

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

壓電激發之旋轉金屬半球殼模態變化分析和測試

Analysis and testing on the vibration mode of a metallic hemispherical shell excited piezoelectrically

計畫編號：NSC 90-2212-E-002-158

執行期限：90年8月1日至91年7月31日

主持人：周傳心 執行機構及單位名稱：臺灣大學應用力學所

中文摘要：

本文研究壓電激發與感測之金屬半球殼的振動分析與量測。考慮半球殼材料為均質及等向性，外圍再貼上壓電材料作為感測與驅動機構，以 Niordson 的薄殼理論為基礎，採用 Love-Kirchhoff 的薄殼假設，先以能量法推導均質非等向性壓電薄殼的組成方程式，再以漢彌頓原理處理此機電耦合系統，求得旋轉壓電與金屬半球殼的振動分析與量測。考慮半球殼運動方程式。討論自由振動球殼的自然頻率和模態。就強迫式激發的球殼，推導其位移運動方程式並就舉出模態之振動波形加以解釋，利用有限元素分析軟體模擬球殼在自由振動下的各模態振動情形。

實驗以壓電激發與感測由球殼的模態測試，得半球殼的自然頻率及振動模態。

關鍵詞： 半球殼、模態、壓電薄殼

ABSTRACT:

This paper considers the vibration mode of a metallic hemispherical shell excited piezoelectrically. Constitutive equations for a thin piezoceramic shell with thickness polarization and electro-covered faces are derived using Niordson's shell theory. Coupled electro-mechanical equations of motion, describing the dynamics of the vibrating hemispherical shell, are derived using Hamilton's principle, Rayleigh's solution of the shell and Rayleigh-Ritz methods.

Vibration modes and natural frequencies of the hemispherical shell are numerically calculated and measured.

Keywords: hemispherical shell、piezoceramic shell electromechanical equations of motion

一、前言

薄殼理論方面 Rayleigh[1]提出將殼的中性面視為不可伸長的假設。其後 Love 的殼理論[2]則是第一個完整且廣義的彈性薄殼線性理論，其採用 Kirchhoff 的薄板假設，並再加入

薄殼近似值(殼厚度/曲率半徑 $\ll 1$)，以及利用虛功原理，成功的由三維彈性理論推導出二維薄殼之線性方程式與邊界條件，此即 Love 第一近似(Love's first approximation)，又稱為古典薄殼理論(classical shell theory)。而 Niordson 的薄殼理論[3]對均質與等向性彈性薄殼有完整描述，對無旋轉自由振動的半圓球殼有解析解，且對曲線坐標用張量表示，有上下標之分，方程式的表示是殼理論中為最簡潔者。

Rogacheva[4]對壓電薄殼有完整研究，雖然其對曲面坐標亦使用張量表示，然而其僅用張量下標表示無上下標之分，故方程式的表示較為繁雜。對於壓電材料作為致動器與感測器的模型[5]也已發展完備。至於壓電材料與彈性材料相耦合的機電耦合系統，其致動與感測模型已被 Hagood 等[6]學者應用漢彌頓原理於彈性與壓電耦合系統，並以 Rayleigh-Ritz method 求得致動與感測方程式。近來更有 Loveday[7]將 Hagood 等[6]學者所建立的模型應用於壓電驅動旋轉金屬圓柱殼陀螺儀分析。

旋轉薄殼振動分析可溯至 Bryan[8]對旋轉殼的動力分析，之後有學者 Quick[9]首先對振動陀螺儀應用微擾法做穩定性與誤差分析，Friedland 等[10]應用平均法將振動陀螺儀振動軌跡轉換到橢圓坐標系統，並建立振動陀螺儀誤差模型。黃正吉、張家歐、周傳心等[11,12]用格勒金法(Galerkin method)，以不旋轉且自由振動半圓球殼自然模態為特徵函數，得到半圓球殼諧振陀螺儀運動方程式，並用多重尺度法解出振動陀螺儀進動現象。

