

以後向型自我迴歸模式為基礎之結構動態特性識別及未確定參數之確認

計劃編號：NSC 90-2611-E-002-027

執行期限：九十年八月一日至九十一年七月三十一日

計劃主持人：洪振發 研究人員：柯文俊，彭彥惇 戴志豪、藍凱祺

國立台灣大學工程科學及海洋工程學系

一、中文摘要

本文提出一個應用於系統模態識別方法的模型，稱為向量型後向自我迴歸含外力參數模型 (Vector Backward Auto-Regressive with eXogenous, 簡稱 VBARX)。此模型所應用的系統識別方法適用於同時具有輸出及輸入資訊的條件下。其特色為資料點排列方式與一般前向模型不同。在此後向模型中，將資料點由後而先排列，以後續時步出現的資訊來推算當前時步。此排列順序將在系統與非系統特徵根判別上有很大的方便，從特徵根的表徵即可判別系統與非系統模態。

本文採用狀態空間模型，由量測資料所建立的狀態方程式中萃取等效系統狀態方程式的系統矩陣與系統模態參數。另外透過轉換的技巧，進一步從等效狀態方程式的系統矩陣，擷取運動方程式的等效質量、阻尼和勁度三個參數矩陣。最後以識別的模態參數確認結構模型的未確定參數。

本文以一個十八自由度的剛架模型的數值模擬來驗證 VBARX 的實用性。另以附加未知邊界迴轉彈簧之簡支樑為例，說明以識別所得之模態參數來確認未知邊界彈簧係數之過程。

關鍵詞：VBARX、系統識別、狀態空間、結構參數、未確定參數

Abstract

In this paper, a time series model, vector backward auto-regressive with exogenous (VBARX), is proposed for system identification. This model deals properly with the case of multiple input/output data. The characteristic of this model is the arrangement of data. Unlike the common cases, data are arranged from future to past in the proposed model, and the information of current time step is predicated by that of coming steps. Although it is not a common way, the system eigen-values and non-system eigen-values can be distinguished automatically during the identification process.

In this paper, the state space model is employed to identify the equivalent system matrices of state equation and the model parameters of system. Furthermore, the equivalent mass, damping, and stiffness matrices of equation of motion can be extracted from the equivalent state space system by using a transformation technique. Finally, the model uncertainties can be determined by the identified

structural parameters.

A 18-DOFs frame structure and a simple beam with unknown boundary rotation springs are selected as illustration examples.

Keywords: VBARX, system identification, state space model, structural parameters, model uncertainty

二、計畫動機與目的

傳統的識別技術多半使用函數轉換模型或頻率響應模型，近年來則廣泛使用狀態空間模型。本文所發展的 VBARX 模型，屬狀態空間模型的系統識別方法。目前有數個使用狀態空間模型的識別方法，以使用的數學代數運算方法來分類的話：一類為源自於時間序列模型，使用最小平方運算的 AR (Auto-Regressive) [1,2]、ARX(Auto-Regressive with eXogenous) [1,3,4]及 VBAR(Vector Backward Auto-Regressive) [5]等模型；另一類則是使用奇值分解 (Singular Value Decomposition, 簡稱 SVD)的 OKID/ERA[6,7]、N4SID[8]及 MOESP[9]等方法。其中 N4SID 及 MOESP 方法被歸類為次空間運算法 (Subspace Method)[10]的一種。

此兩類方法在識別的程序上的運算和步驟不同。前者先使用最小平方運算求出時間序列模型的參數矩陣，再由時間序列模型將量測資料組成狀態空間模型，並利用方程式的系統矩陣求得特徵根以識別模態。由於系統矩陣的階數往往遠大於量測資料有效模態數，因而在此矩陣中參雜了大量的非系統參數，需要搭配凝縮系統矩陣階數的方法，剔除非系統模態，獲得等效系統相同階數的系統矩陣。系統特徵根和非系統特徵根的判別，雖有若干準則可參考，但須輔以人工的智慧判斷才能完成。而人工的判斷牽涉到個別的和經驗，不同的操作人員可能有不同的結果，造成了系統識別上的重大困擾。

後一類使用 SVD 方法，可避免了前述使用降階方法判別特徵根的困擾。但在有雜訊污染之情況下，往往會有均勻分段階梯式或線性變化型態的出現，系統奇值和非系統奇值的分佈不再具有明顯的區隔，且非系統奇值亦有可能插入系統奇值的行列中，造成最終選出的模態往往與真實系統差距頗大。

文獻[5]所提出的 VBAR 模型基本上解決了時間序列模型類方法無法自動化選取特徵根的問題。透過資料點排列順序的改變，系統特徵根及非系統特徵根的絕對值可以 1 為明確分界，特徵根的絕對值大於或等於 1 者為系統特徵根，小於 1 者為非系統

