

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

## 三維剛架結構之迴傳波射動力分析與模型實驗(3/3)

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC 91 - 2211 - E - 002 - 070

執行期間：91 年 08 月 01 日 至 92 年 12 月 31 日

執行單位：國立臺灣大學應用力學研究所

計畫主持人：鮑亦興

共同主持人：王彥博

計畫參與人：李建良

報告類型：完整報告

報告附件：出席國際會議研究心得報告及發表論文

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 93 年 3 月 16 日

# 三維剛架結構之迴傳波射動力分析與模型實驗(3/3)\*

## 成果報告

鮑亦興 國立台灣大學應用力學研究所名譽教授  
王彥博 國立交通大學土木工程學系教授  
李建良<sup>†</sup> 國立交通大學土木工程學系博士生  
陳繼峰<sup>‡</sup> 國立交通大學土木工程學系碩士生

### 摘要

本計畫全程三年。第一年之工作重點為檢驗以迴傳射線矩陣法分析三維剛架結構之基本理論(包括靜力分析與動力分析)、複核計算動力反應之各項方程式、改進電腦計算程式及完成相關試驗儀器設備之採購與驗收工作。在重編計算程式時，吾人發現將無窮級數解截成多項式近似解之過程中，可能產生第二種答案(簡稱答案乙)，與早期研究報告之答案(簡稱答案甲)稍有不同。兩答案之數學推導過程，經多人重複驗算，均屬正確。

第二年之理論工作重點改為全力檢驗原報告之基本理論。後由兩答案之物理特性，尋因果律求解，方確定應採用答案乙。第二年另一工作重點為鉛模型結構之動力實驗，於交通大學土木工程系大型結構實驗室進行。吾人研製可重複施加衝擊力之機構及設計觸發訊號源，以啟動示波器擷取應變之瞬時反應。試驗結果與理論計算結果比較，仍有不同。試驗的結果有較高頻的波動反應，理論分析的結果則較為平滑。初步推測該原因可能與鉛構架所採用的構材斷面有關。

由於第二年使用之鉛構材斷面為空心鉛方管，因此吾人於第三年重新製作實心斷面之鉛構架模型，並進行動力實驗。同時根據已修正之理論再編寫電腦程式計算剛架構件中各點之動力應變反應並與實驗值比較。理論與試驗的結果頗為相符，在應力波到達之初期與中期內(50個正規化時間)契合的程度很高，但在此時限以外兩者差異逐漸增大。此項差異也發生在二維剛架之理論與實驗結果之比較，

\*國科會計畫編號 NSC 91-2211-E-002-070

<sup>†</sup>現任國立交通大學防災工程研究中心 研究助理教授

<sup>‡</sup>現為國立台灣大學應用力學研究所博士生

故對已有之剛架動力理論必須再研究找出此項差異之根源。此外，實心斷面之高頻波動的成份已顯少發生，說明鋁構架模型採用空心斷面或是實心斷面製作，其應力波動的特性將有所差異，空心斷面之高頻波動特性須另外建立理論分析模型加以考慮。

本報告內容共分七章。第一章為緒論；第二章介紹三維剛架結構之彈性波理論，包括：軸向波、扭轉波及撓曲波，探討彈性波之傳播特性及其物理性質；第三章為彈性波於剛架節點之散射分析，藉由力平衡方程式與位移諧合方程式建立不同邊界條件下之節點散射矩陣及節點波源向量；第四章為空間構架之彈性波射迴傳分析，說明空間結構迴傳矩陣之建立及矩陣  $\mathbf{I} - \mathbf{R}(\omega)$  具奇異性(Singularity)時之解決方法；第五章為迴傳波射法之離散過程與數值方法，連續的頻率函數或連續的時間函數須經過離散化的過程方能利用電腦進行計算，本章將說明解析的過程與取樣筆數之決定等。第六章為三維剛架結構試驗環境之建立與驟加衝擊載重試驗，試驗的鋁模型構架分別考慮鋁構材斷面為空心及實心的情況，同時將試驗結果與第五章之理論分析結果進行比較，以探討兩模型之波傳特性的差異。第七章為結論。

