

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

SEREP 凝縮模型為基礎之結構動態系統鑑定與 FEM 模型更新

計畫類別：個別型計畫 整合型計畫

計畫編號：NSC 89 - 2611 - E - 002 - 032 -

執行期間： 89 年 8 月 1 日至 90 年 7 月 31 日

計畫主持人： 洪 振 發

共同主持人：

本成果報告包括以下應繳交之附件：

赴國外出差或研習心得報告一份

赴大陸地區出差或研習心得報告一份

出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份

國際合作研究計畫國外研究報告書一份

執行單位： 台灣大學工學院造船及海洋工程學系

中 華 民 國 90 年 10 月 15 日

SEREP 凝縮模型為基礎之結構動態系統鑑定與 FEM 模型更新

計劃編號：NSC 89-2611-E-002-032

執行期限：八十九年八月一日至九十年七月三十一日

計劃主持人：洪振發 研究人員：柯文俊、戴志豪、藍凱祺

國立台灣大學造船暨海洋工程學研究所

一、中文摘要

本計畫長程主旨在發展結構動態特性系統之識別與有限元素模型更新技術。從量測結構系統的輸入外力與輸出動態反應來識別結構的模態參數、結構系統矩陣與頻率響應函數矩陣。並利用識別的結果來更新結構分析模型的為確定性參數，以使結構分析更精確。

本計畫發展狀態空間之組合肯定隨機運算識別方法，並利用識別等效結構之頻率響應函數矩陣作為有限元素分析模型更新為確定性參數之依據。本報告以一個 20 自由度之平面鋼架結構為數值量測模擬例，驗證本計畫所發展的組合肯定隨機運算可應用性，並以一個 3 自由度質量彈簧系統說明模型更新的流程。

關鍵詞：

模態鑑定、組合肯定隨機次空間運算、結構系統識別、頻率響應函數，有限元素法，模型更新。

Abstract

The long-term target of this project is to develop the identification techniques of modal parameters and structural system matrices from the measured dynamical response, and their further applications.

In this project the combined deterministic-stochastic (COMDS) algorithm to identify the modal parameters and the state equation of motion has been developed. A model updating technique for FEM model has also been developed, where the frequency response function (FRF) matrix of identified equivalent structure is used as reference bases.

The numerical simulation of modal identification of a 20-DOFs plane frame structure is employed to verify the availability of the developed COMDS method. A three-DOF lumped model is selected as study case to show the algorithm of model updating using FRF.

Keywords:

system identification, COMDS algorithm, modal parameters, structural system matrices, frequency response function, FEM, model updating.

二、計畫動機與目的

模態識別主要為利用量測動態反應資訊找出結構的模態參數、結構系統矩陣或頻率響應函數矩陣等。在結構有限元素模型更新修正程序中，常依賴動態試驗資料，或藉由結構系統識別運算來提供可用的模型資訊。傳統的有限元素模型更新主要以直接的模態參數為基礎來修正質量與/或勁度矩陣[1,2]，或直接以試驗資料識別所得的結構系統矩陣再以誤差矩陣最小化的方式來修正結構系統矩陣[3]。近年來利用頻率響應函數(frequency response function, FRF)更新有限元素模型日漸增加，此乃 FRF 不必先獲得結構之模態及系統矩陣資訊，但實際應用上，直接量測輸入外力，以求 FRF 常有困難，仍須藉助系統識別所提供的模型參數。有時傳統的模型更新法搭配新的識別運算可有較寬廣的應用空間。本計畫發展近年來頗為熱門的次空間運算法[4]，並同時考慮實際當量測自由度遠比有限元素自由度小的狀況下發展系統等效凝縮擴增程序(System Equivalent Reduction Expansion Procedure, SEREP)模型[5]識別問題與模型更新。

三、結構之狀態運動方程式

連續結構之動態行為理論上應為一無限自由度系統，其統御方程式為一偏微分方程式。然以結構系統識別與實際試驗之有限頻寬之觀點言之，一結構可以有有限 n 自由度系統來近似之。如果結構之位移向量為 $x(t) \in R^{n \times 1}$ ，則此結構遭受一外激振力輸入向量 $u(t) \in R^{r \times 1}$ 作用之運動方程式可以下列的二階矩陣微分方程式來描述

