

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

Boussinesq 方程式在近岸海域波場分析之研究(3/3)

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC93-2611-E-002-003-

執行期間：93年08月01日至94年07月31日

執行單位：國立臺灣大學工程科學及海洋工程學系暨研究所

計畫主持人：林銘崇

共同主持人：丁肇隆

計畫參與人員：許朝敏

報告類型：完整報告

報告附件：出席國際會議研究心得報告及發表論文

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 94 年 10 月 27 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

Preparation of NSC Project Reports

計畫編號：NSC 93-2611-E-002-003

執行期限：93 年 8 月 1 日至 94 年 7 月 31 日

主持人：林銘崇 台灣大學工程科學及海洋工程學系
共同主持人：丁肇隆 台灣大學工程科學及海洋工程學系
計畫參與人員：許朝敏 台灣大學工程科學及海洋工程學系

一、中文摘要

本文嘗試推導高階非線性含流之布斯尼斯克方程式(Boussinesq equations)，模擬波浪在波流場中變化情形。在推導的過程中，所有有關非線性參數 $\varepsilon (= a_0/h_0$ ，振幅與水深的比值) 的項不作任何的簡化；而對於分散性參數 $\mu (= h_0/L_0$ ，水深與波長的比值) 方面，僅保留至 $O(\mu^2)$ ，其餘較高階有關分散性的項則被忽略，因此推導出之方程式準確至 $O(\varepsilon^3\mu^2)$ ，可以處理包含較強非線性及弱分散性的問題。依據 Schäffer and Madsen (1995) 的建議方法，將此方程式擴展適用至相對水深(h/L)較深的區域。藉由數值模擬結果發現，此布斯尼斯克方程式可以模擬波流場中波浪之變形。

關鍵詞：布斯尼斯克方程式、非線性、分散性、波浪變形。

Abstract

A set of Boussinesq-type equations including current effects was also derived to examine wave transformations. The nonlinear terms, ε is the wave amplitude to water depth ratio, are not simplified during mathematical derivations. In the aspect of frequency dispersion, the terms with orders higher than $O(\mu^2)$ (μ is the water depth to wavelength ratio) are neglected. The derived equations are accurate to $O(\varepsilon^3\mu^2)$. Using the method proposed by Schäffer and Madsen (1995), the derived equations can be applied to a larger relative water depth, h/L . The numerical results reveals that Boussinesq-type equations can simulate the wave

transformations in the presence of currents.

Keywords: Boussinesq equation, nonlinearity, dispersion, wave transformations.

二、緣由與目的

在一開放性海岸，由於海底地形之變化，波浪以平面波方式入射，在波浪前進過程中，受到水深變化影響，首先發生淺化(shoaling)與折射(refraction)現象。到達結構物時在結構物前發生反射(reflection)現象，又在結構物後側會發生繞射(diffraction)現象。同時海洋中有各種不同特性之水流運動，例如海流、潮流(tidal current)及近岸流(nearshore current)等；由於這些水流的存在，因此海面之波浪受其影響後之波動性質與純波動時不同。綜合上述之現象，近岸海域內，因為水深變化影響，以及水流、波浪與結構物間之交互作用，將會使波況十分複雜。而最近數十年來，由於海洋工程之迅速發展及大量巨型海洋結構物之建造，因此於實際預報或評估海岸問題時，為達到合理精確度，水流對波浪之影響必須受到相當重視。由於布斯尼斯克方程式可以同時考慮波浪的非線性(nonlinearity)及頻散(frequency dispersion)的效應，所以本文嘗試推導波流場內波浪變形的控制方程式，藉由此方程式的數值模擬，希望將水流對波浪的效應能夠有進一步的瞭解。並透過數值實驗驗證此方程式的正確性，希望藉由此方程式對於波浪、水流與地形變化間的交互作用現象可以做一完整的描述。

布斯尼斯克方程式是由 Boussinesq (1872)將水深方向以多項式展開處理後，所

得到的方程式。布斯尼斯克方程式可解析波浪在變水深時之淺化、折射、繞射、部分反射及有限振幅且可處理方向性與不規則性等現象。此方程式對於非線性與分散性之效應同時考慮。而在處理不同問題時，速度變數有一些不同型式，如表面速度、水底速度、水深平均速度與水深積分速度等不同型態。其次由於非線性與分散性等項都是高次項，所以可以配合使用線性長波方程式求解。傳統布斯尼斯克方程式在應用上之限制主要是必須滿足淺水條件，其後許多學者陸續對此方程式作進一步之推導及改善，以增加其適用性。此方程式的特性可藉由二個參數的數學操作來擴展其適用性，此二個參數分別是非線性參數 (ε) 及分散性參數 (μ)。以下針對相關研究作一介紹：

Peregrine (1967) 以微小振幅波理論為基礎，將連續方程式與動量守恆方程式沿著水深方向積分，將三維問題簡化成為二維問題，以水深平均速度(depth-averaged velocity)為變數，推導出相當於等水深之布斯尼斯克方程式，並成為以後發展布斯尼斯克方程式之原始形式(conventional Boussinesq equations)。在此方程式中，假設 $O(\varepsilon) \approx O(\mu^2) \ll 1$ ，所以此方程式僅適用於弱非線性及弱分散性的條件，其分散性可以以 Padé [0,2] approximant 來表示。若是非線性較大或是相對水深較深的區域，此方程式不足以用來描述模擬。在與線性波波速比小於 5% 的誤差下，此方程式可以適用至相對水深 $kh < \pi/2$ 的範圍，其中波數 $k = 2\pi/L$ 。Witting (1984) 應用 Padé 近似(approximation)來改善布斯尼斯克方程式的分散性，將自由表面水平速度(free surface velocity)為變數表示之非線性水深積分動量方程式作一處理，並把速度項以泰勒展開式展開，結果得到以不同水深速度表示之一維布斯尼斯克方程式。此方程式最大的限制僅適用於等水深的狀況，並且不易將其使用於二維之平面波場計算，其分散性可以以 Padé [2,2] 近似來表示，在與線性波波速比小於 5% 的誤差下，此方程式可以適用至相對水深 $kh < \pi$ 的範圍，已經達到深水波適用的範圍。

由於一維布斯尼斯克方程式線性化之分散關係式，會隨著相對水深增加而誤差值變大，使得原始形式之布斯尼斯克方程式在應用上有水深範圍的限制，並且此方程式僅適用於非線性效應較弱的範圍。因此後續之研究遂著重於改善方程式相對水深範圍之限制，並且將高階非線性項的影響包含在方程式之中，以增加方程式的適用性。

Madsen et al. (1991) 改善布斯尼斯克方程式之分散關係式，使其可適用於較大之相對水深。將三階微分項以線性化長波方程式處理後，加入動量方程式中推導而得，與傳統布斯尼斯克方程式比較後可知，可得到較佳之分散性 Padé [2,2] 近似，並且此方程式可以模擬不規則波從深水到淺水的變化情形。在深水條件中，波速與一階史托克波(Stokes waves)相符合；在淺水條件下，新的方程式與傳統布斯尼斯克方程式一致。Madsen and Sørensen (1992) 將 Peregrine (1967) 的動量方程式線性化，對空間座標微分二次後，乘上一係數再加回原動量方程式，推導出一新之布斯尼斯克方程式，可計算不規則波通過緩變地形時波浪變化之情形。與原來布斯尼斯克方程式最大的差異，是此新的方程式有考慮底床坡度效應，並且此效應對於方程式的淺化特性有重要的影響。在與線性波波速比小於 5% 的誤差下，將相對水深之限制延伸至 0.5。

Nwogu (1993) 推導出以任意水深速度為變數表示之二維布斯尼斯克方程式，並可有效的降低線性化後與原方程式之間的相位差異，其分散關係式形式與 Witting (1984) 及 Madsen et al. (1991) 所得到的一致，與線性波波速比小於 1% 的誤差下，其相對水深之限制延伸至 0.42。Wei et al. (1995) 以 Nwogu (1993) 所推導出之方程式為基礎，將方程式中有關非線性的項，完全含括討論，並利用一有效之數值模式，四階亞當斯-貝西福斯-摩頓之預測-修正法(Fourth-order Adams-Bashforth-Moulton predictor-corrector scheme)求解布斯尼斯克方程式，可有效降低計算時所產生之誤差，一般將其所提出之模式稱為 **WKGS** 模式。結果顯示，對於波高、波速及質點運動的預估比傳統布斯尼斯克方程式優越。

