非完整系統之分析
Analysis of Nonholonomic Systems

計畫編號: NSC 88-2212-E-002-003
執行期限: 87 年 8 月 1 日至 88 年 7 月 31 日
主持人: 王立昇　國立台灣大學應用力學研究所 教授

1. 前言

受約束的動力學系統，常發生於力學的問題中。其約束有的來自運動的約束，比如輪胎的滾動；有的則是系統的某些守恆量，例如衛星的角動量守恆。常見的約束形式，有幾何條件形式及 Pfaff 形式的約束等。

在過去的文獻中，Pfaff 形式的約束，依其是否完全可積，可分成兩大類：完整約束(holonomic constraint)及非完整約束(nonholonomic constraint)。一般是採用 Frobenius 定理來判定約束的種類。依據 Frobenius 定理，若在系統位形空間(configuration space)上的每一點，均滿足 Frobenius 條件，則約束為完全可積，亦即完整約束，且可知存在約束的積分曲面族。然而，在許多的例子可發現，即使 Frobenius 條件只在位形空間的子集合上滿足，仍可能存在約束的積分曲面。而積分曲面的出現，將造成約束的某些本質特性--例如可達性(reachability)--有更複雜的行為。本文將提出非完整約束的新分類方法，在此分類基礎上，可進一步探討約束的可達性等的特性。

而在 Lagrange 力學上，無論是完整或非完整約束系統，均可由 d'Alembert-Lagrange 原理，透過位形空間虛位移(virtual displacement)的描述，來獲得動力學的基本方程。然而，由於大部分文獻對於位形空間上虛位移定義的模糊，使得欲定義位形空間上的函數虛變分，以及狀態空間(state space)的虛變分，狀態空間的函數虛變分、泛函虛變分，變得相當困難。並且由於非完整約束的 Lagrange 力學方程和傳統的具有約束的變分原理所得之方程並不相同，更造成虛變分定義與運作上許多的疑惑。若在完整約束系統這問題並不存在，然而在非完整約束系統卻是存在的，其原因即是完整與非完整系統本質的差異。本文將提出虛變分的另一種架構，在此架構下其變分運算和傳統變分運算是一致的，並可進一步說明虛變分原理和傳統具約束的變分原理其差異之所在，以及說明此差異在完整約束將不存在的原因。

2. 非完整約束的新分類方法

考慮力學系統的位形空間 M 上廣義座標 $\underline{q}=\{q^i\}_{i=1\cdots n}$，此系統受 l 個線性獨立約束如下：

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ri}(\underline{q},t)\dot{q}^i + a_r(\underline{q},t)=0,\ r=1,\ldots,l, \qquad (2.1)$$

或可以 Pfaff 形式表達如下：

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ri}(\underline{q},t)\, dq^i + a_r(\underline{q},t)\, dt=0, \qquad (2.2)$$

在一般文獻中，約束為完整或非完整定義如下：令 U 為時間-位形空間中的開連通子集(open connected subset)。若在 U 上存在 l 個函數 $f_r: U\to \mathbf{R},\ \ r=1,\ldots,l$，使得(2.2)式等價於方程組 $df_r=0,\ \ r=1,\ldots,l$。則約束組(2.2)於 U 上稱為完整的(holonomic)。否則稱為非完整的(nonholonomic)。由此定義可知，若於 U 上約束為完整的，則約束可表達為 $f_r(\underline{q},t)=c_r,\ \ r=1,\ldots l$。在 U 上每一點可對應一 c_r 值，即 U 上每一點均通過一約束之積分曲面。然而下面的例子，卻可發現其存在一孤立的積分曲面。

例 2.1 考慮 $\mathbf{R}^3$ 上約束

$$(y^2-x^2-z)\,dx+(z-y^2-xy)\,dy + x\,dz=0. \qquad (2.3)$$

可發現 $z-x^2-y^2+xy=0$ 為(2.3)之一積分曲面，且並無任何其他積分曲面。

由完整約束之定義可知，上述例子之約束並非完整的(在任何開連通子集)，而是非完整的，然而其卻有孤立之積分曲面。由此可知，約束的完整或非完整特性須進一步的研究，以釐清此疑惑。

