

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫 期中進度報告

## Boussinesq 方程式在近岸海域波場分析之研究(1/3)

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC91-2611-E-002-010-

執行期間：91年08月01日至92年07月31日

執行單位：國立臺灣大學工程科學及海洋工程學系暨研究所

計畫主持人：林銘崇

共同主持人：丁肇隆

計畫參與人員：張國緯

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 92 年 5 月 27 日

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫  成果報告  期中進度報告

中進度  
報告

Boussinesq 方程式在近岸海域波場分析之研究(1/3)

計畫類別：  個別型計畫  整合型計畫

計畫編號：NSC 91-2611-E-002-010

執行期間： 91 年 08 月 01 日至 92 年 07 月 31 日

計畫主持人：林銘崇 教授

共同主持人：丁肇隆 副教授

計畫參與人員：張國緯

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)：  精簡報告  完整報告

本成果報告包括以下應繳交之附件：

赴國外出差或研習心得報告一份

赴大陸地區出差或研習心得報告一份

出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份

國際合作研究計畫國外研究報告書一份

處理方式：除產學合作研究計畫、提升產業技術及人才培育研究計畫、列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢

涉及專利或其他智慧財產權，一年二年後可公開  
查詢

執行單位：台灣大學工程科學及海洋工程學系

中 華 民 國 92 年 05 月 27 日

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

## Preparation of NSC Project Reports

計畫編號：NSC 91-2611-E-002-010

執行期限：91 年 8 月 1 日至 92 年 7 月 31 日

主持人：林銘崇 台灣大學工程科學及海洋工程學系

共同主持人：丁肇隆 台灣大學工程科學及海洋工程學系

計畫參與人員：張國緯 台灣大學工程科學及海洋工程學系

### 一、中文摘要

本研究旨在探討 Boussinesq equations，並發展一套數值模式，期能預測分析波浪傳遞之現象。第一年以理論推導及數值模擬計算為主，文中以[2,2] Padé approximation 推導以任意水深位置形式表示之 Boussinesq equations，並比較以不同水深位置速度為變數時，其分散關係式、群波速及淺化梯度，並由其結果可知，控制相位速度誤差在 5% 的條件下時，其相對水深限制  $h/L_0$  可延伸到 0.5。數值計算方法利用 Fourth-order Adams-Bashforth- Moulton predictor-corrector scheme 以及消波邊界條件求解 Boussinesq equations，以增加數值計算之穩定性。最後並將數值計算結果與實驗數據及理論解，作一比較分析，以為本數值模式之驗證。

**關鍵詞：**Boussinesq equation、消波邊界

### Abstract

The purpose of this research is to develop a numerical model based on Boussinesq equations that can predict the wave transformation. In the first year, we would derive a Boussinesq equation and use numerical scheme to calculations. By [2,2] Padé approximation, different velocity parameter Boussinesq equations are derived. The effects of different Boussinesq type equations on linear dispersion relations, group velocity and shoaling gradients were discussed. The limitation of  $h/L_0$  on the applications of Boussinesq equations can be extended to 0.5 under suitable choice of the velocity parameter with the requirement of the difference of the phase velocities from calculation and from linear dispersion relation less than 5%. The fourth-order Adams-Bashforth-Moulton predictor-corrector scheme with proper absorbing boundary conditions was imposed as the basic numerical scheme. Finally, numerical results were verified with past experimental and theoretical results.

**Keywords:** Boussinesq equation, absorbing boundary condition

### 二、緣由與目的

探討波浪運動產生之各種現象，已有超過一個世紀的歷史，各種理論也因而產生，經長時間之驗證後發現，針對含有波浪變形之非線性及頻散效應的 Boussinesq equations，在考慮波浪之淺化、折射、繞射、非線性及分散性上，較能預測符合實際波浪運動之現象。

而有關 Boussinesq equations 是由 Boussinesq (1872) 首先提出之基本方程式，其後許多學者陸續對此方程式作進一步之推導及改善，以下僅就其中一些研究作一介紹。Peregrine (1967) 推導變水深長波方程式，以微小振幅波理論為基礎，式中並包含有非線性項，以水深平均速度 (Depth-averaged velocity) 推導相當於等水深之 Boussinesq equations，並成為往後發展 Boussinesq equations 之原始形式 (Conventional Boussinesq equations)。Witting (1984) 推導以自由液面水平速度 (free surface velocity) 表示之非線性水深積分動量方程式，將速度項以泰勒展開式展開，可得到以不同水深速度表示之一維 Boussinesq equations。但其限制為等水深的狀況，並且不易將其使用於二維之平面波場計算。

由於 Boussinesq equations 線性化之分散關係式，會隨著相對水深 ( $h/L_0$ ) 增加而誤差值變大，使得傳統之 Boussinesq equations 在應用上有其水深上之限制，因此往後之研究遂注重於改善方程式相對水深之限制，並將高階項的影響導入方程式之中。McCowan (1985, 1987) 驗證 Boussinesq equations 之三階微分項，並且提出非線性波浪在淺水中之數值模擬計算，在相位速度誤差小於 5% 的條件下，其相對水深限制  $h/L_0$  可達到 0.2。Madsen et al. (1991) 改善 Boussinesq equations 之分散關係式，使其可適用於較大之相對水深，利用 [2,2] Padé approximation，將線性化長波方程式推導所得之三階微分項，加入動量方程式中推導而得。與傳統 Boussinesq equations 比較後可知，可得到較佳之分散性。但其限制仍為等水深的狀況。Madsen et al. (1992) 接著提出之 Boussinesq equation，改善了等水深的限制，可計算不規則波通過緩變地形時波浪變化之情形，並在相位速度誤差小於 5% 的條件下，將相對水深之限制  $h/L_0$  延伸至 0.5。

