta/\gamma)z^i \ll 1$ ，則

$$P_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\delta}{l_i}\right) \left(\frac{A_i}{\gamma} \left(\frac{1}{1 + \frac{\beta}{\gamma} z^{i-1}}\right)\right)$$

$$= \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\delta}{l_i}\right) \left(\frac{A_i}{\gamma} \left(1 - \frac{\beta}{\gamma} z^{i-1}\right)\right) \quad (13)$$

$$= \frac{1}{\gamma} \sum_{i=n+1}^{\infty} A_i - \frac{\delta}{\gamma} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{A_i}{l_i}$$

$$- \frac{\beta}{\gamma^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} A_i z^{i-1} + \frac{\delta \beta}{\gamma^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{A_i}{l_i} z^{i-1}$$

式(13)中包含四種形式的無窮級數，分別是

$$(i) \sum_{i=n+1}^{\infty} A_i ; (ii) \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{A_i}{l_i} ; (iii) \sum_{i=n+1}^{\infty} A_i z^{i-1} ;$$

$$(iv) \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{A_i}{l_i} z^{i-1} , \text{ 分別處理上述級數}$$

$$(i) = \sum_{i=n+1}^{\infty} A_i = \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{i-1} x_j - \prod_{j=1}^i x_j \right) = \prod_{j=1}^n x_j \quad (14)$$

假設 $z^i / H \ll 1$,

$$(ii) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{A_i}{l_i} = \sum_{i=n+1}^{\infty} A_i \frac{1}{H - z^{i-1}} \\ = \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{i-1} x_j - \prod_{j=1}^i x_j \right) \left(\frac{1}{H} + \frac{z^{i-1}}{H^2} \right) \quad (15)$$

$$= \frac{1}{H} \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{i-1} x_j - \prod_{j=1}^i x_j \right) \\ + \frac{1}{H^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{i-1} x_j - \prod_{j=1}^i x_j \right) z^{i-1}$$

$$(iii) = \sum_{i=n+1}^{\infty} A_i z^{i-1} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{i-1} x_j - \prod_{j=1}^i x_j \right) z^{i-1} \quad (16)$$

$$(iv) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{A_i}{l_i} z^{i-1} = \sum_{i=n+1}^{\infty} A_i \frac{1}{H - z^{i-1}} z^{i-1} \\ = \sum_{i=n+1}^{\infty} A_i \frac{1}{H} \left(1 + \frac{1}{H} z^{i-1} \right) z^{i-1} \quad (17)$$

$$= \frac{1}{H} \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{i-1} x_j - \prod_{j=1}^i x_j \right) z^{i-1} \\ + \frac{1}{H^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{i-1} x_j - \prod_{j=1}^i x_j \right) (z^2)^{i-1}$$

接著求 P_n 的期望值。若兩隨機變數互相獨立，則 $E(x_1 x_2) = E(x_1)E(x_2)$ 。利用這個關係分別求(i)、(ii)、(iii)、(iv)的期望值，由式(14)-(17)，得到

$$(i): E\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) = E\left[\prod_{j=1}^n x_j\right] = \bar{x}^n \quad (18)$$

$$(ii): E\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{A_i}{l_i}\right) = \frac{\bar{x}^n}{H} \left(1 + \frac{z^n}{H} \frac{1 - \bar{x}}{1 - \bar{x}z} \right) \quad (19)$$

$$(iii): E\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} A_i z^{i-1}\right) = \bar{x}^n z^n \frac{1 - \bar{x}}{1 - \bar{x}z} \quad (20)$$

$$(iv): E\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{A_i}{l_i} z^{i-1}\right) = \frac{\bar{x}^n z^n}{H} \frac{1 - \bar{x}}{1 - \bar{x}z} \\ + \frac{\bar{x}^n z^{2n}}{H^2} \frac{1 - \bar{x}}{1 - \bar{x}z^2} \quad (21)$$

式(18)-(21)代入式(13)便可得到 P_n 的期望值。

接著推導外力 P 和下壓深度 u 間的連續關係。由 Cantor set 表面模型的定義，

$$h_{n-1} = z^{n-1} \Rightarrow (n-1) = \frac{\ln h_{n-1}}{\ln z}$$

下壓至第 n 層時

$$\delta = l_n = H - h_{n-1} \Rightarrow h_{n-1} = H - \delta$$

帶回上式

$$(n-1) = \frac{\ln(H - \delta)}{\ln z} \quad (22)$$

令參數 $\gamma_1 = \frac{\ln \bar{x}}{\ln z}$ ，利用式(22)則

$$\bar{x}^{n-1} = \exp[(n-1) \ln \bar{x}] \\ = \exp\left[\frac{\ln(H - \delta)}{\ln z} \ln \bar{x}\right] \quad (23) \\ = \exp[\gamma_1 \ln(H - \delta)] = (H - \delta)^{\gamma_1}$$