二、運動方程式

2.1 壓電殼組成律

本文以 Niordson 的彈性薄殼理論為基礎，採用 Kirchhoff-Love 的薄殼假設，先延伸 Niordson 的彈性薄殼理論至均質、厚度方向極化、上下表面度上電極的壓電陶瓷薄殼，由三維簡正坐標中的組成律開始，推導至二維曲面坐標中的組成律。由 Niordson 的彈性薄殼理論推導得[11,12] 均質與等向性彈性殼的組成方

程式(constitutive equations for thin shell,

$$N_p^{rs} = \frac{Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu)E^{rs} + \nu d^{rs} E_x^x], \quad (1)$$

$$M_p^{rs} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [(1-\nu)K^{rs} + \nu d^{rs} K_x^x].$$

其中 $a = \det(a_{rs})$ 為表面尺度張量之行列表。
 $K = d_1^1 d_2^2 - d_1^2 d_2^1 = 1/R_1 R_2$ 為高斯曲率，
 $d = \det(d_{rs})$ 為曲度張量之行列表， N^{rs} 為薄膜應力張量(membrane stress tensor)， M^{rs} 為彎矩張量(moment tensor)。，已由三維簡正坐標系統的組成方程式，經應變能密度函數 U_{SD} 導至二維的彈性殼組成方程式。

考慮均質、非等向性、厚度方向極化、上下表面度上電極的壓電陶瓷薄殼，由三維簡正坐標中的組成律，

$$\begin{cases} t_i^j = c^{E_{il}jk} y_k^j - e_i^{mj} e_m \\ D_n = e_n^k y_k^j + v_n^{sm} e_m, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} y_k^j = s^{E_{kj}li} t_i^j + \underline{d}_k^{ml} e_m \\ D_n = \underline{d}_{nj}^i t_i^j + v_n^{tm} e_m. \end{cases}$$

其中：本文將以大寫拉丁字母為上標示與下標示，以與小寫拉丁字母的指標作為區別。 t_i^j ：應力。 y_k^j ：應變。 e_m ：電場。 D_n ：電位移。 $c^{E_{il}jk}$ ：在定電場(符號上標示 E 代表定電場)之下的彈性常數，為四階張量。 e_i^{mj} ：壓電常數，為三階張量。 v_n^{sm} ：在定應變(符號上標示 S 代表定應變)之下的介電常數，為二階張量。 $s^{E_{kj}li}$ ：在定電場下的彈性韌性，為四階張量。 \underline{d}_k^{ml} ：壓電常數(，為三階張量。 v_n^{tm} ：在定應力下的介電常數，為二階張量。若應用虛功原理(principle of virtual work)表示

$$u(U_{PD} - W_{ED}) = uW_V = \frac{\partial W_V}{\partial E_{rs}} uE_{rs} + \frac{\partial W_V}{\partial K_{rs}} uK_{rs} + \frac{\partial W_V}{\partial \mathbf{e}^{(0)}_3} u\mathbf{e}^{(0)}_3 + \frac{\partial W_V}{\partial \mathbf{e}^{(1)}_3} u\mathbf{e}^{(1)}_3. \quad (3)$$

$$= N_p^{rs} uE_{rs} + M_p^{rs} uK_{rs} - D^{(0)3} u\mathbf{e}^{(0)}_3 - D^{(1)3} u\mathbf{e}^{(1)}_3.$$

$$N_p^{rs} = \partial W_V / \partial E_{rs}, M_p^{rs} = \partial W_V / \partial K_{rs}, \quad (4)$$

$$D^{(0)3} = -\partial W_V / \partial \mathbf{e}^{(0)}_3, D^{(1)3} = -\partial W_V / \partial \mathbf{e}^{(1)}_3.$$

