行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告

非完整約束動力系統之非線性控制分析

Nonlinear Control Analysis of Nonholonomic Dynamical Systems

計劃編號：NSC-90-2212-E-002-160

執行期間： 90年8月1日至91年7月31日

主持人：張家歐　國立台灣大學應用力學研究所

中文摘要

本計劃的工作有：(1)我們將利用外微分的1-形式來研究控制系統的本質(2)利用最小不變分布P與R來判斷控制系統可以局部控制的自由度數目有多少 (3)利用絕對等價(absolute equivalence)與絕對同形(absolute morphism)來找出多輸入系統的平坦輸出(flat output) (4)找出控制系統的平坦輸出之後，再進行點到點的操縱控制與路徑追蹤控制。設法產生路徑，並進一步做連續控制。另外推導等價動力理論，根據高斯最小作用原理來找等價動力方程式，依人為約束與彈簧阻尼之物理力來簡化迴授控制器的設計。

關鍵字：不變分布，平坦輸出，高斯最小作用原理，等價動力學，非線性迴授控制

Abstract

The major tasks of this project are: (1) study the inherent nature of the control system by using the one-form of exterior differential, (2) determine the number of DOF for local controllability by using minimal invariant distribution, (3) find out the flatness outputs for MIMO systems by using absolute equivalence and absolute morphism, (4) Perform point-to-point and path-following continuous tracking control after flatness outputs are designed. We also derive the equivalent dynamical theorem. Using the Gauss's principle of least action to find the equivalent equations of motion, and derive the feedback controller by means of artificial constraints and some spring-damping forces.

Key words: distribution invariant, flat output, Gauss's principle of least constraint, nonlinear feedback control.

緣由與目的

非完整拘束機械系統的動力與控制這一課題目前在國際學術界是一門重點。主要是它有實際應用與需求，如機械臂在部分路徑、速度規劃下的回授控制問題，四輪獨立驅動的自走車輛運動控制問題。以四輪電動車為例，四個輪子可分別由四個馬達來驅動，其協調性與無滑動的要求會產生線性非完整拘束，對速度的規劃會產生一階非線性非完整拘束，如何計算馬達輸出至輪軸的力矩牽涉到非完整拘束系統之非線性控制問題。但是有關這類問題的研究文獻[1-11]不多，而且他們普遍的缺點是：(1)未引入輪子動力學，故所求得的力矩無法與實際馬達輸出力矩扯上關係。(2) 因所用的運動方程式或帶有拉格朗日乘子，或未將未帶有拉格朗日乘子的運動方程式減至最少的數目，以至於不易做可控性(controllability)分析。(3) 只能做線性非完整拘束系統，無法處理非線性非完整拘束系統控制問題。在前一期的計劃[21]中，我們將高斯原理應用到車輛運動上，並引入輪子動力學，推導出未帶有拉格朗日乘子的最少相運動方程式，大幅地改進了上述國際上的學者的研究成果中普遍存在的缺點。尤其是成功地將非線性非完整拘束嵌入運動方程式中，得到最少相的無約束控制方程式更是國際上的學者所無法做到的。在前一期的計劃中，我們以回授線性化與動態延伸(feedback linearization and dynamic extension)來控制車輛的運動，發現只能控制車身的位置而無法同時控制車身方向的角度，因此，在本期計劃中，我們希望經由研究運動

方程式的本質來改進上述缺點。

高斯原理與控制

希望將由高斯原理所導出的無約束狀態方程組，寫成大家所熟悉的仿射控制方程式(affine control equations)，以便進一步應用我們所知道的控制原理進行控制分析。

我們假設在剛體系統中，所取的廣義座標有 n 個，且有 h 個完整約束與 nh 個非完整約束。將第二章的(2.2-41)式的 $\mathbf{B}_2$ 與 $\dot{\mathbf{q}}_1$ 分別改寫為 $\mathbf{B}$ 與 $\dot{\mathbf{q}}$，成為如下的無約束方程組

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}(\omega_1,\mathbf{c}_{nh},\mathbf{q},\mathbf{c}_h,t) & (n-h)\times 1\\ \mathbf{B}^T[\mathbf{M}(\mathbf{B}\dot{\omega}_1+\mathbf{e})-\mathbf{F}]=0 & (n-h-nh)\times 1\end{cases} \quad (1)$$