同理

$$z^{n-1} = \exp[(n-1) \ln z] \\ = \exp\left[\frac{\ln(H - \delta)}{\ln z} \ln z\right] \quad (24) \\ = \exp[\ln(H - \delta)] \\ = (H - \delta)$$

因此式(18)-(21)可再進一步改寫成

$$(i): E\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) = \bar{x}(H - \delta)^{\gamma_1} \quad (25)$$

$$(ii): E\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{A_i}{l_i}\right) \\ = \frac{\bar{x}}{H} (H - \delta)^{\gamma_1} \left[1 + \frac{H - \delta}{H} z \frac{1 - \bar{x}}{1 - \bar{x}z} \right] \quad (26)$$

$$(iii): E\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} A_i z^{i-1}\right) = \bar{x}z(H - \delta)^{\gamma_1+1} \frac{1 - \bar{x}}{1 - \bar{x}z} \quad (27)$$

$$(iv): E\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{A_i}{l_i} z^{i-1}\right) \\ = \frac{1}{H} \bar{x}z(H - \delta)^{\gamma_1+1} (1 - \bar{x}) \quad (28) \\ \times \left[\frac{1}{1 - \bar{x}z} + \frac{H - \delta}{H} \frac{z}{1 - \bar{x}z^2} \right]$$

最後，將上面 4 式帶回式(13)可得壓體平面位移為 $(H_0 - \delta)$ 時，總下壓力的期望值：

$$E(P_n) = \frac{\bar{x}}{\gamma} (H - \delta)^{\gamma_1} \left[1 - \frac{\delta}{H} \left(1 + (1 - \frac{\delta}{H}) \frac{(1 - \bar{x})z}{1 - \bar{x}z} \right) \right] - \frac{\beta}{\gamma^2} \bar{x}z (H - \delta)^{\gamma_1 + 1} \frac{1 - \bar{x}}{1 - \bar{x}z} \left[1 - \frac{\delta}{H} \left(1 + (1 - \frac{\delta}{H}) \frac{(1 - \bar{x}z)z}{1 - \bar{x}z^2} \right) \right] \quad (29)$$

接著推導 P_n 的變異數。隨機變數 x_1 的變異數可表示為 $Var(x_1) = E(x_1^2) - \bar{x}_1^2$ ，亦即可藉由 P_n 和 P_n^2 的期望值來求得 P_n 的變異數，因此還需要 P_n^2 的期望值。

$$(P_n)^2 = \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} (1 - \frac{\delta}{l_i}) (\frac{A_i}{1 - \beta l_i}) \right]^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} (1 - \frac{\delta}{l_i})^2 (\frac{A_i}{1 - \beta l_i})^2 + 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \left[\sum_{k=i+1}^{\infty} (1 - \frac{\delta}{l_k}) (\frac{A_k}{1 - \beta l_k}) \right] \quad (30)$$

上式中包含兩種無窮級數需要分別計算

$$(a) = \sum_{i=n+1}^{\infty} (1 - \frac{\delta}{l_i})^2 (\frac{A_i}{1 - \beta l_i})^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \left[1 - \frac{\delta}{H} (1 + \frac{1}{H} z^{i-1}) \right]^2 \times \left(\prod_{j=1}^{i-1} x_j - \prod_{j=1}^i x_j \right)^2 \left[\frac{1}{\gamma} (1 - \frac{\beta}{\gamma} z^{i-1}) \right]^2 = \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} \left[(1 - \frac{\delta}{H})^2 - \frac{2\delta}{H^2} (1 - \frac{\delta}{H}) z^{i-1} + \frac{\delta^2}{H^4} z^{i-1} \right]^2 (1 - x_i)^2 \prod_{j=1}^{i-1} x_j^2 \times \left[1 - \frac{2\beta}{\gamma} z^{i-1} + (\frac{\beta}{\gamma})^2 (z^2)^{i-1} \right]$$

$$\text{令 } A = (1 - \frac{\delta}{H})^2, B = -\frac{2\delta}{H^2} (1 - \frac{\delta}{H}), C = \frac{\delta^2}{H^4}$$

$$(a) = \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} (1 - x_i)^2 \left\{ A \prod_{j=1}^{i-1} x_j^2 + B z^{i-1} \prod_{j=1}^{i-1} x_j^2 + C (z^2)^{i-1} \prod_{j=1}^{i-1} x_j^2 - \frac{2\beta}{\gamma} \left[A z^{i-1} \prod_{j=1}^{i-1} x_j^2 + B (z^2)^{i-1} \prod_{j=1}^{i-1} x_j^2 \right] \right\}$$