可得在厚度方向極化薄壓電殼的組成方程式：

$$N_p^{rs} = \frac{h_p}{s_{11}^E(1-\nu_1^2)} [(1-\nu_1)E^{rs} + \nu_1 d^{rs} E_x^x]$$

$$- \frac{h_p d_{31}}{s_{11}^E(1-\nu_1)} d^{rs} \mathbf{e}^{(0)}_3,$$

$$M_p^{rs} = \frac{h_p^3}{12s_{11}^E(1-\nu_1^2)} [(1-\nu_1)K^{rs} + \nu_1 d^{rs} K_x^x]$$

$$+ \frac{h_p^3 d_{31}}{12s_{11}^E(1-\nu_1)} d^{rs} \mathbf{e}^{(1)}_3,$$

$$D^{(0)}_3 = \frac{h_p d_{31}}{s_{11}^E(1-\nu_1)} E_r^r + h_p [V_{33} - 2 \frac{(d_{31})^2}{s_{11}^E(1-\nu_1)}] \mathbf{e}^{(0)}_3,$$

$$D^{(1)}_3 = - \frac{h_p^3 d_{31}}{12s_{11}^E(1-\nu_1)} K_r^r + h_p^3 [V_{33} - 2 \frac{(d_{31})^2}{s_{11}^E(1-\nu_1)}] \mathbf{e}^{(1)}_3.$$

其中壓電殼厚度 h_p 及無因次化材料常數

$$\nu_1 = -s_{12}^E / s_{11}^E \quad \nu_2 = -s_{13}^E / s_{11}^E, \quad \nu_3 = s_{33}^E / s_{11}^E,$$

$$\nu_4 = s_{44}^E / s_{11}^E, \quad \nu_6 = s_{66}^E / s_{11}^E, \quad N_p^{rs} \text{ 為壓電殼的}$$

薄膜應力張量 (membrane stress tensor of the piezo shell)， M_p^{rs} 為壓電殼的彎矩張量

(moment tensor of the piezo shell)， $D^{(0)}_3$ 為壓電殼中心面的電位移， $D^{(1)}_3$ 為壓電殼中心面在厚度方向上的電位移變化率。

2.2 壓電驅動半球殼振動方程式

對於彈性半球形薄殼外面貼著壓電薄殼的機電耦合系統，亦以Niordson的彈性薄殼理論為基礎，配合漢彌頓原理及Rayleigh的半圓球殼假設，據以推導包含旋轉的壓電半圓球殼振動陀螺儀的運動方程式。

本文使用到的球坐標(簡正坐標)，如圖一：

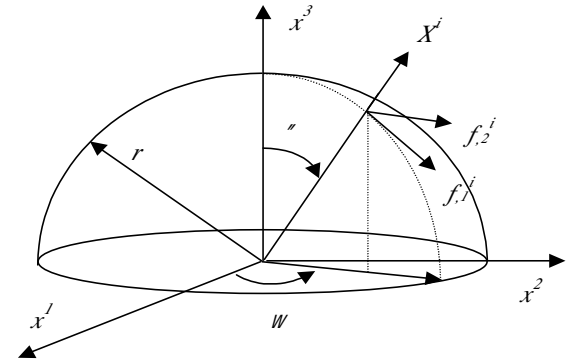
$$f^1 = r \sin \theta \cos \psi, f^2 = r \sin \theta \sin \psi, f^3 = r \cos \theta,$$

$$u^1 = \theta, u^2 = \psi, u^3 = r.$$

而中心面 S_0 上的坐標則為：

$$f^1 = R \sin \theta \cos \psi, f^2 = R \sin \theta \sin \psi, f^3 = R \cos \theta.$$

其中 R 為中心面上曲率半徑。



圖一 球坐標

當法線方向指向球殼外時，則表面尺度張量

a_{rs} , 空間尺度張量 g_{ij} , 曲度張量 d_{rs} 則分別為:
 $a_{11} = R^2, a_{22} = a_{21} = 0, a_{22} = R^2 \sin^2 \nu, d^1 = 1/R^2, d^2 = a^{21} = 0,$
 $a^{22} = 1/R^2 \sin^2 \nu, a = \det(a_{rs}) = R^2 \sin \nu, g_{11} = R^2, g_{22} = R^2 \sin^2 \nu,$
 $g_{33} = 1, g_{ij} = 0, (i \neq j), g^{11} = 1/R^2, g^{22} = 1/R^2 \sin^2 \nu, g^{33} = 1,$
 $g^{ij} = 0, (i \neq j), g = \det(g_{ij}) = R^2 \sin \nu, d_{11} = -R, d_{12} = d_{21} = 0,$
 $d_{22} = -R \sin^2 \nu, d^1 = -1/R, d^2 = a^{21} = 0, d^2 = -1/R \sin^2 \nu,$
 $d^3 = -1/R, d^2 = -1/R, d^r = 0, (r \neq S), d = \det(d_{rs}) = R^2 \sin^2 \nu.$