特徵根。使得特徵根的判別有了重大的突破，可以達到自動化選取的目標。VBAR 只處理輸出資訊，在系統為自由振動時或輸入外力頻率分佈廣泛時，可獲得良好的識別結果。

本計畫考慮，同時使用輸出、輸入資訊的VBARX模型可進一步確認外力的影響，使得識別結果較正確，也可進一步推算等效運動系統的質量、阻尼與勁度矩陣。整體而言，VBAR模型為本文所發展VBARX模型的特例。

三、結構系統運動方程式

3.1 二階微分運動方程式

一個連續時間下的 n 自由度系統物理運動方程式可以二階微分方程式表示為：

$$M\ddot{x}(t) + \zeta\dot{x}(t) + Kx(t) = B_0u(t) \quad (1)$$

其中， $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $\zeta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 分別稱為質量、阻尼和勁度矩陣； $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 為位移向量， $\dot{x}(t)$ 及 $\ddot{x}(t)$ 則分別為速度及加速度向量； $u(t) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ 為所受外力之輸入向量，而 $B_0 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ 稱為輸入影響矩陣，用以指定所受外力之自由度位置。

量測動態反應輸出可以表為：

$$y(t) = C_a\ddot{x}(t) + C_v\dot{x}(t) + C_dx(t) \quad (2)$$

稱為輸出方程式。其中， $y(t) \in \mathbb{R}^{\ell \times 1}$ 表所量測的輸出向量，而 C_a 、 C_v 及 C_d 則分別稱為因次 $\ell \times n$ 的位移、速度及加速度輸出影響矩陣，用以標示所量測輸出資訊之自由度位置。

導入一狀態變數 $z(t) = \begin{Bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 1}$ ，則前述方程式組可改寫為狀態空間運動方程式組：

$$\dot{z}(t) = A_c z(t) + B_c u(t) \quad (3)$$

$$y(t) = C_c z(t) + D_c u(t) \quad (4)$$

其中，質量、勁度和阻尼矩陣及狀態空間方程式組的係數矩陣間的關係為：

$$A_c = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -M^{-1}K & -M^{-1}\zeta \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0_{n \times r} \\ M^{-1}B_0 \end{bmatrix} \quad (5),(6)$$

$$C_c = [C_d - C_a M^{-1}K \quad C_v - C_a M^{-1}\zeta] \quad (7)$$

$$D_c = C_a M^{-1}B_0 u(t) \quad (8)$$

3.2 離散時間狀態運動方程式

上述的連續時間狀態空間運動方程式組可轉換為離散時間下的狀態空間運動方程式組：

$$z_{k+1} = Az_k + Bu_k \quad (9)$$

$$y_k = Cz_k + Du_k \quad (10)$$

其中，連續和離散時間系統矩陣的關係為：

$$A = e^{A_c \Delta t}, \quad B = (e^{A_c \Delta t} - I)A_c^{-1}B_c \quad (11),(12)$$

$$C = C_c, \quad D = D_c \quad (13),(14)$$

A、B、C 及 D 別稱為離散時間下的狀態矩陣、輸入影響矩陣、輸出影響矩陣及直接傳輸矩陣，而其因次與連續時間下的各個系統矩陣完全相同。

四、含外變數之向量自我迴歸模型

將離散時間輸入資料向量與輸出資料向量不同時步之間的關係，以後向型矩陣差分方程式來表達：

$$y_k = \sum_{i=1}^{n_a} a_i y_{k+i} + \sum_{j=0}^{n_b} b_j u_{k+j} + e_k \quad (15)$$

其中， $a_i \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ 稱為後向自我迴歸(BAR)參數係數， $b_j \in \mathbb{R}^{\ell \times r}$ 稱為後向外力(BX)參數係數， $e_k \in \mathbb{R}^{\ell \times 1}$ 為後向預測誤差。 n_a 與 n_b 分別為 BAR 與 BX 部分之階數，為簡化問題令取 n_a 與 n_b 皆相等。此種含有輸出、輸入向量資料及 BAR、BX 參數矩陣之差分模型稱為向量型自我迴歸含外力參數模型。