Schäffer and Madsen (1995)結合 Madsen and Sørensen (1992)及 Nwogu (1993)概念，推導出一新的布斯尼斯克方程式，此方程式大幅改善分散性與淺化特性。將此方程式線性化後之分散關係式，準確至 Padé[4,4] 近似，其相對水深限制延伸至 1.0。

Agnon et al. (1999)提出一新近似法求得高階之布斯尼斯克方程式，利用自由表面邊界條件及底床邊界條件 (bottom boundary condition) 求解拉普拉斯方程式 (Laplace equation)，將此解以有限級數展開，得到以水平速度分量及垂直速度分量表示在靜水面之速度場，此方程式以水表面變動量、自由表面及靜水面之水平及鉛直方向速度，速度勢函數在自由表面之水平梯度等六個變數表示。此方程式的適用範圍可達 $kh \approx 6$ ，但因方程式本身包含太多項，在數值上較不易求解。Gobbi and Kirby (1999)推導出任意水深速度為變數之布斯尼斯克方程式，在分散性方面可以準確至 $O(\mu^4)$ ，並且保留所有有關非線性的效應，數值計算與實驗結果比較後發現，此方程式對於非線性波通過潛堤的淺化及衰變情形，可以準確預估變化。Gobbi et al. (2000)以二個任意水深的線性組合，推導出之布斯尼斯克方程式，其適用範圍可達 $kh \approx 6$ 。Madsen et al. (2002)將拉普拉斯方程式的正解(exact solution)以有限級數在任意水深位置展開，此任意水深可由線性速度分佈的做小水深積分誤差得到，並配合 Padé 近似的假設，推導出之方程式可以適用至 $kh=40$ 的範圍，在鉛直方向速度的變化可以適用至 $kh=12$ ，對於布斯尼斯克方程式分散性的改善相當大，與實驗驗證結果顯示，在未達碎波前，波場模擬效果相當良好。

在近岸海域內，水流的效應對波浪的影響相當重要，Yoon and Liu (1989)假設波浪質點速度與水流速度的階數大小一致，推導出一布斯尼斯克方程式模擬波浪與水流的交互作用。Prüser and Zielke (1990)推導出可模擬大尺度水流效應的波流控制方程式，不過此方程式僅可適用於波數較小的波浪。Chen et al. (1998)假設水流在鉛直方向均勻分佈，速度階數大小與波浪在淺水時之波速一樣，推導出一控制方程式，

此方程式可以模擬波浪遭遇逆向水流時產生之波阻的現象，由於捨去 $O(\varepsilon\mu^2, \mu^4)$ 以上之高階項，使得此方程式僅適用於非線性及分散性較弱的波浪，然而方程式中加入 Schäffer and Madsen (1995)所建議四個有關地形及淺化的參數，使得方程式的分散性從淺水擴展至水深較深的區域。Chen et al. (1999)研究淺水中波流的交互作用現象，以 Yoon and Liu (1989)的方程式為基礎推導出一方程式足以描述波、流與淺水之間的交互作用，並作一系列的數值實驗。與無流狀況下結果比較後，發現逆向流雖然表面上會使波高增大，事實上會降低阿瑟數(Ursell number)、拍波長(beat-length)以及高階和波與主頻波的比值；順向流的結果恰好相反。而本文所推導之波流作用下之布斯尼斯克方程式，因為對分散性的考量忽略 $O(\mu^2)$ 以上之高階項，而對於非線性的項數全部保留，並參考 Schäffer and Madsen (1995)的方法，可以將分散性擴展至相對水深較大的地方，因此對於波流場中波浪之變化情形，應可更準確的模擬。

三、理論推導

3.1 控制方程式及邊界條件

考慮一波流共存之流場，其流體特性滿足非壓縮與非旋性，因此控制方程式可表示如下：

$$\nabla'^2 \Phi' + \Phi'_{z'z'} = 0, \quad -h' \leq z' \leq \eta' \quad (1)$$

而相關之邊界條件如下所列：

(a). 動力邊界條件：

$$\Phi'_t + \frac{1}{2}[(\nabla' \Phi')^2 + (\Phi'_{z'})^2] + \frac{p'}{\rho'} + g'\eta' = 0, \quad \text{at} \\ z' = \eta'; \quad (2)$$

(b). 運動邊界條件：

$$\eta'_t + \nabla' \eta' \cdot \nabla' \Phi' - \Phi'_{z'} = 0, \quad \text{at} \quad z' = \eta'; \quad (3)$$

(c). 底床不透水邊界條件：

$$\nabla' h' \cdot \nabla' \Phi' + \Phi'_{z'} = 0, \quad \text{at} \quad z' = -h'. \quad (4)$$

相關符號定義如下： $\Phi'(x', y', z', t')$ 為流場中之速度勢函數、 ∇' 是水平梯度因子，定義為 $(\partial/\partial x', \partial/\partial y')$ 、水表面變動量為 $\eta'(x', y', t')$ 、 $\mathbf{x}' = (x', y')$ 是水平座標，而 z' 為鉛直座標。 t' 為時間、 g' 表示重力加速度、 ρ' 是流體密度、 p' 是流體壓力，在水表面上為零，水深可以表示成 $h'(x', y')$ 。

其次選定波長 l'_0 、水深 h'_0 和波浪振幅 a'_0 為特徵長度(characteristic length)，將方程式進行無因次化。無因次化之參數分別表示如下：

$$x = \frac{x'}{l'_0}, \quad y = \frac{y'}{l'_0}, \quad z = \frac{z'}{h'_0}, \quad t = \frac{\sqrt{gh'_0}}{l'_0} t',$$

$$\eta = \frac{\eta'}{a'_0}, \quad h = \frac{h'}{h'_0}, \quad \Phi = \frac{h'_0}{a'_0 l'_0 \sqrt{gh'_0}} \Phi' \quad (5)$$

因此相關之方程式與邊界條件，可藉由上式所述之參數進行無因次化，可簡化如下，

$$\nabla^2 \Phi + \frac{1}{\mu^2} \Phi_{zz} = 0, \quad -h \leq z \leq \varepsilon \eta; \quad (6)$$

$$\nabla h \cdot \nabla \Phi + \frac{1}{\mu^2} \Phi_z = 0, \quad \text{at } z = -h; \quad (7)$$

$$\Phi_t + \frac{\varepsilon}{2} [(\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{\mu^2} (\Phi_z)^2] + \eta = 0, \quad \text{at } z = \varepsilon \eta; \quad (8)$$

$$\eta_t + \varepsilon \nabla \eta \cdot \nabla \Phi - \frac{1}{\mu^2} \Phi_z = 0, \quad \text{at } z = \varepsilon \eta. \quad (9)$$

上述四式中 $\varepsilon = a'_0 / h'_0$ 與 $\mu^2 = (h'_0 / l'_0)^2$ 分別表示非線性與分散性參數。

而速度勢函數 Φ 可表示為波速度勢函數 Φ_w 與流速度勢函數 Φ_c 之和。在此，我們假設流之速度在鉛直方向為均勻分布，所以流之速度可表示為 $U = \nabla \Phi_c = (U, V)$ 。因此式(6)重新推導成為

$$\nabla^2 (\Phi_w) + \frac{1}{\mu^2} (\Phi_w)_{zz} = 0, \quad -h \leq z \leq \varepsilon \eta \quad (10)$$

而波速度勢函數則以泰勒級數(Taylor series)在 $z = -h$ 展開成方程式(11)，

$$\Phi_w(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} (z+h)^m \phi^{(m)}(\mathbf{x}, t) \quad (11)$$

上式中 $\phi^{(m)}(\mathbf{x}, t)$ 為波速度勢函數對於變數 z 在 $z = -h$ 之第 n 階微分項(n^{th} derivatives)。將方程式(11)代入方程式(10)中，可獲得一循環關係式表示成方程式(12)，

$$\begin{aligned} \phi^{(m+2)} = & -\mu^2 \times (\nabla^2 \phi^{(m)} \\ & + 2(m+1) \nabla h \cdot \nabla \phi^{(m+1)} \\ & + (m+1) \nabla^2 h \phi^{(m+1)}) / ((m \\ & + 2)(m+1)(1 + \mu^2 |\nabla h|^2)) \end{aligned} \quad (12)$$

