

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

## 中厚度正交異性環形板機械行為的各種變形理論比較與研究

計畫編號：NSC 88-2212-E-002-023

執行期限：87年8月1日至88年7月31日

主持人：張正憲 教授 國立臺灣大學 應用力學研究所

### 一、中文摘要

本計畫主要是討論非等向性材料的圓盤在有角速度的情形下，所產生的一些振動現象，進而分析其應該改進的地方。而此圓盤的材料為極性正交材料(polar orthotropic material)，分析的方法，主要以漢米敦原理(Hamilton's principle)來推導運動方程式，配上邊界條件，依照迦了金方法(Galerkin method)的假設解法，進而推算振動模態的自然頻率，來了解轉動效應對圓盤的影響，更進一步分析剪切板理論與古典板理論在描述圓盤運動的不同之處，以了解剪切變形造成的效果。

### Abstract

This project investigated the dynamic behavior of the rotating polar orthotropic annular disk based on the Mindlin plate theory and classical plate theory. The governing equations were derived out through the application of Hamilton principle. Rotating effect introduced the in-plane initial stresses, which were included in the governing equations. Appropriate series form of the unknown displacement functions satisfying the boundary conditions were assumed, and were substituting into the governing equations. Dynamic response and natural modes of vibration could be obtained by solving the resulting equations. Numerical comparisons were specially emphasized on the natural frequencies under the two plate theories.

Parameter study were done for rotating speed, ratios of inner to outer radius, thickness to radius, degree of orthotropy, etc.

### 二、緣由與目的

本文討論的圓板，以非等向性的圓板為主，而在轉動的動態行為中，材料性質會隨著方向不同而改變，此種具有方向性的材料，在現代科技中，也扮演了重要的角色，包括如複合材料、固態結晶等...，都是涉及非等向性材料。而我們探討的轉動圓盤行為，在生活上、工業上也常常可以找到諸多應用的地方，像飛輪方面的設計，鋸盤的轉動，硬碟碟片的轉動等...。而本文探討的方面，除了內外徑變化對頻率的影響，還包括轉動角速度變化對圓盤的影響，各個自然模態的比較，負載與轉動造成圓盤的側向振動位移等等....。

本文以剪切板理論來著手，使用漢米敦原理，在一開始時，假設三個方向的位移得到五個獨立的變數，而由潛能與動能，找出五條運動方程式，而其中一條為側向垂直的振動，兩條為內側平面的振動(in-plane vibration)，兩條為轉動量的運動方程式。此處我們有興趣的為側向垂直振動的運動方程式，根據經驗，當振動頻率不高時，振動方式主要是側向的垂直振動，只有在較高頻時，才會發生內側平面的振動，所以我們對頻率較低的垂直振動有興趣。

因為是處理非等向性材料，本身有較多的工程常數，造成統御方程式較為複雜，加上自由邊的邊界條件造成變數耦合的現象，如果要從運動方程式著手，無法得到解析解，所以我們用能量解法(Ref. [1])，假設位移函數滿足邊界條件，

再代回統御方程式求解。

由於我們採用的是剪切板理論來計算，考慮了剪切的變形，而現有的資料中，較難找到用剪切板理論分析圓盤，但雖立論不一樣，我們還是一樣可以參考由古典板理論分析的一些資料，像 Southwell R. V. (Ref. [7])，他是最先注意到轉動圓盤的，其考慮自由邊界條件，把共振頻率分為兩部份，一為忽略轉動效應，一為忽略橢曲剛度；S. Barasch, Y. Chen (Ref. [8])利用直接解統御方程式的方法，畫出等向性材料共振頻率對轉動角速度的曲線。這些對我們理解整個計算過程都有或多或少的參考價值，而對於本文以剪切板理論來分析，相較於古典板理論，我們也可以作其差異性的分析，以期能對轉動圓盤的分析有所貢獻。

### 三、內容

參考圖一，對於正交環形板的變形場可設為：

$$\begin{aligned} u_r &= u(r, \theta, t) + z\psi_r(r, \theta, t) \\ u_\theta &= v(r, \theta, t) + z\psi_\theta(r, \theta, t) \\ u_z &= w(r, \theta, t) \end{aligned}$$

(1)

統御方程式可由 Hamilton 原理導出：

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0$$

(2)

將上式各項逐項作變分，可得到下面的方程式

關於  $\delta u$ ：

$$r\rho h(\Omega^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \Omega \dot{v} - r\Omega^2 - i\omega^2) + D_r h[\frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial u}{\partial r}) + v_\theta \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r}] - \frac{1}{r} D_\theta h(u + \frac{\partial v}{\partial \theta}) + G_{r\theta} h[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta}] = 0$$

(3)

關於  $\delta v$ ：

$$r\rho(\Omega^2 v - \Omega \dot{u} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \Omega \dot{u}) + D_r v_\theta [\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} D_\theta (\frac{\partial u}{\partial \theta})] + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + G_{r\theta} [\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} - \frac{v}{r} + \frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial v}{\partial r})] = 0$$