因此錯誤! 找不到參照來源。式共有 $(2n-2h-nh)$ 個一階常微分方程式。因為 $\mathbf{B}$ 不為方陣，所以其反矩陣 $\mathbf{B}^{-1}$ 不存在。因為質量矩陣 $\mathbf{M}$ 是實對稱矩陣，且其特徵值皆大於零，根據矩陣正定的理論，方陣 $(\mathbf{B}^T\mathbf{M}\mathbf{B})$ 是正定的(positive definite)，所以 $\mathrm{Det}[\mathbf{B}^T\mathbf{M}\mathbf{B}]\neq 0$。為了解出 $\dot{\omega}_1$，我們將錯誤! 找不到參照來源。式的第二式左右兩邊乘以方陣 $(\mathbf{B}^T\mathbf{M}\mathbf{B})$，再移項，得到

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}(\omega_1,\mathbf{c}_{nh},\mathbf{q},\mathbf{c}_h,t)\\ \dot{\omega}_1=-(\mathbf{B}^T\mathbf{M}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{M}\mathbf{e}+(\mathbf{B}^T\mathbf{M}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{F}\end{cases} \quad (2)$$

我們將 $q_1,\ldots,q_{n-h}$ 與 $\omega_1,\ldots,\omega_{n-h-nh}$ 做為我們的狀態變數，將錯誤! 找不到參照來源。式寫成仿射非線性控制系統之標準型式，

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x})+\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (3)$$

則(2)式變為

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{q}}\\ \dot{\omega}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q},\omega_1,t)\\ -(\mathbf{B}^T\mathbf{M}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{M}\mathbf{e}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & (\mathbf{B}^T\mathbf{M}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{F}\end{bmatrix} \quad (4)$$

與(3)式比較得

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{q}}\\ \dot{\omega}_1\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}=\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{F}\end{bmatrix},\quad \mathbf{G}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & (\mathbf{B}^T\mathbf{M}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} q_1(\mathbf{q},\omega_1,t)\\ \vdots\\ q_{n-h}(\mathbf{q},\omega_1,t)\\ [-(\mathbf{B}^T\mathbf{M}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{M}\mathbf{e}]_1\\ \vdots\\ [-(\mathbf{B}^T\mathbf{M}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{M}\mathbf{e}]_{n-h-nh}\end{bmatrix} \quad (5)$$

不變分布之定義：

我們說一個分布 Δ 在向量場 $\mathbf{f}$ 的作用下是不變的，假如 $\mathbf{f}$ 與分布 Δ 的每一個向量場 τ 的李括弧(Lie bracket)運算，即 $[\mathbf{f},\tau]$，也是屬於 Δ 的一個向量場。也就是說，假如

$$\tau\in\Delta\Rightarrow[\mathbf{f},\tau]\in\Delta \text{ 。}$$

最小的不變分布與演算法

【次定理 1】
令 Δ 為所給定的平滑分布，$\tau_1,\ldots,\tau_q$ 為所給定的一組向量場，在向量場 $\tau_1,\ldots,\tau_q$ 的作用下是不變的並且包含 Δ 所有分布的家族有一個最小的元素，此最小的元素是一個平滑的分布。

為了尋求包含 Δ 且在向量場 $\tau_1,\ldots,\tau_q$ 的作用下是不變的的最小分布，我們定義下列演算法

$$\Delta_0=\Delta$$
$$\Delta_k=\Delta_{k-1}+\sum_{i=1}^{q}[\tau_i,\Delta_{k-1}] \quad (6)$$

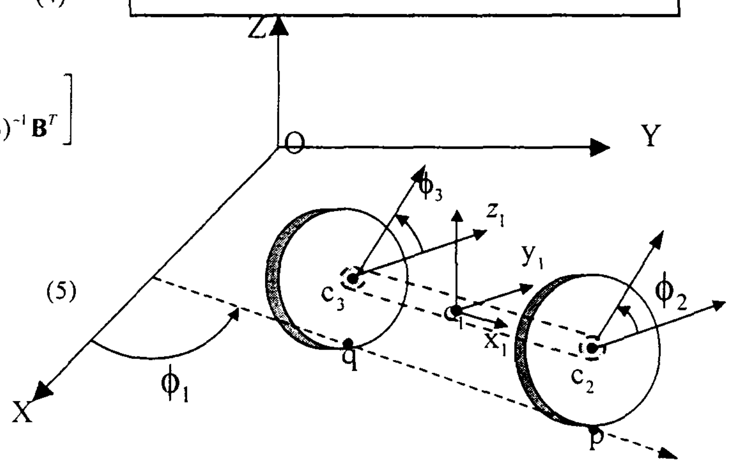
令

$$P=\langle \mathbf{f},\mathbf{g}_1,\ldots,\mathbf{g}_m \mid \mathrm{span}\{\mathbf{g}_1,\ldots,\mathbf{g}_m\}\rangle$$
$$R=\langle \mathbf{f},\mathbf{g}_1,\ldots,\mathbf{g}_m \mid \mathrm{span}\{\mathbf{f},\mathbf{g}_1,\ldots,\mathbf{g}_m\}\rangle$$

