

# 梁式諧振角速儀分析和測試

## Analysis and Testing of Beam Vibratory Angular Sensors

計畫編號: NSC 89-2212-E-002-099

計畫期限: 89 年 08 月 01 日至 90 年 10 月 31 日

主持人: 周傳心 臺灣大學應用力學研究所

### 一、摘要

本計畫主要目的在研製振動方梁角速儀，設計其驅動與感測電路，並分析與測試其工作性能。振動角速儀，係利用振動元件之兩垂直模態間的能量轉換，其兩模態共振頻率須達到一致，輸出才能有較好的靈敏度。但在方梁振子的製作過程中，因加工上的誤差，使方梁此兩共振頻率非一致。所以，本文先模擬修整方梁之質量，以調整其兩共振頻率，建立修整的依據，而由修整梁元件，以達到使共振頻率一致的要求。設計以壓電驅動和感測梁驅動之共振回授激發與訊號析出電路。並對其設計緣由與應用分析，亦作一探討。最後對方梁及其激發與感測電路之角速儀系統，測試其振動與電路響應，得到角速度與輸出電壓間的規範。

關鍵字：方梁角速儀、共振頻率、壓電、激發與感測電路、共振頻率調整。

### ABSTRACT

The aim of this research is to study mechanical and electrical properties of the beam-type vibratory angular sensors. Equations of motion of the sensor are derived and the transfer functions of the driving and sensing electronic device and the beam are also obtained. The resonance frequency of the beam is trimmed based on the results of numerical simulation of the dependence of the resonance frequency on the mass and the geometric of the beam. A vibrating beam-type device for measuring the frequency (angular velocity) response of the angular sensor is developed.

Keywords: Vibratory angular sensor, frequency response piezoelectric, shunt resonance.

### 一、前言

振動梁式 (Vibration Beam Gyroscope; VBG) 工作原理，由一垂直與水平向共振頻率一致的方梁，由壓電陶磁激發其垂直向的第一共振模態。當有角速度作用時，振動方梁之水平向，則因科氏力的作用產生與垂直向同樣頻率的共振，且其與科氏力有一定之關係。我們依此作用原理，再配合適當之電路，即可製成一完整的陀螺儀系統。

### 二、振動梁式陀螺儀之理論分析

由圖 1 所示。由於振動梁的振動原理為運用壓電片驅動振動梁的第一共振頻率，使方梁做正向彎曲振動 (flexural vibration)，當振動梁有一 Z 軸向旋轉速度時，會產生一科氏力，而使梁產生與正向共振同頻率之側向振動。方梁之振動激發和感測，則使用我們所選擇之適當壓電片，貼在振動方梁對稱位置之四平面上，其中兩面激發兩面感測，激發面會使得方梁在 Y 軸方向振動，因而使得方梁有一在 Y 軸方向的振動速度  $V$ ；若方梁以  $\Omega$  角速度逆時針旋轉，此時會產生一 ( $-x$ ) 方向的科氏力  $\vec{F}_c = 2m\vec{\Omega} \times \vec{V}$ 。在 X 方向的一組感測壓電片，因科氏力作用而產生的振動，使其感測出之訊號。此訊號即為振動方梁旋轉之科氏力產生之側向振動訊號，其大小和轉速成正比關係。

#### 運動方程式

如圖 2，一均勻等向所示一均勻等向之尤拉方梁受  $\Omega_x$  方向之角速度作用，且 Z 向有一分布力  $F(x,t)$  作用，由漢米頓原理 (Hamilton Principle)，考慮邊界條件為簡支梁之情況下導出運動方程 [1] 如下所示

$$\rho A \frac{d^2 w}{dt^2} + c \frac{dw}{dt} + EI \frac{d^4 w}{dx^4} - \rho J \frac{d^4 v}{dx^2 dt^2} - \rho A \Omega_x^2 w = -2\rho A \Omega_x \frac{dv}{dt} + f(x) p(t) \quad (1)$$

$$\rho A \frac{d^2 v}{dt^2} + c \frac{dv}{dt} + EI \frac{d^4 v}{dx^4} - \rho J \frac{d^4 v}{dx^2 dt^2} - \rho A \Omega_x^2 v = \rho A w \frac{d\Omega_x}{dt} + 2\rho A \Omega_x \frac{dw}{dt} \quad (2)$$

其邊界條件為

$$w(x,t), v(x,t) = 0 \quad x = \pm \frac{L}{2}$$
$$\frac{d^2 w(x,t)}{dx^2}, \frac{d^2 v(x,t)}{dx^2} = 0 \quad x = \pm \frac{L}{2} \quad (3)$$