此差分方程式中，輸出、輸入資訊已由量測獲得，而 BAR、BX 參數矩陣則為待求目標。將上式用離散時間指標 k 由 1 到 N 展開，組成的矩陣形式的方程式如下：

$$\tilde{y}_q = P_q \tilde{Y}_q + \tilde{e}_q \quad (16)$$

其中， $P_q \in \mathbb{R}^{\ell \times (\ell(q+r(q+1)))}$ 稱為 BARX 參數矩陣， $\tilde{y}_q \in \mathbb{R}^{\ell \times (N-q)}$ 為輸出響應矩陣， $\tilde{Y}_q \in \mathbb{R}^{(\ell(q+r(q+1))) \times (N-q)}$ 為輸出輸入資料矩陣， $\tilde{e}_q \in \mathbb{R}^{\ell \times (N-q)}$ 為誤差矩陣。各矩陣內容如下：

$$P_q = [a_1 \quad \cdots \quad a_q \quad b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_q] \quad (17)$$

$$\tilde{y}_q = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_{N-q}] \quad (18)$$

$$\tilde{Y}_q = \begin{bmatrix} y_2 & y_3 & \cdots & y_{N-q+1} \\ y_3 & y_4 & \cdots & y_{N-q+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{q+1} & y_{q+2} & \cdots & y_N \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_{N-q} \\ u_2 & u_3 & \cdots & u_{N-q+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{q+1} & u_{q+2} & \cdots & u_N \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\tilde{e}_q = [e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_{N-q}] \quad (20)$$

式(16)的方程式的總數比未知數多，可以最小平方方法來求近似解。假設誤差項為一白色雜訊，則在最小平方處理過程可以濾掉，BARX 參數矩陣可以 Moore-Penrose 擬似反式[16]來表示：

$$\hat{P}_q = \tilde{y}_q \tilde{Y}_q^+ \quad (21)$$

五、VBARX 模型的模態識別法

5.1 量測資料的離散時間後向狀態方程式

設 VBARX 的階數為 q 階，令一狀態向量由 q 個時步的輸出向量與 $q+1$ 個時步的輸入向量組成：

$$\tilde{z}_k = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{k+q-1} \\ u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+q-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(r+\ell)q \times 1}, \quad (22)$$

則量測資料可由 VBARX 模型式(15)組成狀態運動方程式組：

$$\tilde{z}_k = \tilde{A}\tilde{z}_{k+1} + \tilde{B}u_k \quad (23)$$

$$y_k = \tilde{C}\tilde{z}_{k+1} + \tilde{D}u_k \quad (24)$$

其中，系統矩陣 \tilde{A} 可分成 BAR、BX 參數矩陣部分的子系統矩陣為：

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\tilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 & \hat{a}_2 & \cdots & \hat{a}_{q-1} & \hat{a}_q \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\tilde{A}_{12} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 & \hat{b}_2 & \cdots & \hat{b}_q \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

\tilde{B} 、 \tilde{C} 、 \tilde{D} 矩陣分別為：

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix}, \tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\tilde{C} = [\hat{a}_1 \quad \cdots \quad \hat{a}_q \quad \hat{b}_1 \quad \cdots \quad \hat{b}_q], \tilde{D} = \hat{b}_0 \quad (32),(33)$$

$\tilde{A} \in \mathcal{R}^{((\ell+r)q) \times ((\ell+r)q)}$ 、 $\tilde{B} \in \mathcal{R}^{((\ell+r)q) \times r}$ 、 $\tilde{C} \in \mathcal{R}^{\ell \times ((\ell+r)q)}$ 及 $\tilde{D} \in \mathcal{R}^{\ell \times r}$ 分別稱為資料狀態空間模型的後向狀態矩陣、輸入影響矩陣、輸出影響矩陣及直接傳輸矩陣。

資料狀態方程式系統矩陣階數遠遠大於系統有效的階數。一般採用高階求解的方法可提高系統識別能力，同時也提高造成狀態空間系統矩陣中大量非系統的特徵模態。因此除去這些假的(spurious)模態，將量測資料所建立的高階系統矩陣降階到系統有效的階數才能得到等效系統狀態空間模型。

式(23)資料狀態方程式系統矩陣的特徵根以複數型態出現，在實數與虛數為水平與垂直軸構成的 Z-平面中，後向模型系統特徵根必落在單位圓外或其上，非系統特徵根才會落在單位圓內。輔以物理特性的判別準則，可以很輕易的運用電腦自動化選取系統特徵根，判別出系統與非系統模態。

5.2 動態系統的等效狀態運動方程式

將識別所得的離散時間後向狀態矩陣進行特徵分解，可分解出特徵向量矩陣 Ψ 和特徵根矩陣 Λ 。將特徵根 λ_i 將其依照絕對值的大小排列，取其大於或等於 1 之部分為系統的特徵根，剩下的部分則為非系統的特徵根。將欲保留的系統模態加上下標 s 而欲刪除的非系統模態加上下標 p，則特徵分解方程式可表為：

$$\tilde{A} = \Psi \Lambda \Psi^{-1} = \begin{bmatrix} \Psi_{ss} & \Psi_{sp} \\ \Psi_{ps} & \Psi_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_s & 0 \\ 0 & \Lambda_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{ss} & \Psi_{sp} \\ \Psi_{ps} & \Psi_{pp} \end{bmatrix}^{-1} \quad (34)$$