(4)

關於  $\delta w$ ：

$$\begin{aligned} -h\eta \ddot{w} + h \frac{\partial}{\partial r}(r \sigma_r \frac{\partial w}{\partial r}) + h \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sigma_\theta \frac{\partial w}{\partial \theta}) + h G_r \frac{\partial}{\partial r}(r \psi_r + r \frac{\partial w}{\partial r}) \\ + h G_\theta (\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta}) = 0 \end{aligned}$$

(5)

關於  $\delta \psi_r$ ：

$$\begin{aligned} r\rho(\Omega \frac{\partial \psi_r}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial r^2} + \Omega \psi_\theta + \Omega^2 \psi_r) + D_r I[\frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial \psi_r}{\partial r}) + v_\theta (\frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta \partial r})] - \frac{1}{r} D_\theta I \\ (\psi_r + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}) - r G_r h(\psi_r + \frac{\partial w}{\partial r}) + G_{r\theta} I[\frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}] = 0 \end{aligned}$$

(6)

關於  $\delta \psi_\theta$ ：

$$\begin{aligned} r\rho(\Omega^2 \psi_\theta - \Omega \dot{\psi}_\theta - \dot{\psi}_r - \Omega^2 \psi_r) + D_r v_\theta I[\frac{\partial^2 \psi_r}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r} D_\theta I(\frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta^2}) - \\ G_\theta h(r \psi_r + \frac{\partial w}{\partial \theta}) + G_{r\theta} I[\frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r}) + \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \psi_\theta] = 0 \end{aligned}$$

(7)

邊界條件

• 內徑固定： $w = 0, \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \psi_r = 0,$

$$\psi_\theta = 0$$

• 外徑自由： $M_r = Q_r = M_{r\theta} = 0,$

(3) (4)兩式和(5)至(7)式無關，其作用在於

求轉動造成的預應力  $\sigma_r^0, \sigma_\theta^0$  (參考資料[5])。

為求解(5)至(7)式中的  $w, \psi_r, \psi_\theta$ ，可假設

$$w(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn}(t) \sin(n\theta) J_{mn}(r)$$

$$\psi_r(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N B_{mn}(t) \sin(n\theta) J_{mn}(r) \quad (9)$$

$$\psi_\theta(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N C_{mn}(t) \cos(n\theta) K_{mn}(r)$$

其中

$$I_{mn} = X^{(0)}_{mn} \times r^m + X^{(1)}_{mn} \times r^{m+1} + X^{(2)}_{mn} \times r^{m+2} + X^{(3)}_{mn} \times r^{m+3}$$

$$J_{mn} = Y^{(0)}_{mn} \times r^m + Y^{(1)}_{mn} \times r^{m+1} + Y^{(2)}_{mn} \times r^{m+2} + Y^{(3)}_{mn} \times r^{m+3}$$

$$K_{mn} = Z^{(0)}_{mn} \times r^m + Z^{(1)}_{mn} \times r^{m+1} + Z^{(2)}_{mn} \times r^{m+2} + Z^{(3)}_{mn} \times r^{m+3}$$

這裡  $X^{(j)}_{mn}$ ,  $Y^{(j)}_{mn}$ ,  $Z^{(j)}_{mn}$ ,  $j = 0, \dots, 3$  皆為待定的函數，可由邊界條件及

加上三條正規化條件： $I_{mn}(\frac{a+b}{2}) = 1$ 、

$J_{mn}(\frac{a+b}{2}) = 1$ 、 $K_{mn}(\frac{a+b}{2}) = 1$  來求出。

將(11)式代入(6)至(8)式中，可得

$$\begin{bmatrix} \delta^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & \delta^{(6)} & 0 \\ 0 & 0 & \delta^{(10)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_{mn} \\ \tilde{B}_{mn} \\ \tilde{C}_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta^{(2)} & \delta^{(3)} & \delta^{(4)} \\ \delta^{(5)} & \delta^{(7)} & \delta^{(8)} \\ \delta^{(9)} & \delta^{(10)} & \delta^{(12)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(9)

上式可用來求取自然頻率及動態、靜態反應。

#### 四、結果與討論

在圖二裡，我們顯示了古典板和剪切板理論對自然頻率預測的差異。古典板明顯給予過高的預測。在圖三、四裡頭，各別顯示無旋轉和有旋轉下，不同的  $E_r / E_\theta$  對自然頻率的影響。