$$M\ddot{x}(t) + E\dot{x}(t) + Kx(t) = B_0 u(t) \quad (1)$$

其中： M 、 E 及 K 分別為因次 $n \times n$ 之質量、阻尼及勁度矩陣， $B_0 \in R^{n \times r}$ 為輸入影響矩陣(input influence matrix)，用以指定受激振力影響的自由度之位置， $\dot{x}(t)$ 及 $\ddot{x}(t)$ 分別為速度及加速度向量。在考慮多種儀器(位移計、速度儀或加速規)可同時利用之條件下，總共 l 個儀器(一般 \leq 結構自由度數 n)，則式(1)之量測輸出方程式可表為[6]

$$y(t) = C_a \ddot{x}(t) + C_v \dot{x}(t) + C_d x(t) \quad (2)$$

其中： $y(t) \in R^{l \times 1}$ 為量測所得之輸出響應； C_a 、 C_v 及 C_d 分別為因次 $l \times n$ 加速度、速度及位移之輸出影響矩陣(output influence matrix)，且這些矩陣元素之值僅為0或1，1所在之行列位置即指示了那一自由度使用了那一種型式之輸出量測儀器。如

果加速度之輸出影響矩陣 C_a 之第 i 列第 j 行之值為 1，則表示 $y(t)$ 之第 i 個輸出響應 $y_i(t)$ 為加速度。如果僅量測加速度，則速度之輸出影響矩陣 C_v 與位移之輸出影響矩陣 C_d 將為零矩陣。本文特別考慮輸出響應 $y(t)$ 可混合加速度、速度與位移向量，端視試驗佈置安排而定，有別於一般僅考慮單一型式儀器的情況。

定義狀態變數為位移 $x(t)$ 與速度 $\dot{x}(t)$ 向量的組成， $z(t) = \{x(t); \dot{x}(t)\} \in R^{2n \times 1}$ ，則式(1)與(2)所代表的二階結構運動方程式可改寫為下列的一階狀態空間運動方程式組

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \\ \dot{\dot{x}}(t) \end{cases} = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -M^{-1}K & -M^{-1}E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n,r} \\ M^{-1}B_0 \end{bmatrix} u(t) \quad (3,4)$$

$$y(t) = [C_d - C_a M^{-1}K \quad C_v - C_a M^{-1}E] \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} + C_a M^{-1}B_0 u(t)$$

或簡單的表為

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A_c z(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c z(t) + D_c u(t) \end{aligned} \quad (5,6)$$

其中： $A_c \in R^{2n \times 2n}$ 表結構狀態運動方程式之系統矩陣， $B_c \in R^{2n \times r}$ 為連續時間輸入影響矩陣， $C_c \in R^{l \times 2n}$ 為連續時間輸出影響矩陣， $D_c \in R^{l \times r}$ 為連續時間直接傳輸矩陣。一搬來說，直接傳輸矩陣僅量測加速度訊號時方不為零矩陣外，在僅量測位移與(或)速度時為一零矩陣。為了簡化符號，以下以 $\langle A_c, B_c, C_c, D_c \rangle$ 來代表式(3)與(4)。系統矩陣 A_c 內含結構的質量、阻尼及勁度矩陣，故結構的正模態與複模態均為 A_c 之內蘊特性。若能透過振動試驗的方式再搭配合適的系統識別運算技術，推導出等效的連續時間狀態空間系統 $\langle \bar{A}_c, \bar{B}_c, \bar{C}_c, \bar{D}_c \rangle$ ，則我們可以透過 $\langle A_c, B_c, C_c, D_c \rangle$ 矩陣內部獨特的結構狀態，可得系統矩陣與相關的正模態及複模態資訊。

式(5)與(6)之頻率響應函數可由下式來估計之

$$H(\omega) = C_c(j\omega I_{2n} - A)^{-1} B_c + D_c \quad (7)$$

結構之模態振頻、阻尼比及複模態振型(complex mode shapes)可直接由狀態系統矩陣 A_c 來估計之。而正模態振型(normal mode shapes)由 \bar{A}_c 矩陣之左下區塊矩陣 ($M^{-1}K$) 的特徵向量來計算[7]。假設 A_c 之 n 對共軛複數特徵值為 $s_i = \alpha_{si} \pm j\beta_{si}$, ($i=1$ 到 n)，則第 i 個振模之模態振頻(Hz)及組尼比(%)可表為

$$f_i = \frac{\sqrt{\alpha_{si}^2 + \beta_{si}^2}}{2\pi}, \quad \xi_i = \frac{-\alpha_{si}}{\sqrt{\alpha_{si}^2 + \beta_{si}^2}} \times 100 \quad (8,9)$$