非零的第二類克里斯多夫符號

$$\begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ 2 \end{cases} \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} = \cot \nu, \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} = -\sin \nu \cos \nu, \\ \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases} = \frac{1}{r}, \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases} = -r, \quad (5) \\ \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases} \begin{cases} 2 \\ 2 \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ 2 \end{cases} \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases} = \frac{1}{r}, \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases} \begin{cases} 2 \\ 2 \end{cases} = -r \sin^2 \nu.$$

現定義半圓球殼結構，如圖二所示： R, \bar{R} 分別為彈性殼與壓電殼中心面曲率半徑。 h_s, h_p 分別為彈性殼與壓電殼厚度。 V_s, V_p 分別為彈性殼與壓電殼所佔三維區域。 \dots_s, \dots_p 分別為彈性殼與壓電殼密度。 A_s, A_p 分別為彈性殼與壓電殼中心面面積。

彈性殼所佔三維區域：

$$V_s = \{0 \leq \nu \leq f/2, 0 \leq W \leq 2f, R - h_s/2 \leq r \leq R + h_s/2\}.$$

壓電殼貼在彈性殼外，均勻分佈計有 n 片：

$$V_p = \{f/2 - r \leq \nu \leq f/2 + \frac{f}{2}, \bar{R} - h_p/2 \leq r \leq \bar{R} + h_p/2,$$

$$2(k-1)f/n - \Delta W \leq W_k \leq 2(k-1)f/n + \Delta W\}, k=1, \dots, n.$$

其中 r 為壓電片在 ν 方向上的角度， $2UW$ 為壓電片在 W 方向上所張開的角度。

彈性殼中心面上的角速度在球坐標與卡氏坐標間的轉換為：

$$\Omega_1 = R(\Omega^{X1} \cos \nu \cos W + \Omega^{X2} \cos \nu \sin W - \Omega^{X3} \sin \nu),$$

$$\Omega_2 = R \sin \nu (-\Omega^{X1} \sin W + \Omega^{X2} \cos W),$$

$$\Omega_3 = \Omega^{X1} \sin \nu \cos W + \Omega^{X2} \sin \nu \sin W + \Omega^{X3} \cos \nu.$$

其中 Ω_i 與 Ω^{Xj} 分別為球坐標與卡氏坐標中的角速度，如圖三所示。

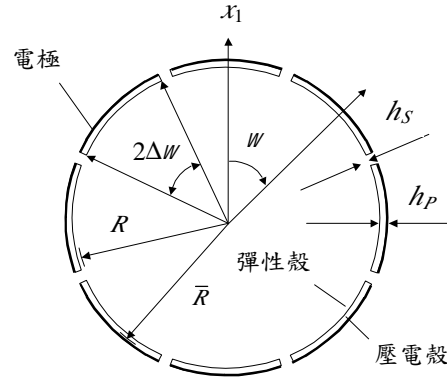
彈性殼中心面上在 u^1, u^2 及 u^3 方向上的實際位移分別為 u, v 與 w 則得：

