

雙相複合材料之彈性常數

ELASTIC MODULUS OF TWO-PHASE MATERIALS

謝錦隆[†] 段維新^{*}

Chin-Lung Hsieh Wei-Hsing Tuan

[†]博士候選人 ^{*}教授

國立台灣大學材料科學與工程學系

[†]Ph.D. candidate ^{*}Professor

Department of Materials Science and Engineering, National Taiwan University, Taipei, Taiwan 10617, R.O.C.

Abstract

The experimental data of the elastic modulus of a two-phase material, $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-NiAl}$, are compared with various theoretical models. The NiAl content in the composites varies from 0 to 100vol%. The composites were prepared by mixing Al_2O_3 and NiAl powders together then densified by using hot-pressing. The ultrasonic technique was used to determine the elastic modulus. Several theoretical models were used to compare the experimental results. The Hashin-Shtrikman lower bound and Reuss model match the experimental data well, though these models show relatively little sensitivity to microstructural features.

Keywords: elastic modulus, composite, NiAl, Al_2O_3 .

摘要

本研究經由分析含NiAl組成由 0 至 100 體積分率之 $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-NiAl}$ 雙相複合材料，經由真空熱壓燒結成緻密之試片，應用超音波技術量測其彈性係數與體積分率之關係，所得之 $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-NiAl}$ 複合材料相對密度均在 98% 以上，並將所得的實驗結果與彈性係數預測之理論模式作比較，得知 Hashin-Shtrikman 下限及 Reuss 曲線等理論模式是較符合 0 ~ 100vol% NiAl 之 $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-NiAl}$ 複合材料之彈性係數分佈。

關鍵詞： 彈性係數、複合材料、鎳鋁介金屬、氧化鋁。

1. 前言

雙相複合材料的特性通常會比其組成成分中任何一種單相成分材料具有更優異的機械、物理或電性質 [1]。文獻上已建立了許多以複合材料組成中的第二相成分之體積分率為基礎的理論模式，用以預測兩相複合材料的彈性係數 [2~12]。提高陶瓷材料的韌性或增加金屬材料之強度，以及設計製造以符合特殊需求，如耐高溫差或高壓差、耐高磨耗等使用環境之傾斜性機能材料 (FGMs)，為開發陶瓷基 (CMC) 或金屬基 (MMC) 複合材料的目的之一，經由微結構與性質關係之研究以便掌控材料適用之極限條件，而複合材料之彈性行為便是重要之材料設計資訊之一。對於顆粒或纖維增強複合材料之彈性係數，因受限於非均勻之相分佈、不規則幾何形狀之組成，及各相之間交互影響等因素，僅能獲得近似之預測值。複合材料彈性行為在當有異相加入基體材料時所量得之彈性

係數實驗值並非呈現簡單之混合定律 (Rule of mixture) 關係，基於探討此影響現象之研究，已有相當多的模式或方法被提出 [3~6]，建立通用或求出特定適用材料之彈性行為預測數學式，表 1 列出本研究中使用到及一些代表性之雙相複合材料理論模式，有些是直接求得彈性係數、有些則是經由剪力係數 (shear modulus) 及體積係數 (bulk modulus) 再計算出彈性係數、或是預測某一分佈邊界範圍，提供較為縮小之預測範圍。

本實驗以真空熱壓燒結製備 $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-NiAl}$ 複合材料，以超音波測試 [13] 此項複合材料各種 NiAl 體積分率的彈性係數，再與文獻上針對預測兩相複合材料的彈性係數理論模式進行比較，除了能夠完整地了解 $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-NiAl}$ 複合材料之基本物理性質外，藉由本研究 $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-NiAl}$ 系統之體積分率變化範圍由 0 至 100 NiAl vol% 所得之彈性係數以找出適當之預測緻密結構之兩相複合材料理論模式。