關於自識別的連續時間狀態空間系統中萃取出結構系統矩陣的方法請參考[7]。

三、組合肯定隨機次空間運算

適用 MIMO 量測系統識別技術之次空間運算法，

依據發展者之概念可分為兩大類：肯定次空間識別(deterministic subspace identification, DSSID)運算法及狀態空間模型之組合肯定隨機(combined deterministic-stochastic, COMDS)次空間運算法。DSSIDM 運算假設在狀態空間系統中沒有量測雜訊存在，亦沒有程序雜訊(process noise)存在。而 COMDS 運算同時考慮了這兩種型式的雜訊，較適合於實際的量測環境。本文的系統識別技術採用 COMDS 法，詳細請參考文獻[4]。

COMDS 運算在狀態空間模型考慮程序雜訊 $w_k \in R^{m \times 1}$ 及量測雜訊 $v_k \in R^{l \times 1}$ ，表示如下

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= A z_k + B u_k + w_k, \\ y_k &= C z_k + D u_k + v_k \end{aligned} \quad (10,11)$$

其中 l 及 r 分別為輸出響應與輸入激振力數。此狀態向量自由度總數 m 為一待決參數，通常不得低於量測頻寬內所含之模態數 (n) 之兩倍，即： $m \geq 2n$ 。假設程序及量測雜訊均為零平均白色雜訊之型態且滿足下列之方程式

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w_p \\ v_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_q^T & v_q^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \delta_{pq} \quad (12)$$

其中： E 表示期望值運算子， δ_{pq} 為 Kronecker delta 函數。 Q 、 S 及 R 為程序雜訊與量測雜訊的共變異矩陣(covariance matrices)。假設狀態向量與輸入激振力之關係滿足下列的正交條件

$$E \left\{ \begin{bmatrix} z_k \\ u_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_k^T & u_k^T \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad (13)$$

結構系統之狀態空間系統識別問題現可以描述如下：利用每通道 (共有 $l+r$ 通道，包括輸出響應 $y_k \in R^{l \times 1}$ 及輸入激振力 $u_k \in R^{r \times 1}$, $k=0,1,\dots,N-1$) 量測之 N 點輸出入資訊，決定系統階數 m 及離散時間等效狀態空間系統矩陣組 $\langle A, B, C, D \rangle$ 。

COMDS 運算之過程簡述如下：

(1) 首先計算下列三個投影矩陣

(a) 將未來的輸出區塊漢克矩陣 (Y_f) 之列空間沿著未來的輸入區塊漢克矩陣 (U_f) 之列空間方向歪斜投影(oblique projection)至過去的輸出入區塊漢克矩陣 (W_p) 之列空間方向上

$$S_i = Y_f /_{U_f} W_p \quad (14)$$

(b) 將未來的輸出區塊漢克矩陣之列空間正交投影(orthogonal projection)至組合過去的輸出入區塊漢克矩陣及未來的輸入區塊漢克矩陣之列空間上

$$Z_i = Y_f / \left[\begin{matrix} W_p \\ U_f \end{matrix} \right] \quad (15)$$

(c) 類似於(b)；亦計算下列之正交投影

$$Z_{i+1} = Y_f^{\downarrow} / \left[\begin{matrix} W_p^{\downarrow} \\ U_f \end{matrix} \right] \quad (16)$$

式中； Y_f^{\downarrow} 表自 Y_f 矩陣中除去最後一個區塊行

所得的矩陣， W_p^{+} 為自矩陣 W_p 中將最後一區塊列移至第一區塊列所得的矩陣。

- (2) 求上述加權歪斜投影 S_i 之奇值分解

$$W_1 S_i W_2 = U \Sigma V^T \quad (17)$$

其中 W_1 及 W_2 為任意非奇加權矩陣，內定均為單位矩陣。

- (3) 求上述奇值分解之主成份奇值矩陣 Σ_i 及左奇值向量矩陣之主成份 U_i 。主成份數決定之方式在無雜訊下為非零奇值數，含雜訊之主成份數以奇值分佈圖之缺口來決定。識別所得的狀態空間模型之階數及主成份數。

- (4) 估計延伸可觀測性矩陣 (extended observability matrix) Γ_i 及除去最後區塊列後之延伸可觀測性矩陣 Γ_{i-1}

$$\Gamma_i = W_1^{-1} U_i S_i^{1/2}, \quad \Gamma_{i-1} = \Gamma_i^{+} \quad (18,19)$$