令 $q^0=t,\ \ a_{r0}=a_r$，約束組(2.2)可改寫成

$$\sum_{i=0}^{n} a_{ri}(q^0,\ldots,q^n)\, dq^i=0,\quad r=1,\ldots,l. \qquad (2.4)$$

定義微分 1-式(differential 1-form)

$$\omega_r=\sum_{i=0}^{n} a_{ri}\, dq^i,\quad r=1,\ldots,l. \qquad (2.5)$$

定義符號 $\wedge$ 為外乘積，及 $\Omega=\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_l$。由於 $\omega_1,\ldots,\omega_l$ 為線性獨立，故其為非零 l-形式。由

Frobenius 定理(參考 Edelen 1985)可知約束組 $\omega_r = 0\ (r = 1,\ldots,l)$ 在開連通集 U 為完整的條件為 U 上每點 p 滿足 Frobenius 條件

$$\Delta_r(p) = (d\omega_r \wedge \Omega)(p) = 0, \quad r = 1,\ldots,l. \quad (2.6)$$

然而在例子 2.1 之約束方程，其條件(2.6)僅在其孤立積分曲面上成立。以下給出約束積分曲面存在的必要性條件，以補充 Frobenius 定理。

引理 2.2 考慮 n 維空間 M，S 為其 $(n-l)$ 維子流形(submanifold)，Ω 為 M 上 l-形式，且滿足對每個 $x \in S$, 及 $v_1 \in T_x S$, $v_2,\ldots,v_l \in T_x M$, 使得 $\Omega(v_1,\ldots,v_l) = 0$，$\alpha$ 為任意滿足 $\alpha(TS) = 0$ 之 k-形式，則 $\Omega \wedge d\alpha\big|_S = 0$.

證明：

S 上任意一點 x，取局部座標 $\{q^1,\ldots,q^n\}$，且 $q^1(S) = \ldots = q^l(S) = 0$。可設

$$\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \alpha_{i_1 \ldots i_k}(q^1,\ldots,q^n)\, dq^{i_1} \wedge \ldots \wedge dq^{i_k},$$

由 $\alpha(TS) = 0$，則

$$\alpha_{i_1 \ldots i_k}(0,\ldots,0,q^{l+1},\ldots,q^n) = 0, l+1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$$

且 $\dfrac{\partial}{\partial q^j}\alpha_{i_1 \ldots i_k}(0,\ldots,0,q^{l+1},\ldots,q^n) = 0,$

$$l+1 \le j \le n,\ l+1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$$

即

$$\left.\frac{\partial \alpha_{i_1 \ldots i_k}}{\partial q^j}\right|_S = 0, \quad l+1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n,\ l+1 \le j \le n$$

則 $d\alpha$ 在 S 上可表達為

$$d\alpha\big|_S = \left.\sum_{j=1}^{l}(dq^j \wedge \beta_j)\right|_S, \quad 1 \le j \le l.$$

其中 β_j 為 x 鄰域之局部 $k-$形式。且

$$TS = span\left\{\frac{\partial}{\partial q^{l+1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial q^n}\right\}。$$

由 Ω 之條件，可知 $\Omega\big|_S = \Omega_0\, dq^1 \wedge \ldots \wedge dq^l$.

代入

$$\Omega \wedge d\alpha\big|_S = \sum_{j=1}^{l}\Omega_0\, dq^1 \wedge \ldots \wedge dq^l \wedge dq^j \wedge \beta_j = 0.$$

得證。

定理 2.3 若 S 為 $\{\omega_r\}_{r=1\ldots l}$ 的 $(n-l)$ 維積分曲面，則

$$\Delta_r\big|_S = \Omega \wedge d\omega_r\big|_S = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_l \wedge d\omega_r\big|_S = 0.$$

證明：

S 為 $\{\omega_r\}_{r=1\ldots l}$ 的 $(n-l)$ 維積分曲面，即 $\omega_r(TS) = 0, r = 1,\ldots,l$。$\Omega = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_l$，為 $l-$形式，且 Ω 滿足引理 2.2 條件。由引理 2.2 知 $\Delta_r = \Omega \wedge d\omega_r\big|_S = 0, \quad r = 1,\ldots,l$。得證。