【定理 2】
分布 P 與 R 具有下列的關係：
(a) $P+\mathrm{span}\{\mathbf{f}\}\subset R$
(b)假如 $\mathbf{x}$ 是 $P+\mathrm{span}\{\mathbf{f}\}$ 的一個正規(regular)點，則，$(P+\mathrm{span}\{\mathbf{f}\})(\mathbf{x})=R(\mathbf{x})$

另外，由以上的包含關係，我們推論分布 P 與 R 在維度上具有下列的關係：

【推論 2-1】
假如 P 與 $P+\mathrm{span}\{\mathbf{f}\}$ 是非奇異的，則
$\dim(R)-\dim(P)\leq 1$



雙輪滾動系統之控制分析

因為系統有五個廣義座標，我們取輸入的數目等於其狀態變數的數目，所以我們有五個輸入。我們計算分布 P 與 R 的維度，看看此控制系統是否可以分解。

加入速度指定之控制系統分析

我們有一條非線性非完整約束，我們令 $\omega_2 = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 = v_0^2 =$ 常數。寫成仿射非線性控制系統之標準型式，

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \sin x_3 \\ -v_0 \cos x_3 \\ \frac{1}{3} x_5 \\ -\frac{1}{3} x_5 + v_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{9}{22} \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{9}{22} \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{9}{22} \end{bmatrix} u_3 \quad (7)$$

據我們前面所定義的最小不變分布演算法，首先我們取 $\Delta_0 = \mathrm{span}\{\mathbf{g}_1\}$，

接下來我們來求 Δ_4，

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= \Delta_3 + [\mathbf{f}, \Delta_3] + [\mathbf{g}_1, \Delta_3] \\ &= \mathrm{span}\{ \mathbf{g}_1, [\mathbf{f},\mathbf{g}_1], [\mathbf{f},[\mathbf{f},\mathbf{g}_1]], [\mathbf{f},[\mathbf{f},[\mathbf{f},\mathbf{g}_1]]], \\ &\qquad [\mathbf{f},[\mathbf{f},[\mathbf{f},[\mathbf{f},\mathbf{g}_1]]]], [\mathbf{g}_1,[\mathbf{f},[\mathbf{f},[\mathbf{f},\mathbf{g}_1]]]] \} \end{aligned}$$

得到

$\Delta_4 = \mathrm{span}\{ \mathbf{g}_1, [\mathbf{f},\mathbf{g}_1], [\mathbf{f},[\mathbf{f},\mathbf{g}_1]], [\mathbf{f},[\mathbf{f},[\mathbf{f},\mathbf{g}_1]]] \} = \Delta_3$.

由線性代數中的方法計算 Δ_4 的維度，得到

$$\dim \Delta_4 = 4$$

現在，我們已經得到整數 k^*，使得 $\Delta_{k^*+1} = \Delta_{k^*}$。這時我們就不用再計算下一個分布 Δ_5 了，而 Δ_3 就是我們想要得到的最小不變分布 P. 因為本控制方程式有 5 個狀態變數，而 $\dim P = 4$。因此，我們只須要找到一個函數 λ_1 λ_1 滿足 $d\lambda_1 \in \Delta_3^{\perp}$，即

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \tau_j = 0, \tau_j \in \Delta_3 \quad (8)$$

展開得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial x_5}\left(\dfrac{9}{22}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial x_3}\left(-\dfrac{3}{22}\right) + \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial x_4}\left(\dfrac{3}{22}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial x_1}\left(\dfrac{3}{22} v_0 \cos x_3\right) + \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial x_2}\left(\dfrac{3}{22} v_0 \sin x_3\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial x_1}\left(-\dfrac{1}{22} v_0 x_5 \cos x_3\right) + \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial x_2}\left(\dfrac{1}{22} v_0 x_5 \sin x_3\right) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