$$u = Rv^1 = v_1/R, v = Rv^2 \sin \nu = v_2/R \sin \nu, w = v^3 = v_3.$$

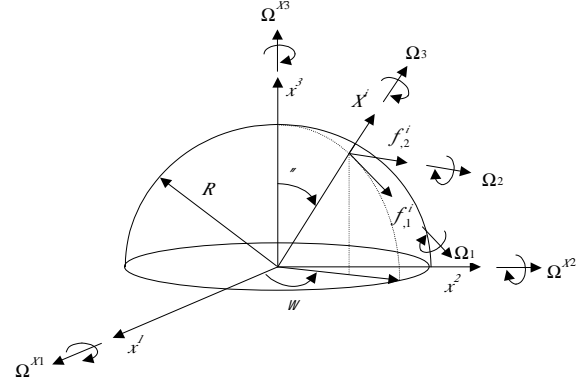
壓電殼中心面上在 u^1, u^2 及 u^3 方向上的實際位移分別為 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ 則得：

$$\bar{u} = \bar{R}\bar{v}^1 = \bar{v}_1/\bar{R}, \bar{v} = \bar{R}\bar{v}^2 \sin \nu = \bar{v}_2/\bar{R} \sin \nu, \quad (6)$$

$$\bar{w} = w = v^3 = v_3.$$



圖二 壓電驅動半圓球殼陀螺儀結構圖



圖三 角速度轉換圖

若假設彈性殼與壓電殼之間為理想接著，即沒有相對位移，將壓電殼中心面位移轉換成彈性殼中心面位移，而表成：

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{h_s + h_p}{2}, \bar{R} = R(1 + \frac{\bar{h}}{R}), \bar{a}_{rs} = a_{rs}(1 + \frac{\bar{h}}{R})^2, \\ \bar{v}_r &= a_r^X(1 + \frac{\bar{h}}{R})(v_x - \bar{h}q_x), \bar{u} = (1 + \frac{\bar{h}}{R})u - \frac{\bar{h}}{R}w_{,1}, \\ \bar{v} &= (1 + \frac{\bar{h}}{R})v - \frac{\bar{h}}{R}w_{,2}, \bar{w} = w. \end{aligned} \quad (7)$$

其中上標示符號 $\bar{\quad}$ 係表示壓電殼中心面之值， \bar{h} 為彈性殼與壓電殼中心面的距離。

應變張量 E_r^S 及彎曲張量 \tilde{K}_r^S 以實際位移表示時，並經化簡後成為：

$$\begin{aligned} E_r^S &= \frac{a^{SX}}{2}(v_{,rx} - \begin{Bmatrix} u \\ r \end{Bmatrix} v_{,u} + v_{,xr} - \begin{Bmatrix} u \\ r \end{Bmatrix} v_{,u}) + \frac{a_r^S}{R} w, \\ \tilde{K}_r^S &= a^{SX} \tilde{K}_{rx} = a^{SX}(w_{,xr} - \begin{Bmatrix} u \\ r \end{Bmatrix} w_{,u} + \frac{a_{rx}}{R^2} w), \end{aligned}$$

應用變分原理可得：

$$\begin{aligned}
& \int_{A_1}^{\bar{t}_2} [uT - uU + uW_e + uW] dt \\
&= - \int_{A_1}^{\bar{t}_2} dA \int_{A_s} [(D_r D_s M^{rs} + \frac{1}{R^2} M_r^r + \frac{1}{R} \tilde{N}_r - p + p_l) uW \\
&\quad - (D_r \tilde{N}^s + F^s - F_l^s) u v_s] dA \\
&\quad + \int_{C_s} (Nuu + Suv + Quw + M_B \frac{\partial}{\partial n} uw) ds \\
&\quad - \int_{A_1}^{\bar{t}_2} dA \int_{A_p} [(D_r D_s M_p^{rs} + \frac{1}{R^2} M_{pr}^r + \frac{1}{R} N_{pr}^r - p_p + p_{lp}) uW \\
&\quad - (D_r \tilde{N}_p^{rs} + F_p^s - F_{lp}^s) u \bar{v}_s - (D_m D^n - q) u \mathcal{E}] dA \\
&\quad + \int_{C_p} (N_p u \bar{u} + S_p u \bar{v} + Q_p u w + M_{Bp} \frac{\partial}{\partial n} u w - n_m D^n u \mathcal{E}) ds.
\end{aligned}$$