由此定理，可獲得定義如下：

定義 2.4 M 上一點 x 若滿足

$$\Delta_r(x) = 0 \quad (r = 1,\ldots,l),$$

則稱之為約束之臨界點。若 x 滿足 $\Omega(x) = 0$，則稱之為奇異點。所有的臨界點構成的集合，記為 $C(\omega)$，所有的奇異點構成的集合，記為 $S(\omega)$。

由定理 2.3 知，任何積分曲面 S 必落在 $C(\omega)$。且 $S(\omega) \subseteq C(\omega)$。考慮例 2.1 的約束。其 Frobenius 條件 $\Delta = z - x^2 - y^2 + xy = 0$，則

$$S(\omega) = \{(x,y,z) : x = 0, z = y^2\}$$

$$C(\omega) = \{(x,y,z) : z - x^2 - y^2 + xy = 0\}$$

且其積分曲面恰就是 $C(\omega)$。

觀察此例子，可知非完整約束的種類可進一步分類如下。

定義 2.5 U 為 M 上一開連通子集。若 $C(\omega) \cap U = \varnothing$，則稱此約束在 U 上為完全非完整約束(completely nonholonomic)。若 $C(\omega) \cap U \neq \varnothing$，且有積分曲面存在於 U 上，則稱此積分曲面為約束於 U 上的臨界曲面，且稱此約束在 U 上為部分非完整約束(partially nonholonomic)。若於 U 上無積分曲面，則稱此約束在 U 上為準非完整約束(truly nonholonomic)。

對於開連通子集 U 上完全非完整約束，由 Frobenius 定理的證明中，可知其具有局部可達性(locally accessibility)，並利用其路徑連通的特性，可知其在 U 上具有可達性(reachability)。然而對於部分非完整約束，因其具有臨界積分曲面，在包含此積分曲面的開鄰域上，則其局部可達性將被破壞。觀察例 2.1 的約束，其積分曲面 $z - x^2 - y^2 + xy = 0$ 為一拋物面，此曲面將整個 $\mathbf{R}^3$ 空間分割成不連通的兩個區域。在內空間及外空間，約束為完全非完整約束，分別具有可達性。然而，由定義 2.5 知在此積分曲面上有奇異線 $\{(x,y,z) : x = 0, y = z^2\}$，在此奇異線上，約束將失去作用，即允許曲線由外空間透過此奇異線上的一點，穿過臨界積分曲面，到達內空間。例如曲線 $\{(0,0,z) : z \in (-1,1)\}$，其由外空間穿過奇異點(0,0,0)到達內空間，且滿足約束。因此可知，欲研究非完整約束的可達性，可利用 Frobenius 條件及定理 2.3 對約束在不同區域進行分類。利用定理 2.3 之積分曲面的必要條件，可找出積分曲面，並利用積分曲面的全域幾何性質，進行可達性的分析。

3. 非完整約束的變分原理

在一般文獻中，無論完整或非完整約束，均可以 d'Alembert-Lagrange 原理推得 Lagrange 方程。其首先定義了虛位移(virtual displacement)。對於事件空間(event space) $M \times R$ 上約束 1-形式組 $\{\omega_r\}_{r=1...l}$，定義在點 (x,t) 上一個虛位移 δx，為一個在 x 上之切向量，即 $\delta x \in T_x M$，且滿足 $\omega_r(x,t)\cdot(\delta x,0)=0$。其次，定義 (x,t) 上可能速度 v 為 x 上切向量，且滿足 $\omega_r(x,t)\cdot(v,1)=0$。一個可能路徑 $c:[t_1,t_2]\to M$，滿足其上任何一個時間 $t\in[t_1,t_2]$ 的速度均為點 $(c(t),t)$ 上的可能速度。考慮保守系統，其具有 Lagrangian 函數 $L:TM\times R\to R$。則一真實運動 $c:[t_0,\infty)\to M$ 為一可能路徑，且對於任意 $(c(t),t)$ 上虛位移 δx，其滿足下式：

$$F_L(\ddot{c}(t),\dot{c}(t),c(t),t)\cdot(\delta x)=0\,.$$

其中 $F_L(\ddot{c}(t),\dot{c}(t),c(t),t)\in T^*_{c(t)}M$ 為 Lagrange 動力學向量(餘切向量)，以局部座標 $\{q^i\}_{i=1...n}$ 表示如下

$$(F_L)_i=-\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i})+\frac{\partial L}{\partial q^i}\,.$$