將變數 Φ 以變數 Φ_w 取代，並且將式(11)代入式(7)中，可以得到 $\phi^{(1)}$ 與 $\phi^{(0)}$ 之關係式如下：

$$\phi^{(1)} = -\mu^2 \frac{(\nabla h \cdot \nabla \phi^{(0)} + U \cdot \nabla h)}{1 + \mu^2 |\nabla h|^2} \quad (13)$$

利用循環關係式(12)與(13)，式(11)可重新改寫成下式

$$\begin{aligned} \Phi_w(\mathbf{x}, z, t) = & \phi^{(0)} - \mu^2 [h \nabla h \cdot \nabla \phi^{(0)} \\ & + \frac{h^2}{2} \nabla^2 \phi^{(0)} + z \nabla \cdot (h \nabla \phi^{(0)}) \\ & + \frac{z^2}{2} \nabla^2 \phi^{(0)}] \\ & - \mu^2 (h+z)(U \cdot \nabla h) + O(\mu^4) \end{aligned} \quad (14)$$

我們將波速度勢函數在 $z = z_\alpha(\mathbf{x})$ 之速度以一新的變數 Φ_{w_α} 來表示，因此式(14)重新改寫成式(15)，

$$\begin{aligned} \Phi_{w_\alpha}(\mathbf{x}, t) = & \phi^{(0)} - \mu^2 [h \nabla h \cdot \nabla \phi^{(0)} \\ & + \frac{h^2}{2} \nabla^2 \phi^{(0)} + z_\alpha \nabla \cdot (h \nabla \phi^{(0)}) \\ & + \frac{z_\alpha^2}{2} \nabla^2 \phi^{(0)}] - \mu^2 (h \\ & + z_\alpha)(U \cdot \nabla h) + O(\mu^4) \end{aligned} \quad (15)$$

將式(14)與式(15)相減，可以得到 Φ_w 與 Φ_{w_α} 之關係式如下所示，

$$\begin{aligned} \Phi_w(\mathbf{x}, z, t) = & \Phi_{w_\alpha}(\mathbf{x}, t) - \mu^2 [(z - z_\alpha) \\ & \times \nabla \cdot (h \nabla \phi^{(0)}) + \frac{z^2 - z_\alpha^2}{2} \\ & \times \nabla^2 \phi^{(0)}] - \mu^2 (z - z_\alpha) \\ & \times (U \cdot \nabla h) + O(\mu^4) \end{aligned} \quad (16)$$

將方程式(6)對變數 z 從底床 $z = -h$ 到自由液面 $z = \varepsilon \eta$ 作積分，並且將邊界條件式(7)與式(9)代入可得

$$\eta_t + \nabla \cdot \int_{-h}^{\varepsilon \eta} \nabla \Phi dz = 0 \quad (17)$$

並以式(16)中之 Φ_w 與 Φ_c 將式(17)中之變數 Φ 取代，並將 Φ_w 取梯度操作，並以任意高程 $z = z_\alpha$ 代入，可以得到在 $z = z_\alpha$ 之速度 u_α ，

$$\begin{aligned} u_\alpha = & \nabla \Phi_{w_\alpha} + \mu^2 [\nabla z_\alpha \nabla \cdot (h \nabla \Phi_{w_\alpha}) \\ & + z_\alpha \nabla z_\alpha \nabla^2 \Phi_{w_\alpha} + \nabla z_\alpha (U \cdot \nabla h)] \\ & + O(\mu^4) \end{aligned} \quad (18)$$

因此 $\nabla \Phi_{w_\alpha}$ 可以使用變數 u_α 來替換表示，結果如下：

$$\begin{aligned}\nabla\Phi_{w_\alpha} &= \mathbf{u}_\alpha - \mu^2\nabla z_\alpha[\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\alpha)] \\ &+ z_\alpha(\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha) + (\mathbf{U}\cdot\nabla h) \\ &+ O(\mu^4)\end{aligned}\quad (19)$$

若將式(19)代入式(18)，可以得到一新的連續方程式，

$$\begin{aligned}\eta_t + \nabla\cdot[(h + \varepsilon\eta)\mathbf{u}_\alpha] + \mu^2\nabla\cdot\left\{\left(\frac{z_\alpha^2}{2} - \frac{h^2}{6}\right)h\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha)\right. \\ \left.+ (z_\alpha + \frac{h}{2})h\nabla[\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\alpha)]\right\} + \mu^2\nabla\cdot\left\{(z_\alpha + \frac{h}{2})h\nabla(\mathbf{U}\cdot\nabla h)\right\} + \nabla\cdot[(h + \varepsilon\eta)\mathbf{U}] \\ + \varepsilon\mu^2\nabla\cdot\{\eta z_\alpha\nabla[\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\alpha)] + \frac{1}{2}\eta z_\alpha^2\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha) \\ + \eta z_\alpha\nabla(\mathbf{U}\cdot\nabla h)\} - \varepsilon^2\mu^2\nabla\cdot\left\{\frac{\eta^2}{2}\nabla[\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\alpha)]\right. \\ \left.+ \frac{\eta^2}{2}\nabla(\mathbf{U}\cdot\nabla h)\right\} - \varepsilon^3\mu^2\nabla\cdot\left[\frac{\eta^3}{6}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha)\right] = O(\mu^4)\end{aligned}\quad (20)$$

其次，若將式(19)代入動力邊界條件式，可以推導出動量守恆方程式如式(21)所示，

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{\alpha,t} + \nabla\eta + \varepsilon(\mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla)\mathbf{u}_\alpha + \varepsilon(\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U} \\ + \varepsilon\nabla(\mathbf{u}_\alpha\cdot\mathbf{U}) + \mu^2\{z_\alpha\nabla[\nabla\cdot(h\mathbf{u}_{\alpha,t})] \\ + \frac{1}{2}z_\alpha^2\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_{\alpha,t})\} \\ + \varepsilon\mu^2\{\nabla z_\alpha[\mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla(\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\alpha))] \\ + z_\alpha\nabla[\mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla(\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\alpha))] \\ + z_\alpha\nabla z_\alpha[\mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha)] \\ + \frac{z_\alpha^2}{2}\nabla[\mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha)] \\ + [\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\alpha)]\nabla[\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\alpha)] \\ - \nabla(\eta\nabla\cdot(h\mathbf{u}_{\alpha,t})) + \nabla[z_\alpha\mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla(\mathbf{U}\cdot\nabla h)] \\ + \nabla[z_\alpha\mathbf{U}\cdot\nabla(\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\alpha))] \\ + z_\alpha\nabla z_\alpha[\mathbf{U}\cdot\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha)] \\ + \frac{z_\alpha^2}{2}\nabla[\mathbf{U}\cdot\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha)] + \nabla[z_\alpha\mathbf{U}\cdot\nabla(\mathbf{U}\cdot\nabla h)] \\ + \nabla[\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\alpha)(\mathbf{U}\cdot\nabla h)] + (\mathbf{U}\cdot\nabla h)\nabla(\mathbf{U}\cdot\nabla h)\} \\ - \varepsilon^2\mu^2\left\{\frac{1}{2}\nabla(\eta^2\nabla\cdot\mathbf{u}_{\alpha,t})\right. \\ \left.+ \nabla[\eta\mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla(\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\alpha))]\right. \\ \left.- \nabla[\eta[\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\alpha)]\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha]\right\} \\ - \varepsilon^2\mu^2\{\nabla[\mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla(\eta(\mathbf{U}\cdot\nabla h))]\} \\ + \nabla[\mathbf{U}\cdot\nabla[\eta\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\alpha)]] \\ + \nabla[\mathbf{U}\cdot\nabla[\eta(\mathbf{U}\cdot\nabla h)]] - \nabla[\eta(\mathbf{U}\cdot\nabla h)\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha]\} \\ - \varepsilon^3\mu^2\nabla\left\{\frac{\eta^2}{2}[\mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha)] - (\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha)^2\right\} \\ + [\mathbf{U}\cdot\nabla(\eta^2\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha)]\} = O(\mu^4)\end{aligned}$$