$$+ C (z^3)^{i-1} \prod_{j=1}^{i-1} x_j^2 \left. + \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^2 \left[A (z^2)^{i-1} \prod_{j=1}^{i-1} x_j^2 + B (z^3)^{i-1} \prod_{j=1}^{i-1} x_j^2 + C (z^4)^{i-1} \prod_{j=1}^{i-1} x_j^2 \right] \right\} \quad (31)$$

$$(b) = 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=i+1}^{\infty} (1 - \frac{\delta}{l_i}) (\frac{A_i}{1 - \beta l_i}) (1 - \frac{\delta}{l_k}) (\frac{A_k}{1 - \beta l_k}) = 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=i+1}^{\infty} \left[1 - \frac{\delta}{H} (1 + \frac{1}{H} z^{i-1}) \right] \frac{A_i}{\gamma} \times (1 - \frac{\beta}{\gamma} z^{i-1}) \left[1 - \frac{\delta}{H} (1 + \frac{1}{H} z^{k-1}) \right] \frac{A_k}{\gamma} \times (1 - \frac{\beta}{\gamma} z^{k-1}) = 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=i+1}^{\infty} \left[(1 - \frac{\delta}{H}) - \left(\frac{\delta}{H^2} + (1 - \frac{\delta}{H}) \frac{\beta}{\gamma} \right) z^{i-1} + \frac{\delta}{H^2} \frac{\beta}{\gamma} (z^2)^{i-1} \right] \times \left(\prod_{j=1}^{i-1} x_j - \prod_{j=1}^i x_j \right) \left[(1 - \frac{\delta}{H}) - \left(\frac{\delta}{H^2} + (1 - \frac{\delta}{H}) \frac{\beta}{\gamma} \right) z^{k-1} + \frac{\delta}{H^2} \frac{\beta}{\gamma} (z^2)^{k-1} \right] \times \left(\prod_{q=1}^{k-1} x_q - \prod_{q=1}^k x_q \right) \quad (32)$$

$$\text{令 } D = (1 - \frac{\delta}{H}), E = -\left(\frac{\delta}{H^2} + (1 - \frac{\delta}{H}) \frac{\beta}{\gamma} \right),$$

$$F = \frac{\delta}{H^2} \frac{\beta}{\gamma}, \text{ 則}$$

$$(b) = 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=i+1}^{\infty} \left[D + E z^{i-1} + F (z^2)^{i-1} \right] \times \left[D + E z^{k-1} + F (z^2)^{k-1} \right] \left(\prod_{j=1}^{i-1} x_j - \prod_{j=1}^i x_j \right) \times \left(\prod_{q=1}^{k-1} x_q - \prod_{q=1}^k x_q \right) \quad (33)$$

式(31)、(33)之期望值分別為

$$(a) = E \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} (1 - \frac{\delta}{l_i})^2 (\frac{A_i}{1 - \beta l_i})^2 \right] = \frac{1}{\gamma^2} (1 - 2\bar{x} + \bar{x}^2) \left\{ A \frac{(\bar{x}^2)^n}{1 - \bar{x}^2} + B \frac{(\bar{x}z^2)^n}{1 - \bar{x}z^2} + C \frac{(z^2 \bar{x}^2)^n}{1 - z^2 \bar{x}^2} \right\}$$

$$-\frac{2\beta}{\gamma} \left[\frac{A(\overline{zx^2})^n}{1-zx^2} + \frac{B(\overline{z^2x^2})^n}{1-z^2x^2} + \frac{C(\overline{z^3x^2})^n}{1-z^3x^2} \right] + \left. \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^2 \left[\frac{A(\overline{z^2x^2})^n}{1-z^2x^2} + \frac{B(\overline{z^3x^2})^n}{1-z^3x^2} + \frac{C(\overline{z^4x^2})^n}{1-z^4x^2} \right] \right\} \quad (34)$$

$$(b) = 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=i+1}^{\infty} (1-\frac{\delta}{l_i}) (\frac{A_i}{1-\beta l_i}) (1-\frac{\delta}{l_k}) (\frac{A_k}{1-\beta l_k}) = \frac{2}{\gamma^2} (1-\bar{x})(\bar{x}-\overline{x^2}) \left\{ \frac{1}{1-\bar{x}} \left[D^2 \frac{(\overline{x^2})^n}{1-x^2} + DE \frac{(\overline{zx^2})^n}{1-zx^2} + DF \frac{(\overline{z^2x^2})^n}{1-z^2x^2} \right] + \frac{z}{1-z\bar{x}} \left[DE \frac{(\overline{zx^2})^n}{1-zx^2} + E^2 \frac{(\overline{z^2x^2})^n}{1-z^2x^2} + EF \frac{(\overline{z^3x^2})^n}{1-z^3x^2} \right] + \frac{z^2}{1-z^2\bar{x}} \left[DF \frac{(\overline{z^2x^2})^n}{1-z^2x^2} + EF \frac{(\overline{z^3x^2})^n}{1-z^3x^2} + F^2 \frac{(\overline{z^4x^2})^n}{1-z^4x^2} \right] \right\} \quad (35)$$

