

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

空氣污染物傳輸流場與軌跡的分析方法研究

計畫類別：個別型計畫 整合型計畫

計畫編號：NSC 89-2211-E-002-012-

執行期間： 88年 8月 1日至 89年 7月 31日

計畫主持人：張能復

共同主持人：

本成果報告包括以下應繳交之附件：

赴國外出差或研習心得報告一份

赴大陸地區出差或研習心得報告一份

出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份

國際合作研究計畫國外研究報告書一份

執行單位：台大環工所

中 華 民 國 年 月 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

空氣污染物傳輸流場與軌跡的分析方法研究

A Framework on Solving Wind Flow Field for Air Pollution

Transportation and Trajectory Analysis

計畫編號：NSC 89-2211-E-002-012-

執行期限：88年8月1日至89年7月31日

主持人：張能復

共同主持人：

計畫參與人員：陳洵毅

一、中文摘要

本研究的目的是在建立一個適用於台灣地區的三維風場診斷模式。為了解決複雜地形對風場的影響並同時滿足質量守恆的條件我們使用了變分分析的技巧。在第一代變分分析中，因為對垂直風速分量並無限制，風會選擇翻越地形而非繞流。這與空氣污染事件發生時大氣密度成層的現象並不相符，因此我們發展了第二代變分架構。然而，二代變分法的統御方程式非常複雜，若使用一般常用的超鬆弛法(Successive Over-Relaxation, SOR)求解，收斂速率很慢，不具實用價值。本研究中，我們嘗試以幾種不同的數值解法來求解，如強隱性法(Strongly Implicit Procedure, SIP)、多重網格法(Multigrid method)等等。我們發現在各種方法中，以SIP法求解最有率。尤其求解複雜地形的風場時，SIP法的優勢更明顯。

關鍵詞：風場、地形、診斷模式、強隱性法(SIP)、多重網格法、鬆弛法(SOR)、變分分析

Abstract:

In this research, we tried to establish a diagnostic wind field model to help solve the problem about pollutant dispersion. We took the variational analysis technique in order to let the wind field be satisfied with the continuity equation. In the first generation of variational analysis developed by Chang(1983), there is no constraint on the vertical wind vector so that the wind will cross over the terrain rather than around the obstacle. This does not match with the phenomenon that the air flow is a highly stratified fluid, thus we developed the second generation of variational analysis. Since the governing equation of the second generation of variational analysis is very complicated, the convergence rate is

slow when using successive over-relaxation (SOR) method to solve it.

In this research, we use seven different methods, such as Strongly Implicit Procedure(SIP), Full Multi-grid-method(FMG), Successive-OverRelaxation(SOR) method, etc., to solve the governing equation of second generation of variational analysis. After a series of checking procedures, we have found that SIP method is the most efficient one among these seven methods. Especially when complex terrain is considered, the superiority of SIP method is even more significant. In the cases we have tested, the numerical convergence rate of using SIP method is at least seven times faster than SOR method.

Keywords : wind field, terrain, diagnostic model, SIP, Multi-Grid method, SOR, variational analysis .

二、緣由與目的

(1) . 簡介:

對許多空氣品質預測模式而言，風場是很重要的初始條件，不正確的初始風場會對模式的準確性，造成極大的影響，故風場前處理工作在空氣品質模式使用中，佔有重要的前導地位。

受限於電腦資源等因素，以前的模式對於初始風場的計算多採連續修正法。然而，這種方式所求得的初始風場，通常無法滿足質量守恆，可能造成後續模式模擬產生很大的誤差。

因此，我們引進了變分分析的技巧，即在支配方程式中加入了連續方程式的強制限制，這樣求得的風場就自然滿足質量守恆了。

這時新的問題又產生了，因為實際風場是三維的，這樣推導出的支配方程式很複雜，因此在第一代變分分析中⁽¹⁾，並未對垂直風速分量加以限制。這樣

雖可簡化支配方程式，但經模擬後發現，遇到障礙物時，風會選擇翻越地形而非繞流，這與空氣污染事件發生時大氣密度成層的現象並不相符，因此發展了第二代變分分析架構，即加入垂直風速的限制項。然而，第二代變分分析的支配方程式，是一個很複雜的偏微分方程式，若使用鬆弛法(Successive-Over-Relaxation,SOR)求解，收斂速率很慢，沒有實用價值。因此，本研究即在找尋一個能兼顧正確性及縮短計算時間的數值解法，以期能在適當的時間內，以變分分析法完成初始風場的推估。