- (5) 解下列方程式以求解狀態系統矩陣 A 、輸出影響矩陣 C 及含輸入影響矩陣 B 及直接傳輸矩陣 D 之矩陣 K

$$\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \bar{K} \begin{bmatrix} \Gamma_i^+ Z_i \\ U_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{i-1}^+ Z_{i+1} \\ Y_{ii} \end{bmatrix} \quad (20)$$

- (6) 由下列關係式求解輸入影響矩陣 B 及直接傳輸矩陣 D

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} B & \Gamma_{i-1}^+ H_{i-1} \\ D & 0 \end{bmatrix} - A \Gamma_i^+ H_i \quad (21)$$

式中由馬可夫參數所構成之下三角區塊 Toeplitz 矩陣 $H_i \in R^{l \times n}$ 定義為

$$H_i = \begin{bmatrix} D & & & & \\ CB & D & & & \\ CAB & CB & D & & \\ \wedge & \wedge & \wedge & \wedge & \\ [CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \dots & D] \end{bmatrix} \quad (22)$$

COMDS 間運算可直接自量測所得的輸出響應及輸入激振力來建立結構動態系統之離散狀態空間模型。離散狀態空間系統矩陣組 $\langle A, B, C, D \rangle$ 以 COMDS 運算獲得後，轉換至連續時間狀態空間運動方程組 $\langle A_c, B_c, C_c, D_c \rangle$ 後，可進行：

- 萃取結構模態參數-由式(8,9)計算自然振頻及阻尼比，由等效狀態系統矩陣之左下區塊矩陣之負值部分計算正模態振型。
- 萃取出結構系統矩陣-文獻[3]。
- 重建結構之頻率響應函數以提供與結構分析模型修正所需之資訊-由式(7)來重建。

四、利用頻率反應函數來修正有限元素分析模型

本計畫有關 FEM 模型修正採用 Lin 和 Ewins 二人於 1994 年所提出之修正方法[8]由量測識別結果，計算結構系統之頻率反應函數 (FRF)，進而利用

FRF 的資料點來修正分析模型。

假設 $[Z_X(\omega)]$ 與 $[Z_A(\omega)]$ 分別為實驗系統與分析系統的動態勁度矩陣 (Dynamic Stiffness Matrix)， $[H_X(\omega)]$ 和 $[H_A(\omega)]$ 分別代表實驗和分析系統的導納 (Receptance) FRF 矩陣。

其中： $[Z_X(\omega)] = [Z_A(\omega)] + [UZ(\omega)]$

依下列數學恆等式

$$[Z_X(\omega)]^{-1} = [Z_A(\omega)]^{-1} - [Z_X(\omega)]^{-1} [Z_X(\omega) - [Z_A(\omega)]] [Z_A(\omega)]^{-1} \quad (23)$$

上式可改寫如下：

$$-[H_X(\omega)] [UZ(\omega)] [H_A(\omega)] = [H_X(\omega)] - [H_A(\omega)] = [UH(\omega)] \quad (24)$$

假設 $[H_X(\omega)]$ 中的第 i 行元素已得，則第(24)式可改寫如下：

$$\{H_X(\omega)\}_i^T [UZ(\omega)] [H_A(\omega)] = \{H_A(\omega)\}_i^T - \{H_X(\omega)\}_i^T \quad (25)$$

將上式中的 $[UZ(\omega)]$ 以 $[UM]$, $[UK]$, $[E]$ 等項代入，其中 $[E]$ 為結構阻尼矩陣，並將上式轉置而變為：

$$\{H_A(\omega)\} \left[-\omega^2 [UM] + [UK] + i[E] \right] \{H_X(\omega)\}_i = \{H_A(\omega)\}_i - \{H_X(\omega)\}_i \quad (26)$$

假設質量和勁度矩陣的變化量，可為個別元素質量矩陣和勁度矩陣變化量的線性疊加。

令獨立變數變化量為：質量矩陣 U_{m_r} ($r=1, L_1$)，勁度矩陣 U_{k_s} ($s=1, L_2$)，阻尼矩陣 d_s ($s=1, L_2$)。其中 L_1 與 L_2 分別為質量矩陣與勁度矩陣獨立設計變數的個數。則(26)式左方的每一個元素可表為：

$$\sum_{r=1}^{L_1} c_m^r(\omega) U_{m_r} + \sum_{s=1}^{L_2} c_k^s(\omega) U_{k_s} + \sum_{s=1}^{L_2} c_d^s(\omega) d_s = \{C_j(\omega)\}^T \{P\} \quad (27)$$