其中： $\rho$ : 材料密度，  $\Omega_x$ : X 軸向之角速度，  $A = b \times h$ : 截面積，  $E$ : 楊氏模數，  $c$ : 材料

阻尼係數， $J = bh^2/12$ ； $Z$ 、 $Y$ 軸慣性矩， $w(x,t)$ ： $Z$ 向之形變函數， $v(x,t)$ ： $Y$ 向之形變函數。

要解原運動方程式，只須解其格林函數解，再將此解對  $f(x)$ （即力的分布函數）積分，即可求得。以特徵函數展開

$$G(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) M_n(x)$$

$$H(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n(t) M_n(x)$$

$$M_n(x) = \sin \frac{n\pi(x + \frac{L}{2})}{L}$$

其中： $\eta_n$ ： $Z$ 方向第  $n$  個模態的位移分量， $\zeta_n$ ： $Y$ 方向第  $n$  個模態的位移分量。代入格林函數式，再利用正交特性，考慮角速度  $\Omega_x$  為常數，經簡化[1]且考慮系統為穩態(steady state)響應可得

$$\Omega_x = \frac{-\left[\rho A + \rho J\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right]\omega^2 + c_j\omega + EJ\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4}{2\rho A \eta_s} \quad (4)$$

#### 離心力與共振頻率關係

驅動與感測向第一模態之共振頻率  $\omega_1$  為

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{EJ\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 - \rho A \Omega_x^2}{\rho A + \rho J\left(\frac{\pi}{L}\right)^2}} = \sqrt{\frac{\frac{EJ}{\rho}\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 - A \Omega_x^2}{A + J\left(\frac{\pi}{L}\right)^2}} \quad (5)$$

無角速度時之共振頻率為

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{EJ\left(\frac{\pi}{L}\right)^4}{\rho A + \rho J\left(\frac{\pi}{L}\right)^2}} = \sqrt{\frac{\frac{EJ}{\rho}\left(\frac{\pi}{L}\right)^4}{A + J\left(\frac{\pi}{L}\right)^2}} \quad (6)$$

由(4)式，其為軸向角速度  $\Omega_x$  與感測向振動間之一關係式。其中，因為驅動向之驅動振幅與速度為一定。而感測向壓電片感測之電壓只與變有關，換言之即與  $\zeta_s$  項有關。所以，角速度  $\Omega_x$  與壓電片感測之電壓應為一線性關係。

#### 三、共振方梁之共振頻率修整

因振動方梁之尺寸較小，共振頻率又高，在製作上常因加工上的誤差，使其幾何形狀無法完全對稱，導致其水平、垂直向之共振頻率無法達到一致，對整體而言即靈敏度不良。故由修整其質量之分佈，使共振頻率變化，調整至相

同提升靈敏度。就模擬結果選擇適當之修整方式，對方梁作實際之修整。

修整架構如圖 3 所示。首先對驅動向與感測向之共振頻率，作一評估。然後選擇適當的修整方式，予以微量之修整，再以頻譜分析儀，由輸入端之並連的驅動壓電片輸入一 sweep sine 訊號，因為其為對驅動向與感測向同時輸入訊號，所以在輸出端的並聯壓電片就能同時量取兩方向的頻率響應及相位差，得到其兩共振頻率之變化。由模擬之結果，修整方式圖 4 之頻率差距修整效果是最好，其次為圖 5 之修整方式。礙於壓電片位置之限制，我們採用之方式為圖 5 式較可行。

— 40 mm(長)x3.5 mm(邊長)，淨重 2.15 g，體積 490 mm<sup>3</sup>，比重 ( $\rho$ ) 8.719E-06 kg/mm<sup>3</sup> 楊氏係數 (E) 1.5046E+04 kg/mm<sup>2</sup> 之共振方梁未修整前之頻譜圖如圖 6 所示。兩共振頻率之差為 9346-9182=164(Hz)。圖 7 為以圖 4 和圖 5 之修整修整，可看出其共振頻率已為一致。所以基本上，如果能增加方梁加工上的精度，使加工完成後之方梁，其共振頻率之差距較小，則經由上列之修整方式，可將共振頻率修到一致。

#### 四、共振與感測電路之設計與分析

為使方梁能於共振下運作，其驅動向(垂直向)須於振動梁運作時，能一直以第一模態之共振頻率，維持其振態，推導與計算其相位(相位判別)設計一電路維持其運作。當方梁運作時，軸向旋轉，其感側向即受科氏力作用影響，使其產生一同垂直向振動頻率相同之共振，其振幅大小與科氏力之大小成正比，而科氏力之大小則與轉速有關。當方梁上之壓電片，因方梁軸向旋轉而感測到輸出電壓時，其輸出電壓的成份，為旋轉所產生電壓，再加上第一模態共振之高頻電壓，即為一合成之高頻弦波，將其分離後，得到感測訊號。