假設量測資料的有效階數為 n，則其等效系統的狀

態空間模型將具有 2n 個共軛的系統特徵根。分離出系統特徵根後，把量測資料離散時間狀態方程式組凝縮到 2n 階。降階後的離散時間後向狀態空間方程式組如下：

$$\bar{z}_k = \bar{A}_b \bar{z}_{k+1} + \bar{B}_b u_k \quad (35)$$

$$y_k = \bar{C}_b \bar{z}_{k+1} + \bar{D}_b u_k \quad (36)$$

其中，特徵向量矩陣、特徵根矩陣與降階後的離散時間後向系統矩陣的關係為：

$$\bar{A}_b = \Psi_{ss} \Lambda_s \Psi_{ss}^{-1}, \bar{B}_b = \Psi_{ss} \hat{B}_s \quad (37),(38)$$

$$\bar{C}_b = \hat{C}_s \Psi_{ss}^{-1}, \bar{D}_b = \tilde{D} \quad (39),(40)$$

而 $\bar{A}_b \in \mathcal{R}^{2n \times 2n}$ 、 $\bar{B}_b \in \mathcal{R}^{2n \times r}$ 、 $\bar{C}_b \in \mathcal{R}^{\ell \times 2n}$ 及 $\bar{D}_b \in \mathcal{R}^{\ell \times r}$ 分別稱為系統的等效離散時間後向狀態矩陣、輸入影響矩陣、輸出影響矩陣及直接傳輸矩陣。式中的 \hat{B}_s 與 \hat{C}_s 矩陣可由下列式子獲得：

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_s \\ \hat{C}_s \end{bmatrix} = \Psi^{-1} \tilde{B}, [\hat{C}_s \quad \hat{D}_p] = \tilde{C} \Psi \quad (41),(42)$$

5.3 後向模型與前向模型的轉換

由後向模型轉換而成的離散時間前向狀態空間運動方程式組表示如下：

$$\bar{z}_{k+1} = \bar{A}_f \bar{z}_k + \bar{B}_f u_k \quad (43)$$

$$y_k = \bar{C}_f \bar{z}_k + \bar{D}_f u_k \quad (44)$$

其中，後向模型與前向模型間的系統矩陣組關係為：

$$\bar{A}_f = \bar{A}_b^{-1}, \bar{B}_f = -\bar{A}_b^{-1} \bar{B}_b \quad (45),(46)$$

$$\bar{C}_f = \bar{C}_b \bar{A}_b^{-1}, \bar{D}_f = \bar{D}_b - \bar{C}_b \bar{A}_b^{-1} \bar{B}_b \quad (47),(48)$$

，可獲得與後向模型因次完全相同的離散時間前向系統矩陣組。

5.4 量測識別模型與物理模型運動方程式之轉換

如同 3.2 節所提到的，可將離散時間下的系統矩陣組 \bar{A}_f 、 \bar{B}_f 、 \bar{C}_f 及 \bar{D}_f 、轉換為連續時間下的系統矩陣組 \bar{A}_c 、 \bar{B}_c 、 \bar{C}_c 及 \bar{D}_c 。獲得的連續時間系統模型與式(5-8)中的狀態運動方程式存在著等效系統的關係，其動態特性相同，但矩陣型態不同，為得到與式(5-8)相同的型態，可引用一個轉換矩陣 T[12]，作進一步轉成：

$$A_{ct} = T \bar{A}_c T^{-1}, B_{ct} = T \bar{B}_c \quad (49),(50)$$

$$C_{ct} = \bar{C}_c T^{-1}, D_{ct} = \bar{D}_c \quad (51) (52)$$

其中：

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$T_1 = C_d \bar{C}_c + C_v \bar{C}_c \bar{A}_c^{-1} + C_a \bar{C}_c \bar{A}_c^{-2}, T_2 = T_1 \bar{A}_c \quad (54),(55)$$

將識別所求得的系統矩陣組轉換至與物理模型相同形式後， \bar{A}_{ct} 矩陣具有下列格式：

$$\bar{A}_{ct} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\bar{M}^{-1} \bar{K} & -\bar{M}^{-1} \bar{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (56)$$

式中 \bar{M} 、 $\bar{\zeta}$ 和 \bar{K} 分別為等效的質量、阻尼和勁度矩陣。由此形式可獲得 \bar{A}_{ct} 矩陣的左下角之等效的

$-\overline{M}^{-1}\overline{K}$ 次矩陣，並利用 $\overline{M}^{-1}\overline{K}$ 矩陣求出結構系統之無阻尼狀態的自然振頻和正模態振形(Normal Mode Shape)。 \overline{B}_{ct} 矩陣的型態為：

$$\overline{B}_{ct} = \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{M}^{-1}\overline{B}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{B}_2 \end{bmatrix} \quad (57)$$