(2).變分架構:

本研究使用變分分析的目的即在於讓分析過的流場能符合連續分程式的強制性要求(constraint condition)，同時讓分析過的流場與原觀測流場整體間的變異量(variant)為最小。為使邊界條件易於導入，本研究中將直角座標系統(x, y, z)改為非直角(非正交)地形座標系統(x, y, s)，其定義為：

$$s = \frac{Z - E}{H - E} \quad (1)$$

H：模式模擬範圍高度

經處理後得到設計的變分量J為(u、v、w為三個卡氏座標軸向的三個風速分量)：

$$J = \iiint \left[\frac{1}{2}[(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 + \mathbf{b}(w - w_0)^2] + \mathbf{I} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{H - E} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{s - 1}{H - E} \left(\frac{\partial E}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial s} \right) \right] \right] dx dy ds \quad (2)$$

欲使變分量J為最小，即令 $J=0$ ，則其條件為

$$u = u_0 + \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{1}{H - E} \frac{\partial E}{\partial x} \frac{\partial}{\partial s} (I(s - 1)) \quad (3)$$

$$v = v_0 + \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{1}{H - E} \frac{\partial E}{\partial y} \frac{\partial}{\partial s} (I(s - 1)) \quad (4)$$

$$w = w_0 - \frac{1}{\mathbf{b}(H - E)} \frac{\partial I}{\partial s} \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{H - E} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{s - 1}{H - E} \left(\frac{\partial E}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial s} \right) = 0 \quad (6)$$

將(3)~(5)的u、v、w代入(6)式即可得到以變數的二代變分診斷方程式：

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} + f_1 \frac{\partial^2 I}{\partial s^2} + f_2 \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial s} + f_3 \frac{\partial^2 I}{\partial y \partial s} + f_4 \frac{\partial I}{\partial x} + f_5 \frac{\partial I}{\partial y} + f_6 \frac{\partial I}{\partial s} + f_7 I + G(x, y, s) = 0 \quad (7)$$

其中

$$f_1 = \frac{1}{\mathbf{b}(H - E)^2} + \left(\frac{s - 1}{H - E} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial E}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$$f_2 = \frac{2(s - 1)}{H - E} \frac{\partial E}{\partial x}, \quad f_3 = \frac{2(s - 1)}{H - E} \frac{\partial E}{\partial y}$$

$$f_4 = \frac{1}{H - E} \frac{\partial E}{\partial x}, \quad f_5 = \frac{1}{H - E} \frac{\partial E}{\partial y}$$

$$f_6 = \frac{(s - 1)}{H - E} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \right) + \frac{3(s - 1)}{(H - E)^2} \left[\left(\frac{\partial E}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$$f_7 = \frac{1}{H - E} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{(H - E)^2} \left[\left(\frac{\partial E}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$$G = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{s - 1}{H - E} \left(\frac{\partial E}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{\partial v_0}{\partial s} \right)$$

求出值後，再代入(3)~(5)中，即可求出調整後的風場(u,v,w)，換言之，變分分析數值求解之關鍵，即在求出式(7)之方程式。其衍生的邊界條件如下：

在自由邊界(流場可以自由進出之邊界) $\frac{\partial I}{\partial s} = 0$

在封閉邊界(如地表) $\frac{\partial I}{\partial s} = 0$

式中代表(w-w₀)誤差放大因子。因為大氣風場中，u與v，u₀與v₀的數量及大小為10m/sec，而w₀值為10⁻²-10⁻¹m/sec，如果不調整放大因子，則變分量就只可能由u,v的變化來控制，w的變化毫無影響。從數量級的大小，值應設在100-10,000之間，讓u,v與w的調控有同等重要性。

(3)、數值解法

1. 加入虛擬時間項求解法:

在二代變分診斷方程式(7)中加入虛擬時間項後，改寫如下：

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} + f_1 \frac{\partial^2 I}{\partial s^2} + f_2 \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial s} + f_3 \frac{\partial^2 I}{\partial y \partial s} + f_4 \frac{\partial I}{\partial x} + f_5 \frac{\partial I}{\partial y} + f_6 \frac{\partial I}{\partial s} + f_7 I + G(x, y, s)$$