Nwogu (1993) 推導以任意水深速度形式表示之二維 Boussinesq equations，並可有效的降低線性化後與原方程式之間的相位差異，其改善之分散關係式形式與 Madsen (1991) 所提出一致。

Wei and Kirby (1995) 以 Nwogu (1993) 所推導出之方程式為基礎，並利用一有效之數值模式 Fourth-order Adams-Bashforth-Moulton predictor-corrector scheme 求解 Boussinesq equations，可有效降低計算時所產生之誤差，一般將其所提出之模式稱為 **WKGS model**。

Schäffer and Madsen (1995) 結合 Madsen (1992) 及 Nwogu (1993) 概念，利用 [4,4] Padé approximation 於線性化 Stokes wave，並改善 Boussinesq equations 線性化分散關係式，將其相對水深之限制  $h/L_0$  延伸至 1.0。之後 Madsen et al. (1996) 又根據 Schäffer and Madsen (1995) 所提出之方法，強調 Boussinesq equations 線性化分散關係式在深水時的特性，但其所推導出之 Boussinesq equations 含有五次高階微

分項，在數值上求解較為不易。

Gobbi and Kirby(1996)將 Nwogu(1993)所推導出之 Boussinesq equations，利用 [4,4] Padé approximation 於線性化微小振幅波分散關係式求解，並提高準確度為  $O(\epsilon^4)$ 。但其所推導出之方程式同樣含有五次高階微分項，在數值上不易求解。Gobbi et al.(1999)推導含五次高階微分項之一維 Boussinesq equations，並探討其通過潛堤之後波浪之分散性的現象，並與實驗結果進行比較，得到相當理想之結果。之後 Wei and Kirby(2000)改善了深水狀況下，Boussinesq equations 線性化內流場動能(Linear internal flow kinematics)的問題。

Agonon and Madsen(1999)提出一新近似法求得高階之 Boussinesq equations，利用非線性自由液面邊界條件(Nonlinear free-surface boundary conditions)求解，並討論淺化及分散性的問題，但若以一般方式表示，方程式本身將包含太多項，在數值上不易求解。

本研究將以 Nwogu(1993)所推導之 Boussinesq equations 為基礎，並利用 Wei and Kirby(1995)所提出之數值方法，加上一適當之消波邊界條件求解一維波場。

### 三、理論推導

波場計算範圍，考慮一三維空間之 Cartesian coordinate system，如圖 1 空間座標示意圖所示。假設波場為不可壓縮且非旋性之流體運動場，定義  $\Phi'$  為有因次波浪勢流函數(Potential function)。先將控制方程式及邊界條件無因次化後，再將波浪勢流函數以級數形式展開，利用微擾法(Perturbation method)推導以不同水深形式表示之 Boussinesq equations。並且比較在不同的水深形式下一維線性化之 Boussinesq equations 與線性波理論之間，其離散性(Dispersion)之差異，並由其結果釐定方程式之可適用範圍。其相關有因次參數及特徵尺度定義定義如下：水平座標  $X'=(x', y')$ 、垂直座標  $Z'$ 、自由液面邊界為  $Z'=y'(X', t')$ 、底床邊界表示為  $Z'=-h'(X')$ 、而  $(k')^{-1}$  表示為波數導數，並為水平長度尺度。 $h'_0$  是特徵水深，並為垂直長度尺度、 $a'_0$  表示為波浪振幅、 $(k'\sqrt{gh'_0})^{-1}$  表示為時間尺度。 $g$  表示為重力加速度。

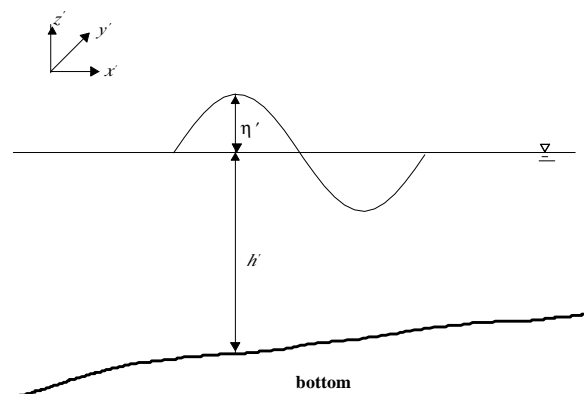


圖 1 空間座標示意圖

假設波場為不可壓縮且非旋性之流體運動場，定義 $\Phi'$ 為有因次波浪勢流函數(Potential function)。由勢流理論可知速度向量 $U'=(u',v',w')=\nabla\Phi'$ ，其中 $u',v',w'$ 分別表示為 $x',y',z'$ 方向之水分子速度分量。而其流場控制方程式可表示為：

$$\nabla'^2\Phi'=0, \quad -h'\leq z'\leq y' \quad (1)$$

以特徵尺度將方程式進行無因次化，定義無因次變數如下：

$$X=k'x', \quad y=y'/d'_0, \quad Z=Z'/h'_0, \quad t=k'\sqrt{gh'_0}t', \quad h=h'/h'_0, \quad \Phi=k'\frac{\sqrt{gh'_0}}{ga'_0}\Phi' \quad (2)$$