表 1 雙相複合材理論模式

理論模式	預測公式	
Voigt	$G_C = G_m V_m + G_p V_p$	$K_C = K_m V_m + K_p V_p$
Reuss	$G_C = \frac{G_m E_p}{G_m V_p + G_p V_m}$	$K_C = \frac{K_m E_p}{K_m V_p + K_p V_m}$
Hashin-Shtrikman Bounds	$K_C^l = K_m + \frac{V_p}{\frac{1}{K_p - K_m} + \frac{3V_m}{3K_m + 4G_m}}$ $K_C^u = K_p + \frac{V_m}{\frac{1}{K_m - K_p} + \frac{3V_p}{3K_p + 4G_m}}$	$G_C^l = G_m + \frac{V_p}{\frac{1}{G_p - G_m} + \frac{6(K_m + 2G_m)V_m}{5G_m(3K_m + 4G_m)}}$ $G_C^u = G_p + \frac{V_m}{\frac{1}{G_m - G_p} + \frac{6(K_p + 2G_p)V_p}{5G_p(3K_p + 4G_p)}}$
Paul	$E_C = \frac{E_m^2 + (E_m E_p - E_m^2)V_p^{2/3}}{E_m + (E_p - E_m)V_p^{2/3}(1 - V_p^{1/3})}$	
Ravichandran	$E_C^l = \frac{(CE_m E_p + E_m^2)(1+C)^2 - E_m^2 + E_p E_m}{(CE_p + E_m)(1+C)^2}$ $C = \left[\frac{1}{V_p}\right]^{1/3} - 1$	$E_C^u = \frac{[E_p E_m + E_m^2(1+C)^2 - E_m^2](1+C)}{(E_p - E_m)C + E_m(1+C)^3}$
Halpin-Tsai (Particulate)	$\frac{K_c}{K_m} = \frac{1 + \xi_K \eta_K V_p}{1 - \eta_K V_p}$ $\eta_K = \frac{(K_p/K_m) - 1}{(K_p/K_m) + \xi_K}$ $\eta_G = \frac{(G_p/G_m) - 1}{(G_p/G_m) + \xi_G}$	$\frac{G_c}{G_m} = \frac{1 + \xi_G \eta_G V_p}{1 - \eta_G V_p}$ $\xi_K = \frac{4G_m}{3K_m}$ $\xi_G = \frac{7 - 5\nu_m}{8 - 10\nu_m}$
Walpole bounds	$\frac{K_C^u - K_p}{(K_m - K_p)} = \frac{V_p}{1 + \frac{(K_m - K_p)V_p}{K_m + \frac{4}{3}G_m}}$ $\frac{K_C^l - K_p}{(K_m - K_p)} = \frac{V_m}{1 + \frac{(K_m - K_p)V_p}{(K_p + \frac{4}{3}G_p)}}$	$\frac{G_C^u - G_p}{(G_m - G_p)} = \frac{V_m}{1 + \frac{(G_m - G_p)V_p}{G_p + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{G_p} + \frac{10}{9K_m + 8G_m}\right)^{-1}}}$ $\frac{G_C^l - G_p}{(G_m - G_p)} = \frac{V_m}{1 + \frac{(G_m - G_p)V_p}{G_p + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{G_p} + \frac{10}{9K_p + 8G_p}\right)^{-1}}}$
Mori-Tanaka	$K_c = K_p + \frac{V_m}{\frac{1}{K_m - K_p} + \frac{3V_p}{3K_p + 4G_p}}$	$G_c = G_p + \frac{V_m}{\frac{1}{G_m - G_p} + \frac{6(K_p + 2G_p)V_p}{5G_p(3K_p + 4G_p)}}$
Kerner	$K_c = \frac{K_m(3K_p + 4K_m) + 4G_m V_p(K_p - K_m)}{(3K_p + 4G_m) + 3V_p(K_m - K_p)}$ $G_c = \frac{G_m[(7 - 5\nu_m)(G_m + V_p G_p - V_p G_m) + (8 - 10\nu_m)G_p]}{(7 - 5\nu_m)G_m + (8 - 10\nu_m)(G_p + V_p G_m - V_p G_p)}$	
Differential method	$K_c = K_m \times \left[1 + \frac{V_p \left(\frac{K_p}{K_m} - 1 \right)}{1 + \left(\frac{K_p - K_m}{K_m + \frac{4}{3}G_m} \right)} \right]$	$G_c = G_m \times \left[1 + \frac{15(1 - \nu_m)V_p \left(\frac{G_p}{G_m} - 1 \right)}{7 - 5\nu_m + 2(4 - 5\nu_m)\frac{G_p}{G_m}} \right]$
Lielens	$K_c = \frac{1}{\frac{1-f}{K_{H-S}^{lower}} + \frac{f}{K_{H-S}^{Upper}}}$ $f = \frac{V_p + V_p^2}{2}$	$G_c = \frac{1}{\frac{1-f}{G_{H-S}^{lower}} + \frac{f}{G_{H-S}^{Upper}}}$
Wu	$\frac{1}{E_c} = \left[\frac{1}{E_m} - \frac{\left(\frac{1}{E_m} - \frac{1}{E_p} \right)^2}{\lambda \left(\frac{1}{E_m} + \frac{V_m}{V_p E_m} \right)} \right] V_m + \frac{V_p}{E_p}$	$(\lambda_{WC-Co} = 2.4, \lambda_{NiAl-Al_2O_3} = 20)$

(E : 彈性係數, K : 體積係數(bulk modulus), G : 剪力係數 (shear modulus), V : 體積分率, c : 複合材料, m : 基底, p : 第二相或增強相, u : 上邊界, l : 下邊界)

2. 實驗步驟

本研究使用之原料性質：(a) 含 0.25wt% Fe 之鋁粉 (Product Code 251, Xform Inc., New York, U.S.A.)，平均粒徑為 5.89 μm ，(b) 氧化鋁粉末 (TM-DAR, Taimei, Chemical Co. Ltd., Tokyo, Japan)，平均粒徑為 0.23 μm ，純度為 99.99%。

試片之製備：(a) 粉末均勻混合：將 Al_2O_3 與 NiAl 粉末以 0 到 100 體積分率配製後，置入於攪磨機中加入純度 95% 酒精以轉速 300rpm 攪磨一小時。(b) 真空熱壓燒結：真空度為 5×10^{-3} torr，燒結溫度為 1450°C、壓力為 24.5MPa，持溫時間：一小時。(c) 所得之燒結體大小約為直徑 50mm 厚度 6mm，相對密度均大於 98%，密度與 NiAl 組成關係如圖 1 所示，複合材料密度隨 NiAl 含量之增加而減少。