在許多文獻中(參考 Rosenberg (1977)及陳濱(1989))，亦利用變分原理來獲得 Lagrange 方程。然而其處理方式和傳統變分學上的具約束變分問題並不相同。考慮一可能路徑 $c_0:[t_1,t_2]\to M$，其上平滑地分佈虛位移向量 $\delta x(t)$，且滿足 $\delta x(t_1)=0,\ \delta x(t_2)=0$。$c_0$ 對應狀態空間曲線 $(\dot{c}_0,c_0)$。由 $\delta x(t)$ 可定義 $(\dot{c}_0(t),c_0(t))$ 上狀態虛變更 $(\delta v(t),\delta x(t))\in TTM$ 為

$$\delta v(t)=\frac{d}{dt}\delta x(t)\,.$$

以 M 上局部座標 $\{q^i\}_{i=1...n}$ 表達，且 $\{q^i,\dot{q}^i\}_{i=1...n}$ 為 TM 上自然座標。令 $\delta x(t)$ 分量為 $\delta q^i(t)$，$\delta v(t)$ 分量為 $\delta \dot{q}^i(t)$，則

$$\delta \dot{q}^i(t)=\frac{d}{dt}\delta q^i(t)\,.$$

此即一般文獻中所提到的 $d-\delta$ 交換性，或狀態虛變更的協調性條件，且此條件為外加的。定義 Lagrange 函數 L 的變分運算 δL，取值於此狀態虛變更上為

$$\begin{aligned}&\delta L(\dot{c}(t),c(t),t)\cdot(\delta v,\delta x)\\&=TL(\dot{c}(t),c(t),t)\cdot(\delta v,\delta x,0)\end{aligned}$$

其中 TL 為 L 於 $TM\times R$ 上之切映射。則完整或非完整約束系統的 Hamilton 變分原理為：c_0 為真實運動，則其為可能路徑，且對任意 $(\dot{c}_0,c_0)$ 上之平滑狀態虛變更分佈 $(\delta v,\delta x)$，其滿足

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta L\cdot(\delta v,\delta x)\,dt=0\,.$$

然而，由此變分原理所得的 Lagrange 方程，在非完整約束下，和傳統變分學的具約束變分問題所得的結果並不相同。因此在許多文獻中，推論在非完整約束下，$\int \delta L\,dt \neq \delta\int L\,dt$。其中右式將獲得傳統變分學的變分原理之運動方程。

事實上，若依此架構，將不可能獲得虛變分的 $\delta\int L\,dt$ 定義。更進一步來看，變分運算 δL 的定義也是依賴於變分的 $d-\delta$ 交換性。對於非完整約束，何種變分運算是合法的，何種是不合法的，將變成非常混淆。例如約束方程 $\omega_r=0$，對其進行變分運算，$\delta\omega_r=0$，在非完整約束下，和狀態虛變更是不相容的。

為了解決此疑惑，本文提供另一種變分架構，使其變分運算和傳統變分運算是一致的。其和傳統變分原理所得的方程不同之原因，在於其所選取的變分集合和傳統變分學所選取的變分集合是不相同的。而在完整約束下，則是完全一致的。

定義 3.1 給定位形空間 M 上路徑 $c_0:[t_1,t_2]\to M$，變分 $H:[t_1,t_2]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 為平滑函數，且滿足 $H(t,0)=c(t),\quad t\in[t_1,t_2]$，及 $H(t_1,s)=c(t_1),\ H(t_2,s)=c(t_2),\ s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$。$c_s(t)=H(t,s)$ 稱為 $t-$曲線。當 $s\neq 0$，c_s 稱為變軌，而 c_0 稱為原軌。$h_t(s)=H(t,s)$ 稱為 $s-$曲線，或變分曲線。