本計畫執行期間所發表之重要論文列舉如后：

1. 王彥博、鮑亦興、李建良、陳繼峰，「空間構架之迴傳矩陣靜力分析」，第二十五屆全國力學會議論文集，民國 90 年 12 月，台中，pp. 1535-1546。
2. Yih-Hsing Pao and Ji-Feng Chen, "Effects of Causality and Joint Conditions on Method of Reverberation-Ray Matrix", *AIAA Journal*, Vol. 41, No. 6, 2003, pp. 1138-1142.
3. Yih-Hsing Pao, Guo-Hua Nie and Der-Ching Keh, "Dynamic Response and Wave Propagation in a Three-dimensional Framed Structure," (to be submitted).
4. 李建良、陳繼峰、王彥博、鮑亦興，「空間構架之迴傳波射動力分析」，第二十六屆全國力學會議論文集 D 類組，民國 91 年 12 月，虎尾。

# 目錄

	頁次
摘要 .....	
目錄 .....	
表目錄 .....	
圖目錄 .....	
照片目錄 .....	
第一章 緒論 .....	1
第二章 三維剛架結構之彈性波 .....	5
2.1 軸向波的傳播 .....	5
2.2 扭轉波的傳播 .....	8
2.3 撓曲波的傳播 .....	9
2.4 剛架節點和桿件的座標 .....	18
第三章 彈性波在剛架節點之散射分析 .....	21
3.1 節點的力平衡 .....	21
3.2 節點的位移諧合 .....	24
3.3 彈性波在剛性自由節點之散射 .....	26
3.4 彈性波在鉸接節點之散射 .....	27
3.5 彈性波在球型支承點之散射 .....	30

3.6 彈性波在固定支承點之散射.....	32
<b>第四章 空間構架之彈性波射迴傳分析 .....</b>	<b>33</b>
4.1 傳播矩陣.....	33
4.2 轉列矩陣.....	35
4.3 結構之迴傳矩陣.....	36
4.4 入射波與反射波之因果關係 .....	38
<b>第五章 迴傳波射法之離散過程與數值方法 .....</b>	<b>41</b>
<b>第六章 試驗環境之建構與衝擊載重試驗結果.....</b>	<b>43</b>
6.1 三維鋁模型剛架.....	43
6.2 加載機構.....	43
6.3 三維鋁模型構架之迴傳波射動力分析 .....	43
6.4 三維鋁模型構架之衝擊載重試驗(空心斷面) .....	44
6.5 三維鋁模型構架之衝擊載重試驗(實心斷面) .....	46
<b>第七章 結論 .....</b>	<b>48</b>
<b>參考文獻.....</b>	<b>49</b>

## 表目錄

表6.1 鋁材之材料性質(空心斷面).....	51
表6.2 鋁材之材料性質(實心斷面).....	52

## 圖目錄

圖2.1 桿件中微小段元素的受力情形.....	5
圖2.2 樑中微小段元素的受力情形.....	10
圖2.3 白努利樑的撓曲波波速與頻率的關係 .....	53
圖2.4 提摩盛科樑的撓曲波波數與頻率的關係(無阻尼).....	53
圖2.5 提摩盛科樑的撓曲波波速與頻率的關係 .....	54
圖2.6 提摩盛科樑的撓曲波波數與頻率的關係(有阻尼).....	54
圖2.7 三維剛架結構.....	55
圖2.8 桿件的座標系統.....	55
圖4.1 二維剛架示意圖.....	40
圖4.2 節點1的垂直位移.....	56
圖4.3 節點6的垂直位移.....	56
圖6.1(a) 鋁模型剛架(上視圖).....	59
圖6.1(b) 鋁模型剛架-側視圖(短向).....	60
圖6.1(c) 鋁模型剛架-側視圖(長向) .....	61
圖6.2 軸向波與彎矩波產生之應變(梁桿件3-6-Right) .....	69
圖6.3 軸向波與彎矩波產生之應變(梁桿件3-6-Left) .....	69
圖6.4 軸向波與彎矩波產生之應變(梁桿件5-11-Front) .....	70