其中符號上標 $\bar{\cdot}$ 為壓電殼中心面的位移， p_l 與 p_{lp} 分別為：

$$\begin{aligned}
p_l &= \dots h \{ \ddot{w} + g^{-\frac{1}{2}} \varepsilon^{3rs} [2\Omega_r \dot{v}_s + \dot{\Omega}_r (x_s + v_s) \\
&\quad + \Omega_r g_{sm} \varepsilon^{mnp} \Omega_n (x_p + v_p)] \}, \\
p_{lp} &= \dots h \{ \ddot{w} + g^{-\frac{1}{2}} \varepsilon^{3rs} [2\Omega_r \dot{\bar{v}}_s + \dot{\Omega}_r (\bar{x}_s + \bar{v}_s) \\
&\quad + \Omega_r g_{sm} \varepsilon^{mnp} \Omega_n (\bar{x}_p + \bar{v}_p)] \}.
\end{aligned}$$

即分別為彈性殼與壓電殼中心面法線方向上因振動與旋轉所引起單位面積的合力。 F_l^s 與 F_{lp}^s 分別為：

$$\begin{aligned}
F_l^s &= \dots h \{ \ddot{v}_r + g^{-\frac{1}{2}} a_{rx} \varepsilon^{xkl} [2\Omega_k \dot{v}_l + \dot{\Omega}_k (x_l + v_l) \\
&\quad + \Omega_k g_{lm} \varepsilon^{mnp} \Omega_n (x_p + v_p)] \} a^{rs}, \\
F_{lp}^s &= \dots h \{ \ddot{\bar{v}}_r + g^{-\frac{1}{2}} \bar{a}_{rx} \varepsilon^{xkl} [2\Omega_k \dot{\bar{v}}_l + \dot{\Omega}_k (\bar{x}_l + \bar{v}_l) \\
&\quad + \Omega_k \bar{g}_{lm} \varepsilon^{mnp} \Omega_n (\bar{x}_p + \bar{v}_p)] \} \bar{a}^{rs}.
\end{aligned}$$

即分別為彈性殼與壓電殼中心面切線方向上因振動與旋轉所引起單位面積的合力。

在薄殼的假設下($\bar{h}/R \ll 1$)，以及 $u v_s$ ， $u w$ 與 $u \mathcal{E}$ 均為任意值條件下，略去微小項後，得：

(1)在僅有彈性殼的區域 B_s 中，運動方程式為：

$$D_r D_s M^{rs} + \frac{1}{R^2} M_r^r + \frac{1}{R} \tilde{N}_r^r - p + p_l = 0, \quad (8)$$

$$D_r \tilde{N}^{rs} + F^s - F_l^s = 0.$$

在彈性殼邊界與中心面之交線 C_s 上，邊界條件為： $N=0$ 或 u 值給定，及 $S=0$ 或 v 值給定，及 $Q=0$ 或是 w 值給定，及 $M_B=0$ 或 $\partial w / \partial n$ 值給定，或上述任意兩者的線性組合。

(2)在彈性殼上貼著壓電殼的區域 B_{sp} 中，運動方程式為：

$$\begin{aligned}
& D_r D_s (M^{rs} + M_p^{rs}) + \frac{1}{R^2} (M_r^r + M_{pr}^r) \\
& + \frac{1}{R} (\tilde{N}_r^r + \tilde{N}_{pr}^r) - (p + p_p) + (p_l + p_{lp}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D_r (\tilde{N}^{rs} + \tilde{N}_p^{rs}) + (F^s + F_p^s) - (F_l^s + F_{lp}^s) = 0, \\
& D_m D^n - q = 0.
\end{aligned}$$

在彈性殼邊界與中心面之交線 C_s 上及壓電殼邊界與中心面之交線 C_p 上，邊界條件需要給定： $N+N_p=0$ 或 u 值給定，及 $S+S_p=0$ 或 v 值給定，及 $Q+Q_p=0$ 或 w 值給定，及 $M_B+M_{Bp}=0$ 或 $\partial w / \partial n$ 值給定，及 $n_m D^n = 0$ 或 \mathcal{E} 值給定，或上述任意兩者的線性組合。