將之前定義之無因次化變數代入控制方程式及自由液面動力邊界條件、自由液面運動邊界條件及不透水穩定底床邊界條件中，可得到無因次化之控制方程式及邊界條件，並分別表示如下：

控制方程式(Governing Equation)無因次化後之方程式：

$$-2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0, \quad -h<z<1 \quad (3)$$

在此 $\nu=a'_0/h'_0$ 為非線性係數，而 $\sim=k'h'_0$ 為頻散係數。

自由液面動力邊界條件(Dynamic Free Surface Boundary Condition)，假設 $P=P_a=0$ ，無因次化後之方程式：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\nu\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\sim-2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2=0 \quad z=1 \quad (4)$$

自由液面運動邊界條件(Kinematic Free Surface Boundary Condition)，無因次化後之方程式：

$$\frac{\partial y}{\partial t}+y\nabla y\cdot\nabla\Phi=\sim-2\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad z=1 \quad (5)$$

在此 $\nabla=(\partial/\partial x,\partial/\partial y)$ 表示水平梯度運算符號

不透水穩定底床邊界條件(Bottom Boundary Condition)，無因次化後之方程式：

$$\sim-2\nabla h\cdot\nabla\Phi+\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0, \quad z=-h \quad (6)$$

為簡化原控制方程式，使其由3維空間轉換為2維空間。因此需先將將勢流函數以 $(z+h)$ 級數展開如下：

$$\Phi(X,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(z+h)^n w^{(n)}(X,t) \\ =w^{(0)}+(z+h)w^{(1)}+(z+h)^2w^{(2)}+\dots \quad (7)$$

其中 $w^{(n)}(X,t)$ 為波浪勢流函數之水平分布函數。

將式(7)代入式(6)底床邊界條件後，並根據遞迴關係(Recursive relations)可得 $w^{(1)}$ 如下所示：

$$w^{(1)} = -\frac{\sim^2 \nabla h \cdot \nabla w^{(0)}}{1 + \sim^2 |\nabla h|^2} \quad (8)$$

將式(7)代入式(3)控制方程式後，並根據遞迴關係(Recursive relations)可得  $w^{(n+2)}$  如下所示：

$$w^{(n+2)} = -\sim^2 [\nabla^2 w^{(n)} + 2(n+1) \nabla h \cdot \nabla w^{(n+1)} + (n+1) \nabla^2 h w^{(n+1)}] / [(n+1)(n+2)(1 + \sim^2 |\nabla h|^2)] \quad (9)$$

將式(8)及式(9)代入式(7)，並以底床勢流函數  $w^{(0)}$  替代  $w^{(n)}$ ，且忽略高階項  $\mathcal{O}(\sim^4)$ ，式(7)勢流函數式可表示為：

$$\begin{aligned} \Phi(X, z, t) = & w^{(0)} - \sim^2 [h \nabla h \cdot \nabla w^{(0)} + \frac{h^2}{2} \nabla^2 w^{(0)} \\ & + z \nabla \cdot (h \nabla w^{(0)}) + \frac{z^2}{2} \nabla^2 w^{(0)}] + \mathcal{O}(\sim^4) \end{aligned} \quad (10)$$

定義  $\Phi_r(X, t)$  表示為在任意高程  $z = z_r(X)$  下之勢流函數，將式(10)改寫後， $\Phi_r$  可表示如下：

$$\begin{aligned} \Phi_r = & w^{(0)} - \sim^2 [h \nabla h \cdot \nabla w^{(0)} + \frac{h^2}{2} \nabla^2 w^{(0)} \\ & + z_r \nabla \cdot (h \nabla w^{(0)}) + \frac{z_r^2}{2} \nabla^2 w^{(0)}] + \mathcal{O}(\sim^4) \end{aligned} \quad (11)$$

將式(10)減式(11)，並利用  $\Phi_r = w^{(0)} + \mathcal{O}(\sim^2)$  之關係替換  $\Phi(X, z, t)$  之後，可得到以任意高程  $z = z_r(X)$  表示之之勢流函數：

$$\begin{aligned} \Phi(X, z, t) = & \Phi_r(X, t) - \sim^2 [(z - z_r) \nabla \cdot (h \nabla \Phi_r) \\ & + \frac{(z^2 - z_r^2)}{2} \nabla^2 \Phi_r] + \mathcal{O}(\sim^4) \end{aligned} \quad (12)$$

將式(3)控制方程式從底床  $z = -h$  到自由液面  $z = \nu y$  作積分，並導入式(6)底床邊界條件及式(5)自由液面運動邊界條件，可得到水深積分形式之連續方程式：

$$\nabla \cdot \left[ \int_{-h}^{\nu y} \nabla \Phi dz \right] + \frac{\partial \nu y}{\partial t} = 0 \quad (13)$$