5.5 擷取 M 、 ζ 、 K 矩陣

當輸出資料與輸入資料向量自由度數皆為 n 時，由前章節的推導求出與物理模型相同格式的狀態空間矩陣 \overline{A}_{ct} 、 \overline{B}_{ct} 、 \overline{C}_{ct} 及 \overline{D}_{ct} 。由式(1)可見，若 n 個自由度都有輸入資料，則 $B_0 = I$ 。再由式(57)中的 $\overline{B}_2 = M^{-1}B_0$ ，可獲得等效的質量、代入式(56)可求得阻尼及勁度矩陣：

$$\overline{M} = \overline{B}_2^{-1}, \quad \overline{\zeta} = -\overline{B}_2^{-1}\overline{A}_{22}, \quad \overline{K} = -\overline{B}_2^{-1}\overline{A}_{21} \quad (58)(59) \quad (60)$$

六、結構參數識別與未確定參數之確認

若結構上的數入外力與動態反應能完整量測，則由本文方展方法可推算實際結構的等效質量、阻尼與勁度矩陣，可排除模型的未確定因素。但一般狀況，完全量測確有困難，因此模型未確定性參數仍需藉由識別所之模態參數來作確認工作。邊界條件的勁度為一般最常見難以確認的部分。

6.1 將模態參數識別結果確認邊界條件的勁度

針對一無阻尼的結構對式(1)進行特徵分析，則可得分析模型之特徵方程式為：

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M})\phi_i = 0 \quad (61)$$

其中： ω_i 為第 i 模態之自然頻率， ϕ_i 為其相對應之模態形狀， $i = 1, 3, \dots, n$ 。假設分析模型邊界結點自由度之邊界勁度可用旋轉彈簧和軸向彈簧代替，則由邊界彈簧元素所構成的邊界勁度矩陣為一對角矩陣，可表為 \mathbf{K}^b ，由旋轉和軸向彈簧的彈簧常數所組成。則式(1)之運動方程式可修正如下：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = -\mathbf{K}^b \mathbf{x} \quad (62)$$

假定由模態測試可鑑定出正確的模態參數 ω_{mi} 與 ϕ_{mi} ， $i = 1, 2, \dots, m$ ，則針對第 i 模態的鑑定結果，可得如下之特徵方程式

$$-\omega_{mi}^2 \mathbf{M}\phi_i + \mathbf{K}\phi_i = -\mathbf{K}^b \phi_i \quad (63)$$

其中： $\phi_i = \begin{Bmatrix} \phi_m \\ \phi_s \end{Bmatrix}_i$ ， $i = 1, 2, \dots, m$ ， ϕ_m 及 ϕ_s 分別

為量測及非量測點的模態向量。求解方程式(63)，則可得邊界勁度條件之彈簧常數 k_1, k_2, \dots, k_q ， q 為未知之邊界條件參數的總數。

將原分析模型的特徵方程式中之質量和勁度矩陣依量測與非量測自由度分割：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{ms}^T & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} - \omega_{mi}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{ms} \\ \mathbf{M}_{ms}^T & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{mi} \\ \phi_{si} \end{Bmatrix} = 0 \quad (64)$$

其中： ϕ_{mi} 為結構第 i 個對質量矩陣正規化模態形狀

ϕ_i 中量測自由度之部分， ϕ_{si} 為非量測自由度部分。

由上式可得量測與非量測部分模態形狀關係：

$$\phi_{si} = -(\mathbf{K}_{ss} - \omega_{mi}^2 \mathbf{M}_{ss})^{-1} (\mathbf{K}_{ms}^T - \omega_{mi}^2 \mathbf{M}_{ms}^T) \phi_{mi} \quad (65)$$

上述方法為 Kidder[13]所提出。一般而言邊界條件之自由度量測不易，所以方程式(65)中之 \mathbf{K}_{ss} 則包含了未知的邊界條件勁度元素。改用方程式(64)之上半部矩陣元素，則可得非量測自由度和量測自由度模態形狀的關係式如下：

$$(\mathbf{K}_{ms} - \omega_{mi}^2 \mathbf{M}_{ms})\phi_{si} = -(\mathbf{K}_{mm} - \omega_{mi}^2 \mathbf{M}_{mm})\phi_{mi} \quad (66)$$

則可得新的量測與非量測部分模態形狀關係：

$$\phi_{si} = -(\mathbf{K}_{ms} - \omega_{mi}^2 \mathbf{M}_{ms})^+ \cdot (\mathbf{K}_{mm} - \omega_{mi}^2 \mathbf{M}_{mm})\phi_{mi} \quad (67)$$