#### 五、實驗架構與測試結果

實驗架構如圖 8 所示，轉速測試機構為一類似翹翹板機構[2]，將陀螺儀置於旋轉軸上，經激振器帶動機構上振動梁的做譜和運動，而用以量測振動梁的角速度。

5.1 異心力對共振頻率之影響測試：圖 9 是轉速與共振頻率數值模擬關係。轉速造成離心力之變化，其對共振頻率之影響是確定的。在 1 kHz 內的轉速對共振頻率的影響是很小的，但從 1 kHz 起到 8 kHz 則隨轉速變大，共振頻率則越來越小，到最後則變為零。所以，由此我們可知振動方梁陀螺儀並不適用於高頻轉速。圖 10 是轉速與共振頻率實驗測試結果。與前之模擬結果吻合。

#### 5.2 共振方梁之線性度測試

以共振與訊號析出電路配合上共振方梁之完整系統架構。在伺服馬達所構成之可調速轉動圓台上，以不同之角速度轉動下，量測其電路的輸出電壓，其設備及架構如圖 11 所示。

將伺服馬達調至定速，以數位電表量測十次以求得平均值，得其輸出電壓與轉速之關係如圖 12 所示。由圖 12 得知其轉速與電壓乃成線性，即轉速與科氏力乃成一正比關係，所以我們可確定此方梁陀螺儀其性能是可信的。另外，轉速測試時其角速度是由調速器來控制，我們無法直接讀其角速度值，乃是先以碼錶測得調速器之調整號數大小與角速度之關係，而後量測固定號數與輸出電壓之關係，故有些許誤差存在。

#### 六、結論

本文在研製振動方梁，設計一驅動與感測電路以形成完整的陀螺儀系統，並測量其性能。並經由模擬修整後再予以幾何對稱型式修整，以免振動的模態產生變化，且修整應盡量靠近形心軸，以較為有效率。電路部份，因驅動向之輸出、輸入相位差為 90 度，故我們所應用之放大且具相位落後補償的共振電路，使其回授共振，亦相當合適。感測向訊號析出電路，則應用了精密半波整流電路，來分離其正、負半波，再經濾波後後加成其訊號，使訊號輸出之靈敏度有較佳的效果。實驗部份，我們對整個振動方梁耦合電路的完整系統。其離心力對共振頻率影響之部分作了測試，得到了振動方梁陀螺儀工作的轉速範圍內，對共振頻率影響極小的結論。另外，對其輸入轉速與輸出電壓間關係，則作了線性度測試，得到了其間為一線性規範。

#### 參考文獻

- [1] 黃正吉，"梁式陀螺儀的分析"，國立臺灣大學應用力學研究所碩士論文，1988。
- [2] 王政慶，"三角梁陀螺儀測試機構設計與分析"，國立臺灣大學應用力學研究所碩士論文，1999。

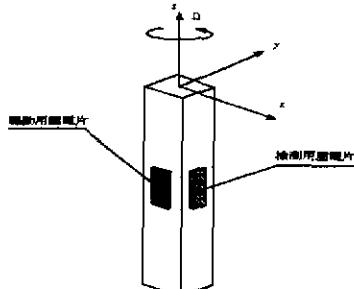


圖 1 方梁示意圖

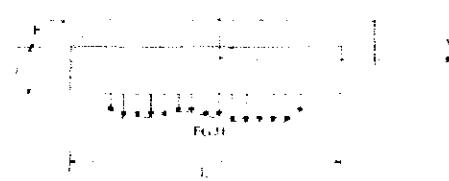


圖 2 方梁幾何示意圖

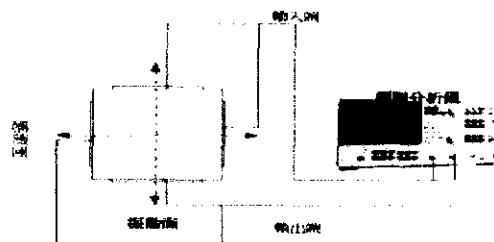


圖 3 共振頻修整架構圖

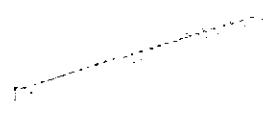


圖 4 共振頻兩側修整架構圖



圖 5 共振頻兩邊修整架構圖

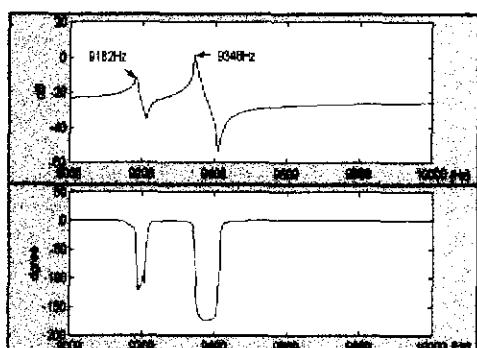


圖 6 未修整前之頻譜圖(164Hz)