利用微擾法(Perturbation method)並將式(12)代入式(13)水深積分形式之控制方程式後可得：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \nu y}{\partial t} + \nabla \cdot [(\nu y + h) \nabla \Phi_r] \\ & - \sim^2 \nabla \cdot \{(\nu y + h) [\nabla(z_r \nabla \cdot (h \nabla \Phi_r)) \\ & + \frac{1}{2}(h - \nu y) \nabla(\nabla \cdot (h \nabla \Phi_r)) + \frac{1}{2} \nabla(z_r^2 \nabla^2 \Phi_r) \\ & - \frac{1}{6}(\nu^2 y^2 - \nu y h + h^2) \nabla \nabla^2 \Phi_r]\} = \mathcal{O}(\sim^4) \end{aligned} \quad (14)$$

再次利用微擾法(perturbation method)並將式(12)代入式(5)自由液面動力邊界條件後可得：



$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \Phi_r}{\partial t} + \mathcal{Y} + \frac{\nu}{2} |\nabla \Phi_r|^2 + \sim^2 [(z_r - \nu \mathcal{Y}) \nabla \cdot (h \nabla \frac{\partial \Phi_r}{\partial t}) \\
& + \frac{1}{2} (z_r^2 - \nu^2 \mathcal{Y}^2) \nabla^2 (\frac{\partial \Phi_r}{\partial t})] - \nu \sim^2 \nabla \Phi_r \cdot [-\nabla z_r (\nabla \cdot (h \nabla \Phi_r)) + (\nu \mathcal{Y} - z_r) \nabla (\nabla \cdot (h \nabla \Phi_r))] - z_r \nabla z_r \nabla^2 \Phi_r \\
& \frac{1}{2} (\nu^2 \mathcal{Y}^2 - z_r^2) \nabla (\nabla^2 \Phi_r)] + \frac{\nu \sim^2}{2} [(\nabla \cdot (h \nabla \Phi_r))^2 + \\
& 2 \nu \mathcal{Y} \nabla \cdot (h \nabla \Phi_r) \nabla^2 \Phi_r + \nu^2 \mathcal{Y}^2 (\nabla^2 \Phi_r)^2] = \mathcal{O}(\sim^4) \quad (15)
\end{aligned}$$

式(14)及式(15)為包含  $\Phi_r$  項之 Boussinesq equations。其次將式(14)及式(15)中  $\Phi_r$  項以式(12)進行轉換，由式(12)可知，水平速度在  $z = z_r$  處可表示為：

$$\begin{aligned}
\nabla \Phi_r &= u_r - \sim^2 [\nabla z_r \nabla \cdot (h \nabla u_r) + z_r \nabla z_r \nabla^2 \Phi_r] \\
&+ \mathcal{O}(\sim^4) \quad (16)
\end{aligned}$$

將式(16)所得之  $\nabla \Phi_r$  代入式(14)後，可得：

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial t} + \nabla \cdot [(\nu \mathcal{Y} + h) u_r] + \sim^2 \nabla \cdot \{ (\frac{z_r^2}{2} - \frac{h^2}{6}) h \nabla (\nabla \cdot u_r) \\
& + (z_r + \frac{h}{2}) h \nabla [\nabla \cdot (h u_r)] \} + NL1 = \mathcal{O}(\sim^4) \quad (17)
\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
NL1 &= \sim^2 \nabla \cdot \{ \nu \mathcal{M} (z_r - \frac{1}{2} \nu \mathcal{Y}) \nabla (\nabla \cdot u_r) \\
&+ \frac{1}{2} (z_r^2 - \frac{1}{3} \nu^2 \mathcal{Y}^2) \nabla (\nabla \cdot u_r) \} \quad (18)
\end{aligned}$$

將式(15)作梯度運算(Gradient)，並將式(16)所得之  $\nabla \Phi_r$  代入後，可得：

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u_r}{\partial t} + \nabla \mathcal{Y} + \nu u_r \cdot \nabla u_r + \sim^2 \{ z_r \nabla [\nabla \cdot (h \frac{\partial u_r}{\partial t})] \\
& \frac{1}{2} z_r^2 \nabla (\nabla \cdot \frac{\partial u_r}{\partial t}) \} + NL2 = \mathcal{O}(\sim^4) \quad (19)
\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
NL2 &= \sim^2 \mathcal{V} (u_r \cdot \nabla z_r) \nabla (\nabla \cdot (h u_r) + z_r \nabla [u_r \cdot \nabla (\nabla h u_r)] \\
&+ z_r (u_r \cdot \nabla z_r) \nabla (\nabla \cdot u_r) + \frac{z_r^2}{2} \nabla [u_r \cdot \nabla (\nabla \cdot u_r)] \\
&\nabla \cdot (h u_r) \nabla (\nabla \cdot h u_r) - \nabla [\mathcal{Y} \nabla \cdot (h \frac{\partial u_r}{\partial t})] \\
&- \sim^2 \nu^2 \{ \frac{1}{2} \nabla [\mathcal{Y}^2 (\nabla \cdot \frac{\partial u_r}{\partial t})] + \nabla [u_r \cdot (\mathcal{Y} \nabla \cdot (\nabla \cdot h u_r))] \} \\
&- \nabla [\mathcal{Y} (\nabla \cdot h u_r) \nabla \cdot u_r] \\
&- \sim^2 \nu^3 \nabla \{ \frac{\mathcal{Y}^2}{2} [\nabla (\nabla \cdot u_r) - (\nabla \cdot u_r)^2] \} \quad (20)
\end{aligned}$$