當結構之所有自由度的振動反應都能完整的被量測到時，則方程式(63)之模態形狀為一正確解，故可得完全精確得邊界勁度矩陣 \mathbf{K}^b ，但一般而言，旋轉自由度的量測不易，所以很難透過方程式(63)直接求解，必須先透過方程式(67)，才能求得完整的模態形狀來進行邊界勁度矩陣 \mathbf{K}^b 的求解。

七、範例

7.1 範例一：十八自由度平面剛架結構

為驗證本文方法之可應用於實驗結構之可行性，以一平面剛架為例，元素及自由度編號皆表示於圖 1 中。材料及橫斷面係數列於表 1 中。

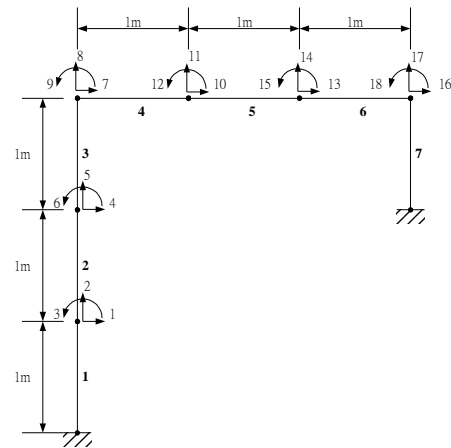


圖 1 十八自由度平面剛架結構

表 1 平面剛架結構之材料及幾何參數

Young's modulus(N/m ²)	3e10
cross section area(m ²)	2.5e-3
moment of inertia(m ⁴)	6.75e-8
density(Kg/m ³)	2500

平面剛架結構的十八個模態參數列於表 2。為了能模擬更接近真實的量測狀態，僅選取七個自由度 1、4、7、9、11、14、16 為量測自由度，並選取自由度 7 為輸入外力自由度。輸入外力為有存若干明顯振頻的有色隨機外力，雜訊強度為動態反應訊號標準差的 10%，取樣點數為 4096 點。本例中首先考慮自然頻率 100Hz 以下的模態，取採頻率 200Hz，取分析階數為 140 來識別。識別出的系統矩陣理論上應

包含所有結構系統之模態，但由於採樣間隔的設定本質上可濾掉高頻部分以及雜訊的干擾，部分模態並不明顯或偏差較大，識別出前 7 個較低頻且明顯模態，列出其模態阻尼比、自然振頻及 MAC 於表 3。其中，前 5 個識別出的正模態振型與原系統的正模態振型比較列於圖 2。

配合可能自然頻率的分佈範圍，調整採樣間隔及分析階數，可較為精確地獲得十八個自由度模態參數與正模態振型。而且由上述兩表及圖片可知，VBARX 模型在適當的採樣間隔及分析階數下，即使受到雜訊干擾，仍然可以獲得良好的結果。

表 2 原有限元模型系統之模態參數

原系統（有限元模型）			
編號	有阻尼特徵值	模態阻尼比 (%)	自然振頻 (Hz)
1	$-4.80e-003 \pm 3.08e+001i$	$1.5574e-002$	$4.9058e+000$
2	$-1.58e-002 \pm 5.62e+001i$	$2.8184e-002$	$8.9430e+000$
3	$-2.62e-002 \pm 7.24e+001i$	$3.6258e-002$	$1.1519e+001$
4	$-1.26e-001 \pm 1.59e+002i$	$7.9545e-002$	$2.5310e+001$
5	$-2.12e-001 \pm 2.06e+002i$	$1.0294e-001$	$3.2758e+001$
6	$-6.76e-001 \pm 3.68e+002i$	$1.8387e-001$	$5.8524e+001$
7	$-1.07e+000 \pm 4.63e+002i$	$2.3176e-001$	$7.3768e+001$
8	$-2.14e+000 \pm 6.54e+002i$	$3.2714e-001$	$1.0413e+002$
9	$-3.51e+000 \pm 8.38e+002i$	$4.1914e-001$	$1.3342e+002$
10	$-5.59e+000 \pm 1.06e+003i$	$5.2873e-001$	$1.6830e+002$
11	$-9.29e+000 \pm 1.36e+003i$	$6.8153e-001$	$2.1694e+002$
12	$-1.54e+001 \pm 1.75e+003i$	$8.7665e-001$	$2.7905e+002$
13	$-5.46e+001 \pm 3.30e+003i$	$1.6518e+000$	$5.2577e+002$
14	$-1.12e+002 \pm 4.74e+003i$	$2.3715e+000$	$7.5488e+002$
15	$-1.54e+002 \pm 5.54e+003i$	$2.7712e+000$	$8.8209e+002$
16	$-2.65e+002 \pm 7.28e+003i$	$3.6434e+000$	$1.1597e+003$
17	$-4.84e+002 \pm 9.83e+003i$	$4.9208e+000$	$1.5663e+003$
18	$-5.91e+002 \pm 1.09e+004i$	$5.4382e+000$	$1.7310e+003$