式(20)和(21)為波流場作用下之布斯尼斯克方程式。若 $\mathbf{U}=0$ 則此方程式與 Wei et al. (1995)所推導出之布斯尼斯克方程式完全一致。

為了增加此布斯尼斯克方程式之分散性，使其可適用至相對水深較大之範圍，根據 Schäffer and Madsen (1995)建議之方法，將此連續方程式與動量守恆方程式中，將各項數中含 μ^2 以上之項忽略，再引進四個有關淺化及地形變化之參數 ($\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$)，其中此四個參數階數(order)大約為 $O(1)$ 。將 $-\beta_1\mu^2\nabla\cdot(h^2\nabla)$ 和 $\beta_2\mu^2\nabla\cdot\nabla(h^2)$ 二個操作因子對連續方程式作運算；同理將 $-\gamma_1\mu^2h^2\nabla(\nabla\cdot)$ 與 $\gamma_2\mu^2h\nabla(\nabla\cdot h)$ 對動量守恆方程式作運算，其中四個參數 ($\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$) 可以改善波浪分散性與淺化特性，使布斯尼斯克方程式適用至水深較深之範圍。可以得到一新的連續方程式，

$$\begin{aligned}\eta_t + \nabla\cdot[(h + \varepsilon\eta)\mathbf{u}_\alpha] + \mu^2\nabla\cdot\left\{\left(\frac{z_\alpha^2}{2} - \frac{h^2}{6}\right)h\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha)\right. \\ \left.+ (z_\alpha + \frac{h}{2})h\nabla[\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\alpha)]\right\} + \mu^2\nabla\cdot\left\{(z_\alpha + \frac{h}{2})h\nabla(\mathbf{U}\cdot\nabla h)\right\} + \nabla\cdot[(h + \varepsilon\eta)\mathbf{U}] \\ + \varepsilon\mu^2\nabla\cdot\{\eta z_\alpha\nabla[\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\alpha)] \\ + \frac{1}{2}\eta z_\alpha^2\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha) + \eta z_\alpha\nabla(\mathbf{U}\cdot\nabla h)\} \\ - \varepsilon^2\mu^2\nabla\cdot\left\{\frac{\eta^2}{2}\nabla[\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\alpha)]\right. \\ \left.+ \frac{\eta^2}{2}\nabla(\mathbf{U}\cdot\nabla h)\right\} \\ - \varepsilon^3\mu^2\nabla\cdot\left[\frac{\eta^3}{6}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha)\right] \\ + NL1 = O(\mu^4)\end{aligned}\quad (22)$$

$$\begin{aligned}NL1 = &-\beta_1\mu^2\{\nabla\cdot[h^2\nabla\eta_t] \\ &+ \nabla\cdot[h^2\nabla[\nabla\cdot[(h + \varepsilon\eta)\mathbf{u}_\alpha]]] \\ &+ \nabla\cdot[h^2\nabla[\nabla\cdot[(h + \varepsilon\eta)\mathbf{U}]]] \\ &+ \beta_2\mu^2\{\nabla\cdot[\nabla(h^2\eta_t)] \\ &+ \nabla\cdot[\nabla[h^2\nabla\cdot[(h + \varepsilon\eta)\mathbf{u}_\alpha]]] \\ &+ \nabla\cdot[\nabla[h^2\nabla\cdot[(h + \varepsilon\eta)\mathbf{U}]]]\end{aligned}$$

新的動量守恆方程式，如式(23)，

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}_{\alpha,t} + \nabla\eta + \varepsilon(\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)\mathbf{u}_\alpha + \varepsilon(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} \\
& + \varepsilon\nabla(\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{U}) + \mu^2\{z_\alpha \nabla[\nabla \cdot (\mathbf{h}\mathbf{u}_{\alpha,t})] \\
& + \frac{1}{2}z_\alpha^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha,t})\} \\
& + \varepsilon\mu^2\{\nabla z_\alpha[\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla(\nabla \cdot (\mathbf{h}\mathbf{u}_\alpha))] \\
& + z_\alpha \nabla[\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla(\nabla \cdot (\mathbf{h}\mathbf{u}_\alpha))] \\
& + z_\alpha \nabla z_\alpha[\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha)] \\
& + \frac{z_\alpha^2}{2} \nabla[\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha)] \\
& + [\nabla \cdot (\mathbf{h}\mathbf{u}_\alpha)]\nabla[\nabla \cdot (\mathbf{h}\mathbf{u}_\alpha)] \\
& - \nabla(\eta\nabla \cdot (\mathbf{h}\mathbf{u}_{\alpha,t})) + \nabla[z_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla(\mathbf{U} \cdot \nabla h)] \\
& + \nabla[z_\alpha \mathbf{U} \cdot \nabla(\nabla \cdot (\mathbf{h}\mathbf{u}_\alpha))] \\
& + z_\alpha \nabla z_\alpha[\mathbf{U} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha)] \\
& + \frac{z_\alpha^2}{2} \nabla[\mathbf{U} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha)] + \nabla[z_\alpha \mathbf{U} \cdot \nabla(\mathbf{U} \cdot \nabla h)] \\
& + \nabla[\nabla \cdot (\mathbf{h}\mathbf{u}_\alpha)(\mathbf{U} \cdot \nabla h)] + (\mathbf{U} \cdot \nabla h)\nabla(\mathbf{U} \cdot \nabla h)\} \\
& - \varepsilon^2 \mu^2 \left\{ \frac{1}{2} \nabla(\eta^2 \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha,t}) \right. \\
& + \nabla[\eta \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla(\nabla \cdot (\mathbf{h}\mathbf{u}_\alpha))] \\
& - \nabla[\eta[\nabla \cdot (\mathbf{h}\mathbf{u}_\alpha)]\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha] \\
& - \varepsilon^2 \mu^2 \{\nabla[\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla(\eta(\mathbf{U} \cdot \nabla h))] \\
& + \nabla[\mathbf{U} \cdot \nabla[\eta\nabla \cdot (\mathbf{h}\mathbf{u}_\alpha)]] + \nabla[\mathbf{U} \cdot \nabla[\eta(\mathbf{U} \cdot \nabla h)]] \\
& - \nabla[\eta(\mathbf{U} \cdot \nabla h)\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha] \} \\
& \left. - \varepsilon^3 \mu^2 \nabla \left\{ \frac{\eta^2}{2} [\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) - (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha)^2] \right. \right. \\
& \left. \left. + [\mathbf{U} \cdot \nabla(\eta^2 \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha)] \right\} + NL2 = O(\mu^4) \tag{23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
NL2 = & -\gamma_1 \mu^2 h^2 \{ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha,t}) + \nabla(\nabla \cdot \nabla \eta) \\
& + \varepsilon \nabla[\nabla \cdot (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \mathbf{u}_\alpha)] \\
& + \varepsilon \nabla[\nabla \cdot (\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U})] \\
& + \varepsilon \nabla[\nabla \cdot (\nabla \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_\alpha))] \} \\
& + \gamma_2 \mu^2 h \{ \nabla[\nabla \cdot (\mathbf{h}\mathbf{u}_{\alpha,t})] + \nabla[\nabla \cdot (h\nabla \eta)] \\
& + \varepsilon \nabla[\nabla \cdot (\mathbf{h}\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \mathbf{u}_\alpha)] \\
& + \varepsilon \nabla[\nabla \cdot (h\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U})] \\
& + \varepsilon \nabla[\nabla \cdot (h\nabla \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_\alpha))] \}
\end{aligned}$$

適當選擇四個參數值可以使得布斯尼斯克方程式應用至相對水深較大之條件。

3.2 分散關係式之討論

為何此四個參數可以增加分散性？首先考慮一維等水深條件，將方程式(22)和(23)線性化，其中非線性項都被忽略。為了方便起見，將無因次之方程式還原成有單位之方程式，並將 primes 的符號省略後，可以得到式(24)與(25)二式：

$$\eta_t + h\mathbf{u}_{\alpha,x} + U\eta_x + (\alpha - \beta + \frac{1}{3})h^3 u_{\alpha,xxx} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
& - \beta h^2 \eta_{xxt} - \beta h^2 U \eta_{xxx} = 0 \\
& \mathbf{u}_{\alpha,t} + g\eta_x + U\mathbf{u}_{\alpha,x} + (\alpha - \gamma)h^2 u_{\alpha,xxx} \\
& - \gamma gh^2 \eta_{xxx} + (\alpha - \gamma)h^2 U u_{\alpha,xxx} = 0 \tag{25}
\end{aligned}$$