式(18)NL1 及式(20)NL2 兩非線性項皆為  $\mathcal{O}(\sim^2)$ ，但根據假設

$\alpha(\nu) \approx \alpha(\sim^2) \ll 1$ 。因此實際上式(18)NL1項及式(20)NL2項皆等於或超過 $\alpha(\sim^4)$ 。

重新改寫式(17)及式(19)為有因次形式，並忽略高階項 $\alpha(\sim^4, \nu\sim^2)$ ，即與Nwogu(1993)推導以任意水深形式表示之 Boussinesq equations 一致。

$$\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial t} + \nabla \cdot [(h+\mathcal{Y})u_r] + \nabla \cdot \left\{ \left( \frac{z_r^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) h \nabla (\nabla \cdot u_r) \right. \\ \left. + \left( z_r + \frac{h}{2} \right) h \nabla [\nabla \cdot (hu_r)] \right\} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + g \nabla \mathcal{Y} + (u_r \cdot \nabla) u_r + z_r \left\{ \frac{z_r}{2} \nabla (\nabla \cdot \frac{\partial u_r}{\partial t}) \right. \\ \left. + \nabla [\nabla \cdot (h \frac{\partial u_r}{\partial t})] \right\} = 0 \quad (22)$$

式(21)及式(22)為以任意水深形式表示之 Boussinesq equations。將 $z_r = 0$ 代入後可得以靜水面(Still water level)速度形式表示之 Boussinesq equations；將 $z_r = -h$ 代入後可得以底床(Bottom)速度形式表示之 Boussinesq equations。比較不同水深形式下一維線性化之 Boussinesq equations 與線性波分散關係式得知，兩者在相位速度誤差小於 5% 的條件下，則方程式之適用相對水深 $h/L_0$ 將延伸至 0.5。

#### 四、計算結果與討論

利用數值計算上之有限差分法(Finite difference method)進行數值離散差分。根據 Wei and Kirby(1995)提出之數值方法，使用高階 Fourth-order Adams-Bashforth- Moulton-predictor-corrector scheme，將計算網格改以交錯網格(Staggered grid)進行計算。並且將動量方程式中之對流項(Convective terms)，利用 Second-order upwind scheme 求解，以增加數值計算上之穩定性。並提出各種適當之計算邊界條件，以符合波浪傳遞的現象。為方便數值上之計算，先重新改寫 $\mathcal{Y}$ 、 $u$ 、 $\nu$ 的方程式形式，並分別討論在時間上以及空間上之離散方程式。首先根據式(21)及式(22)，改寫 $\mathcal{Y}$ 、 $u$ 、 $\nu$ 為以下之形式：

$$\mathcal{Y}_t + [(h+\mathcal{Y})u]_x + [(h+\mathcal{Y})\nu]_y + \{a_1 h^3 (u_{xx} + \nu_{yy}) \\ + a_2 h^2 [(hu)_{xx} + (h\nu)_{yy}]\}_x + \{a_1 h^3 (u_{xy} + \nu_{yy}) \\ + a_2 h^2 [(hu)_{xy} + (h\nu)_{yy}]\}_y = 0 \quad (23)$$

$$u_t + g \mathcal{Y}_x + uu_x + \nu u_y + b_1 h^2 (u_{xx} + \nu_{yy}) \\ + b_2 h [(hu)_{xx} + (h\nu)_{yy}] = 0 \quad (24)$$

$$\nu_t + g \mathcal{Y}_y + u \nu_x + \nu \nu_y + b_1 h^2 (u_{xy} + \nu_{yy}) \\ + b_2 h [(hu)_{xy} + (h\nu)_{yy}] = 0 \quad (25)$$

式中之 $a_1$ 、 $a_2$ 、 $b_1$ 及 $b_2$ 分別表示如下：

$$a_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{z_r}{h} \right)^2 - \frac{1}{6}, \quad a_2 = \frac{z_r}{h} + \frac{1}{2}$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{z_r}{h} \right)^2, \quad b_2 = \frac{z_r}{h}$$

$$z_r = -0.553h, \quad (\text{取 } r = -\frac{2}{5} \text{ 時}) \quad (26)$$

在計算上採用疊代方式進行計算，其計算之收斂條件表示如下：

$$\Delta f = \frac{\sum_{i,j} |f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{(n+1)*}|}{\sum_{i,j} |f_{i,j}^{n+1}|} < 0.001 \quad (27)$$

將所得之修正值與預測值進行比較，兩者是否同時滿足收斂條件。倘若不滿足收斂條件，採用數值上之 S.O.R.(Successive Over-Relaxation)方法，重新給定預測值後求解修正值；若滿足收斂條件，此計算結果即為下一時階之計算之初值。在式(27)中， $f$ 分別表示為  $y$ 、 $u$ 、 $v$ ，其值皆必須小於 0.001 始為滿足收斂條件。