原來的橢圓型PDE變成拋物線型PDE。當邊界條件相當，拋物線方程的穩態解，就等於橢圓方程的解。這又叫虛擬暫態解(false transient solution)⁽²⁾，文中簡寫為FTS。

2. 強隱性法(Strongly Implicit Procedure,SIP):

SIP法是Stone在1968年提出的⁽³⁾，基本上是源自於不完全矩陣分割的觀念。一個三維傳輸方程式離散化後，可以用線性代數一般式表示如下：

$$[A]\{f\} = \{Q\}$$

其中[A]是N*N階的係數方陣(N是網格點數)，{f}是變數依序排列所成的矩陣向量，{Q}則是源項(source term)所形成的矩陣向量。若我們能將[A]矩陣LU分割，則可以利用forward 及backward substitution解

$$\{f\} = [U]^{-1}[L]^{-1}\{Q\}$$

但當求值域很大、網格點很多時並不經濟。

SIP法乃利用不完全的矩陣分割來簡化[L]和[U]的選定，此時[A]=[L][U]+[E]，若能使誤差矩陣[E] [0]，疊代求解的效率才能提高。

令[M]=[L][U]=[A]+[N]，即[M]是疊代矩陣，{R_m}及 {f_m}分別是第m次疊代後的殘差矩陣向量及解向量。疊代過程如下：

$$\{R_m\} = \{Q\} - [A]\{f_m\}$$

$$\{f_{m+1}\} = \{f_m\} + [M]^{-1}\{R_m\} = \{f_m\} + ([L][U])^{-1}\{R_m\}$$

Stone的想法是基於一般偏微分方程在空間中平滑的特性，以達成使[N][] [0]的目的。

在使用SIP法需注意，原本二代變分法推導出的偏微分方程式，並不是標準的Helmholtz型的方程式，所以要把多出的項轉成源項。疊代過程分成內循環和外循環，在外循環裡必須更新源項的值。

如果將三維的變數指標，經特殊處理後轉成一維的變數指標，速度會較SIP法快，且經此處理可以避免在超級電腦上使用時，產生遞迴 (recursive) 的情形，以利平行運算的處理。這個方法叫向量化強隱性法(Vectorized Strongly Implicit solving Procedure, VSIP)⁽⁴⁾。

3. 多重網格法(Multigrid Method):

以疊代法求解偏微分方程式時，在某一網格點上產生的誤差，其實是前一次疊代時，鄰近點誤差的平均。如果鄰近點的誤差呈現正負振盪的話，誤差可以有效的被勻化；但當誤差是呈現一致的走勢時，疊代的效果就有限了。為了避免這種情形，選擇適當尺度的網格是必要的。經由簡單的波譜分析，可以發

現，造成疊代時收斂緩慢的主因，是來自長波，這時可以選用較大的網格來加速收斂，使誤差能跨細網格傳送，這就是多重網格法的關鍵⁽⁵⁾。

多重網格法是在求解時對網格尺度進行調整，以加快收斂速度，故仍要配合各數值解法進行求解。其轉換網格有兩種方式：

(a) 循環法:

即開始進入多重網格法之前和之後都在同一組網格上，如本研究中使用的V循環法(V-cycle)，簡稱為VCMG。

(b) 全多重網格法(Full Multigrid,FMG):

如果初始猜測值給的好，自然可以加快收斂的速度，所以把粗網格上的離散方程式直接進行求解，再把求出的解內插至細網格上，疊代至收斂速度慢時，再轉換殘差至粗網格疊代，如此反覆執行的方就叫FMG。

VCMG及FMG法在本研究中乃是配合鬆弛法求解，另外若上述兩種網格轉換配合強隱性法求解，文中分別簡寫為VCMGS及FMGS。

4. 鬆弛法(Successive Over-Relaxation,SOR):

這是最被廣泛使用的數值解法，發展歷史最久，原理可參閱文獻⁽⁶⁾。

以下將對模擬流程加以說明。

1. 均勻風場流經高斯形狀地形模擬:

如果直接進行台灣事件日的模擬，則因為風場複雜，很難從結果看出模擬有沒有問題。因此，先以簡單的高斯山地形及均一風場作模擬，觀察結果是否有符合流體應有的特性，是有必要的。