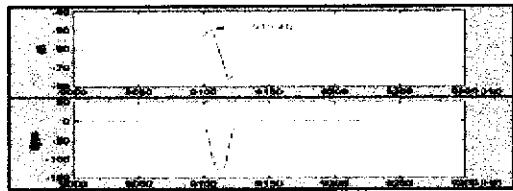


圖 7 修整後感測向頻譜圖

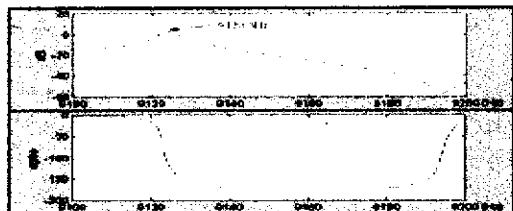


圖 7 修整後驅動向頻譜圖

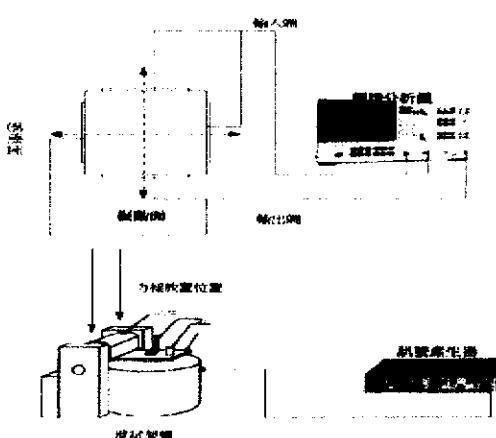


圖 8 測試架構圖

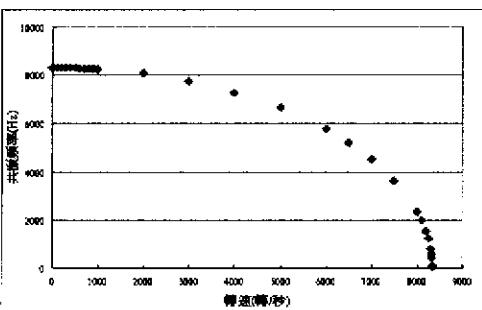


圖 9 轉速與共振頻率關係圖(數值模擬)

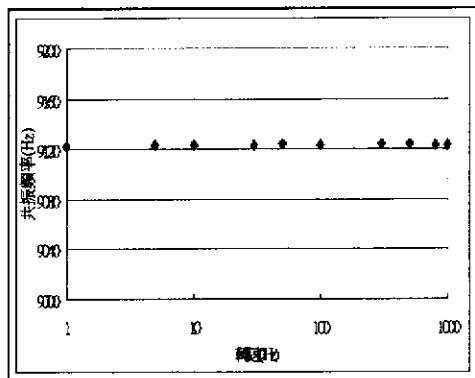


圖 10 轉速對共振頻率之影響測試結果圖

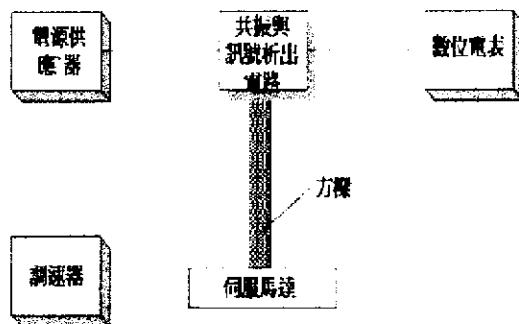


圖 11 轉速測試圖

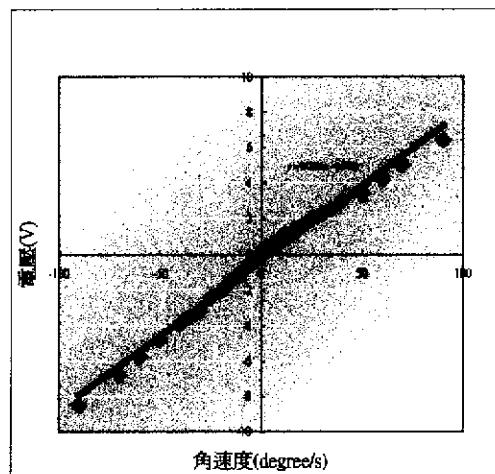


圖 12 方梁陀螺儀線性度測試圖