則 P_n 的變異數為

$$Var(P_n) = E(P_n^2) - (E(P_n))^2 \quad (36)$$

其中， $E(P_n)$ 由式(30)可得， $E(P_n^2)$ 由式(34)、(35)代入式(30)可得。

定義熱阻為接觸面間的溫度差和傳遞熱量的比值，則

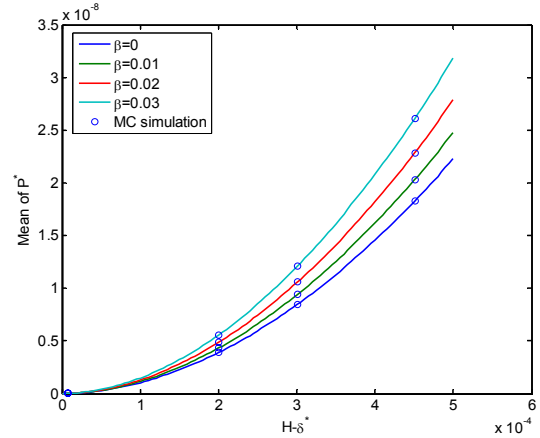
$$R = \frac{T_{\max} - T_0}{\mu P v} = \frac{h_0}{k A_0} \frac{P_N^*}{A_N^* P^*} \delta^*$$

四、結果與討論

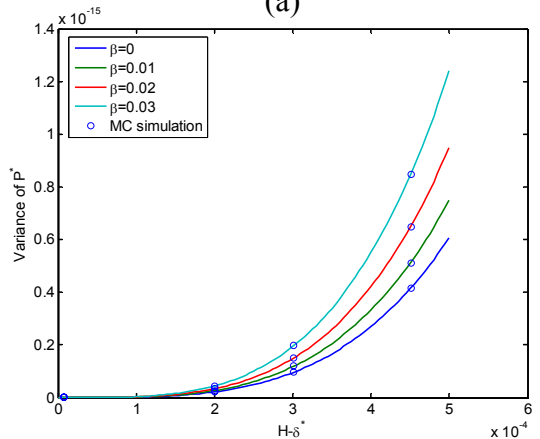
利用 Monte Carlo 法驗證上一節所推導的結果。假設 f_x 為 1-2 之間均勻分佈的隨機變數， $f_z = 1.5$ ， $H = 10$ 。利用亂數產生器隨機產生 f_x ，由此建立對應的 Cantor 集模型，並求出剛體平面下壓至特定層所需的力。重覆這個程序得到 5×10^5 組數據，求下壓力的平均值和變異數，和式(29)、式(36)相比較。

圖五顯示不同滑動速度下，壓力和下壓位移的關係。圖 (a) 為期望值，圖 (b) 為變異數。實線代表理論值，圓點為 Monte Carlo 模擬得到的結果。圖五顯示，理論解和 Monte Carlo 模擬的結果相當接近，也驗

證所得理論解的正確性。圖五 (a) 顯示，隨著滑動速度的增加，要下壓至一定深度所需的總力隨之增加。這是因為，滑動速度加快，則接觸面間因摩擦產生的熱量增加，柱體高度因為溫度上升導致的熱變形而加高，因此需要更大的力才能抵消熱變形的效應。



(a)



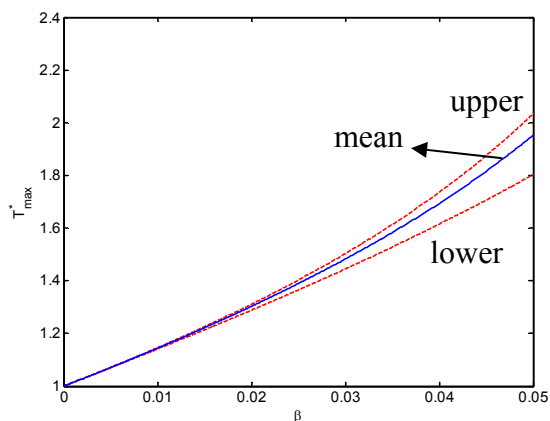
(b)

圖五、不同滑動速度下壓力和下壓位移的關係 (a) 期望值 (b) 變異數

利用 Monte Carlo 法，產生 10 萬個樣本，利用上一節的結果，計算不同滑動速度下接觸面間的溫度，並計算最高溫度的平均值和上、下限，結果如圖六所示。由圖可知，接觸面間的最高溫度的期望值和變異數都隨著滑動速度的加快而增加；