將上式所有元素組合可得：

$$\{C(\omega)\} \{P\} = \{B(\omega)\} \quad (28)$$

其中：

$$\{C(\omega)\} = \begin{bmatrix} \{C_1(\omega)\}^T \\ \{C_2(\omega)\}^T \\ \wedge \\ \{C_N(\omega)\}^T \end{bmatrix}, \quad \{P\} = \begin{bmatrix} U_{m_1} \\ \wedge \\ U_{m_{L_1}} \\ U_{k_1} \\ \wedge \\ U_{k_{L_2}} \\ d_1 \\ \wedge \\ d_{L_2} \end{bmatrix},$$

$$\{B(\omega)\} = \begin{bmatrix} b_1(\omega) \\ b_2(\omega) \\ \wedge \\ b_n(\omega) \end{bmatrix} = [UH(\omega)]$$

如果阻尼項存在，則可將(28)式分割為實部和虛部，重新整理如下：

$$\begin{Bmatrix} \text{Re}\{C(\omega)\} \\ \text{Im}\{C(\omega)\} \end{Bmatrix} \{P\} = \begin{Bmatrix} \text{Re}\{B(\omega)\} \\ \text{Im}\{B(\omega)\} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

五、範例

5.1 二十自由度平面鋼架結構之數值計算例

一個 20 自由度之平面鋼架結構如圖 1，幾何及材料性質如表 1。本例用以檢驗量測自由度比結構自由度小，識別所得的結構系統矩陣與原有 FEM 模型的關係。將樑結構分為七個平面樑元素，共 20 個 DOF。有限元素分析之前八個模態振型及振頻展示在圖 2 選擇圖 1 中自由度 1, 4, 7, 14 及 17 作為量測自由度 阻尼矩陣假設為 $10^{-4} \times (\text{質量矩陣} + 0.1 \times \text{勁度矩陣})$ 。

令便異數為 1 之隨機漫散激振力作用在自由度 1, 4, 7, 14, 及 17，並量這些自由度之動態響應，利用這些輸出入資訊來建立平面鋼架結構之 SEREP 模型。採樣時距及資料點數分別設為 $2.2688e-4$ 秒及 2,048 點。我們利用 20 區塊列之 COMDS 法來分析。圖 3 為 COMDS 法之奇值分佈，很清楚的顯示這五通道輸出響應及五通道輸入激振力應有 40 個主要奇值，也就是說他們均能識別出所有個 20 個自然振頻及阻尼比。表 2 為 COMDS 識別所得的 20 個自然振頻及阻尼比與真值之比較。由模態疊加原理，理論上每一自由度之響應均應包括所有的模態，除非某一振模在該自由度為節點（例如第一振模在第 14 及 17 自由度僅作剛體運動）。此平面鋼架結構在空間的量測點數僅有五個自由度（即 1, 4, 7, 14, 及 17），我們可以獲得這五個自由度所能表現模態振型。若將前面獲得的 40 個狀態僅保留前 10 狀態（即前五最低階模態），可以得到 SEREP 模型。此識別所得的質量、阻尼及勁度矩陣與真 SEREP 之比較在表 3 比較結果顯示：若結構之量測自由度數比有限元素自由度少時，由輸出入資料鑑定的結構系統矩陣即為直接由有限元素模型凝縮至量測自由度之凝縮 SEREP 模型。圖 4 表現在第一自由度施以漫散激振力而在第七自由度之位移響應，圖中殘餘（residual）響應為全 20 自由度有限元素模型預測響應與 5 自由度 SEREP 模型預測響應之差。此殘餘響應含有高頻模態，其數值很小表示高頻模態對整體響應之貢獻很小。圖 5 展示了由 COMDS 識別所得的狀態空間模型重建之導納頻率響應(receptance FRF) 函數與原 20 個自由度平面鋼架結構頻率響應函數之比較。

表 1 平面鋼架結構之幾何及材料常數表。

材料或幾何常數	垂直樑	水平樑
楊氏模數 (N/m ²)	3e10	3e10
橫剖面積 (m ²)	0.1030e-2	0.0764e-2
慣性力矩 (m ⁴)	0.1710e-5	0.0801e-5
密度 (kg/m ³)	2500	2500