其中變數 $\alpha = 0.5(z_\alpha/h)^2 + z_\alpha/h$ 、 $\beta = \beta_1 - \beta_2$ ， $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ 。考慮一三角函數(trigonometric function)進行波，其自由液面波形函數與質點速度以複數(complex)形式表示如下：

$$\eta \approx \eta_0 \exp[i(kx - \omega t)] \tag{26}$$

$$\mathbf{u}_\alpha \approx \mathbf{u}_0 \exp[i(kx - \omega t)] \tag{27}$$

而常數 η_0 與 u_0 分別表示在等水深條件下，自由液面與質點速度之振幅大小。將式(27)和(28)代入式(25)與(26)，可以得到二個以 η_0 和 u_0 為變數之代數方程組，解此方程組可以得到非零解(nontrivial solutions)。此非零解即是在此波流場中，波浪之分散關係式，可以表示如式(28)：

$$\begin{aligned}
(\omega - Uk)^2 = & [1 - (\alpha - \beta + 1/3)(kh)^2][1 \\
& + \gamma(kh)^2]k^2 gh / \{ [1 \\
& + \beta(kh)^2][1 - (\alpha - \gamma)(kh)^2] \} \tag{28}
\end{aligned}$$

不同參數值會使得分散關係式有不同之 Padé 近似。在此我們舉幾個例子說明，假設 $(\alpha, \beta, \gamma) = (-2/5, 0, 0)$ ，分散關係式可表示如下式：

$$(\omega - Uk)^2 = \frac{[1 + (1/15)(kh)^2]k^2 gh}{1 + (2/5)(kh)^2} \tag{29}$$

若選擇 Schäffer and Madsen (1995)建議之 $(\alpha, \beta, \gamma) = (-0.39476, 0.03917, 0.01052)$ ，分散關係式可以與 Padé [4,4] 近似一致，

$$\begin{aligned}
(\omega - Uk)^2 = & [1 + (1/9)(kh)^2 \\
& + (1/945)(kh)^4]k^2 gh / \{ [1 \\
& + (4/9)(kh)^2 + (1/63)(kh)^4] \} \tag{30}
\end{aligned}$$

而根據 Madsen and Schäffer (1998)的研究結果顯示，待定四個參數值分別表示如下：

$$\begin{aligned}
(\beta_1, \beta_2) = & (-0.12919, -0.16836), \\
(\gamma_1, \gamma_2) = & (-0.07327, -0.08379) \tag{31}
\end{aligned}$$

其分散關係式適用範圍描繪如圖1。橫座標表式無因次之福勞得數(Froude number, $F_r = U/\sqrt{gh}$)，縱座標表示無因次波數 (kh) ，每一條線代表不同參數 h/L_0 的值，其中 $L_0 = g/2\pi T^2$ ， T 表示波浪週期，並以線性波理論控制誤差在 5% 內的結果互相

比較。而每一條線之末端，代表波浪遇到逆向流(adverse flow)時，因為逆向流速較大，會產生波浪無法繼續前進的波阻現象。在逆向流的作用下， $|F_r|$ 愈大，則適用之 kh 範圍則愈小，相反地， $|F_r|$ 愈小，則適用之 kh 範圍則愈大。

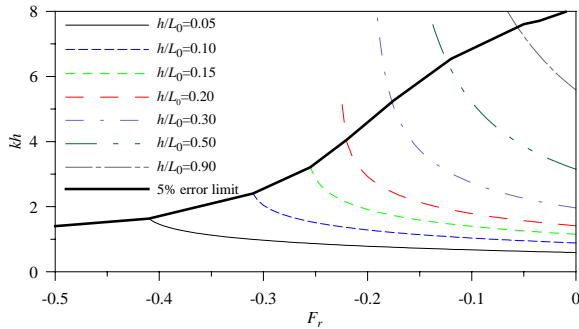


圖 1 分散關係式滿足 Padé [4,4] 近似之適用範圍

四、計算方法

利用第二章所推導之 Boussinesq 方程式(39)、式(48)與式(49)為基礎，利用有限差分法(Finite Differences Method)進行數值離散。Madsen et al. (1991)及 Nwogu(1993)將高階分散項帶回原方程式，提高數值模式之準確性及穩定性，卻增加了數值分散性(dispersion)的影響。為了解決此問題，Wei and Kirby(1995)使用高階 Fourth-order Adams Bashforth-Moulton predictor corrector scheme，在一階之時間微分項與空間微分項，使用有限差分中之四階準確計算後，可避免捨去誤差(Truncation error)所造成的數值分散，有效地解決了這個問題，並且也提供一穩定的計算方法。

Zheng(1999)以 Wei and Kirby(1995)所提出之方法為基礎，將計算網格改以交錯網格(Staggered grid)進行計算，其次將三階之空間微分項的計算上，提高為有限差分中之二階準確。並且將動量方程式中之對流項(Convective terms)，利用二階上風法(Second-order upwind scheme)求解，以增加數值計算上之穩定性。

綜合以上所述，使用 Fourth-order Adams-Bashforth-Moulton predictor-corrector scheme 計算，提供了一較為方便且有效之數值計算方式。其次是在空間上使用交錯網格計算，可避免數值計算上

數值振盪(Pseudo-oscillation)產生的誤差及鋸齒狀波形(Zigzag wave profile)的產生。因此，本研究選擇上述所提出之數值計算方法求解 Boussinesq 方程式，並提出各種適當之計算邊界條件，以符合波浪傳遞的現象。

採用 Wei et al. (1999)所建議之方法，在計算領域內加入造波函數，此造波函數會同時將波浪往上下游(upward and downward)傳遞，其次將消波邊界擺在左右二邊邊界上，這樣的方法可以在較小的計算範圍內進行數值模擬計算，因為它可以很有效阻止反射波的產生。造波函數如下式所示：

$$SF(x, t) = \frac{2a \exp(k^2 / 4B_1)(\omega^2 - \alpha_1 g k^4 h^3)}{\omega k \sqrt{\pi / B_1} [1 - \alpha(kh)^2]} \times \exp[-B_1(x - x_0)^2] \sin(\omega t + \theta_p) \quad (32)$$

其中 a 、 ω 、 k 和 θ_p 分別表示波浪的振幅、角頻率、波數及相位角。 B_1 是造波函數寬度，可以表示成 $B_1 = 80/(\delta L)^2$ 。而 δ 的值，根據 Wei et al. (1999) 的研究顯示，其值範圍介於 0.3 至 0.5，相對造波函數寬度為 0.15 至 0.25 倍波長。

當波浪傳遞至開放邊界時，邊界條件應有效地吸收波浪之能量，並且避免數值反射波之產生。一般較常使用的是輻射邊界條件(Sommerfeld radiation condition)。其次為了消除邊界產生向計算領域內傳遞的反射波，在計算域內加入一阻尼項，用來將波浪能量衰減，使此一現象獲得改善。根據 Wei and Kirby (1995)利用 Cruz et al. (1993)所提出之方法，將阻尼項加入動量方程式 u 、 v 的計算之中。

$$\varepsilon(R) = \frac{\theta_d \gamma \varepsilon_m}{2(\sinh \gamma - \gamma)} [\cosh(\gamma R / F_s) - 1] \quad (33)$$

上式中各項變數定義如下： $\varepsilon_m = \sqrt{g/h}$ ； $\gamma = 3$ ； $\theta_d = 0.15 \sim 5.0$ ； F_s 之距離通常選取 2 倍至 3 倍波長作為計算長度； R 為消波層內計算點至消波層起點之距離。為了方便，在以後的計算例中，以 2 倍波長為消波層的計算長度。