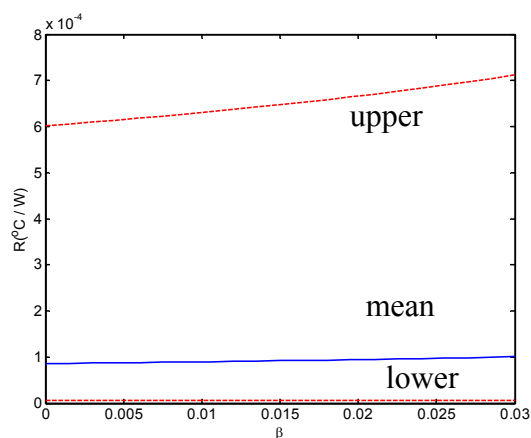
圖七為不同 f_z 下最高溫度的期望值和變異數和滑動速度的關係。隨著滑動速度增加，最高溫度的期望值和變異數都隨之迅速增加，這是因為速度快時摩擦產生的熱量較多。另一方面，相同的滑動速度下，最高溫度隨著 f_z 的增加而降低。這是因

為， f_z 增加代表表面越平滑（柱體的高度差越小），因此接觸壓力越平均，導致最高溫度降低。

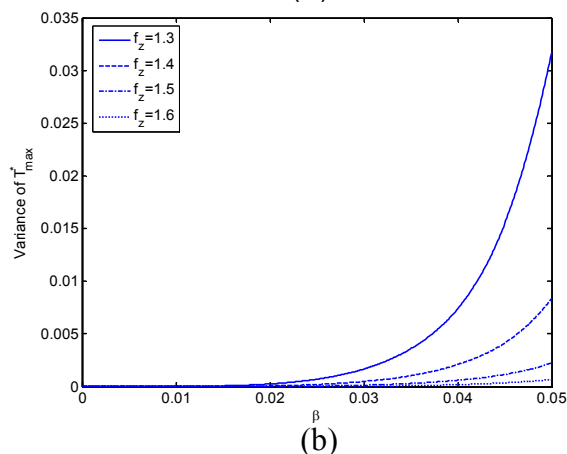
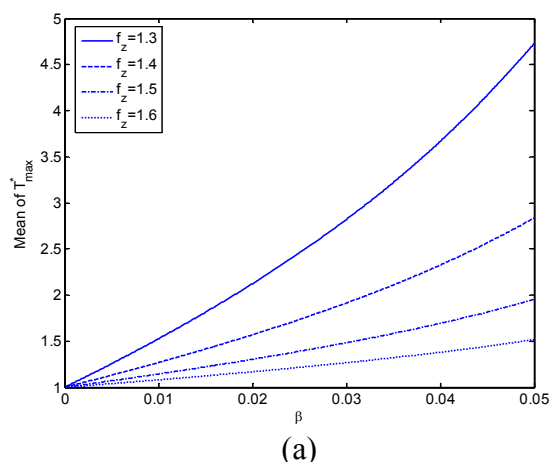


圖六、最高溫度的期望值（上、下限）和滑動溫度的關係 ($f_z=1.5$)

於最大熱阻則有較明顯的增加趨勢的原因是只紀錄了所有樣本中的最大值。這個現象暗示，變異數會隨著滑動速度的加大而增加。



圖八、接觸熱阻和滑動溫度的關係 ($f_z = 1.5$)



圖七、不同 f_z 下最高溫度的 (a) 期望值 (b) 變異數和滑動速度的關係。

圖八顯示接觸熱阻和滑動速度的關係。接觸熱阻的期望值隨著滑動速度的加大而些微的增加，和預期的吻合。這是因為，隨著滑動速度加大，傳遞的熱量和溫度差都隨之增加，且增加的趨勢相當。至

參考文獻

- [1] YU. P. Shlykov and YE. A. Ganin, 1964, "Thermal Resistance of Metallic Contacts," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 7, pp. 921-929.
- [2] M. Clausing and B. T. Chao, 1965, "Thermal Contact Resistance in a Vacuum Environment," *ASME Journal of Heat Transfer*, May, pp. 243-251.
- [3] D. Kraus and A. Bar-Cohen, 1983, *Thermal Analysis and Control of Electronic Equipment*, Hemisphere, New York.
- [4] M. A. Lambert, I. G. Cavenall and L. S. Fletcher, 1997, "Experimental Thermal Contact Conductance of Electronic Modules," *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 11, No. 2, pp. 146-152.
- [5] Y. K. Liu, D. Stienstra and G. Njus, 1981, "The Fatigue Life of Inorganic Bone-PMMA Composites," *Proceedings of the First Southern Biomedical Conference*, Shreveport, LA, pp. 12-15.
- [6] L. S. Fletcher, 1988, "Recent Developments in Contact Conductance Heat Transfer," *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 110, pp. 1059-1069.
- [7] M. G. Cooper, B. B. Mikic and M. M. Yovanovich, 1969, "Thermal Contact conductance," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 12, pp. 279-300.
- [8] T. R. Thomas and S. D. Probert, 1970, "Thermal Contact Resistance: The Directional Effect and Other Problems," *Internal Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 13, pp. 789-807.
- [9] B. Mikic, 1974, "Thermal Contact Conductance, Theoretical Considerations," *Internal Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 17. Pp. 205-214.