表 2 COMDS 識別平面鋼架結構所有 20 個自然振頻及阻尼比。

振模	系統正確值		COMDS 估計	
	自然振頻	阻尼比	自然振頻	阻尼比
1	3.7110	0.0119	3.7175	1.4533
2	21.7055	0.0682	21.7087	0.0515
3	32.5570	0.1023	32.5579	0.0950
4	74.5090	0.2341	74.5084	0.2335
5	96.6593	0.3037	96.6592	0.3040
6	157.8962	0.4961	157.8960	0.4952
7	195.7075	0.6148	195.7078	0.6148
8	235.1387	0.7387	235.1388	0.7387
9	295.5411	0.9285	295.5411	0.9285
10	411.5351	1.2929	411.5351	1.2929
11	477.3253	1.4996	477.3253	1.4996
12	576.4398	1.8109	576.4398	1.8109
13	643.6465	2.0221	643.6465	2.0221
14	729.8779	2.2930	729.8779	2.2930
15	825.9059	2.5947	825.9059	2.5947
16	996.8070	3.1316	996.8070	3.1316
17	1158.2933	3.6389	1158.2937	3.6389
18	1286.082	4.0403	1286.082	4.0403
19	1704.895	5.3561	1704.896	5.3562
20	1836.520	5.7696	1836.519	5.7696

表 3 COMDS 識別平面鋼架結構所得的 SEREP 模型之質量、阻尼及勁度矩陣。

	Exact				
	Mass ($\times 10$)	8.7455	-8.6230	6.5568	-1.4285
	-8.6230	9.0055	-6.6472	1.4472	-0.6609
	6.5568	-6.6472	5.3023	-1.0936	0.4998
	-1.4285	1.4472	-1.0936	0.4155	-0.1016
	0.6523	-0.6609	0.4998	-0.1016	0.2349
Stiffness ($\times 10^6$)	2.8914	-2.1248	0.7252	0.0572	0.0505
	-2.1248	1.8482	-0.7021	-0.1009	-0.0261
	0.7252	-0.7021	0.2929	0.0667	0.0015
	0.0572	-0.1009	0.0667	0.3114	-0.2286
	0.0505	-0.0261	0.0015	-0.2286	0.2463
Damping ($\times 10$)	2.8923	-2.1256	0.7258	0.0571	0.0505
	-2.1256	1.8491	-0.7028	-0.1008	-0.0262
	0.7258	-0.7028	0.2934	0.0666	0.0016
	0.0571	0.1008	0.0666	0.3115	-0.2286
	0.0505	-0.0262	0.0016	-0.2286	0.2463

	COMDS				
	Mass ($\times 10$)	8.7455	-8.6231	6.5569	-1.4285
	-8.6231	9.0055	-6.6472	1.4472	-0.6609
	6.5569	-6.6472	5.3023	-1.0937	0.4998
	-1.4285	1.4472	-1.0937	0.4155	-0.1016
	0.6523	-0.6609	0.4998	-0.1016	0.2349
Stiffness ($\times 10^6$)	2.8914	-2.1248	0.7252	0.0572	0.0505
	-2.1248	1.8483	-0.7021	-0.1009	-0.0261
	0.7252	-0.7022	0.2929	0.0667	0.0015
	0.0572	-0.1009	0.0667	0.3114	-0.2286
	0.0505	-0.0261	0.0015	-0.2286	0.2463
Damping ($\times 10$)	2.8950	-2.1284	0.7279	0.0566	0.0507
	-2.1278	1.8514	-0.7045	-0.1004	-0.0263
	0.7267	-0.7037	0.2941	0.0665	0.0016
	0.0570	-0.1008	0.0666	0.3115	-0.2286
	0.0506	-0.0263	0.0017	-0.2286	0.2464

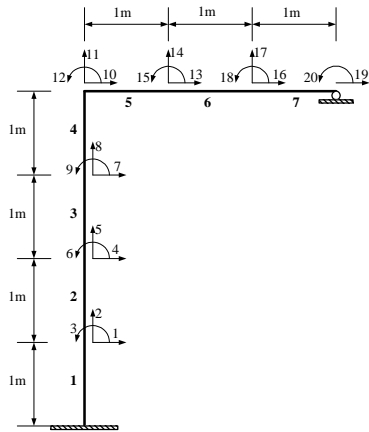


圖 1 二十自由度平面鋼架結構。

平面鋼架結構有限元素分析之前八振態之振型及振頻 (Hz)