圖6.5 軸向波與彎矩波產生之應變(梁桿件5-11- Bottom) .....	70
圖6.6 軸向波與彎矩波產生之應變(梁桿件8-11-Top) .....	71
圖6.7 軸向波與彎矩波產生之應變(梁桿件8-11- Bottom) .....	71
圖6.8 軸向波與彎矩波產生之應變(柱桿件4-5-Front) .....	72
圖6.9 軸向波與彎矩波產生之應變(柱桿件4-5-Back).....	72
圖6.10 軸向波與彎矩波產生之應變(柱桿件8-9-Front) .....	73
圖6.11 軸向波與彎矩波產生之應變(柱桿件8-9-Back) .....	73
圖6.12 觸發訊號源之製作 .....	74
圖6.13 壓電式應變計觸發訊號源之歷時 .....	74
圖6.14(a) 軸向波與彎矩波產生之應變(柱桿件8-9-Front).....	75
圖6.14(b) 軸向波與彎矩波產生之應變(柱桿件8-9-Back) .....	75
圖6.15(a) 軸向波與彎矩波產生之應變(柱桿件7-8-Front).....	76
圖6.15(b) 軸向波與彎矩波產生之應變(柱桿件7-8-Back) .....	76
圖6.16(a) 軸向波與彎矩波產生之應變(梁桿件8-11-Top).....	77
圖6.16(b) 軸向波與彎矩波產生之應變(梁桿件8-11-Bottom) .....	77
圖6.17(a) 軸向波與彎矩波產生之應變(柱桿件4-5-Front).....	78
圖6.17(b) 軸向波與彎矩波產生之應變(柱桿件4-5-Back) .....	78

## 照片目錄

照片6.1(a) 鋁模型剛架 .....	57
照片6.1(b) 鋁模型剛架(短向) .....	57
照片6.1(c) 鋁模型剛架(長向).....	58
照片6.2(a) 加載機構 .....	62
照片6.2(b) 釣魚線固定於掛勾 .....	62

照片6.2(c) 釣魚線跨過滑輪 .....	63
照片6.2(d) 釣魚線懸吊質塊 .....	63
照片6.2(e) 質塊 .....	64
照片6.3 噴燈及釣魚線 .....	64
照片6.4(a) 黏貼於鋁構架模型之應變計 .....	65
照片6.4(b) 黏貼於鋁構架模型之應變計 .....	65
照片6.5 衝擊載重試驗之儀器設備 .....	66
照片6.6(a) 高頻示波器(前視) .....	66
照片6.6(b) 高頻示波器(後視) .....	67
照片6.7(a) 訊號調節放大器-惠斯敦電橋(前視) .....	67
照片6.7(b) 訊號調節放大器-惠斯敦電橋(後視) .....	68
照片6.8 應變計及軍用接頭 .....	68



# 第一章 緒 論

近數十年來，基於地震工程及航空、太空工程 等領域之發展所需，結構動力分析理論有長足的進步。結構動力分析方法基本上可分為振動分析模式和波動分析模式兩種，早期由於計算能力上的限制，多數的問題都採振動模式分析。然而，振動分析模式主要用於分析結構之穩態反應(steady-state response)，其計算結果雖能反應結構整體系統之一般特性，卻無法掌握結構結點位移及構件應變之初期與中期瞬態反應(transient response)。因此，對於承受衝擊力作用時如太空梭在太空站不正常之起落、海域平台受海嘯或巨浪之撞擊，及高樓建築耐受強烈地震之震撼等，其初期瞬態反應具有重要影響的結構動力問題，無法以振動分析模式完整描述其動力特性，而須仰賴波動分析模式來處理。近年來，由於計算機運算的功能與速度不斷地提升，已有足夠能力處理龐大的矩陣數值計算問題，因此波動分析又重新受到重視。波動分析模式能夠精確描述結構受衝擊載重之瞬態反應，揭示暫態波的傳播規律與特性，彌補振動分析模式之不足，提供吾人分析結構波動特性與振動特性之基本工具，根本解決百年來懸而未決之剛架結構動應力分析問題。這項理論自成體系，不僅可彌補有限元素法之不足，更可提供吾人研究波動控制和振動控制之基礎，它超越現存結構動力學之理論範疇，俟其理論發展完備後，必將開啟結構動力學之新頁。

## 研究動機

結構波動分析主要根據彈性波理論，分析結構受到動態載重時各桿件中軸向壓力波(axial wave)、扭曲剪力波(torsional wave)及撓曲波(flexural wave) 等三種應力波之傳播。軸向壓力波屬縱波，扭曲剪力波屬橫波，撓曲波則由彎矩及剪力產生，其波動兼具縱波與橫波之特性，屬於頻散波(dispersive wave)。波動分析方法又可區分為駐波法(standing wave)與行波法(progressive wave)，駐波法利用結構桿件之各模態振動反應進行疊加，桿件之自然振動模態與邊界條件有關，當各桿件經節點連接後，其邊界條件將變得十分複雜而難以分析，故迄今只被應用於簡單的二維結構分析[1]。行波法則依應力波之入射、折射和反射等波傳過程追蹤計算波形之變化，將循由不同途徑到達各個節點之所有振波疊加而求出結構之整體動態反應，目前已被應用於三維結構之動態分析[2]。