- [10] K. E. Parmenter and E. Marschall, 1995, "Influence of Surface Preparation on Thermal Contact Conductance of Stainless Steel and Aluminum," *Experimental Heat Transfer*, Vol. 8, pp. 195-208.
- [11] V. Singhal, P. J. Litke, A. F. Black, and S. V. Garimella, 2005, "An Experimentally Validated Thermo-Mechanics Model for the Prediction of Thermal Contact Conductance," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 48, pp. 5446-5459.
- [12] M. A. Lambert and L. S. Fletcher, 1993, "Review of the Thermal Contact Conductance of Junctions with Metallic Coatings and Films," *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 7, No. 4, pp. 547-553.
- [13] M. A. Lambert and L. S. Fletcher, 1997, "Review of Models for Thermal Contact Conductance of Metals," *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 11, No. 2, pp. 547-553.
- [14] M. A. Lambert and L. S. Fletcher, 1997, "Thermal Contact Conductance of Spherical Rough Metals," *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 119, Nov. pp. 684-690.
- [15] Starr, 1936, "The Copper Oxide Rectifier," *Journal of Applied Physics*, Vol. 7, pp. 15-19.
- [16] M. Clausing, 1966, "Heat Transfer at the Interface of Dissimilar Metals- the Influence of Thermal Strain," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 9, pp. 791-801.
- [17] V. Lewis and H. C. Perkins, 1968, "Heat Transfer at the Interface of Stainless steel and Aluminium – the influence of surface conditions on the directional effect," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 11, pp. 1371-1383.
- [18] R. Sridhar and M. M. Yovanovich, 1996, "Elastoplastic Contact Conductance Model for Isotropic Conforming Rough Surfaces and Comparison with Experiments," *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 118, Feb., pp. 3-9.
- [19] R. Sridhar and M. M. Yovanovich, 1996, "Elastoplastic Constriction Resistance Model for Sphere-Flat Contacts," *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 118, Feb., pp. 202-205.
- [20] M. Bahrami, J. R. Culham, and M. M. Yovanovich, 2004, "Modeling Thermal Contact Resistance: A Scale Analysis Approach," *ASME Journal of Heat Transfer*, 126, pp. 896-905.
- [21] Y.-R. Jeng, J.-T. Chen, and C.-Y. Cheng, 2005, "Thermal Contact Conductance of Coated Surfaces," *Wear*, 260, pp. 159-167.
- [22] S. Wang, and K. Komvopoulos, 1994, "A Fractal Theory of the Interfacial Temperature Distribution in the Slow Sliding Regime: Part I – Elastic Contact and Heat Transfer Analysis," *ASME Journal of Tribology*, 116, pp. 812-822.
- [23] S. Wang, and K. Komvopoulos, 1994, "A Fractal Theory of the Interfacial Temperature Distribution in the Slow Sliding Regime: Part II – Multiple Domains, Elastoplastic Contacts and Applications," *ASME Journal of Tribology*, 116, pp. 824-832.
- [24] J. F. Lin, J. C. Chung, J. W. Chen, and T. C. Liu, 2005, "Thermal Analysis of the Transient Temperatures Arising at the Contact Spots of Two Sliding Surfaces," *ASME Journal of Tribology*, 127, pp. 694-704.
- [25] J. A. Greenwood and J.B.P. Williamson, 1966, "Contact of Nominally Flat Surfaces," *Proc. Roy. Soc. Lond.*, Vol. A295, pp. 300-319.
- [26] J. Whitehouse and J. F. Archard, 1970, "The Properties of Random Surfaces of Significance in Their Contact," *Proc. Roy. Soc. Lond.*, Vol. A316, pp. 97-121.
- [27] F. Lin, 1989, "The Possible Role of Fractal Geometry in Tribology," *STLE Tribology Transactions*, Vol. 32, pp. 496-505.
- [28] B. Mandelbrot, 1983, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York, N.Y., U.S.A.
- [29] Majumdar and B. Bhushan 1990, "Role of Fractal Geometry in Roughness Characterization and Contact Mechanics of Surfaces," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 112., pp. 205-216.
- [30] Majumdar and B. Bhushan, 1991, "Fractal Model of Elastic-Plastic Contact Between Rough Surfaces," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 113, pp. 1-11.
- [31] J. C. Chung, and J. F. Lin, 2004, "A Fractal Model Developed for Elliptic Elastic-Plastic Asperity Microcontacts of Rough Surfaces," *ASME Journal of Tribology*, 126, pp. 646-654.
- [32] M. G. Blyth, and C. Pozrikidis, 2003, "Heat Conduction across Irregular and Fractal-like Surfaces," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46, pp. 1329-1339.
- [33] F. E. Kennedy, and F. F. Ling, 1974, "A Thermal, Thermoelastic, and Wear Simulation of a High-Energy Sliding Contact Problem," *ASME Journal of Lubrication Technology*, July, pp. 497-507.
- [34] J. R. Barber, J. Dundurs, and M. Comninou, 1980, "Stability Considerations in Thermoelastic Contact," *ASME Journal of Applied Mechanics*, 47, pp. 871-874.
- [35] J. R. Barber, 1981, "Stability of Thermoelastic Contact for the Aldo Model," *ASME Journal of Applied Mechanics*, 48, pp. 555-557.
- [36] J. R. Barber, 1999, "Thermoelasticity and Contact," *Journal of Thermal Stresses*, 22, pp. 513-525.
- [37] L. Afferrante, and M. Ciavarella, 2004, "Instability of Thermoelastic Contact for Two Half-Planes Sliding Out-of-Plane with Contact Resistance and Frictional Heating," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52, pp. 1527-1547.
- [38] C.-J. Lu and D. B. Bogy, 1992, "The Influence of Thermal Deformation of the Contact Temperature of Sliding Asperities," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 59, pp. S102-S106.
- [39] J. R. Barber, 1971, "The Effect of Thermal Distortion on Constriction Resistance,"