五、計算結果與討論

為驗證數值模式之可行性，本章將進

行數值測試。

5.1 波浪與流作用通過等水深地形

考慮波浪通過全長 150 公尺之等水深地形之波浪變化情形，考慮入射波浪條件為週期 $T_0=1.2$ 秒、振幅 $a_0=0.005$ 公尺，水深 $h_0=0.5$ 公尺，而計算網格間距 $\Delta x=0.1$ 公尺、計算時間間距 $\Delta t=0.02$ 秒，取其長度 10 公尺之空間波形分佈變化圖，結果如圖 2 所示。其中圖 2 上的線性理論解乃根據 Dean and Dalrymple (1984) 考慮線性系統下計算所得，而史托克三階解 (Stokes-type third order solutions) 則依據 Baddour and Song (1990) 流在等水深地形推導所得，可以發現當波浪在無流等水深狀態下，理論解與計算所得之結果相當一致。與逆向流作用時，其波高明顯增大且波長會變短；與順向流作用時，波高與波長之變化恰好與逆向流時相反。從圖上可以發現，在順向流的條件上，史托克三階解與計算解結果相當符合，然而線性理論解僅在相位上符合，在極值的預測上比其他二種方法小。因為順向流使得波長變長，因此 h/L 的值會變小，非線性效應會增加所導致的結果。

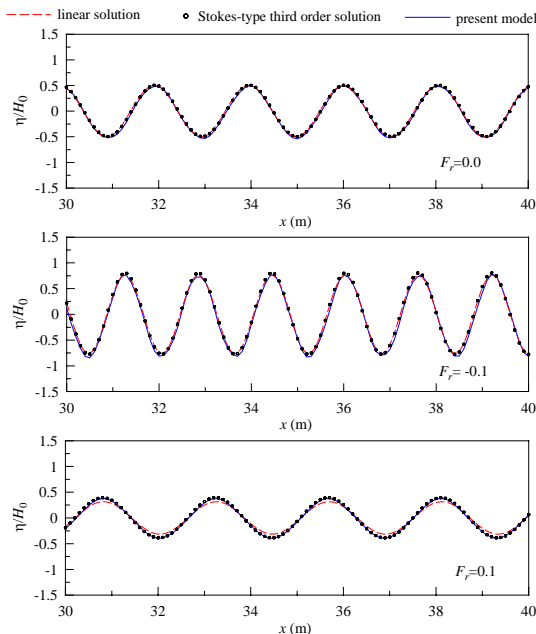


圖 2 波與流作用後之波形空間變化圖 ($T_0=1.2$ 秒)

其次以較淺水深來測試模式的準確性，以週期 $T_0=2.4$ 秒，水深 $h_0=0.2$ 公尺，此時 $h_0/L_0=0.061$ ，接近淺水條件進行計

算，結果如圖 3 所示。由於水深很淺，所以非線性效應較強，但是因為線性解僅考慮線性條件，所以從圖上可以發現不管是否有流的作用，其空間波形呈現相當規則傳遞，與其他二種方法所得之結果，差異顯得比較大。但是史托克三階解與計算解不約而同都呈現出波峰較陡，波谷較平坦的非線性波的分佈，雖然二者有稍微的差異，不過大致上來講，資料的相關性還算相當不錯，表示模式在淺水條件的計算上，由於考慮至 ε^3 ，因此對於非線性的模擬良好。

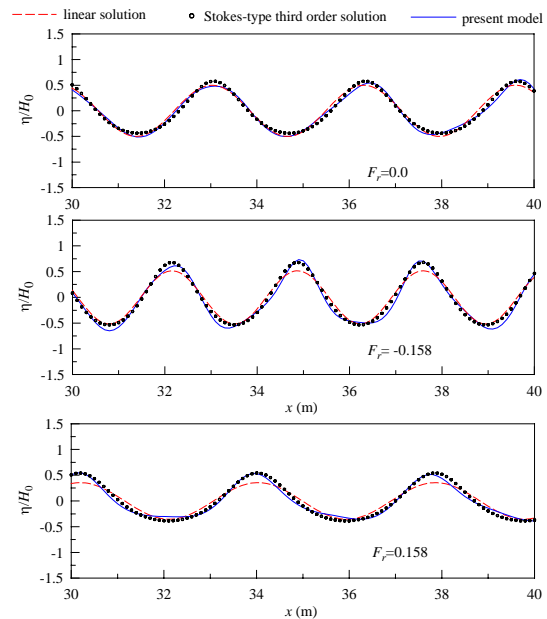


圖 3 波與流作用後之波形分佈圖 ($T_0=2.4$ 秒)

5.2 高階諧和波與流之作用現象

考慮諧和波在一等水深無水流之現象，計算領域 x 為 60 公尺、水深 $h_0=0.4$ 公尺、入射波週期 $T_0=2.5$ 秒、振幅 $a_0=0.042$ 公尺、網格間距 $\Delta x=0.04$ 公尺、計算時間間距 $\Delta t=0.01$ 秒。造波函數位於 $x=15$ 公尺處，左右兩端 10 公尺為海綿層用來吸收短週期波能量，將 $x=20$ 公尺至 $x=50$ 公尺之水表面變動量空間變化結果計算出來，並將計算結果應用傅立葉轉換將每一階諧和波分離出來，觀察其在空間中之變化情形，結果如圖 4 所示。其次，考慮相同波浪條件與一穩態 (steady state) 在鉛垂方向變化不大近乎均勻之水流，其福勞得數 $F_r = \pm 0.15$ 之交互作用情形，相

關

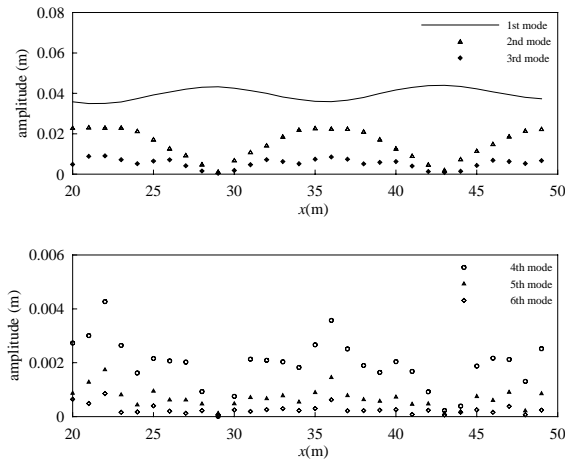


圖 4 無流狀態下六階諧和波波高之空間分佈圖

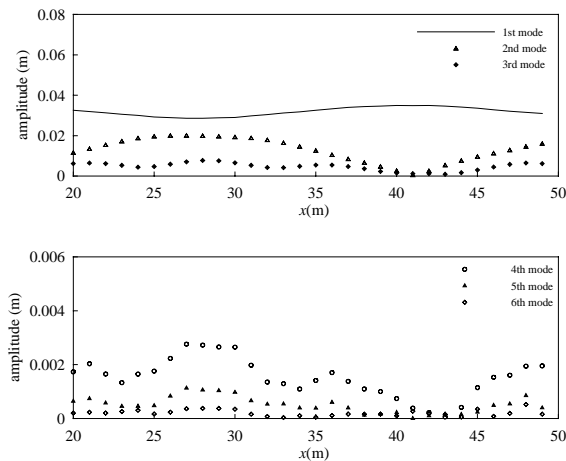


圖 5 波與順向流作用下六階諧和波波高之空間分佈圖

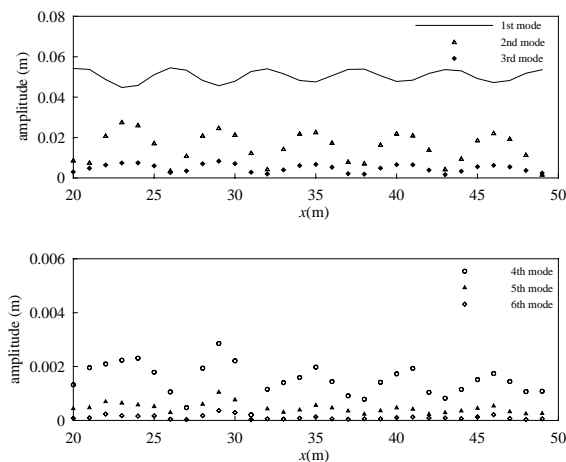


圖 6 波與逆向流作用下六階諧和波波高之空間分佈圖

之計算條件與無流純波時完全一樣。波浪傳遞時由於水深的影響，會產生高階諧和波，因此會有如圖所示在空間上呈現週期

分佈的現象。由圖 5 及 6 中可以明顯發現，波浪不僅會改變諧和波波高大小並且會影響諧和波在空間分佈的波長大小，當波與順向流作用時，其諧和波的波高明顯會減少，且拍波長的長度會變長；而當波與逆向流作用時，其諧和波的波高明顯會增加，且拍波長之長度會變短。而拍波長 L_{b2} 定義如下，其中 $2k_1$ 及 k_2 分別代表二階諧和波之強制波與自由波之波數，

$$\delta_2 = k_2 - 2k_1, L_{b2} = 2\pi/\delta_2 \quad (34)$$

當波浪遇到 $F_r = 0.15$ 之順向流時，二階諧和波的波高增加 20%，且拍波長的長度增加 86%；而當波浪遇到 $F_r = -0.15$ 之逆向流時，二階諧和波的波高減少 14%，且拍波長之長度減少 57%；換句話說，順向流會增加諧和波之間能量的轉換，而逆向流則會減少諧和波之間能量的轉換。