使用超音波測量方式評估 Al_2O_3 -NiAl 彈性係數，測量條件如下：(a) 試片直徑為 50mm，(b) 超音波信號發射器 (Pulser Receiver 模式 5055PR) 頻率：5MHz，(c) 超音波探頭 (縱、橫波) 直徑：6.4mm。(d) 超音波數位示波器 (LeCroy 9314L)：記錄超音波在試片內行進所需時間。

3. 結果與討論

應用式(1)，分別將二倍之試片厚度 (T) 除以超音波量測時間求出超音波縱波波速 (v_L) 及橫波波速 (v_S)，並以 NiAl 體積分率為 X- 軸做圖，如圖 1 所示。

$$v_L = 2T / t_L, \quad v_S = 2T / t_S \quad (1)$$

其中： t_L 、 t_S 分別為量測所得之縱波及橫波來回所需時間。

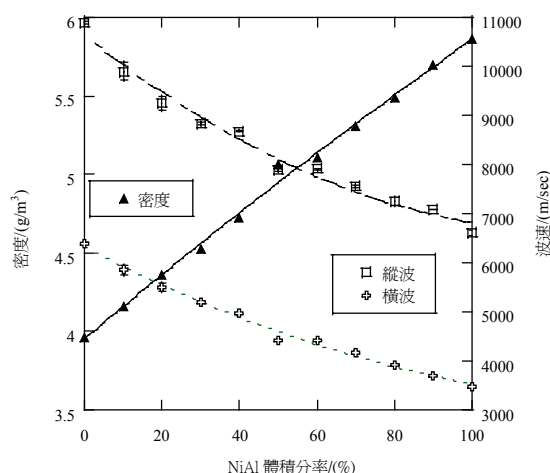


圖 1 Al_2O_3 -NiAl 複合材料之密度與超音波速度對 NiAl 體積分率之關係圖

在圖 1 中顯示 Al_2O_3 -NiAl 複合材料之縱波及橫波波速約呈線性關係下降，密度則隨著 NiAl 含量之增加呈線性關係上升，在波速值方面：純的 Al_2O_3 之縱波及橫波波速各為 10887.4 及 6398.1m/sec，而純的 NiAl 之縱波及橫波波速各為 6619.1 及 3458.0m/sec，在密度值方面：純的 Al_2O_3 及純的 NiAl 之密度分別各為 3.964 及 5.862g/cm³，當加入密度值較大之 NiAl 會使得 Al_2O_3 -NiAl 複合材料之密度呈線性關係上升增加，而超音波速呈下降之趨勢，即超音波速隨彈性係數值上升而下降。

以掃描式電子顯微鏡觀察 Al_2O_3 -NiAl 複合材料之相分佈，圖 2 為含 40 vol% NiAl 之複合材料微結構照片，NiAl 顆粒在熱壓後呈現扁平狀不規則分佈於 Al_2O_3 基底。

經由超音波測量所得之縱波波速 (v_L)、橫波波速 (v_S) 與所含不同 NiAl 體積分率之試片密度 (ρ)，應用公式(2)，計算出之彈性係數 (彈性係數， E) 及泊松比 (Poisson Ratio)：

$$\text{彈性係數} = \rho v_s^2 (3 v_L^2 - 4 v_s^2) / (v_L^2 - v_s^2) \quad (2)$$

$$\text{泊松比} = (v_L^2 - 2v_s^2) / 2(v_L^2 - v_s^2) \quad (3)$$

本研究所得之純的 Al_2O_3 與純的 NiAl 之彈性係數分別各為 401GPa 與 186GPa，泊松比分別各為 0.24 與 0.31。

經由超音波量測計算所得含 0 至 100 NiAl vol% 之 Al_2O_3 -NiAl 複合材料的彈性係數與泊松比對 NiAl 體積分率分析做圖，如圖 3，圖中所標示黑點代表實驗數據，顯示在 NiAl 含量約在 50 vol% 以下時有明顯向下彎曲之趨勢，即相對於混合定律 (rule of mixtures) 之曲線， Al_2O_3 因 NiAl 的增加導致彈性係數開始時會顯著的降低，當 NiAl 到達 50 vol% 以上時，則呈現較平穩變化之趨勢。