- International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 14, pp. 751-766.
- [40] J.-C. Choung, and C.-J. Lu, 2001, "Thermoelastic Analysis of Contact Temperature Based on a Fractal Surface Model," Proceedings of the 18th National Conference on Mechanical Engineering, pp. 117-123.
 - [41] K. L. Johnson, 1985, Contact Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
 - [42] F. M. Borodich and A. B. Mosolov, 1992, "Fractal Roughness in Contact Problem," Journal of Appl. Maths. Mechs. Vol. 56, No. 5, pp. 681-690.
 - [43] T. L. Warren, A. Majumdar and D. Krajcinovic, 1996, "A Fractal Model for the Rigid-Perfectly Plastic Contact of Rough Surfaces," ASME Journal of Tribology, Vol. 63, pp. 47-54.
 - [44] C.-J. Lu and M.-C. Kuo, 2003, "Coefficient of Restitution Based on a Fractal Surface Model," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 70, pp. 339-345.
 - [45] J. R. Barber, 1978, "Contact Problems Involving a Cooled Punch," Journal of Elasticity, Vol. 8, No. 4, pp. 409-423.
 - [46] J. A. Pelesko, 1999, "Nonlinear Stability Considerations in Thermoelastic Contact," Journal of Applied Mechanics, Vol. 66, pp. 109-116.

行政院國家科學委員會補助國內專家學者出席國際學術會議報告

96 年 8 月 20 日

附件三

報告人姓名	盧中仁	服務機構 及職稱	國立台灣大學機械系 副教授
時間 會議 地點	96/8/6~96/8/9 北海道，日本	本會核定 補助文號	
會議 名稱	(中文) 第十二屆亞太振動會議 (英文) The 12th Asia Pacific Vibration Conference		
發表 論文 題目	(中文) 新型滾珠自動平衡機構的穩定性分析 (英文) Stability Analysis of a New Design of Ball-Type Automatic Balancer		
<p>一、與會心得</p> <p>二、考察參觀活動(無是項活動者省略)</p> <p>三、建議</p> <p>四、攜回資料名稱及內容</p> <p>五、其他</p>			

此次參加在日本舉行的第十二屆亞太振動會議 (The 12th Asia Pacific Vibration Conference)，簡稱 APVC2007。亞太振動會議每兩年舉辦一次，過去幾次的會議地點分別在新加坡 (1999)、中國大陸 (2001)、澳洲 (2003)、和馬來西亞 (2005)。本次主辦單位為日本機械工程師學會下的動力量測控制部門，另外合作機構有 Institution of Engineers, Malaysia, Institution of Engineers, Australia, Chinese Society of Mechanical Engineers, Korean Society of Mechanical Engineers 和 Korean Society for Noise & Vibration Engineering。會議在北海道首府札幌的北海道大學自 8/6~8/9 舉行 4 日。筆者搭乘長榮班機直飛札幌近郊的新千歲機場，自機場有快速火車到札幌，車程約 30 分鐘。北海道大學就在札幌車站附近，交通相當便捷。