在整個計算域中，邊界圍繞在計算域之四週，需依照不同之狀況，分別給定不同的計算邊界條件。當波浪傳遞至開放邊界時，消波邊界條件應有效地吸收波浪之能量，並且避免數值反射波之產生。一般較常使用的是輻射邊界條件(Sommerfeld radiation condition)，其表示式如下所示：

$$f_t + C_x f_x = 0 \quad (28)$$

$$f_t + C_y f_y = 0 \quad (29)$$

上式中  $f$  分別表示為  $y$ 、 $u$ 、 $v$ 。 $C_x$  及  $C_y$  為相位速度於  $x$  方向及  $y$  方向的分量。

在一般之計算例中，相位速度通常給定為淺水波速  $C = \sqrt{gh}$ 。由於在實際之計算例中，特別是不規則波之狀況下，相位速度很難準確的估計，因此在給定輻射邊界條件之後，仍然會產生波浪能量反射的現象。為減少此一波浪反射現象，在計算域加入一阻尼項(Damping terms)或加入海綿消波層(Sponge layer)，可使此一現象獲得改善。根據 Wei and Kirby(1995)利用 Orszag(1981)所提出之方法，將阻尼項加入動量方程式  $u$ 、 $v$  的計算之中，稱為「Newtonian cooling」。

$$u_t + gY_x + uu_x + vv_y + b_1 h^2 (u_{xxr} + v_{xyr}) + b_2 h [h(u)_{xxr} + (hv)_{xyr}] = -w_1(x)u \quad (30)$$

$$v_t + gY_y + uv_x + vv_y + b_1 h^2 (u_{xyr} + v_{yyr}) + b_2 h [h(u)_{xyr} + (hv)_{yyr}] = -w_1(x)v \quad (31)$$

式中  $w_1(x)$  可表示如下：

$$w_1(x) = \begin{cases} 0 & ; & x < x_s \\ \exp\left(\frac{x-x_s}{x_l-x_s}\right)^n - 1 & & \\ r_1 S \left[ \frac{x_l-x_s}{\exp(1)-1} \right]; & & x > x_s \end{cases} \quad (32)$$

式(32)中各項變數定義如下： $r_1$  為依照不同之計算例給定不同之常數； $S$  為給定阻尼項之波浪角頻率； $x_s$  為計算域中阻尼項起點之位置； $x_l$  為整個計算域之距離； $(x_l-x_s)$  之距離通常選取 2 倍至 3 倍波長作為計算長度；本文之後的計算例，選取  $n=1$ 。

首先為驗證消波邊界條件在數值計算上之適用性。給定一週期  $T=3.05$  sec 及

波高  $H_0=0.2\text{m}$  之規則波，通過長度為  $12 \times L_0\text{m}$  的等水深地形  $h=4.2\text{m}$  之後，在消波邊界附近水面波形變化之情形。在邊界處之處理方式除了給定輻射邊界條件之外並加上消波邊界條件，而消波邊界條件之長度為  $2 \times L_0\text{m}$ 。計算時所設定之網格間距  $\Delta x = L_0/40$  及時間間隔  $\Delta t = T/60$ 。圖 2 為波浪完全發展之後，一個週期時間內 ( $t=88.45\text{ sec}$  至  $t=91.5\text{ sec}$ )，每增加  $T/4$  時間時水面波形變化之情形。由圖 2 可知，以輻射邊界條件加上消波邊界條件，可有效地降低波浪由邊界產生反射的現象。

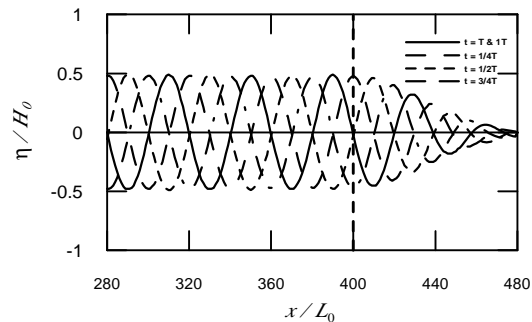


圖 2 消波邊界處水面波形變化圖

其次利用孤立波通過長距離平面之計算例，可作為數值模式之穩定性及守恆性的驗證。利用 Wei and Kirby(1995)所推導之孤立波解，作為波浪入射條件。在另一邊界處給定輻射邊界條件。計算例所需輸入之基本資料如下：水深  $h=0.45\text{ m}$ 、波高  $H=0.045\text{m}$ 、網格間距  $\Delta x = 0.1\text{ m}$ 、時間間隔  $\Delta t = 0.04\text{ sec}$ 。圖 3 為孤立波 ( $H/h=0.1$ )數值解與理論解在不同計算時間時的空間位置比較圖。由圖 3 可知，數值解大致與理論解符合。並且由圖中可發現，隨著波浪傳遞距離的增加，其尾端會產生分散性的現象(Dispersive tail)，並且此現象會隨著傳遞距離的增加而有持續拖長的現象。