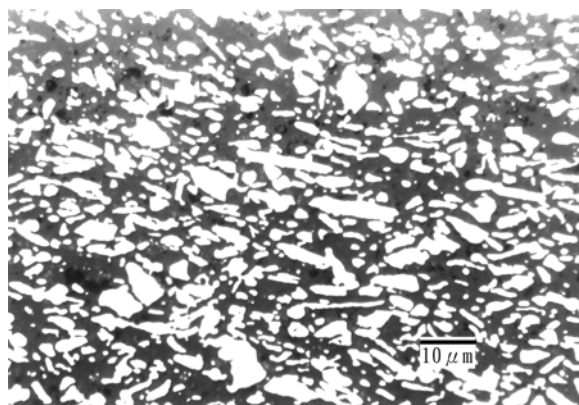


圖 2 含 40 vol% NiAl 之 Al_2O_3 -NiAl 複合材料電子顯微鏡照片

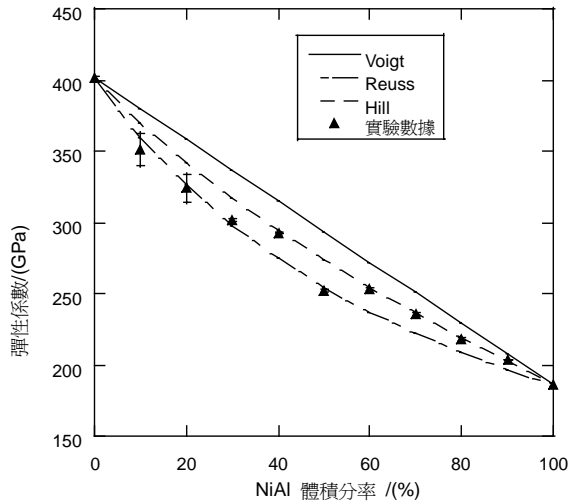


圖 3 Voigt-Reuss 及 Hill 預測曲線與實驗數據之比較圖

經由文獻蒐集，以複合材料組成中的第二相成分之體積分率，用以預測隨組成成分體積分率變動的彈性性質的理論模式已經由許多位學者研究推導出 [2~12]，這些理論方法推導的假設均基於對所含的每一相材料之分佈情形、含量與微結構形狀、以及各相介面間交互影響等材料微觀性質進行理論推導巨觀之整體複合材料的彈性係數，然而這些理論模式，均缺乏完整之實驗數據予以驗證，本研究之目的為探討含兩相之緻密燒結複合材料且相含量在 0 ~ 100 vol% 分佈之間，參考實驗數據找出相關之理論模式，故引用的理論方法之要件必須為：包含有兩相的複合材料、各相之體積分率及其彈性係數為關係所建立之模式，以預測複合材料彈性係數為主要比較的理論模式，將理論模式預測數值與實驗數據相互比較，評估出最適當之理論模式，因本研究 $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-NiAl}$ 系統之體積分率變化範圍由 0 至 100 NiAl vol%，所以藉由本研究所找出之理論模式應可以應用於預測其他具有相同緻密結構之兩相複合材料。

對於均質等向性材料文獻的理論模式多數是導出複合材料之體積係數 (bulk modulus, K) 及剪力係數 (shear modulus, G) 後，再應用式(4)及(5)求得複合材料之彈性係數 (E) 及泊松比。

$$\text{彈性係數} = \frac{9KG}{3K + G} \quad (4)$$

$$\text{泊松比} = \frac{3K - 2G}{6K + 3G} \quad (5)$$

將兩相複合材料之理論模式預測之彈性常數與實驗數據比較分析如下：

(1) Voigt 與 Reuss 邊界及 Hill 平均值

對於均向複合材料之彈性係數彈性係數為應力與應變的的比值，Voigt 與 Reuss 模式，是分別假設在相等應力或應變之下，推導均質等相材料之彈性係數，其關係是分別如式(7)、(8)所示，Voigt 平均值即是一般較常直接用於預測複合材料性質之混合定律 (rule of mixtures)，當組成的兩相材料本身之彈性係數相差較大時，所求出的結果會較實驗結果差距更大，所以 Hill 首先將上述兩者結果予以算術與幾何平均，得到了更接近多相複合材料彈性係數之實驗值，雖然 Hill 平均並未對理論問題加以處理，但其結果與後來廣為應用之 self-consistent 方法相近 [7]。

$$\text{Voigt: } K_C = K_m V_m + K_p V_p \quad G_C = G_m V_m + G_p V_p \quad (7)$$

$$\text{Reuss: } K_C = \frac{K_m E_p}{K_m V_p + K_p V_m} \quad G_C = \frac{G_m E_p}{G_m V_p + G_p V_m} \quad (8)$$

將 Voigt and Reuss 上下邊界與 Hill 平均值等計算所得的 $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-NiAl}$ 之彈性係數及實驗結果做圖，如圖 3 所示：Voigt 與 Hill 平均值均在實驗值上方，而 Reuss 邊界則大部分在實驗值下方。當 NiAl 體積分率在 30 vol% 以下時，Reuss 邊界幾乎與實驗結果相近，而當 NiAl 體積分率在 60 至 100 vol% 則與 Hill 平均之結果相近，Voigt 與 Reuss 邊界和 Hill 平均值計算值與 0 ~ 100 vol% NiAl- Al_2O_3 實驗結果之所有統計標準偏差平均分別為 8.10%、3.17% 及 3.89%，如表 2 所示。

(2) Hashin-Shtrikman 上下邊界

Hashin-Shtrikman 是以 variational 原理來推導複合材料之彈性性質，探討當第二相材料加入基材時所導致的應變能變化來推導複合材料之彈性係數的上下邊界範圍，其推導基於假設複合材料於巨觀具有均向性質、第二相材料為呈任意幾何形狀之顆粒狀、並指以第二相材料之體積分率為變數，如式(9)至(12)，其中 V_p 為第二相材料之體積分率，因為 Hashin-Shtrikman 邊界比起 Voigt 與 Reuss 邊界之範圍要窄的許多，更接近實驗結果曲線，其彈性係數及實驗結果做圖，如圖 4 所示，Hashin-Shtrikman 上下邊界曲線，對於彈性係數均在實驗值上方且曲線為向下略彎曲，當 NiAl 體積分率在 60 至 100 vol% 則與實驗結果幾乎接近，Hashin-Shtrikman 上下邊界計算值與 0 ~ 100 vol% NiAl- Al_2O_3 實驗結果之所有統計標準偏差平均各為 4.65% 及 3.65%，如表 2 所示。