另一方面，經由高斯山均一風場的模擬，可以比較各數值解法在二代變分分析方程式的收斂效率，篩選出較有競爭力的數值解法，再進行進一步的分析。所謂高斯山指的是一個呈現高斯鐘形分布的均勻地形，其圖形如圖1所示。在這個部分所採用的網格區域是x及y方向各61個格點，而z方向則分16層。初始風場設定在 =0封閉邊界上的初始流速為零，其他網格上的初始風速設為1(m/s)。其餘邊界皆視為開放邊界，質量可自由進出。模式頂端高度設為4000m， =100。進行測試的數值方法包括FTS、SOR、SIP、VSIP、VCMG、FMG及FMGS等七種。

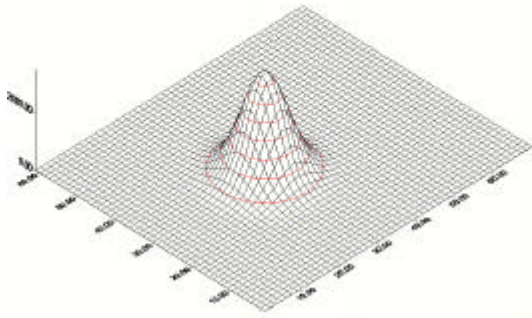


圖1 高斯山3-D立體圖

2. 均勻風場流經台灣地形模擬

這裡是指讀取台灣的地形資料，然後對均一風向的初始風場流過的情形進行模擬。台灣的盛行風向是東北季風及西南季風，所以可以將初始的均一風場設為東北風及西南風，來觀察經過台灣時風場的變化。另一方面，可藉台灣均一風場的模擬了解，在簡單初始風場，但是複雜地形的情况下，各數值法的收斂情形，也可進一步篩選較佳的數值解法。網格的尺寸是取 $2\text{km} \times 2\text{km}$ ，而模擬的範圍是 UTM 座標 x 軸向 100-380 及 y 軸向 2400-2840，所以一個 x-y 斷面有 $141 \times 221 = 31161$ 個網格點。模式頂端高度設為 4000m，z 軸方向依地形座標分為 16 層，設 $\Delta z = 100$ 。

初始風場的設定如下：

封閉邊界 $z=0$ 上的初始流速為零，其他網格則設為東北風或西南風兩種案例分別模擬。

東北風：設 $u=-3(\text{m/s})$ ， $v=-4(\text{m/s})$ 。

西南風：設 $u=3(\text{m/s})$ ， $v=4(\text{m/s})$ 。

3. 台灣空氣污染事件日案例模擬

比較各數值方法在真實風場狀況下，收斂的情形。地形及網格的設定，與台灣均一風場模擬相同。初始風場則是選取 1996 年 10 月 6 日 am1:00 及 pm1:00 這兩個小時值來模擬，因為其分別代表了典型的陸風及海風型的風場。

三、結果與討論

1. 均勻風場流過高斯地形模擬結果

各數值方法模擬出的水平風速圖，除了 FTS 法外，都收斂到相似的結果如圖 2。而且都有以下幾個特徵：

- (1) 在山的前方及後方風速變小。
- (2) 在山的兩側及山上產生繞流及翻越的現象，並且

風速變快。

這些都是流體在遇到阻礙物時，為了滿足質量守恆，所產生的一些現象。

虛擬時間項求解法 (FTS) 收斂的速度很慢，收斂結果明顯比其他方法來的差。VCMG 法及 FMG 法在收斂速度上僅與疊代法相當。其他的方法在速度上都優於疊代法，因此在這一階段篩選出 SIP、VSIP 及 FMGS 等方法與 SOR 法繼續進行後續的模擬，各數值方法收斂速度比較如圖 3。

2. 均勻風場流過台灣地形模擬結果

經測試之後，各數值方法在達到解已經穩定時，所模擬出的整個風場的特徵是相同的。圖 4 是各數值法模擬東北風流經台灣收斂時間與收斂條件關係圖。

在經變分分析修正後的模擬結果主要有幾個特徵：

- (1) 在風遇到山的阻礙時產生明顯的繞流現象。
- (2) 在山脈的前後風速有減慢的現象。
- (3) 在山脈的兩側風速有增加的現象。
- (4) 在峽谷處風有加速穿越的現象。