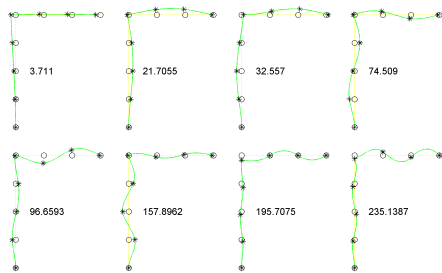


圖 2 有限元素計算平面鋼架結構之前八振態。

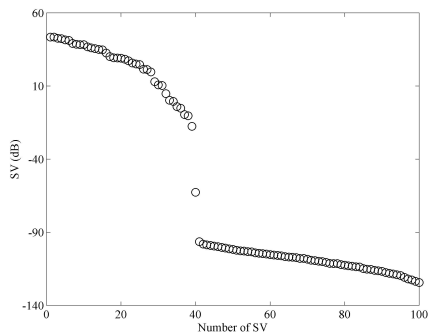


圖 3 平面鋼架結構的奇值分佈(COMDS)。

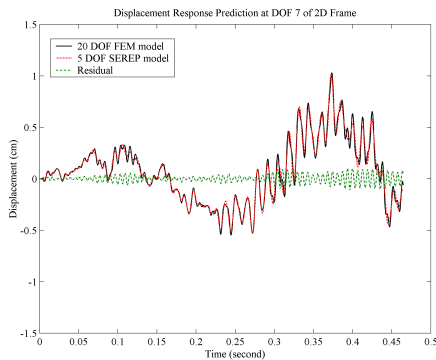


圖 4 以識別之 5 自由度 SEREP 模型預測自由度 7 之位移響應與 20DOF 模型比較。

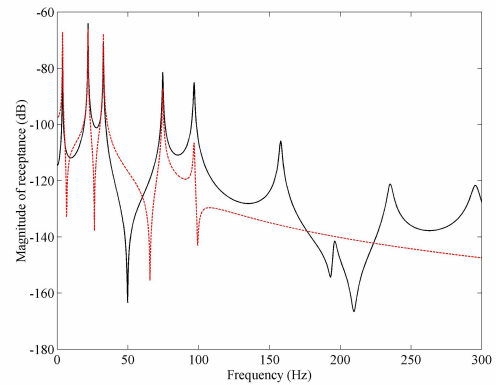


圖 5 以識別之 5 自由度 SEREP 模型預測自由度 7 之 FRF 與 20DOF 模型比較。

5.2 3 自由度質塊系統模型更新

3 自由度質塊系統如下圖 6 所示。

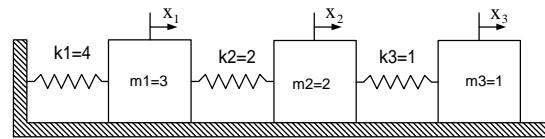


圖 6 自由度質塊系統

其質量與勁度矩陣分別如下：

$$\mathbf{M}_X = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_X = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

假設在建構分析模型時， m_1 、 m_2 、 m_3 分別有 7%、6%、5% 的誤差， k_1 、 k_2 、 k_3 分別有 -5%、-4%、-3% 的誤差，則可得分析模型的質量和勁度矩陣如下：

$$\mathbf{M}_A = \begin{bmatrix} 3.21 & 0 & 0 \\ 0 & 2.12 & 0 \\ 0 & 0 & 1.05 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_A = \begin{bmatrix} 5.72 & -1.92 & 0 \\ -1.92 & 2.89 & -0.97 \\ 0 & -0.97 & 0.97 \end{bmatrix}$$

令此系統共有如下六個待修正參數：

$$\{\mathcal{U}m_1 \quad \mathcal{U}m_2 \quad \mathcal{U}m_3 \quad \mathcal{U}k_1 \quad \mathcal{U}k_2 \quad \mathcal{U}k_3\}^T \\ = \{p_1m_1 \quad p_2m_2 \quad p_3m_3 \quad p_4k_1 \quad p_5k_2 \quad p_6k_3\}^T$$

假設在實驗中分析模型之 $[H_X(\omega)]$ 中的第 1 行元素被完整的量測到，比較 $[H_X(\omega)]$ 和 $[H_A(\omega)]$ 的差異如圖 7 所示，利用量測到之頻率反應函數，來對分析模型進行修正，在疊代的過程中，假設收斂條件為 $\| \mathcal{U}b \| \leq 0.0001$ ，經過 9 次疊代運算後，我們得到收斂後的運算結果。經修正後的分析模型，其頻率反應函數和實驗所得之頻率反應函數圖形比較如圖 8 所示，由結果可看出經修正後，