表 2 實驗數值及各種彈性係數與理論預測模式之誤差值

模式	NiAl 體積分率 / (%)											平均 誤差值
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
Wu ($\lambda = 25$)	1.8	1.6	2.9	4.3	5.0	2.2	5.2	0.2	1.3	2.9	0.0	2.6
Ruess	0.0	3.3	4.5	5.7	6.4	0.9	6.2	1.0	0.7	2.5	0.0	3.2
Walpol Lower	0.0	1.4	1.0	1.1	0.8	7.4	0.2	4.8	5.4	5.3	0.0	3.6
Hashin-Shtrikman 下邊界	0.0	1.3	0.8	0.9	0.6	7.6	0.0	5.0	5.6	5.4	0.0	3.7
Shukla-Padial	0.0	0.7	0.0	0.0	0.1	8.2	0.2	5.0	5.4	5.3	0.0	3.7
Hill's 平均	0.0	0.6	0.3	0.4	0.6	8.7	0.7	5.4	5.6	5.3	0.0	3.9
logarithm mixing rule	0.0	1.2	0.5	0.4	0.0	8.4	0.8	5.8	6.3	5.9	0.0	4.1
Mori-Tanaka	0.0	0.5	0.6	1.0	1.5	9.9	2.0	6.8	6.9	6.2	0.0	4.6
Hashin-Shtrikman 上邊界	0.0	0.4	0.6	1.0	1.5	10.0	2.0	6.8	6.9	6.2	0.0	4.7
Walpol Upper	0.0	0.4	0.8	1.2	1.7	10.2	2.3	7.1	7.1	6.3	0.0	4.8
Kerner	0.0	0.0	0.8	1.3	1.8	10.4	2.4	7.2	7.2	6.4	0.0	4.9
Halpin-Tsai	0.0	0.3	0.8	1.3	1.8	10.4	2.4	7.2	7.2	6.4	0.0	4.9
Ravichandran 上邊界	0.0	0.3	1.9	2.4	2.9	11.2	2.8	7.2	6.8	5.7	0.0	5.0
Paul	0.0	0.4	2.3	3.3	4.3	13.3	5.2	10.0	9.5	7.8	0.0	6.6
Ravichandran 下邊界	0.0	0.4	2.3	3.3	4.3	13.3	5.2	10.0	9.5	7.8	0.0	6.6
Voigt	0.0	2.1	5.0	6.5	7.5	16.5	7.7	11.8	10.6	8.2	0.0	8.1

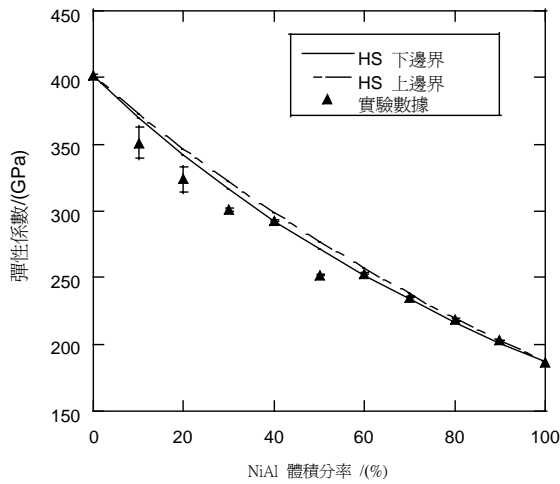


圖 4 Hashin-Shtrikman (HS) 預測曲線與實驗數據之比較圖

$$K_C^l = K_m + \frac{V_p}{\frac{1}{K_p - K_m} + \frac{3V_m}{3K_m + 4G_m}} \quad (9)$$

$$K_C^u = K_p + \frac{V_m}{\frac{1}{K_m - K_p} + \frac{3V_p}{3K_p + 4G_m}} \quad (10)$$

$$G_C^l = G_m + \frac{V_p}{\frac{1}{G_p - G_m} + \frac{6(K_m + 2G_m)V_m}{5G_m(3K_m + 4G_m)}} \quad (11)$$

$$G_C^u = G_p + \frac{V_m}{\frac{1}{G_m - G_p} + \frac{6(K_p + 2G_p)V_p}{5G_p(3K_p + 4G_p)}} \quad (12)$$

(3) Ravichandran 模式

Ravichandran 假設兩相材料具有相近之微結構及應力、應變，以兩種簡單的 unit cell 幾何排列方式來推導兩相複合材料之彈性係數，對於相與相之間的介面作用則忽略之，推導公式如式 (13) 至 (16)，Ravichandran 推導的結論覺得其理論模式當用在計算兩相複合材料之彈性係數相差較大時，所求出的結果優於 Hashin-Shtrikman 邊界。其彈性係數及實驗結果做圖，圖 5 為 Ravichandran 模式上下邊界範圍與實驗結果，Ravichandran 下邊界適用 NiAl 體積分率在 40% 位置及 60% 以上，Ravichandran 上下邊界結果均在實驗值上方，計算值與 0 ~ 100 vol% NiAl-Al₂O₃ 實驗結果之所有統計標準偏差平均各為 6.55% 及 4.99%。

$$E_C^l = \frac{(CE_m E_p + E_m^2)(1+C)^2 - E_m^2 + E_p E_m}{(CE_p + E_m)(1+C)^2} \quad (13)$$

$$E_C^u = \frac{[E_p E_m + E_m^2(1+C)^2 - E_m^2](1+C)}{(E_p - E_m)C + E_m(1+C)^3} \quad (14)$$