表 3 識別系統之前 7 個模態參數

編號	雜訊強度 10% 時識別出之系統		MAC
	模態阻尼比 (%)	自然振頻 (Hz)	
1	$1.5648e-002$	$4.9043e+000$	$9.9999e-001$
2	$2.7817e-002$	$8.9437e+000$	$9.9987e-001$
3	$3.5410e-002$	$1.1441e+001$	$9.9999e-001$
4	$6.0352e-002$	$2.4066e+001$	$9.7584e-001$
5	$1.0394e-001$	$3.2722e+001$	$9.9987e-001$
6	$1.8245e-001$	$6.1811e+001$	$9.9057e-001$
7	$2.3500e-001$	$7.4056e+001$	$9.9998e-001$

7.2 範例二：簡支樑結構邊界附加旋轉彈簧

如圖 3 之簡支樑結構，在其兩端附加旋轉彈簧。彈簧常數為：

$$k_1 = 8 \times 10^5 \text{ N m rad}^{-1} \text{ 及 } k_2 = 6 \times 10^5 \text{ N m rad}^{-1},$$

材料參數為： $E = 2.07 \text{ Gpa}$ ， $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ，幾何參數為： $L = 1 \text{ m}$ ， $A = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ， $I = 3 \times 10^{-9} \text{ m}^4$ 。



圖 3 兩端附加旋轉彈簧的簡支樑結構

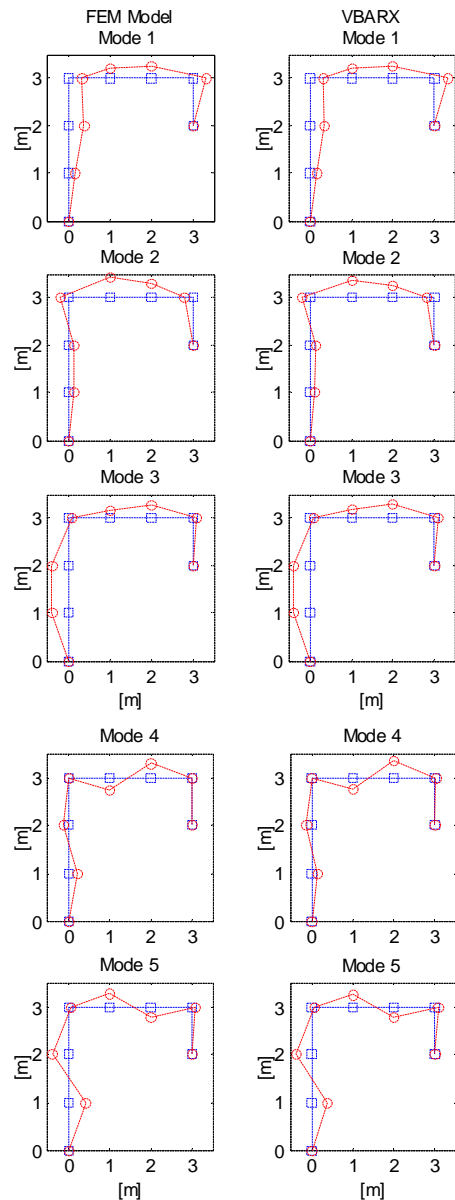


圖 2 原有限元模型系統與識別系統之前 5 個正模態振型之比較

表 4 旋轉彈簧勁度常數鑑定結果

元素數目	量測點數	k_1 鑑定結果	k_2 鑑定結果
10	9	$5.1789e+005$	$4.2209e+005$
20	19	$5.8861e+005$	$4.7148e+005$
30	29	$6.4348e+005$	$5.0773e+005$
40	39	$6.8255e+005$	$5.3234e+005$
50	49	$7.1005e+005$	$5.4909e+005$
60	59	$7.2964e+005$	$5.6076e+005$
70	69	$7.4389e+005$	$5.6911e+005$
80	79	$7.4738e+005$	$5.7089e+005$

如 Y 方向反應資料和旋轉自由度 θ 都能完整被量測到，則可鑑定出正確無誤的彈簧常數。

假設只有在兩端邊界結點內的結點 Y 方向位移能被量測，例如當簡支樑被分成 10 個樑元素，則只量測 9 個結點的 Y 方向自由度。在此探討不同元素大小與不同量測點多寡，由此方法所鑑定出邊界彈簧常數結果的差異。 k_1 及 k_2 鑑定誤差百分比如圖

4、圖 5 與表 4 所示，由結果可知，當元素被分的越小，即量測點數越多時， k_1 及 k_2 的鑑定結果越精確。但在實際量測上，通常很難布置這麼多的量測點數，所以如何在有限的量測點數，提高鑑定的精確度，將是下一步探討的重點。