我們找到一組解滿足上述方程式如下 $\lambda_1 = x_3 + x_4$。重新令變數如下：

$z_1 = x_1, z_2 = x_2, z_3 = x_3, z_4 = x_5, z_5 = \lambda_1 = x_3 + x_4$,

經過座標轉換的控制方程式如下所示：

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \\ \dot{z}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \sin z_3 \\ -v_0 \cos z_3 \\ \frac{1}{3} z_4 \\ 0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{9}{22} \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{9}{22} \\ 0 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{9}{22} \\ 0 \end{bmatrix} u_3$$

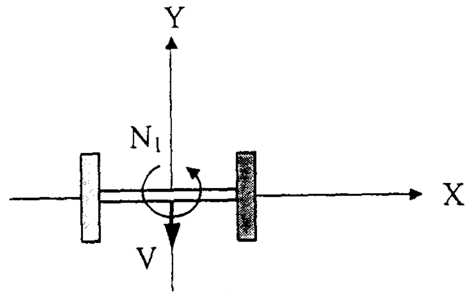
本系統的 $\dim(P) = r - 1 = 4, r = 5,$。由上面的控制方程式可看出，本系統有一個狀態變數是不可控的，此不可控的狀態變數是 $z_5 = \phi_1 + \phi_2$。也就是說，當給定 $\phi_1(t)$ 與 $\phi_2(t)$ 的初始值 $\phi_1(0)$, $\phi_2(0)$, 在時間 T 之後，$\phi_1(T) + \phi_2(T) = v_0 T + \phi_1(0) + \phi_2(0)$，但是我們無法知道 ϕ_1 與 ϕ_2 角度的個別值。

實例分析

假設整個系統的中心位於座標的中心，

$(x(0), y(0)) = (0,0)$ 初始速度量值為

$(\dot{x}(0), \dot{y}(0)) = (0, -5)$



運動方程式：
$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \sin \phi_1 \\ \dot{y} = -v_0 \cos \phi_1 \\ \dot{\phi}_1 = \frac{1}{3} \omega_1 \\ \dot{\omega}_1 = \frac{9}{22} u \end{cases}$$

初始條件：
$$\begin{cases} x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \\ y(0) = 0, \dot{y}(0) = -5, \\ \phi_1(0) = 0, \dot{\phi}_1(0) = 0, \\ u(t) = \frac{44}{3}, 0 \le t, \end{cases}$$

假設輸出為 $h(\mathbf{x}) = [x \quad y]^{\mathrm{T}}$，我們將上式中的 x, y 的運動方程式微分一次，得到

$\ddot{x} = v_0 \dot{\phi}_1 \cos \phi_1, \ddot{y} = v_0 \dot{\phi}_1 \sin \phi_1$，再將 $\dot{\phi}_1 = \frac{1}{3} \omega_1$ 代入，得到 $\ddot{x} = \frac{1}{3} v_0 \omega_1 \cos \phi_1, \ddot{y} = \frac{1}{3} v_0 \omega_1 \sin \phi_1$，，但是尚未出現控制項 u，所以我們再微分一次得到

$$\begin{cases}\ddot{x} = \frac{1}{3}v_0(\dot{\omega}_1\cos\phi_1 - \omega_1\dot{\phi}_1\sin\phi_1)\\ \ddot{y} = \frac{1}{3}v_0(\dot{\omega}_1\sin\phi_1 + \omega_1\dot{\phi}_1\cos\phi_1)\end{cases}$$

再將 $\dot{\phi}_1 = \frac{1}{3}\omega_1$ ， $\dot{\omega}_1 = \frac{9}{22}u$ 代入，

$$\begin{cases}\ddot{x} = \frac{1}{3}v_0(\frac{9}{22}u\cos\phi_1 - \frac{1}{3}\omega_1\omega_1\sin\phi_1)\\ \ddot{y} = \frac{1}{3}v_0(\frac{9}{22}u\sin\phi_1 + \frac{1}{3}\omega_1\omega_1\cos\phi_1)\end{cases}$$

控制項 u 已經出現在方程式中，所以我們不用再微分。寫成矩陣的形式如下：

$$\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{22}v_0\cos\phi_1\\ \frac{3}{22}v_0\sin\phi_1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}-\frac{1}{9}\omega_1^2\sin\phi_1\\ \frac{1}{9}\omega_1^2\cos\phi_1\end{bmatrix}$$