時間 t 的變分曲線於 $s=0$ (即 $c_0(t)$)的切向量 $\dot{h}_t(0)$，構成原軌上平滑分佈的切向量，記為 $\delta H:[t_1,t_2]\to TM,\quad \delta H(t)\mapsto T_{c_0(t)}M$。其滿足 $\delta H(t_1)=0$ 及 $\delta H(t_2)=0$。若 c_0 上兩個變分 H_1 及 H_2 具有相同的 $\delta H_1=\delta H_2$，則稱其為等價的(equivalent)。所有 c_0 上變分所構成的等價類(equivalent class)恰和 c_0 上平滑的切向量分佈一一對應，因此可以切向量分佈來代表等價的變分。

定義 3.2 給定 $M\times R$ 上純量函數 f，及 c_0 上變分 H。定義其變分運算 δf 取值於 H 上，為

$$\begin{aligned}\delta f(t)&=\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} f(h_t(s),t)\\&=Tf(c_0(t),t)\cdot(\dot{h}_t(0),0).\end{aligned}$$

由上式可知，等價的變分將有相同的變分運算 δf。且知等價的變分可由平滑切向量分佈來代表，

因此上述之變分運算可定義於c_0上全體之切向量分佈：

$$(\delta f(\delta H))(t)=Tf(c_0(t),t)\cdot(\delta H(t),0).$$

考慮局部座標$\{q^i\}_{i=1\ldots n}$，其為局部函數。可知其變分運算$(\delta q^i(\delta H))(t)$即為$c_0(t)$上變分向量$\delta H(t)$的分量。對於任意函數$f$的變分

$$(\delta f(\delta H))(t)=\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} f(q^1(h_t(s)),\ldots,q^n(h_t(s)),t)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q^i}\bigg|_{(c_0(t),t)}\delta q^i(\delta H(t)),$$

其變分運算符合一般的變分運算原則。

當給定約束組$\omega_r=0\ (r=1,\ldots,l)$，可定義兩類變分，如下：

定義 3.3 給定約束$\omega_r=0\ (r=1,\ldots,l)$之可能路徑$c_0$，一個$c_0$上的虛變分$H$滿足$\omega_r(h_t(s),t)\cdot(\dot{h}_t(s),0)=0$，即每個變分路徑$h_t(s)$為滿足約束的等時路徑。$c_0$上全體的虛變分集合記為$\mathbf{V}_{c_0}$，全體的虛變分等價類集合記為$\delta\mathbf{V}_{c_0}$。

由上述定義可知，任一時間$t\in[t_1,t_2]$，$c_0(t)$上切向量$\delta H(t)$或$\dot{h}_t(0)$滿足$\omega_r(c_0(t),t)\cdot(\dot{h}_t(0),0)=0$，即為點$(c_0(t),t)$上的虛位移。一個$c_0$上的平滑虛位移分佈恰對應一個虛變分等價類。以下給出第二種變分的定義，其對應傳統變分學變分原理所考慮的變分集。

定義 3.4 給定約束$\omega_r=0\ (r=1,\ldots,l)$之可能路徑$c_0$，一個$c_0$上的可能變分$H$滿足$\omega_r(c_s(t),t)\cdot(\dot{c}_s(t),1)=0$，即每個變軌$c_s(t)$為滿足約束的可能路徑。$c_0$上全體的可能變分集合記為$\mathbf{P}_{c_0}$，全體的可能變分等價類集合記為$\delta\mathbf{P}_{c_0}$。

以局部座標表示，$(q^0=t)$

$$\omega_r=\sum_{i=0}^{n}a_{ri}(q^0,q^1,\ldots,q^n)\,dq^i,\quad r=1,\ldots,l.$$

則虛變分滿足

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ri}(c_0(t),t)\ \ \delta q^i(\delta H(t))=0.$$