$$G_C^l = \frac{(CG_m G_p + G_m^2)(1+C)^2 - G_m^2 + G_p G_m}{(CG_p + G_m)(1+C)^2} \quad (15)$$

$$G_C^u = \frac{[G_p G_m + G_m^2(1+C)^2 - G_m^2](1+C)}{(G_p - G_m)C + G_m(1+C)^3} \quad (16)$$

$$C = \left[\frac{1}{V_p} \right]^{1/3} - 1 \quad (17)$$

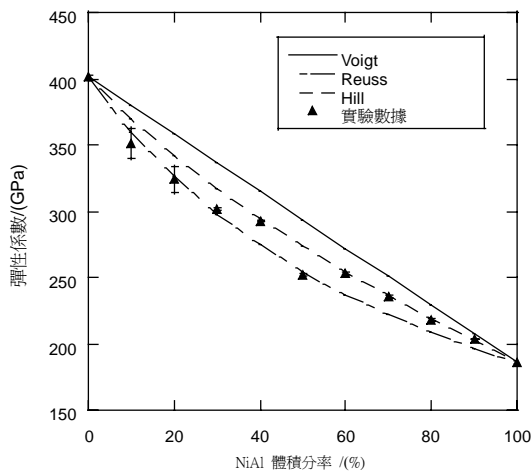


圖 5 Ravichandran 預測曲線與實驗數據之比較圖

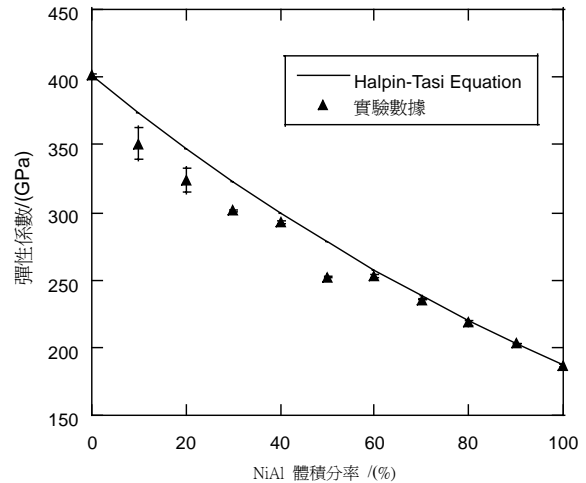


圖 6 Halpin-Tsai 預測曲線與實驗數據之比較圖

(4) Halpin-Tsai 模式

Halpin-Tsai 公式是應用 Hill 所發展的「self-consistent micromechanics methods」以半經驗方程式，調整與材料組成相之排列幾何、晶粒形狀等參數來推導複合材料之彈性係數，以廣泛地被使用，公式如式(18)及(19)，其彈性係數及實驗結果做圖，對於彈性係數，當NiAl體積分率在 60 vol% 以上時會與實驗結果相近，如圖 6 所示，Halpin-Tsai 公式結果均在實驗值上方，計算值與 0 ~ 100 vol% NiAl-Al₂O₃ 實驗結果之所有統計標準偏差平均為 4.87%。

$$\frac{\bar{K}}{K_m} = \frac{1 + \xi\eta\phi}{1 - \eta\phi}, \text{ 其中, } \xi = \frac{4G_m}{3K_m}, M_R = \frac{K_p}{K_m}, \eta = \frac{M_R - 1}{M_R + \xi} \quad (18)$$

$$\frac{\bar{G}}{G_m} = \frac{1 + \xi\eta\phi}{1 - \eta\phi}, \text{ 其中, } \xi = \frac{7 - 5\nu_m}{8 - 10\nu_m}, M_R = \frac{G_p}{G_m}, \eta = \frac{M_R - 1}{M_R + \xi} \quad (19)$$

(5) Paul 與 Lielens 模式

Paul 應用彈性原理的能量理論推導複合材料之彈性係數，理論模式如式(20)，而 Lielens 修正 Hashin-Shtrikman 邊界，圖 7 繪出 Paul 與 Lielens 預測彈性係數及實驗結果，Paul 模式同 Voigt 模式對本實驗之 Al₂O₃-NiAl 系統均較差，而 Lielens 則在 NiAl 體積分率在 60 vol% 以上與實驗結果相近，此兩者結果均在實驗值上方，Paul 模式計算值與 0 ~ 100 vol% NiAl-Al₂O₃ 實驗結果之所有統計標準偏差平均為 6.55%。

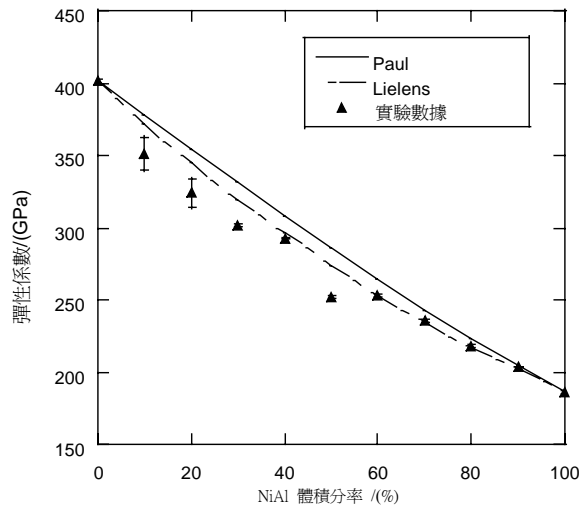


圖 7 Paul 與 Lielens 預測曲線與實驗數據之比較圖

$$\text{Paul: } E_C = \frac{E_m^2 + (E_m E_p - E_m^2) V_p^{2/3}}{E_m + (E_p - E_m) V_p^{2/3} (1 - V_p^{1/3})} \quad (20)$$