## 參考文獻

關於結構桿件之波傳理論研究，已有不少文獻[3-7]記載，亦有專書探討[8]；研究剛架結構的波傳分析，須先由彈性波通過節點之散射問題著手。1972年時 Lee 與 Kolsky [9]探討兩非同心彈性桿件(兩桿件交角不為零)，當其一端有衝擊源時，入射波通過桿件連接處所產生的反射和折射情形；1981年 Desmond[10]研究了兩同心桿件與一斜桿連接，當有一縱波入射時，在節點所產生的散射結果；Yong 和 Atkins [11,12]在 1982 及 1983 年，先利用傅立業轉換將時間域的運動方程式轉換到頻率域，分析入射縱波通過 L 型和 T 型節點時，相連於該節點各桿件彈性波振幅之變化；1984 年，Simha 與 Fourney [13]利用 Laplace 轉換分析彈性波通過節點時之散射反應；1985 年，Doyle 和 Kamle [14]則利用快速傅立業轉換(Fast Fourier Transform)，研究入射橫波通過兩非等面積桿件介面時，各桿件的反應，並與實驗結果比較。1985 年，Lu 和 Felsen [15]利用射線法、模態法和混合分析方法，研究彈性波在板中的傳播問題；1992 年，Su 和 Pao [6] 利用相同的三種方法求解彈性波在梁的傳播問題，並得到時域動態反應。以上的研究，均侷限於單一元件內之彈性波傳問題。

1957 年，Boley [16]首先提出波傳射線法分析桁架結構之應力波傳遞問題(僅有軸向波)，此一分析方法對於初期反應之分析結果相當精確，但散射次數增加後，對於射線的追蹤變得十分困難。1986 年，von Flotow [17]將一大型結構簡化為懸臂梁，亦使用波傳射線法並配合傳輸矩陣的概念，求得結構物受到波源擾動時，結構任一位置的頻域反應，並利用快速傅立業逆轉換(Inverse Fast Fourier Transform)求得時域反應；1992 年，Gopalakrishnan 和 Doyle [18]則利用動態勁度矩陣法，求出有限桿件的動態反應，但因快速傅立業轉換數值方法的限制，這個方法僅能求取有限樑和一半無窮樑連接時的動態反應。1989 年，Nagem 和 Williams [19]開始對較複雜的二維剛架結構進行研究，利用傳輸矩陣的概念，以及節點的變位相容和力平衡條件，導出了  $\mathbf{B}(\omega)\mathbf{PT}(\omega)\bar{\mathbf{Z}}_0 = \bar{\mathbf{f}}$ ，其中  $\mathbf{B}(\omega)$  為節點交互作用矩陣， $\mathbf{P}$  為置換矩陣， $\mathbf{T}(\omega)$  為傳輸矩陣， $\bar{\mathbf{Z}}_0$  為狀態向量， $\bar{\mathbf{f}}$  為力源向量，可進而求得結構之共振頻率，及  $\det|\mathbf{B}(\omega)\mathbf{PT}(\omega)| = 0$  之根。1990 年，Howard [20]在其博士論文中，則採用另外一種方法，將結構中桿件之彈性波分為入射波和出射波，並在同一根結構桿件兩端採用獨立之局部座標系統，進而推得桿件之變形表示如

$\hat{u}(\omega) = [\mathbf{P}(l-x)\mathbf{U} - \mathbf{P}(x)][\mathbf{I} - \mathbf{R}]^{-1}\hat{s}(\omega)$  之形式，除可像 Nagem 和 Williams 的作法求得結構之共振頻率外，更可利用射線展開和快速傅立業逆轉換求得結構之時域動態反應。惟 Howard 當時僅計算桿件內軸向波的傳播情形，對於剛架內含有撓曲波 (Bending Wave) 的情況並未加以考慮。上述研究均限於二維結構的情形。