而可能變分則滿足$(\dot{q}^0=\dot{t}=1)$

$$\sum_{i=0}^{n}a_{ri}(c_s(t),t)\,\dot{q}^i(\dot{c}_s(t))=0.$$

對於一個位形空間變分，其可以如下方法定義對應的狀態路徑$\dot{c}_0(t)$上狀態空間變分：

$$G(t,s)=\dot{c}_s(t)\in TM,\quad t\in[t_1,t_2],\ s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$$

其定義和位形空間變分不同之處在於兩端點並不封閉，即

$$G(t_1,s)\neq G(t_1,0)=\dot{c}_0(t_1),$$
$$G(t_2,s)\neq G(t_2,0)=\dot{c}_0(t_2).$$

由狀態原軌$\dot{c}_0(t)$出發的狀態變分路徑記為$g_t(s)=G(t,s)$，其切向量

$$\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} g_t(s)=\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0}\frac{\partial}{\partial t}c_s(t)=\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0}\frac{\partial}{\partial t}H(t,s)$$

$$=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} h_t(s)=\frac{d}{dt}\delta H(t),$$

稱為狀態等時變更，並可記其切向量分佈為δG，且$\delta G(t)=\dfrac{d}{dt}\delta H(t)$。可知等價的位形變分，其對應狀態變分亦為等價，可以δG來代表狀態變分的等價類。以下定義狀態空間函數的變分運算。

定義 3.5 給定時間-狀態空間函數$L:TM\times R\to R$，及位形空間原軌c_0及c_0上變分H，其對應狀態變分G。可定義L的變分運算，取值在狀態變分G為：

$$\delta L(t)=\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} L(g_t(s),t)$$

$$=TL(\dot{c}_0(t),t)\cdot\Big(\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} g_t(s),\,0\Big)$$

$$=TL(\dot{c}_0(t),t)\cdot(\delta G(t),\,0).$$

可知等價的狀態變分對應相同的變分運算值。因此可定義L的變分運算於狀態變分的等價類集，或$\dot{c}_0$上狀態變更向量分佈，記為$\delta L(\delta G)$。

TM上局部座標$\{q^i,\dot{q}^i\}_{i=1\ldots n}$，其局部函數$\dot{q}^i$之變分運算如下：

$$\delta\dot{q}^i(\delta G(t))$$
$$=\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0}\dot{q}^i(g_t(s))=\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0}\dot{q}^i(\dot{c}_s(t))$$

$$=\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0}\frac{\partial}{\partial t}q^i(c_s(t))=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0}q^i(c_s(t))$$
$$=\frac{d}{dt}\delta q^i(\delta H(t))=\frac{d}{dt}\delta q^i(\delta G(t)).$$

可知由位形變分對應的狀態變分具有$\delta\dot{q}^i=\dfrac{d}{dt}\delta q^i$的$d-\delta$交換性。且對$L$函數的變分運算亦滿足

$$\delta L(\delta G)=\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta\dot{q}^i+\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i)(\delta G)$$

的一般變分運算特性。可進一步定義積分形式狀態空間泛函的變分運算。

定義 3.6 給定位形變分 H 及時間-狀態空間函數 L，定義 $\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ 運算，取值於 H 對應的狀態變分 G 上：

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt=\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\int_{t_1}^{t_2} L(\dot{c}_s(t),t)\,dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} L(\dot{c}_s(t),t)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\delta L(\delta G(t))\,dt.$$

故可定義變分運算，取值於狀態變更向量分佈 δG 上：

$$(\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt)(\delta G)=\int_{t_1}^{t_2}\delta L(\delta G(t))\,dt\,.$$

由上式可知在由位形變分對應的狀態變分上 $\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\delta L\,dt$，即積分-變分為可交換的，其亦滿足一般變分運算規則。且對等價的狀態變分，其積分變分值亦相同。因此，其變分運算亦可定義於狀態變分等價類，或原軌 $\dot{c}_0$ 上之狀態變更向量分佈。同樣地，此變分運算亦滿足積分-變分交換性。

對於約束系統，位形變分上的虛變分與可能變分有如下的定理。

定理 3.7 $\{\omega_r\}_{r=1..l}$ 為完整的 $\Leftrightarrow$ 對任何 c_0，$\mathbf{P}_{c_0}=\mathbf{V}_{c_0}\Leftrightarrow\delta\mathbf{P}_{c_0}=\delta\mathbf{V}_{c_0}$.