(6) Shukla-Padial 模式與對數平均

除 Voigt 的混合律 (rule of mixtures) 及 Hill 的算術與幾何平均外，在此亦將一般常用的對數平均混合律及 Shukla-Padial 應用的調和平均來計算複合材料之彈性係數，兩者結果相近均適用在 NiAl 體積分率在 60 vol% 以上時，其彈性係數及實驗結果做圖，如圖 8 所示，對於其彈性係數，Shukla-Padial 模式與對數平均結果均在實驗值上方，計算值與 0 ~ 100 vol% NiAl-Al₂O₃ 實驗結果之所有統計標準偏差平均各為 6.55% 及 3.68%。

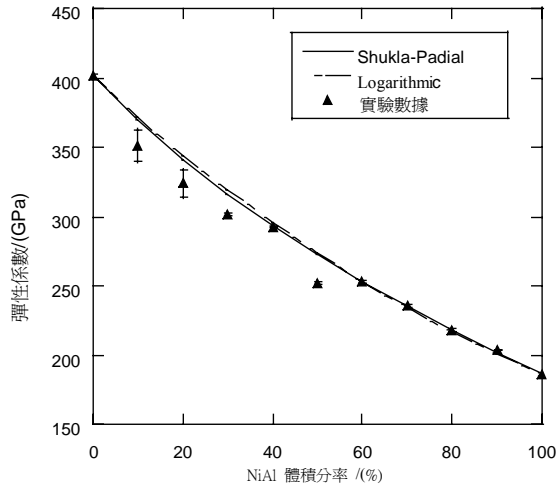


圖 8 Shukla-Padial 及 Logarithmic 預測曲線與實驗數據之比較圖

(7) Walpol 模式

Walpol應用單一平均方式推導材料之彈性係數，因雙重平均(如Hill平均)等均未對理論基礎調整修改，而僅是將已具有理論基礎的結果經過再一次的平均計算，以使結果較合於實驗值，而Walpol使用extremum原理，所得之上下邊界範圍較Voigt-Reuss邊界窄，均在實驗值上方，可用於估計具任意結晶方向複合材料之彈性係數。其彈性係數及實驗結果做圖，如圖9，得知對於其Young's moduli，Walpol下邊界與NiAl體積分率在60 vol%以上時結果相近，計算值與0~100 vol% NiAl-Al₂O₃實驗結果之所有統計標準偏差平均各為3.55%及4.79%。

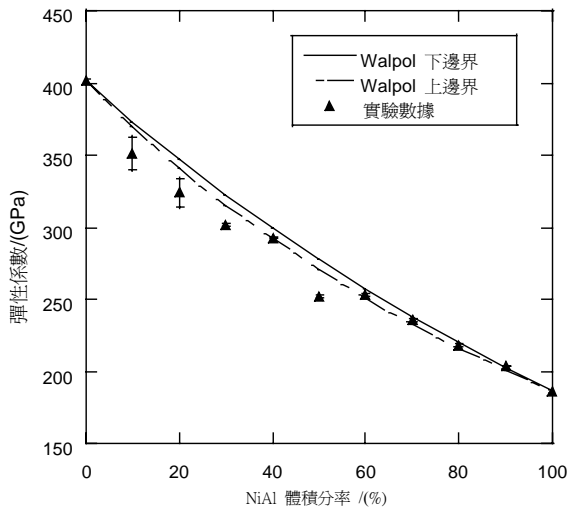


圖 9 Walpol 預測曲線與實驗數據之比較圖

(8) Mori-Tanaka 模式

Mori-Tanaka 模式是根據Eshelby's 等效原理及平均應力觀念，假設第二相形狀為橢圓形進行材料之彈性係數之推導。其彈性係數及實驗結果做圖，圖10得知，對於其彈性係數，Mori-Tanaka 模式與NiAl體積分率在60 vol%以上時結果相近，計算值與0~100 vol% NiAl-Al₂O₃實驗結果之所有統計標準偏差平均為4.64%。

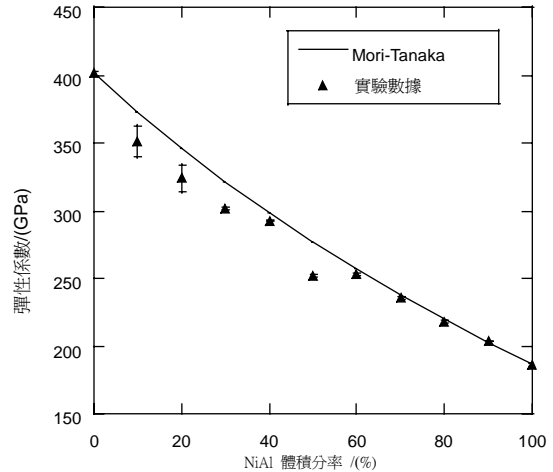


圖 10 Mori-Tanaka 預測曲線與實驗數據之比較圖

(9) Kerner 模式

Kerner 模式假設第二相形狀為圓形之顆粒，進行材料之彈性係數之推導。其彈性係數及實驗結果做圖，如圖11得知，對於其彈性係數，Kerner模式與NiAl體積分率在70 vol%以上時結果相近，計算值與0~100 vol% NiAl-Al₂O₃實驗結果之所有統計標準偏差平均為4.87%。