## 研究目的

1996 年，柯德清[2]在其博士論文中提出了一種用於分析三維剛架之彈性波傳播規律的方法，稱為迴傳波射法 (Reverberation Method)，可求得剛架之暫態反應。根據迴傳波射法計算二維剛架結構所得之波動反應與 Howard 於 1989 年在 Cornell 大學進行之試驗結果比較可知，二者之初期暫態反應相當一致，但在未達到桿件最大振幅之前，試驗值和理論值已有明顯之差異。儘管如此，此一系列的研究已初步證實迴傳波射法具有優於現存結構動力分析理論之價值，惟仍有一些課題亟待解決其理論才能完備，包括：

- (1) 二維桁架理論與實驗之修正。平面桁架之實驗已初步完成[21,22]，實驗結果與理論分析在初期雖有良好的相關性，但後期兩者相差頗大，必須分別從理論上及重新進行實驗找出原因。
- (2) 結構樓板自重之影響。先前之研究無論是二維桁架[22]或是三維剛架，均未包含桁架橋面或剛架樓板之自重。
- (3) 三維剛架之動力實驗。三維剛架之理論雖已建立，相關實驗則仍待進行，以確認相關理論之合理性。此一實驗難度極高，首先，衝擊力或是階梯載重 (step loading) 施力條件重覆之試驗要求必須克服；此外，暫態波傳反應稍縱即逝 (每秒約五千公尺)，各項記錄儀器之採樣速率須達一微秒 ( $10^{-6}$  秒) 以內，試驗前需要嚴密的規劃與設計。
- (4) 地震波的影響。現有之理論與實驗均探討結構因節點受力引起之振動 (force-induced vibration)，對於結構受基礎運動所引致之振動 (motion-induced vibration)，在理論與實驗兩方面均須重新考慮。
- (5) 通用分析程式之建立。對於各式結構之波動與振動分析，須發展一套易於使用的程式，俾能推廣其應用。

## 研究進度

本研究計劃全程三年，主要針對前述迴傳波射矩陣法在三維空間剛架結構之動力分析與試驗的課題進行一系列工作。第一年已完成計劃之既定目標，包括：兩層樓鋁管模型剛架之製作；模型剛架之靜力分析與靜力試驗；高頻波動量測儀器(示波器、應變計等)之採購與測試及驟加外力設備之研製；及三維迴傳矩陣法計算程式之修改。

第二年之研究在三維迴傳射線矩陣理論之修正，及三維構架模型之動力試驗。理論方面，因在第一年後期修改計算程式時(將原有之 FORTRAN 程式改為 MATLAB 計算程式)，發現若將動力反應中之矩陣反轉， $[\mathbf{I} - \mathbf{R}]^{-1}$ ，展成紐曼級數 (Neumann Series)再截斷成多項式時，有兩種進行方式。此兩種方式之數學推導，均極正確，然對入射波及離射波係數之計算可能產生不同結果。乃動員全部研究人力並徵召過去曾參加此項研究計畫之訪問學者數人，通力研討，至第二年底方找出解決此困境之答案。在實驗方面，因鋁管模型剛架使用空心方管製成，用應變規量得之動力反應極不規則，且不能重複量測，乃在年底開始重製模型並改進實驗步驟與量測技術。

第三年就修改後之迴傳矩陣理論重編電腦程式，計算剛架各構件之瞬時應變值。另就重新製造之實心鋁管剛架重複進行動力實驗，成果頗有改進。實驗量測之瞬時應變值，差可與理論值比較。本報告第六章將詳述理論與實驗之比較成果。

## 研究成果

本報告內容共分七章。第二章介紹三維剛架結構之彈性波理論，包括：軸向波、扭轉波及撓曲波，探討彈性波之傳播特性及其物理性質；第三章為彈性波於剛架節點之散射分析，藉由力平衡方程式與位移諧合方程式建立不同邊界條件下之節點散射矩陣及節點波源向量；第四章為空間構架之彈性波射迴傳分析，說明迴傳矩陣之建立及矩陣  $\mathbf{I} - \mathbf{R}(\omega)$  具奇異性(Singularity)時之解決方法；第五章為迴傳波射法之離散過程與數值方法，由於分析的過程中須使用逆傅立葉轉換，將頻率域之結構反應轉換為時域反應，然而在數位化電腦的運算環境中，連續的頻率函數或連續的時間函數須經過離散化的過程才能利用電腦進行計算。本章將說明解析的過程與取樣筆數之決定等。第六章為試驗環境之建構與驟加衝擊載重試驗，並將試驗結果與第五章之理論分析結果進行比較。第七章為結論。