實驗和分析模型之頻率反應函數幾乎一致。

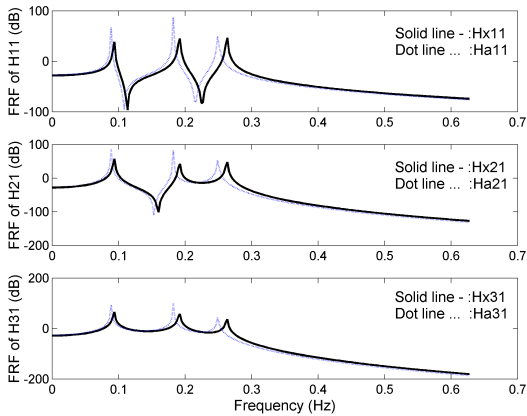


圖 7. $[H_X(\omega)]$ 和 $[H_A(\omega)]$ 之比較圖形

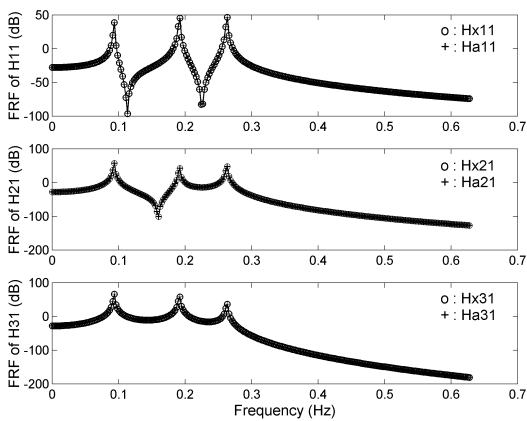


圖 8. 修正後之 $[H_A(\omega)]$ 和 $[H_X(\omega)]$ 比較圖形

由分析模型修正後之質量和勁度矩陣，計算得之自然頻率和模態形狀如下，將其和實驗鑑定結果比較，二者近乎一致。

$$\omega_A = \begin{bmatrix} 0.0928 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1910 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2624 \end{bmatrix} \text{ Hz}$$

$$\phi_A = \begin{bmatrix} 0.2160 & 0.4336 & 0.6256 \\ 0.5376 & 0.3637 & -0.6743 \\ 0.8151 & -0.8244 & 0.3923 \end{bmatrix}$$

利用頻率反應函數來進行修正，其優點為：

1. 利用頻率反應函數來進行修正，可避免資料量不足的問題，我們可由頻率反應函數中，獲得足夠的資料點數，來建立足夠的方程式，以求解所欲更新的未知參數。
2. 頻率反應函數可直接由量測得到，可避免鑑定過程中產生的誤差。
3. 可排除在模態域進行修正時，必須判斷實體模型

和分析模型模態一致性的問題，當模態密度很高時，這種問題較難處理。

但在實際應用時，頗多結構的輸入外力不易量測，FRF 仍須從模態識別，確認狀態方程式著手。

六、結論

本研究發展組合肯定隨機次空間之狀態空間系統鑑定法，能合理有效的識別出結構系統的特性參數。此法優點可以藉由特定矩陣之奇值分解來篩選模態並進一步的獲得結構之等效凝縮模型。並可將識別結果提供給有限元素更新運算使用。由數值例結果可知，模態參數識別的越精確，其修正後之結果應越佳。本研究利用量測 FRF 資訊更新 FEM 模型收斂速度頗佳

七、參考文獻

1. Berman, M., Mass Matrix Correction Using an Incomplete Set of Measured Modes, AIAA Journal, Vol. 17, No. 10, pp. 1147-1148, 1979.
2. Caesar, B., Updating System Matrices Using Modal Test Data, Proc. Of the 5th IMAC, London, England, pp. 453-459, 1987.
3. Baruch, M. and Wis, M., Optimization Procedure to Correct Stiffness and Flexibility Matrices Using Vibration Tests, AIAA Journal, Vol. 16, No. 11, pp. 1208-1210, 1978.
4. Van Overschee, P. and De Moor, B., Subspace Identification for Linear Systems: Theory, Implementation and Applications, Kluwer Academic Publishers, 1996.
5. O'callahan, J. C., Avitabile, P. and Poemer, R., System Equivalent Reduction Expansion Procedure (SEREP), Proc. Of the 7th IMAC, 1989, pp.29-37.
6. Juang, J.-N., Applied System Identification, Prentice Hall PTR, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1994.
7. Ko, W. J. and Hung, C. F., Extraction of Structural System Matrices from an Identified State-Space System using the Combined Measurement of DVA. Accepted by Journal of Sound and Vibration, accepted..
8. Lin, R. M. and D. J. Ewins, "Analytical Model Improvement Using Frequency Response Functions", Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 8, No.4, 1994, pp. 437-458.