這些特徵都符合流體的特性，更增加了變分模擬的可信度。而西南風模擬的結果除了偏轉角度改變之外 (初始風場不同)，各數值法收斂效率與東北風相同。

總合以上的結果可以知道：

- (1) 向量化後的強隱性法 (VSIP) 與未向量化的強隱性法 (SIP) 在個人電腦上模擬的速度差異很小。SIP 及 VSIP 法在此模擬狀況下的收斂速度最快，比鬆弛法 (SOR) 節省約 91% 的時間。
- (2) 全多重網格結合 SIP 求解法 (FMGS) 的收斂速度並不理想，主要原因是來自網格傳遞時誤差過大，失去了平滑誤差的意義。

3. 空氣污染事件日模擬結果

在上一節中，我們已經篩選出強隱性法 (SIP) 是本研究中最優的數值解法，但仍希望了解在實際風場的情況下，效率究竟比 SOR 法好多少。雖然收斂情形會因為初始風場不同而改變，基本上不會相差太遠，因此本研究僅以 1996 年 10 月 6 日下午一點的風場，來客觀的評估收斂效率。

經模擬後發現，SIP 法在收斂條件設為千分之一時，數值解已經相當穩定，而 SOR 法則要到收斂條件約萬分之三時，才有相同的效果。因此，客觀的來看，在

此案例的情形下，SIP法至少較SOR法節省90%的運算時間。圖5是SIP及SOR法模擬此案例的收斂時間與收斂條件關係圖，1996年10月6日下午一點的風場模擬結果如圖6。

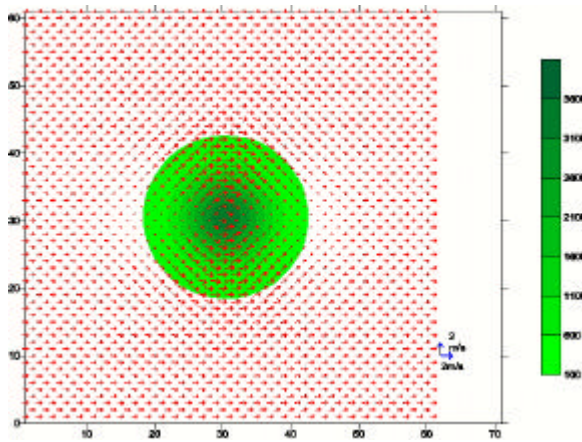


圖2 高斯地形均勻風場模擬等 圖($= 0.00625$)