對本文的壓電驅動半圓球殼，邊界條件設為：

$$\text{固定邊界條件： } u = v = w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad \mathcal{E} = 0.$$

自由邊界條件：

$$\begin{aligned}
N = S = M_B = Q = 0, \quad \mathcal{E} = f/2, \\
N_p = S_p = M_{Bp} = Q_p = 0, \quad \forall C_p.
\end{aligned} \quad (11)$$

雖然可使(11)與(12)力學方面的邊界條件為零，但因運動方程式是分段連續，仍然無法解出(11)與(12)的解析解。

2.3 運動方程式

對振動解先以模態展開，又因彈性殼在 w 方向上連續，故在 w 方向為週期 $2f$ 的函數，現將本文彈性殼中心面振動解依 w 方向上的波數(wave number) m 展開成如下形式：

$$\begin{aligned}
u &= x_m(t) U_{m1}(\varphi) \cos mW + y_m(t) U_{m1}(\varphi) \sin mW, \\
v &= x_m(t) U_{m2}(\varphi) \sin mW - y_m(t) U_{m2}(\varphi) \cos mW, \\
w &= x_m(t) U_{m3}(\varphi) \cos mW + y_m(t) U_{m3}(\varphi) \sin mW, \\
m &= 0, 1, \dots
\end{aligned} \quad (12)$$

以(12)對模態展開的意義，是因為無法由力平衡與力矩平衡所列出的運動方程式，改採Niordson所稱近似解法的雷利解，其中第 m 個波數其模態為：

$$\begin{aligned}
u &= -x_m \tan^m(\varphi/2) \sin \varphi \cos mW \cos \check{S}_m t, \\
v &= -x_m \tan^m(\varphi/2) \sin \varphi \sin mW \cos \check{S}_m t,
\end{aligned} \quad (13)$$

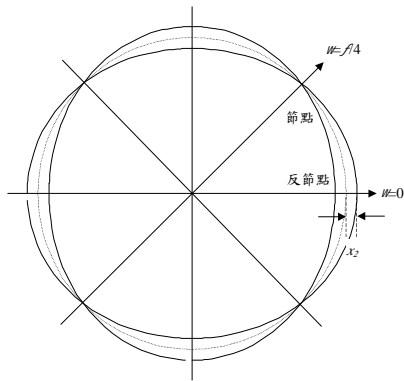
$$w = x_m (m + \cos \varphi) \tan^m(\varphi/2) \cos mW \cos \check{S}_m t.$$

當將雷利解(13)與(12)對應後，可得：

$$\begin{aligned}
U_{m1}(\varphi) &= -\tan^m(\varphi/2) \sin \varphi, \\
U_{m2}(\varphi) &= -\tan^m(\varphi/2) \sin \varphi, \\
U_{m3}(\varphi) &= (m + \cos \varphi) \tan^m(\varphi/2).
\end{aligned} \quad (14)$$

表示將(14)代入(12)後，即為雷利解。

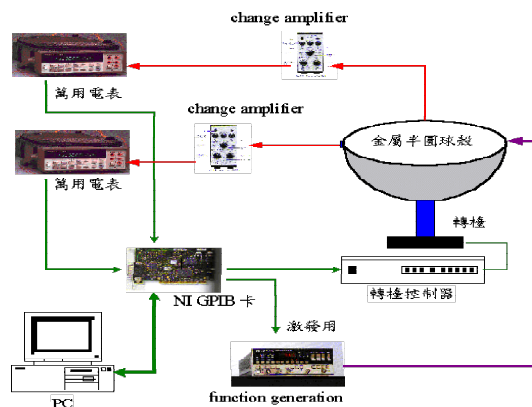
對於雷利解中波數為2的模態(即 $x_2 \neq 0$ ， $y_2 \neq 0$ 其他 $x_m=0$ ， $y_m=0$)，其半圓球殼振動模態如圖四所示。也可說是波數為2的模態是由對 $\varphi=0$ 對稱的 x_2 模態與對 $\varphi=\pi/4$ 對稱的 y_2 模態所組成，其中 x_2 模態其振幅在 $\varphi=0$ 軸上恰為 x_2 ，同樣 y_2 模態其振幅在 $\varphi=\pi/4$ 軸上恰為 y_2 。