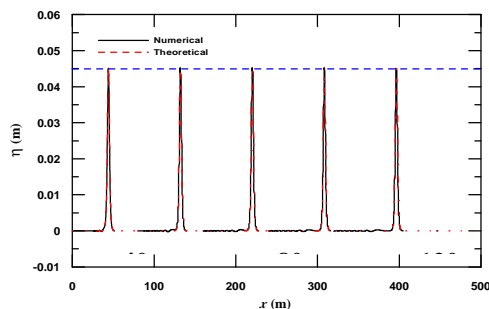


圖 3  $H/h=0.1$  數值解與理論解在不同計算時間時的位置圖。

其次在相同的計算條件之下，給定不同的相對波高  $H=0.045\text{m}(H/h=0.1)$ 、 $H=0.09\text{m}(H/h=0.2)$ 及  $H=0.135\text{m}(H/h=0.3)$ ，分別比較在時間  $t=40\text{sec}$  及  $t=120\text{sec}$  時，其水面波形之化情形。由圖 4 不同相對波高  $H/h=0.1$ 、 $H/h=0.2$ 、 $H/h=0.3$  之孤立波波比較圖可知，隨著給定之相對波高的增加，波高會有降低的現象之外，數值上所得之相位速度也會逐漸變小，相位誤差會逐漸變大。造成此誤差產

生之原因，應是實際之相位速度值與數值上( $r=-2/5$ )所估計之相位速度值不一致所造成的。

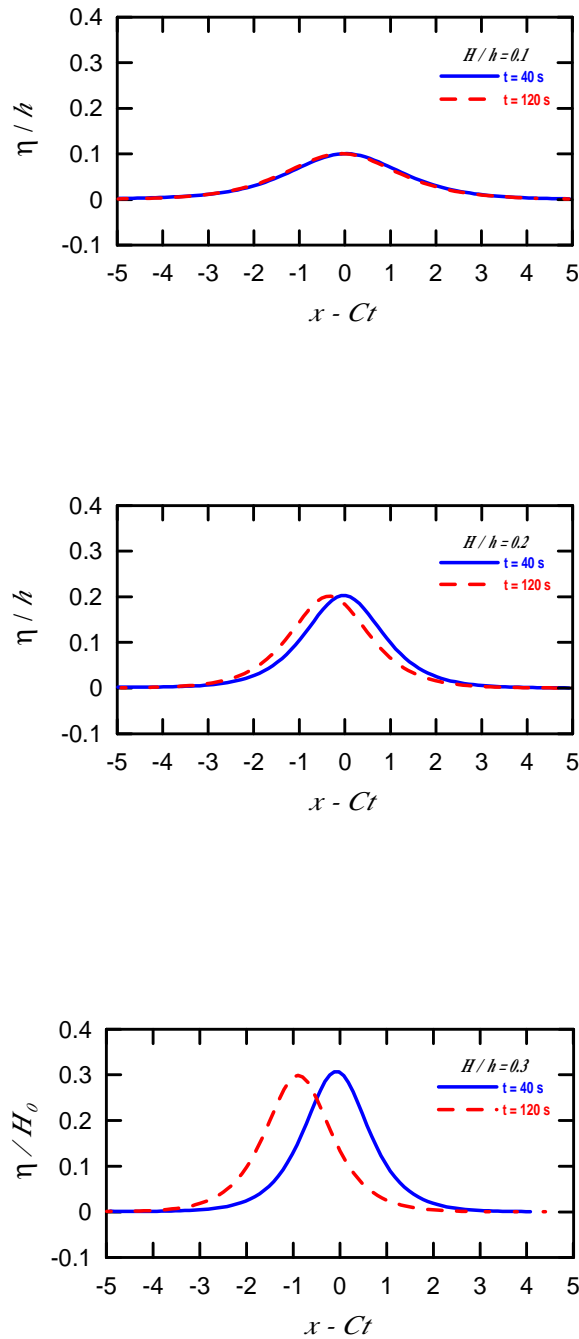


圖 4 不同相對波高孤立波波型比較圖

考慮一 Monochromatic wave 通過一等水深之地形  $h=4.2\text{mm}$  時，波浪傳遞之現象。給定之入射波高  $H=0.2\text{m}$ 、週期  $T=2.5\text{sec}$  之 Sinusoidal wave，其相對水深為  $h/L_0=0.43$ 。在另一邊界給定輻射邊界條件及消波邊界條件，計算時所選取之網格間距  $\Delta x=L_0/40$ 、時間間隔為  $\Delta t=T/60$ 。在此相對水深  $h/L_0=0.43$  之條件下，

分別比較 Conventional Boussinesq equations，即為以平均水深速度表示之 Boussinesq equations( $r=-1/3$ )及 Extended Boussinesq equations( $r=-2/5$ )兩者之間的差異。根據計算結果可知：Conventional Boussinesq equations 其相位速度 (Phase celerity) 誤差為-48%，群波速(Group velocity)誤差為-90%，波浪能量不能有效地傳遞，而波長也顯得較短；Extended Boussinesq equations 其相位速度誤差為3%，群波速誤差為12%，與 Conventional Boussinesq equations 比較之下，可大幅減少誤差的產生。圖 5、圖 6 為相同計算條件下，計算時間  $t=50T$  時 Conventional Boussinesq equations 與 Extended Boussinesq equations 的波形剖面圖。