5.3 波浪通過潛堤與流之作用

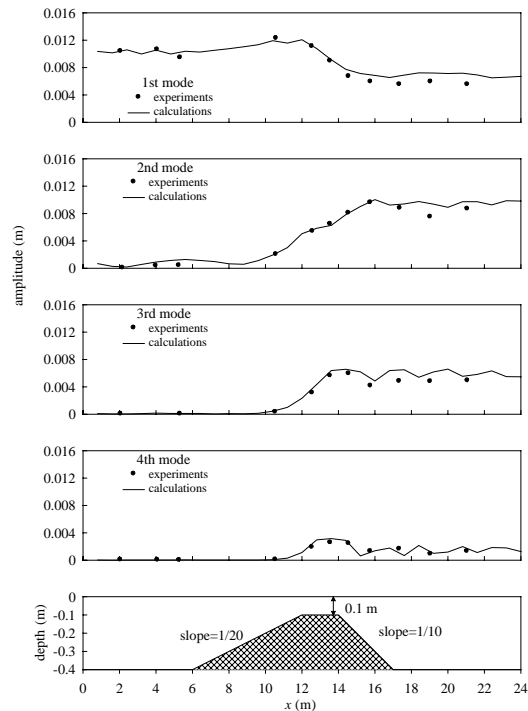


圖 7 波浪通過潛堤之四階諧和波之波高分佈圖

首先考慮一單一頻率入射波通過潛堤波高變化情形，實驗佈置如圖 7 所示。入射端水深 $h_0 = 0.4$ 公尺、堤頂距靜水面 0.1 公尺、潛堤坡度分別為 1/20 及 1/10。計算領域全長為 32 公尺、入射振幅 $a_0 = 0.01$ 公尺、週期 $T_0 = 2.0$ 秒，計算網格間距 $\Delta x = 0.05$ 公尺、計算時間間距 $\Delta t = 0.005$ 秒，計算結

果與實驗結果(Luth et al., 1994) 如圖 7 所示。在波浪傳遞的過程中，遭遇潛堤使的水深變淺，此時高階諧和波會產生。將前四階之諧和波繪製成圖比較結果，圖中●點代表實驗的結果，而線表示計算結果，可以發現計算結果與實驗結果相當符合。在潛堤的後方可以發現主頻波的波高變得比較小，而二階及三階之波高明顯增大。由於缺乏波流交互作用的實驗資料，故在此以數值模擬試驗研究單一頻率之入射波與流作用通過潛堤時波高變化情形。首先以本模式製造出一穩態逆向流場，其最左邊之流速為-0.025m/sec，結果導致靜水面在水深 0.4 公尺處大約抬昇 0.005 公尺，而在堤頂處抬昇約 0.0045 公尺，流速大約為-0.102m/sec，因此在堤頂處之 F_r 約為-0.1。圖 8 為穩態下流場與水面變動量之空間分佈計算結果。其次將一週期 2.0 秒、振

幅 0.02 公尺之正弦函數波與之前計算所得之水流流場，並選取網格間距 $\Delta x = 0.04$ 公

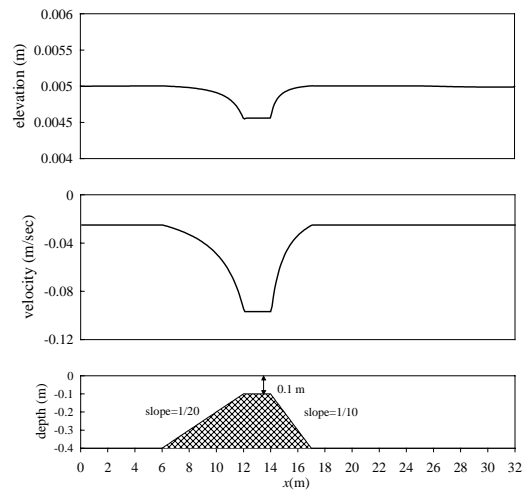


圖 8 穩態狀態下水表面變動量及質點速度空間分佈之計算結果

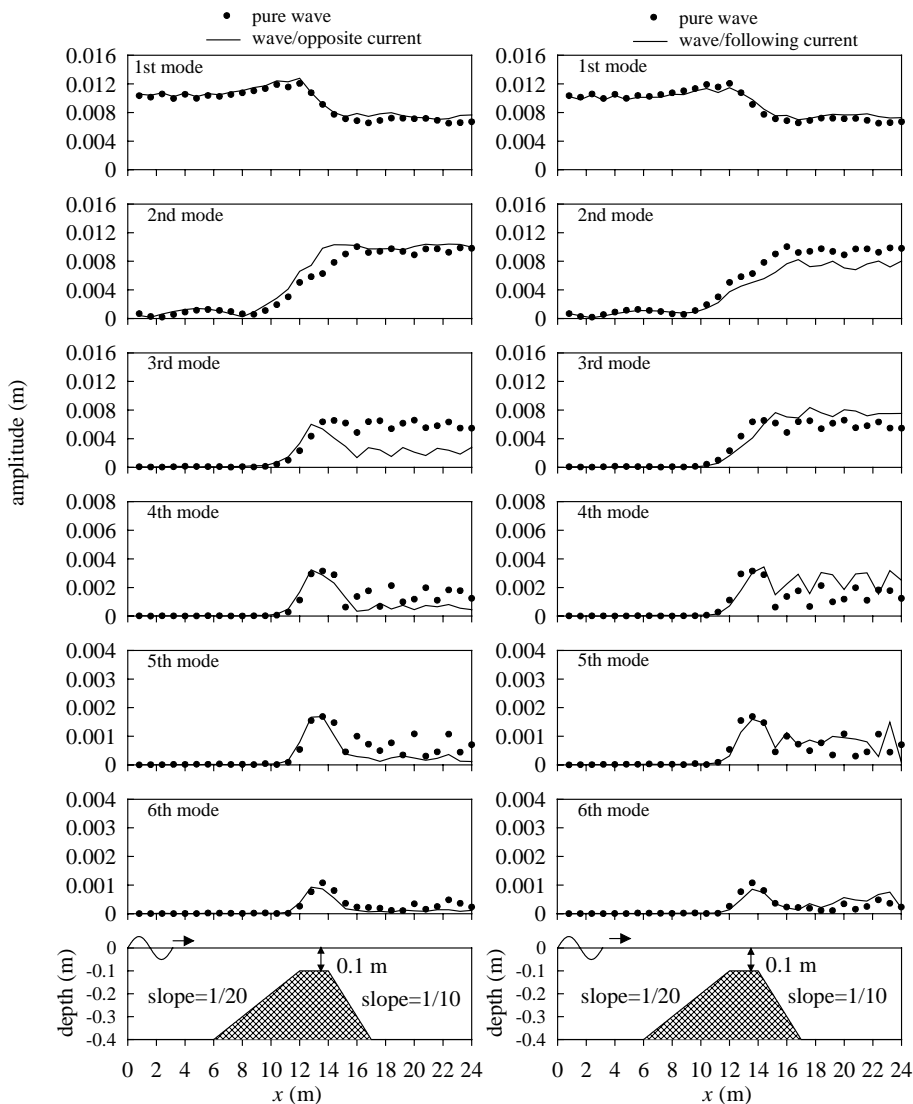


圖 9 波浪與流作用後通過潛堤諧和波波高之空間分佈圖

尺、計算時間間距 $\Delta t=0.01$ 秒進行計算，計算所得之波高以傅立葉轉換進行資料分析，將六階之諧和波波高與存波時的情形作一比較，繪製成圖 9。圖上 ● 點代表存波狀況下之結果，而實線表示與順(逆)向流之作用結果。從圖上結果可知，在潛堤之上坡段，逆向流的作用會使得各階諧和波的波高增大，而在潛堤的頂端時，高階強制開始波釋放能量至自由波，而逆向流使得拍波長變短，造成主頻波與高階諧和波能量快速的轉換；而當波浪通過潛堤後，三階以上之波高明顯減少，因為三階以上之諧和波其頻率較高，會被逆向流阻擋。而波與順向流之作用結果顯示，在潛堤之上坡段，順向流的作用會使得各階諧和波的波高減少，當波浪通過潛堤後，拍波長因為順向流的作用而增長，對於能量間的轉換需要較長的距離。除了二階波高較小外，其餘的諧和波波高在潛堤後方都呈現增加的趨勢。