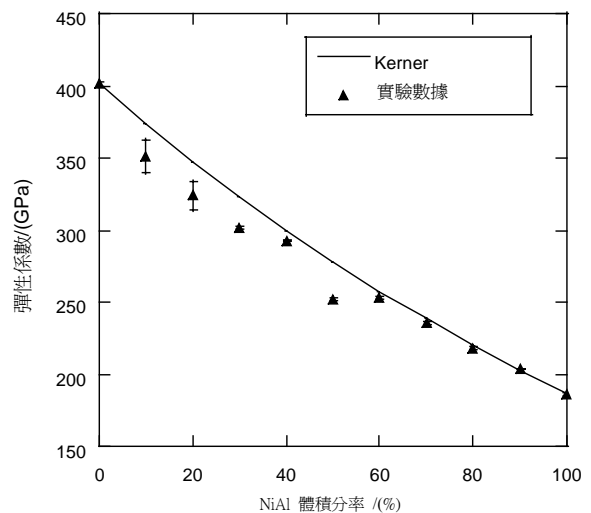


圖 11 Kerner 預測曲線與實驗數據之比較圖

符號與統計誤差計算說明

- E : 彈性係數 (Young's modulus)。
 K : 體積係數 (bulk modulus)。
 G : 剪力係數 (shear modulus)。
 V : 體積分率。
 ν : 泊松比 (Poisson ratio)。

下標

- c : 複合材料。
 m : 基底。
 p : 第二相或增強相。
 u : 上邊界。
 l : 下邊界。
 v : 超音波波速。

實驗數據與理論模式之統計誤差計算方式：將各 NiAl 體積分率之彈性係數實驗數據與理論模式預測值之差值：(1) 取平方；(2) 所有平方值相加；(3) 相加後取平均值；(4) 將平均值取均方根，即得統計誤差值，計算公式如式(24)：

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - P_i)^2}{n}} \quad (24)$$

其中： X_i 代表第*i*項實驗數據、 P_i 代表相對於第*i*項理論模式預測值、 n 為實驗數據數量。

參考文獻

- [1] D. Fang, H. Qi, S. Tu, "Elastic and plastic properties of metal-matrix composites: geometric effects of particles," *Comp. Mat. Sci.*, Vol. 6, 1996, pp. 303-309.
- [2] Z. Hashin, "Analysis of composite materials—A survey," *J. Appl. Mech.*, Vol. 50, 1983, pp. 481-505.
- [3] J. P. Watt, G. F. Davies and R. J. O'Connell, "The elastic properties of composite materials," *Reviews of Geophysics and Space Physics*, Vol. 14, No. 4, 1976, pp. 541-562.
- [4] J. C. Halpin and J. L. Kardos, "The Halpin-Tsai A: Review," *Poly. Eng. Sci.*, Vol. 16, No. 5, 1976, pp. 344-352.
- [5] Y. L. Shen, M. Finot, A. Needleman and S. Suresh, "Effective elastic response of two-phase composites," *Acta Metall. Mater.*, Vol. 42, No. 1, 1994, pp. 77-79.
- [6] Y. Benveniste, "A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials," *Mech. Mater.*, Vol. 6, 1987, pp. 147-157.
- [7] R. Hill, "Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 11, 1963, pp. 357-372.
- [8] K. S. Ravichandran, "Elastic properties of two-phase composites," *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol. 77, No. 5, 1994, pp. 1178-1184.
- [9] N. Ramakrishnan and V. S. Arunachalam, "Effective elastic moduli of porous ceramic materials," *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol. 76, No. 11, 1995, pp. 2745-2752.
- [10] A. P. Roberts and E. J. Garboczi, "Elastic properties of model porous ceramics," *J. Am. Ceram. Sci.*, Vol. 83, No. 12, 2000, pp. 3041-3048.
- [11] N. Katsube, "Estimation of effective elastic moduli for composites," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 32, No. 1, 1995, pp. 79-88.
- [12] T. T. Wu, "On the parametrization of the elastic moduli of two-phase materials," *J. Appl. Mech.*, Vol. 32, 1965, pp. 211-214.
- [13] W. H. Tuan and Y. P. Pai, "Mechanical properties of Al₂O₃-NiAl composites," *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol. 82, No. 6, 1999, pp. 1624-1626.
- [14] J. Krautkramer, H. Krautkramer, *Ultrasonic Testing of Materials*, Berlin, Springer-Verlag, 1990.

謝錦隆 (**Chin-Lung Hsieh**) 民國 52 年生，台灣大學材料科學與工程學系博士候選人，行政院原子能委員會核能研究所助理研究員，90 年度行政院原能會委託研究計畫優良計畫主持人獎，83 年高考一級核子工程科及格錄取。

段維新 (**Wei-Hsing Tuan**) 目前為台灣大學材料科學及工程學系教授，研究興趣為陶瓷材料的製程開發，微結構設計及性質評估。