## 第二章 三維剛架結構之彈性波

本章依據彈性波理論，探討 Timoshenko 梁之三種彈性波(軸向波、扭轉波、撓曲波)的傳播情形及其物理特性。首先，建立桿件變位、內力及應變等物理量與入射波波幅及出射波波幅在頻率域之關係，以便計算在波傳過程中梁元素任意位置之應力、應變等物理量，並以矩陣的形式來表示，經由轉換矩陣，將各桿件在局部座標下的物理量轉換為整體座標，以便於構件共交節點相關矩陣之建立。

### 2.1 軸向波的傳播

一般而言，若桿件的細長比(Slenderness Ratio)不大，則軸向波在傳播時，除了產生軸向變形外，由於橫向效應(或稱為蒲松效應)，也會產生橫向變形，此時軸向波理論將不適用，而必須採用麥德林-賀門的軸向理論(Mindlin-Herrmann Rod Theory)[23]，使得運動方程式變得十分複雜。因此，在推導軸向波運動方程式之前，一般都假設桿件的細長比很大，使得橫向效應可被忽略。首先，考慮桿件中一微小段元素之受力情形如下(圖 2.1)：



圖 2.1：桿件中微小段元素的受力情形

考慮水平向的力平衡：

$$-F + (F + \Delta F) - \zeta_u \Delta x \dot{u} - K \Delta x u = \rho A \Delta x \ddot{u}$$

其中， $\zeta_u \Delta x \dot{u}$  和  $K \Delta x u$  為軸向波在行進時，受到周圍介質影響所產生的遲滯力(Retarding Force)，分為速度相依( $\zeta_u \Delta x \dot{u}$ )和位移相依( $K \Delta x u$ )兩種形式。將上式整理後可得：

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} - \zeta_u \dot{u} - Ku = \rho A \ddot{u}$$

或

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} - \zeta_u \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - Ku(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

其中， $u(x,t)$  為桿件之軸向位移， $F(x,t)$  為通過斷面的軸向力， $\rho$  為桿件的密度，

$A$  為截面積。假設材料為均質的，且桿件截面積固定，則根據虎克定律：

$$F(x,t) = EA \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.2)$$

將(2.2)式代入(2.1)式可得：

$$EA \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \zeta_u \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - Ku(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

此即軸向波動方程式之通式。我們採用頻譜分析(Spectrum Analysis)的方法來分析整個問題，以避開直接求解偏微分方程式的問題而僅需面對常微分方程式。對(2.3)式取傅立葉轉換後得：

$$EA \frac{d^2 \hat{u}(x,\omega)}{dx^2} + [\omega^2 \rho A - i\omega \zeta_u - K] \hat{u}(x,\omega) = 0 \quad (2.4)$$

上式之通解為：

$$\hat{u}(x,\omega) = a_1(\omega) e^{ik_1 x} + d_1(\omega) e^{-ik_1 x} \quad (2.5)$$

其中，

$$k_1 = \sqrt{\omega^2 \frac{\rho}{E} - i\omega \frac{\zeta_u}{EA} - \frac{K}{EA}} \quad (2.6)$$

為軸向波之波數(Wave Number)，亦即單位長度內波的個數， $a_1$  和  $d_1$  為未定常數， $a_1$  表示一穩態波的波幅(Wave Amplitude)，沿負  $x$  方向傳播， $d_1$  表示另一穩態波的波幅，沿正  $x$  方向傳播。我們將頻率  $\omega$  除以波數  $k$  所得物理量之意義即為單位時間內傳波的步長，亦即波速(Wave Speed)，可表示為：

$$c = \frac{\omega}{k} \quad (2.7)$$

由(2.6)式、(2.7)式可知，一般情況下，波速和頻率有關。我們稱此種波為頻散波(Dispersive Wave)，因為波在傳播的過程中，隨著時間的改變，波形也會跟著改變。此外，由(2.2)和(2.5)式可求得軸向力的穩態解為：

$$\hat{F}(x,\omega) = EA i k_1 [a_1(\omega) e^{ik_1 x} - d_1(\omega) e^{-ik_1 x}] \quad (2.8)$$