本文以數學操作推導出波流場中波浪變形的布斯尼斯克方程式，並以四階亞當斯-貝西福斯-摩頓之預測-修正法之數值方法，配合造波邊界、消波層與輻射邊界等條件，進行數值實驗計算。跟據前章數值計算例的結果分析與討論後，對於波、水流與地形變化三者間複雜之交互作用現象，綜合可得結論如下：本文推導所得之含流高階非線性布斯尼斯克方程式，可以準確至 $O(\varepsilon^3\mu^2)$ ，適用較強非線性及弱分散性(相對水深較小)的範圍。若依據 Schäffer and Madsen (1995)建議的微分操作，並選擇 $(\alpha, \beta, \gamma)=(-0.39476, 0.03917, 0.01052)$ ，則分散關係式可以與 Padé [4,4]近似一致，與 Yoon and Liu (1989)之分散關係式比較後發現，可以適用至相對水深較大之條件。對於非線性的改善方面，不同於前人 (Yoon and Liu, 1989; Chen et al., 1998; Chen et al., 1999)所得適用於弱非線性 $O(\varepsilon)$ 的布斯尼斯克方程式，本模式可以擴展至較強非線性 $O(\varepsilon^3)$ 的區域。而在等水深波流交互作用的數值驗證下，計算結果與史托克三階的理論解相當符合，就算在淺水條件的臨界附近，對於非線性效應造成波峰較陡，波谷較平坦的非線性波波形的模擬，結果也相當良好。而由計算領域內求

得之波長與使用線性波理論 Padé [4,4]近似計算所得相比，結果也相當符合，故本模式的數值模擬精確性相當良好。

六、計畫成果自評

參與人員經由理論研究與數值計算，將對於布斯尼斯克方程式應用於波流場中波浪變形有更深入之了解，不僅對於理論方法的提升與數值技巧會有充份的幫助，並且對於基本物理現象會有更進一步的了解，有助於以後從事相關問題研究能力與創造性。與原先申請計劃之目的相符合，預估達到八成之期望，並將成果發表於第二十七屆海洋工程研討會。

七、參考文獻

- [1]. Agnon, Y., Madsen, P.A. and Schäffer, H.A. (1999) "A New Approach to High-order Boussinesq Models," *J. Fluid Mech.*, Vol. 399, pp. 319 -333.
- [2]. Baddour, R.E. and Song, S.W. (1990) "Interaction of Higher-Order Water Waves with Uniform Currents", *Ocean Eng.*, Vol. 17, No. 6, pp.551-568.
- [3]. Boussinesq, J. (1872) "Theorie des ondes et remous qui se propagent le long d'un canal rectangularire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au," *J. Math. Pure et. Appl.*, 2nd Series, Vol. 17, pp. 55-108.
- [4]. Chen, Q., Madsen, P.A., Schäffer, H.A. and Basco, D.R. (1998) "Wave-Current Interaction Based on an Enhanced Boussinesq Approach," *Coastal Eng.*, Vol. 33, pp. 11-39.
- [5]. Chen, Q., Madsen, P.A., Schäffer, H.A. and Basco, D.R. (1999) "Current Effects on Nonlinear Interactions of Shallow-Water Waves," *J. Waterway. Port. Coastal and Coastal Eng.*, ASCE, Vol. 125, No. 4, pp. 176-184.
- [6]. Cruz, E.C., Yokoki, H., Isobe, M. and Wanatabe, A. (1993) "Nonreflecting Boundary Conditions for Nonlinear Wave Equation," *Proc. Of Coastal Eng.*, JSCE, Vol. 40, pp. 46-50.(in Japanese)
- [7]. Dean, R.G. and Dalrymple, R.A. (1984)

- “Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists,” Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- [8]. Gobbi, M.F., Kirby, J.T., (1999) “Wave Evolution over Submerged Sills: Tests of a High-Order Boussinesq Model,” *Coastal Eng.*, Vol. 37, pp.57-96.
- [9]. Gobbi, M.F., Kirby, J.T. and Wei, G. (2000) “A Fully Nonlinear Boussinesq Model for Surface Waves, Part 2. Extended to $O(kh)^4$,” *J. Fluid Mech.*, Vol. 405, pp. 181-210.
- [10].Luth, H.R., Klopman, G. and Kitou, N. (1994) “Project 13G: Kinematic of Waves Breaking Partially on an Offshore Bar: LDV Measurements for Wave with and without a Net Offshore Current,” Delft Hydraulics Report H 1573.
- [11].Madsen, P.A., R. Murray and O.R. Sørensen (1991) “A New Form of Boussinesq Equations with Improved Linear Dispersion Characteristics,” *Coastal Eng.* Vol. 15, pp. 371-388.
- [12].Madsen, P.A. and O.R. Sørensen (1992) “A New Form of Boussinesq Equations with Improved Linear Dispersion Characteristics Part2. A slowly-varying bathymetry,” *Coastal Eng.* Vol. 18, pp. 183-204.
- [13].Madsen, P.A. and Schäffer, H.A. (1998) “Higher Order Boussinesq-type Equations for Surface Gravity Waves: Derivation and Analysis” *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, pp. 3123-3184.
- [14].Madsen, P.A., Bingham, H.B. and Liu, H. (2002) “A New Boussinesq Method for Fully Nonlinear Waves from Shallow to Deep Water,” *J. Fluid Mech.*, Vol. 462, pp. 1-30.
- [15].Nwogu, O. (1993) “An Alternative Form the Boussinesq Equation for Near Shore Wave Propagation,” *J. Waterway, Port, Coast Ocean Eng. ASCE*, Vol. 119(6), pp.618-638.
- [16].Peregrine, D.H. (1967) “Long wave on a beach,” *J. Fluid Mech.*, Vol. 27, pp. 815-827.
- [17].Prüser, H.H. and Zielke, W. (1990) “Irregular Waves on a Current,” Proc. 22nd Int. Conf. Coastal Eng., Delft, The Netherlands and ASCE, New York, Vol. 1, pp. 1088-1101.
- [18].Schäffer, H.A. and Madsen, P.A., (1995) “Further Enhancements of Boussinesq-type Equations,” *Coastal Eng.* Vol. 26, pp.1-14.
- [19].Wei, G. and Kirby, J.T. (1995) “Time-Dependent Numerical Code for Extended Boussinesq Equations,” *J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., ASCE*, Vol. 121, No. 5, pp. 251-261.
- [20].Wei, G., J.T. Kirby, S.T. Grilli and R. Subramanya (1995) “Time-dependent Numerical Code for Extended Boussinesq Equations,” *J. Fluid Mech.*, Vol. 294, pp. 71-92.
- [21].Wei, G., Kirby, J.T. and Sinha, A. (1999) “Generation of Waves in Boussinesq Equation Models Using a Source Function Method,” *Coastal Eng.*, Vol. 36, pp. 271-299.
- [22].Witting, J.M. (1984) “A unified model for the evolution of nonlinear water waves,” *J. of Computational Physics.* Vol. 56, pp.203-236.
- [23].Yoon, S.B., and Liu, P.L-F (1989) “Interaction of Currents and Weakly Nonlinear Water Waves in Shallow Water,” *J. Fluid Mech.*, Vol. 205, pp. 397-419.
- [24].Zheng, P. (1999) “A High-order Numerical Model for Waves and Currents Based on Boussinesq Equation,” Ph. D. dissertation of the University of Tokyo, Japan.