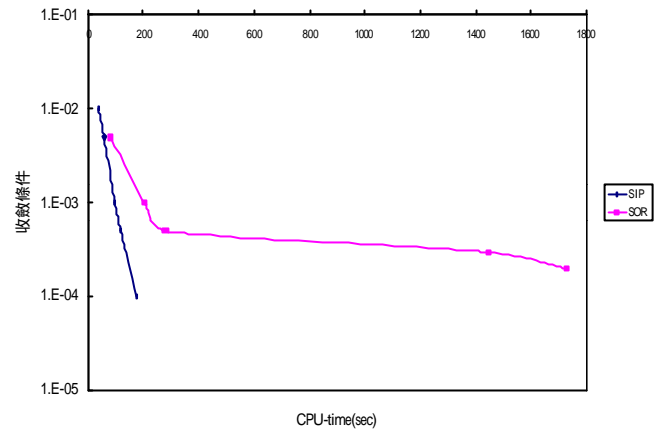


圖5 模擬1996年10月6日PM1:00 案例收斂時間與收斂條件關係圖

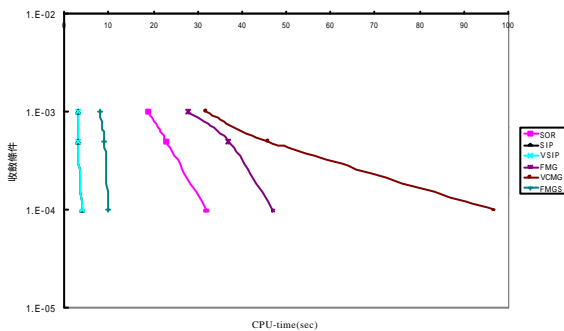


圖3 各數值法模擬均勻風場流經高斯地形收斂間與收斂條件關係圖

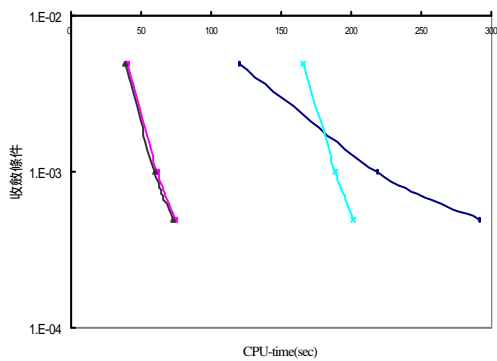


圖4 模擬東北風流經台灣收斂時間與收斂條件關係圖

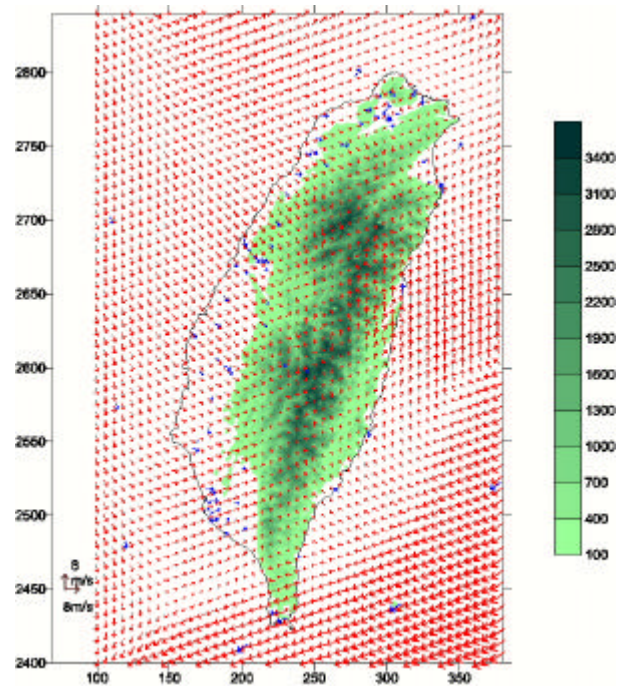


圖6 模擬10月6日PM1:00 等 面水平風速圖 ($= 0.00625$) (藍色箭頭是測站測值)

四、計畫成果自評

二代變分模擬得到的風場結果很合理，在經過均一風場流經高斯地形、均一風場流經台灣地形及台灣空氣污染事件日案例模擬之後，產生的風場現象包括：(1) 遇到阻隔產生繞流或翻越的現象，(2) 山的迎風面前方及背風面後方產生減速的現象，(3) 山的兩側及上方產生加速等的現象。符合一般流場的情形。

求解二代變分模擬風場的支配方程式，SIP法是

本研究中的最佳數值解法。客觀的比較後，SIP法比SOR法節省了90%的時間。若是以Barnes分析法(7)建立台灣的三維初始風場，所花時間約15秒，而以SIP法求解的二代變分模式建立風場約58秒，相差並不大。但是以變分分析產生風場，大大減少了質量不守恆的誤差，使後續空氣品質模式的推估能更精確，是非常值得的。

在許多的研究領域中，都會碰到求解偏微分方程的情況，只要經過適當的處理，強隱性法(SIP)都可做為求解的工具，且其效率明顯優於慣用的鬆弛法。現今研究的問題愈來愈複雜，電腦資源也愈來愈吃重，SIP法是一個相當不錯的選擇。

五、參考文獻

1. Chang, L.F. W., R. R. Hwang, and S.-C. Lin, A variational-kinematical model for flow over complex terrain. Ann. Rept. Inst. Phys., Acad. Sin., 13, 89-102, 1983.
2. Leon Lapidus, George F. Pinder: Numerical solution of partial differential equations in science and engineering, 歐亞書局, 1976.
3. Herbert L. Stone, Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations, SIAM Journal on Numerical analysis, Vol. 5, No. 3, pp. 530-558, 1968.
4. H. J. Leister and M. Peric, Vectorized strongly implicit solving procedure for a seven-diagonal coefficient matrix, International Journal on numerical method of heat fluid flow, Vol. 4, 159-172, 1994.
5. Scott R. Fulton, Paul E. Ciesielski and Wayne H. Schubert, Review Multigrid methods for elliptic problems: A review, American Meteorological Society, Vol. 114, pp. 943-958, 1986.
6. 曾忠一, 大氣模式的數值方法, 渤海堂文化公司, 1993.
7. 曾忠一, 氣象資料同化, 渤海堂文化公司, 第110-117頁, 1997.