這個會議是亞太地區振動學界的國際會議，照例頗具規模，這屆也不例外，共有來自 10 國 200 餘人與會，共發表約 164 篇論文。大會發表論文分 5 個場次同時舉行，其中論文場次較多的有「噪音振動的隔離和減弱」、「機械結構動力特性」、「不穩定振動、自激發振動和同步現象」和「軌道車輛動力學和舒適性評估」等場次，這也反應了目前的研究主流。我的論文分析一個新型滾珠型平衡機構的穩定性，分在「噪音振動的隔離和減弱」這個場次，發表時間是會議第一天早上專題演講後的第一篇，顯示這個課題相當受到重視。

大會的第一場專題演講是由甫獲得 ASME 2006 CALVIN W. RICE LECTURE 榮譽的東京都立大學名譽教授 Suzuki 主講，主題是地震引起的工業設施損壞和地震振動控制技術的發展。眾所週知日本是多地震的國家，因此演講中 Suzuki 教授主要以日本經驗為主，介紹多次大地震所造成的各式工業設施的損壞型式。由這些損壞可以知道爾後如何修訂工業設施的安全標準，以避免類似的損害再度發生。同時 Suzuki 教授也介紹了振動防制技術的

演進。為了更實際模擬地震，Suzuki 教授參與研發了現今世界最大的振動平台。利用這個平台實際展示優良結構設計的抗震能力。與會者可以目睹不同結構設計的房屋在平台振動下截然不同的反應。因為會議開始前一個月，日本剛又經歷了一次規模頗大的地震，造成核電廠關閉，更讓人體會到工業設施抗震設計的重要。

第二天的專題演講有二場，第一場由馬來西亞技術大學噪音振動研究所的 Leong 教授主講，演講中回顧蒸氣渦輪機的振動問題並佐以實例討論。渦輪機的損壞經常導致突然嚴重的破壞和鉅額的經濟損失，因此早期的預警偵測一直是工業界的重要研究課題。實際案例顯示，傳統的以整體的振動幅度為主的損害偵測經常無法提供可靠的早期預警。Leong 教授指出比較好的分析方法為葉片通過頻率（blade passing frequencies）和小波分析。第二場的主講人，澳洲昆士蘭大學的馬教授（Lin Ma），也指出傳統的方法不足以達成工程資產管理（Engineering Asset Management）的目標，要有新的思維。他提出下列幾個方向：新的模型足以預測損壞時段（Time-to-Failure）和未來可能損壞的機率、新模型以檢驗機械健康損壞程度並作長期預測、新模型足以預估整體的破壞可能、新模型著重在機械的可靠度和效能改進程度而不僅是損害偵測。

第三天同樣有兩場專題演講，第一場也和機械的破壞診斷有關。第二場個人覺得較為有趣，是由中國東北大學溫教授主講的振動應用工程的進展。溫教授提出了一些應用振動的實例：振動乾燥機、壓碎機、振動成型技術、超音波振動切削機等。這些結果顯示，除了消極的防振，更可積極的應用種種的振動現象在工業應用上。

另一個筆者較有興趣的課題是剎車的尖叫聲，這個問題過去一向是汽車業較為重視，但是這次的會議中也出現了幾篇關於自行車的剎車尖叫聲的論文。這顯示自行車（汽車）

除了基本性能外，也開始講究騎乘時的舒適性。日本 Kyushu 大學的 Nakae, Nakano, Ryu 和 Sueoka 等人提出了自行車碟式剎車尖叫聲的實驗和理論分析，經由實驗結果，他們提出了一個簡單的模型具有實驗結果顯示的種種重要特性。馬來西亞技術大學的 Abu Bakar, Mokhtar, Abdul Rashid, Sharif 和 Rahman 等人比較了利用特徵值和時域暫態響應預測碟式剎車尖叫的優劣，結論是特徵值法較易判讀。問題是，即使特徵值顯示某個模態為不穩定，不表示對應頻率上會有剎車尖叫。日本 Kagoshima 大學的 Nakano, Nakae, Ryu, Yamasake, 和 Sueoka，提出利用吸振器來避免碟式剎車的尖叫聲，結果顯示，適當的調整吸振器的頻率後可以消除剎車尖叫。這個方法的缺點是需要先知道尖叫的頻率。

開會之餘乘機參觀這個北海道的首府，札幌有由地下電車、火車系統和公車組成的大眾運輸網，旅客可以便捷的到達各個角落。缺點是除了火車站外，英語的標示仍不夠明確，對於不會日文的人，難免有不便之處。另外讓人印像深刻的是，路上很難找到垃圾桶，不過更難找到垃圾，這要歸功於國民教育將守規矩融入生活中的成功。