圖四半圓球殼振動模態(2, 1)

三、半球殼的自然頻率及振動模態量測

以壓電激發與感測由球殼的模態測試，得半球殼的自然頻率及振動模態，實驗架構如圖五。本文使用之不鏽鋼半球殼其尺寸與材料特性係數是：球殼厚度 $h=1\text{ mm}$ ，球殼半徑 $R=50\text{ mm}$ ，球殼密度 $\rho=8\text{g/cm}^3$ ，楊氏係數 $E=2\times 10^{11}\text{ nt/m}^2$ ，包松比例 $\mu = 0.3$ 。



圖五 實驗架構

半球殼的前三自然頻率，(2,1), (3,1),和(4,1)，之實驗值分別為 415Hz, 1097.5 Hz, 和 2001.3 Hz, 和數值分別為 405Hz, 1101 Hz, 和 2056 Hz。其誤差均在 3%以內。圖五之實驗架構也用於量測旋轉半球殼的振動模態變化。

四、結語

本文以 Niordson 的彈性薄殼理論為基礎，採用 Kirchhoff-Love 的薄殼假設，延伸至均質、厚度方向極化、上下表面度上電極的壓電陶瓷薄殼，由三維簡正坐標中的組成律可推導至二維曲面坐標中的組成律。對於彈性半球形薄殼外面貼著壓電薄殼的機電耦合系統，亦以 Niordson 的彈性薄殼理論為基礎，配合漢彌頓原理及 Rayleigh 對半圓球殼的近似解，推導包

含旋轉的壓電驅動半圓球殼振動的運動方程式。可用於對壓電驅動半圓球殼振動陀螺儀的設計與操作原理的探討。

參考文獻:

1. Rayleigh, L. 1881. "On the Infinitesimal Bending of Surfaces of Revolution", *Proc. Math. Soc.*, London, 13, pp. 4-16.
2. Love, A. E. H., 1888. "On th Small Free Vibrations and Deformation on Thin Elastic Shells", *Phil. Transactions Roy. Soc.*, A179, pp. 491-546.
3. Niordson, F. I. 1985. *Shell Theory*, North Holland, Amsterdam.
4. Rogacheva, Nellya N. 1994. *The Theory of Piezoelectric Shells and Plates*, CRC Press.
5. Crawley, E. F. and E. H. Anderson. 1990. "Detailed Models of Piezoceramic Actuation of Beams", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1(1), pp. 4-25.
6. Hagood, N. W. and E. H. Anderson. 1991. "Simultaneous Sensing and Actuation using Piezoelectric Materials", *SPIE Vol. 1543 Active and Adaptive Optical Components*, pp. 409-412.
7. Loveday, P. W. 1996. "A Coupled Electromechanical Model of an Imperfect Piezoelectric Vibrating Cylinder Gyroscope", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 7(1), pp. 44-53.
8. Bryan, G. H. 1890. "On the Beats in the Vibrations of a Revolving Cylinder or Bell", *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, VII, Nov. 24, pp. 101-111.
9. Quick, W. H. 1964. "Theory of the Vibrating String as an Angular Motion Sensor", *Transactions ASME, J. Appl. Mech.*, Sept., pp. 523-534.
10. Friedland, B. and M. F. Hutton. 1978. "Theory and Error Analysis of Vibrating-Member Gyroscope", *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-2345(4), pp. 545-556.
11. Chang, C. O., J. J. Hwang and C. S. Chou, 1996. "Modal Procession of a Rotating Hemispherical Shell", *International Journal of Solids and Structures*, 33,(19), pp. 2739-2757.
12. Chou, C. S., C. O. Chang and J. J. Huang, 1999. "Vibration of a Hemispherical Shell Gyro Excited by an Electrostatic Field", *International Journal of Applied Electromagnetics in Materials*, 10(4), pp. 425-49.