反之，若約束為非完整，則此二變分集合將不相同。故可根據此二集合定義兩種不同的變分原理，如下。

設在位形空間 M 上，給定一約束組 $\{\omega_r\}_{r=1..l}$，Lagrange 函數 L。

Hamilton 變分原理

一真實運動 c_0 為一可能路徑 $(t\geq 0)$，且對任何時間區間 $[t_1,t_2]$ $(t_1\geq 0)$，c_0 在此時間區間上，對任一位形虛變分 H 對應之狀態變更向量分佈 δG，滿足 $(\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt)(\delta G)=0$.

Vakonomic 變分原理

一真實運動 c_0 為一可能路徑 $(t\geq 0)$，且對任何時間區間 $[t_1,t_2]$ $(t_1\geq 0)$，c_0 在此時間區間上，對任一位形可能變分 H 對應之狀態變更向量分佈 δG，滿足 $(\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt)(\delta G)=0$.

根據定理 3.7 可知，對非完整約束系統，此二變分原理所選取的變分集合並不相同；因此，此二變分原理並不等價，即一個由 Hamilton 原理所獲得的真實運動，一般而言，並非一個 Vakonomic 原理下的真實運動；反之亦然。並且，Hamilton 變分原理等價於 d'Alembert-Lagrange 原理，而 Vakonomic 變分原理即為傳統變分學的具約束變分問題。在完整約束系統，此二變分原理為等價的，其真實運動亦為相同。在許多文獻中的一個推論 $\delta\int L\,dt\neq\int\delta L\,dt$，其實為左式與右式取在不同的變分集上所造成之誤解；而在本文的架構下，對任一變分，此交換性是成立的，即 $\delta\int L\,dt=\int\delta L\,dt$。

4. 結論

本文提出非完整約束的新分類方法，其在位形空間不同的區域上有不同的分類，包括完全非完整、部分非完整，及準非完整約束。在此分類基礎上，可依積分曲面幾何性質，來探討約束的可達性等的特性。

在約束系統的 Lagrange 力學上，本文提供了一個變分的架構，在此架構下可依序定義出數種變分運算，其與傳統變分學的變分運算原則是一致的。並可得到狀態變分的 $d-\delta$ 交換性，及 $\delta-\int$ 交換性。對於約束系統的變分原理，亦在此架構下，可獲得明確的描述。對於許多文獻上的一個推論 $\delta\int L\,dt\neq\int\delta L\,dt$，在此亦可知，其實為兩種不同的變分原理所造成的混淆。而在完整約束系統下，此差異性將消失。

參考文獻

[1] B.Chen, L.-S.Wang, S.-S.Chu, W.-T.Chou, "A New Classification of Nonholonomic Constraints", Proceedings of the Royal Society of London, 1997.

[2] H.Hertz, "The Principles of Mechanics", Dover Publications (Leipzig), 1956(1894).

[3] C.Lanczos, "The Variational Principles of Mechanics", University of Toronto Press, 4th edition, 1970.

[4] Ju.I.Neimark, N.A.Fufaev, "Dynamics of Non-holonomic Systems", Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, 1972.

[5] J.E.Marsden, T.S.Ratiu, "Introduction to Mechanics and Symmetry", Springer-Verlag, 1994.

[6] J.E.Marsden, R.Montgomery, T.S.Ratiu, "Reduction, Symmetry, and Phases in Mechanics", Memoirs of American Mathematical Society, No. 436, 1990.

[7] 陳濱,"分析動力學", 1989.

[8] R.M.Rosenberg, "Analytical Dynamics of Discrete Systems", Plenum Press, 1977.

[9] L.A.Pars, "Analytical Dynamics", Heinemann Educational Book Ltd., 1965.

[10] V.V.Rumyantsev, "The General Equations of Analytical Dynamics", Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 60(6), 1996.

[11] S.Gallot, D.Hulin, J.Lafontaine, "Riemannian Geometry", Springer-Verlag, 1990.