因為矩陣 **B** 的反矩陣 $\mathbf{B}^{-1}$ 不存在，所以無法取回授

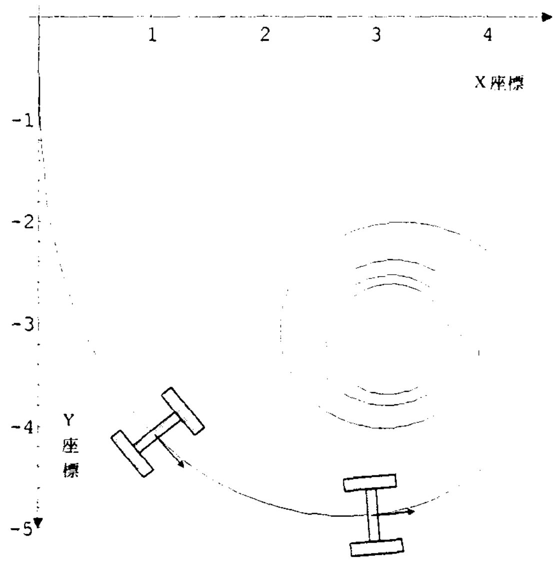
$$\mathbf{v}=\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} - k_1\mathbf{x} - k_2\mathbf{x} - k_3\mathbf{x})$$

因此無法採用 input-output feedback linearization and dynamic extension 的控制方法，我們必須尋求其它方法。由運動方程式的第三式以及第四式，我們得到 $\ddot{\phi}_1 = \frac{3}{22}u$。再代入初始輸入條件 $u(t) = \frac{44}{3}$，我們得到 $\ddot{\phi}_1 = 2$。因為 $\phi_1(0) = 0$, $\dot{\phi}_1(0) = 0$ 所以我們解得 $\phi_1(t) = t^2$，再將此結果代入運動方程式的第一式以及第二式，我們解得

$$\begin{cases}x = 5\sqrt{\frac{\pi}{2}}FresnelS\,[\sqrt{\frac{\pi}{2}}t]\\ y = -5\sqrt{\frac{\pi}{2}}FresnelC\,[\sqrt{\frac{\pi}{2}}t]\end{cases}$$

結 論

我們拋開了傳統的運動學模型，引入輪子動力學，用高斯原理配合狀態轉換與速度轉換，將非完整約束嵌入，推導出最少相的無約束狀態運動方程式，並首度應用最小不變分布 P 與 R 在我們的無約束狀態運動方程式上來做可控性分析。我們應用最小不變分布演算法求出不變分布之後，再計算 P 與 R 的維度。我們依照 P 與 R 的維度關係，將控制系統經過座標轉換後的形式分成三種類型。依據本文的研究，我們發現在剛體系統中，控制系統的 P 與 R 的維度會隨著不同的輸入而改變。經由研究在流形上向量場與餘向量場之間的幾何關係與李代數的架構，再求解偏微分方程式，我們成功地找到原來系統中不可控制的狀態變數。



時間 T=5 秒的圖形

References

1.Ju. I. Neimark and N. A. Fufaev, *Dynamics of Nonholonomic Systems,* American Mathematical Society, 1972.

2.H. Hertz, *Principle of Mechanics*, London, Macmillan, 1917.

3.E. Whittaker, *A Treatise on the AnalyticalDynamics of Particles and Rigid Bodies,* Cambridge University Press, 1937.

4.L. A. Pars, *A Treatise on Analytical Dynamics,* London, Heinemann, 1965.

5.S. K. Saha and J. Angleles, 'Dynamics of Nonholonomic Systems Using a Natural Orthogonal Complements,'Journal of Applied Mechanics, Vol. 58, 1991, 238-243.

6.J. T. Wang, and R. L. Huston, 'Kane's equuations with undetermined multipliers-application with constrained multibody systems,' J. appl. Mech. **54**, 1987, 424-429.

7.E. J. Saletan and A. H. Cromer, 'A Variational Principle for Nonholonomic System," American Journal of Physics, Vol. 38, No.7, 1988, 451-456.

8.R. E. Kalaba and Udwadia, 'Equations of motion for Nonholonomic, Constrained Dynamical Systems via Gauss's Principle,' Journal of Applied Mechanics, Vol. 60, 1993, 662-668.

9.C. Y. Su and Y. Stepanenko, 'Robust Motion/Force Control of Mechanical Systems with Classical Nonholonomic Constraints', IEEE Transaction on Automatic and Control, Vol. 39, N0. 3, 1994, 609-614.

10.A. M. Bloch and P. E. Crough,'Nonholonomic Control Systems on Riemannian Manifolds,' SIAM, Vol. 33, N0. 1, 1995, 126-148.

11. 張家歐，' 非完整拘束機械系統之非線性動力與控制分析' ，國科會研究計劃報告，NSC87-2212-E002-007.