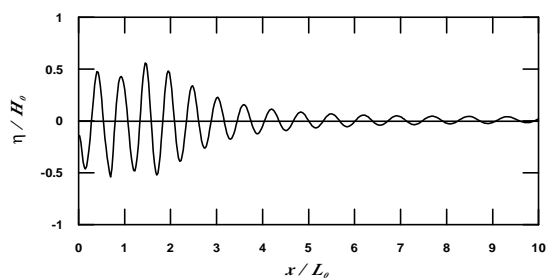


圖 5 Conventional Boussinesq equations 計算時間  $t=50T$  時的波形剖面圖

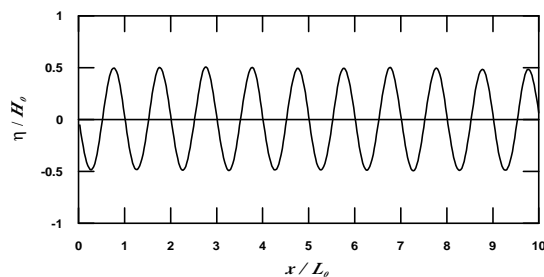


圖 6 Extended Boussinesq equations 計算時間  $t=50T$  時的波形剖面圖

根據以上理論分析以及數值計算例之驗證。本文提出一 Boussinesq equations 之數值模式，可有效預測一維波浪傳遞之現象。以下為本研究所得之數點結論：本文利用 [2,2] Padé approximation 推導之 Boussinesq equations，在相位速度誤差在 5% 的條件下時，其相對水深限制  $h/L_0$  可達到 0.5。數值方法採用交錯網格計算，可避免數值震盪之產生。利用 Fourth-order Adams-Bashforth-Moulton predictor-corrector scheme 求解方程式，其中非線性項利用 Second-order upwind scheme 求解，可增加計算時之穩定性。邊界值之給定在本計算模式中甚為重要，由計算例可得知，利用消波邊界條件可有效地降低波浪由邊界產生反射的現象。其次利用孤立波之計算例可得到本計算模式穩定性及守恆性的驗證。

## 五、計畫成果自評

參與人員經由理論研究與數值計算，將對於 Boussinesq equation 應用於波浪變形研究有較為完善之了解，同時對於理論方法的提升與數值技巧會有充份的訓練，有助於以後從事相關問題研究能力與創造性。與原先申請計劃之目的相符合，預估達到八成七之期望，此成果預定發表於第二十五屆海洋工程研討會。

## 六、參考文獻

- [1]. Agnon, Y., Madsen, P.A. and Schäffer, H.A., 1999, “ *A new approach to high-order Boussinesq models*, “ J. Fluid Mech., vol.399, pp.319-333.
- [2]. Boussinesq, J. (1872) “ *Theorie des ondes et remous qui se propagent le long d'un canal rectangularire horizontal, en communiquant au liquide contenu dansce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au*, “ *J. Math. Pure et Appl.*, 2<sup>nd</sup> Series, Vol.17, pp. 55-108.
- [3]. Gobbi, M.F. and Kirby, J.T., 1996, “ *A forth order Boussinesq-type wave model*, “ Proc. 25<sup>th</sup> Int. Conf. on Coastal Eng., pp.1116-1129.
- [4]. Gobbi, M.F. and Kirby, J.T., 1999, “ *Wave evolution over submerged sills: tests of a high-order Boussinesq model*, “ Proc. 25<sup>th</sup> Int. Conf. on Coastal Eng., pp.1116-1129.
- [5]. Madsen, P.A., R. Murray and O.R. Sørensen (1991) “ *A new form of Boussinesq equations with improved linear dispersion Characteristics*, “ *Coastal Eng.* 15, pp. 371-388.
- [6]. Madsen, P.A. and O.R. Sørensen (1992) “ *A new form of Boussinesq equations with improved linear dispersion Characteristics Part2. A slowly-varying bathymetry*, “ *Coastal Eng.* 18, pp. 183-204.
- [7]. Madsen, P.A., Banijamali, B., Schäffer, H.A. and Sørensen, O.R., 1996, “ *Boussinesq type equations with high accuracy in dispersion and nonlinearity*, “ Proc. 25<sup>th</sup> Int. Conf. on Coastal Eng., pp.95-108.
- [8]. McCowan, A.D. (1985) “ *Equation systems for modeling dispersive flow in shallow water*, “ *Proc. 21<sup>st</sup> IAHR Congress*, Melbourne, pp. 51-57.
- [9]. McCowan, A.D. (1987) “ *The range of application of Boussinesq type numerical short wave models*, “ *Proc. 22<sup>nd</sup> IAHR Congress*, Laussane, pp. 378-384.
- [10].Nwogu, O. (1993) “ *Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation*, “ *J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, ASCE, 119(6), pp. 618-638.
- [11].Orszag, S. A. (1980) “ *Approximation of radiation boundary conditions*, “ *J. of Computational Physics*, pp. 115-135.

- [12].Peregrine, D.H. (1967) “ Long wave on a beach, “ *J. Fluid Mech.*, vol.27, pp. 815-827.
- [13].Schäffer, H.A. and Madsen, P.A., 1995, “ *Further enhancements of Boussinesq-type equations*, “ *Coastal Eng.* 26, pp.1-14.
- [14].Wei, G., J.T. Kirby, S.T. Grilli and R. Subramanya (1995) “ Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations, “ *J. Fluid Mech.*, Vol294, pp. 71-92.
- [15].Wei, G., J.T. Kirby, Gobbi, M.F., 2000, “ *A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves, Part 2. Extended to  $\mathcal{O}(kh)^4$* , “ *J. Fluid Mech.*, Vol294, pp.71-92.
- [16].Witting, J.M., 1984, “ *A unified model for the evolution of nonlinear water waves*, “ *J. of Computational Physics.* 56, pp.203-236.