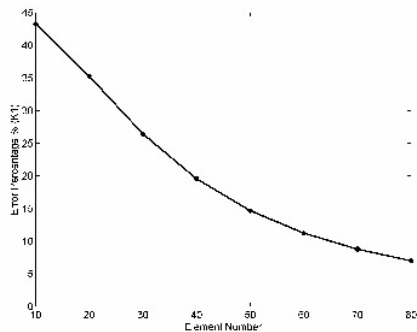


圖 4 鑑定旋轉彈簧常數 k_1 誤差百分比

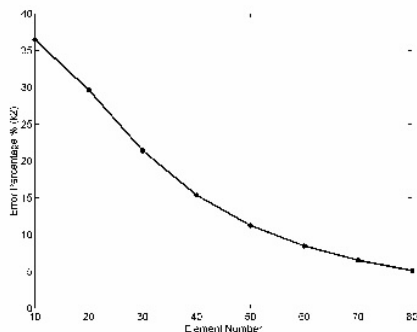


圖 5 鑑定旋轉彈簧常數 k_2 誤差百分比

八、結論

本研究為繼 VBAR 後，另一個提出應用於後向模型的系統識別方法。排列資料的順序為由後而先排列。此排列的好處在於離散時間時，系統特徵根座落與單位圓外而非系統特徵根座落於單位圓內。此特性讓 VBARX 模型的系統識別方法無須經由人工手動判斷系統特徵根的真偽，即可達到程式自動化的目的。

與 VBAR 相較，由於 VBAR 應用在僅有輸出資料的狀況，當輸入外力頻寬不夠或為特定頻率時，VBAR 將無法有效區別外力振動頻率及系統自然振頻。因此，在輸入資料也可獲得時，VBARX 有除去外力振動頻率的功能，識別的精確性較 VBAR 方法為優良。由本文的例子及推論可知，VBARX 可補足了 VBAR 不足的範圍。以數學模型的觀點來看，VBAR 模型實為 VBARX 在無輸入外力下的特例。兩種後向模型的方法若配合不同情況下交互使用，則在工程上可達到最好的應用效果。

由識別確認邊界勁度，只能考慮等效勁度，如你求得正確勁度，即量測點數越多時，鑑定結果越精確。但在實際量測上，通常很難布置太多的量測

點數，所以如何在有限的量測點數，提高鑑定邊界勁度的精確度，將是下一步探討的重點。

7. 參考文獻

- [1] L. Ljung, *System Identification: Theory for the User*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- [2] S. M. Pandit, *Modal and Spectrum Analysis: Data Dependent Systems in State Space*, John Wiley & Sons Inc, New York, 1991.
- [3] T. Soderstrom, H. Fan, B. Carlsson, and S. Bigi, "Least Squares Parameter Estimation of Continuous-Time ARX Models from Discrete-Time data," *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 42, No. 5, 1997, pp. 659-673.
- [4] 洪振發，柯文俊，戴志豪，「利用向量型自我迴歸模型的狀態方程式進行模態參數鑑定」，*中國造船暨輪機工程學刊*，第七卷第三期，1998 年，第 35-44 頁。
- [5] 柯文俊，「由狀態空間系統萃取結構系統矩陣與模態參數」，國立臺灣大學造船及海洋工程學研究所博士論文，2002 年，第 78-85 頁。
- [6] J. N. Juang, and R. S. Pappa, "An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Model Reduction," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 8, No. 5, 1985, pp. 620-627.
- [7] J. N. Juang, *Applied System Identification*, Prentice Hall PTR, New Jersey, 1994, pp121-147.
- [8] P. Van Overschee, and B. De Moor, "N4SID: Subspace Algorithm for the Identification of Combined Deterministic Stochastic System," *Automatica, Special Issue on Statistical Signal Processing and Control*, Vol. 30, No. 1, 1994, pp. 75-93.
- [9] M. Verhaegen and P. Dewilde, "Subspace model identification part 1. The Output-Error State-Space Model Identification Class of Algorithms," *Int. J. Control*, Vol. 56, 1992, pp. 1187-1210.
- [10] P. Van Overschee, and B. De Moor, "A Unifying Theorem for Three Subspace System Identification Algorithms," *Automatica*, Vol. 31, 1995, pp. 1853-1864.
- [11] B. N. Datta, *Numerical Linear Algebra and Applications*, Brooks/Cole Publishing Company, 1995.
- [12] 洪振發，柯文俊，彭彥惇，「運用自我迴歸外變數模型與特徵系統識別運算於等效運動方程式之推算」，*臺大工程學刊*，第 82 期，2001 年，第 21-31 頁。
- [13] Kidder, R. L., "Reduction of Structural Frequency Equation," *AIAA Journal*, Vol. 11, p. 892 (1973).