#### 五、參考文獻

1. S. G. Hutton, S. Chonan, and B. F. Lehmann, "Dynamic Response of a Guided Circular Saw," Journal of Sound and Vibration, 1987, 112 (3), pp. 527-539.
2. 楊緒山, 金建三 “彈性力學” 高等教育出版社
3. S. A. Ambarsumyan, "Theory of Anisotropic Plates," Technomic Press, 1970.
4. J. N. Reddy "Energy and Variational Method in Applied Mechanics," 1984.
5. A. Rajguru and V. Sundarajah "Vibration of a Rotating Orthotropic Disk," Journal of Applied Mechanics, 1982, Vol. 49, pp. 654-656.
6. S. M. Vogel and D. W. Skinner: "Natural Frequencies of Transversely Vibrating Uniform Annular Plates," J. Appl. Mech., Vol. 32, No. 4, (1965), pp. 926-931.
7. R. V. Southwell, "On the Free Transverse Vibration of a Uniform Circular Disk Clamped at Its Center, and on the Effects of Rotation," Proceeding of the Royal Society, London, Vol. 101, May 1922, pp. 133-153.
8. S. Barasch, and Y. Chen, "On a Vibration of a Rotating Disk," Journal of Applied Mechanics Dec. 1972, pp. 1143-1144.
9. J. S. Burdass and T. Wren, "The Theory of a Piezoelectric Disc Gyroscope" IEEE Transaction on Aerospace and Electronic System Vol. AES-22, No 4, July 1986
10. D. G. Gorman, "Natural Frequencies of Polar Orthotropic Annular and Circular Plates," Journal of Sound and Vibration 1984, 93 (4) p. p. 145-154.
11. Edward B. Magrab, "Vibration of elastic structural members" SIJTHOFF & NJORDHOFF, 1979.
12. 游國華 “轉動圓盤的動態行為分析” 碩士論文—國立台灣大學應用力學研究所, 1989
13. S. M. Vogel and D. W. Skinner: "Natural Frequencies of Transversely Vibrating Uniform Annular Plates," J. App. Mech., Vol. 32, No. 4, (1965), pp. 926-931.

## 附圖

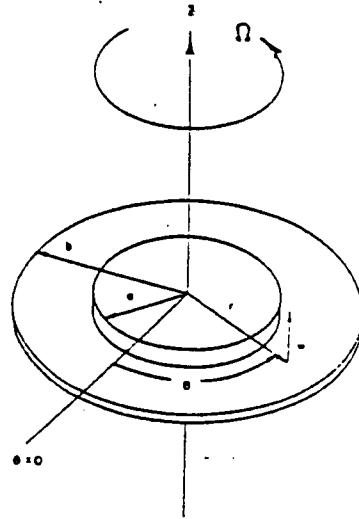


圖 1 圓板幾何圖

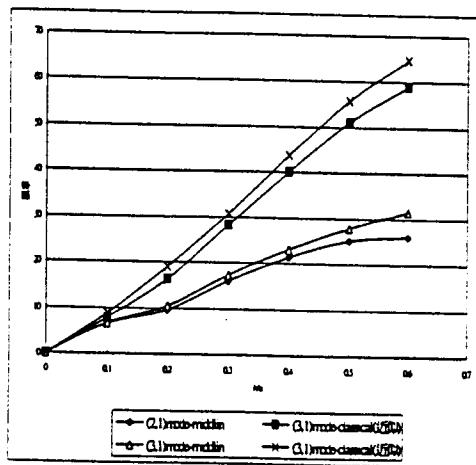


圖 2 剪切板理論與理想的古典板理論比較( $E_1/E_2=3$ , 半徑比 5,  $\Omega=0$ )

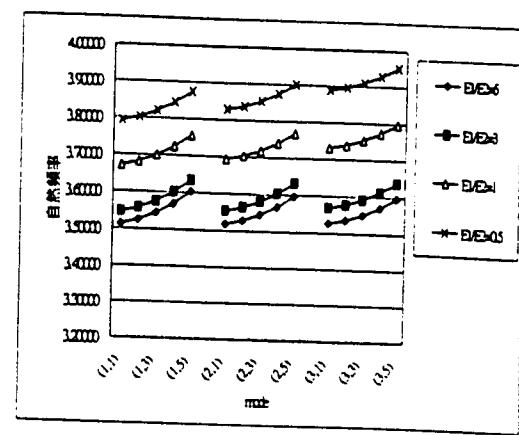


圖 3  $E_1/E_2$  變化, 對第三自然頻率的影響(半徑比 0.3, 無轉速)

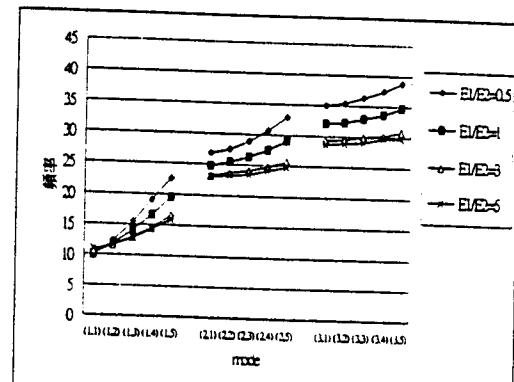


圖 4  $E_1/E_2$  變化, 對第三頻率的影響(半徑比 0.3,  $\Omega=10$ )