由軸向波所產生之軸向應變的穩態解  $\hat{\varepsilon}_{xu}(x,\omega)$  則為：

$$\hat{\varepsilon}_{xu}(x,\omega) = \frac{\hat{F}(x,\omega)}{EA} = i k_1 [a_1(\omega) e^{ik_1 x} - d_1(\omega) e^{-ik_1 x}] \quad (2.9)$$

若假設(2.6)式中  $\zeta_u = 0$ ，則我們可以得到一截止頻率(cut-off frequency)  $\omega_0$ ：

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{\rho A}}$$

當頻率大於此一截止頻率時( $\omega > \omega_0$ )，波數 $k_1$ 為正實數，反之當頻率小於此一截止頻率時( $\omega < \omega_0$ )， $k_1$ 則為負虛數。亦即只有頻率大於此一截止頻率的波會傳播，小於此一截止頻率的波則不傳播。

若假設(2.6)式中 $K = 0$ ，則(2.6)式中波數 $k_1$ 為：

$$k_1 = \sqrt{\omega^2 \frac{\rho}{E} - i\omega \frac{\zeta_u}{EA}} \quad (2.10)$$

(2.10)式中的 $k_1$ 無論在任何頻率下都包函了一正實數與一負虛數，正實數的部分代表波的傳播，負實數的部分則會使波在行進的過程中波幅逐漸衰減(Attenuate)。我們可從(2.5)式看出此種現象，當 $k_1$ 為正實數時，式中的 $e^{-ik_1x}$ 和 $e^{ik_1x}$ 為弦波函數；當 $k_1$ 為負虛數時，則為指數函數。故速度相依型的遲滯效應就類似一種阻尼效應(Damping Effect)，此為材料本身缺陷所產生，和結構桿件接合不良所產生的阻尼力不同。一般而言，材料的阻尼力遠較節點的阻尼力來得小，故一般可以忽略不計。關於材料的遲滯力，文獻[24]提供了有關實驗方面的研究。

理想狀況之下，假設材料沒有任何遲滯力或阻尼力( $\zeta_u = 0, K = 0$ )，則(2.3)式可改寫為：

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

(2.6)式則可改寫為：

$$k_1 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (2.12)$$

故由(2.7)可得理想狀態下之軸向波波速為：

$$c_1 = \frac{\omega}{k_1} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.13)$$

由上式可知， $c_1$ 與頻率無關，僅與桿件之密度、楊氏模數有關。我們稱此種波為非頻散波(Nondispersive Wave)，因為波在傳播的過程中，隨著時間的改變，波形不會改變。由(2.11)、(2.13)式可得理想狀態下之軸向波運動方程式為：

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.14)$$

理想狀態下的桿件的軸向位移、軸向力和軸向應變則可將(2.12)式分別代入(2.5)、(2.8)和(2.9)式求得之。

(2.14)式可利用傅立業轉換來求得如(2.5)式的頻域解，或可直接得到一達南貝(D'Alembert)解為：

$$u(x,t) = A_1(t+x/c_1) + D_1(t-x/c_1) \quad (2.15)$$

其中， $A_1$ 和 $D_1$ 代表兩個普通函數，函數 $A_1(t+x/c_1)$ 表示一個行進波沿著負 $x$ 的方向前進。而函數 $D_1(t-x/c_1)$ 表示一個行進波沿著正 $x$ 的方向前進。達南貝解為一瞬態解(Transient Solution)，由於非頻散波在傳播時，波形保持不變，故穩態解和瞬態解其實是一樣的，我們可將(2.5)式的穩態解逆轉換後得到如(2.15)式的達南貝解，證明了此一現象。然而，為了方便同時分析頻散的撓曲波(2.3節)或材料有阻尼的軸向波、扭轉波(2.2節)，我們必須採用頻譜分析來求穩態波解，而捨棄了在時間域下直接求解。

## 2.2 扭轉波的傳播

和2.1節相同，假設桿件有均勻斷面，且具有阻尼係數為的阻尼力。則扭轉角 $\theta$ 的運動方程式可寫為：

$$GI_x \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} - \zeta_\theta \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} = \rho I_x \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.16)$$

其中， $G$ 為剪力模數， $I_x$ 為桿件之極慣性矩。在此假設扭轉發生時，斷面上的點並沒有縱向位移，即沒有翹曲(Warping)現象的發生。則通過斷面的扭矩(Torque) $T$ 則為：

$$T = GI_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.17)$$

而桿件在斷面最外層的剪應變則為：

$$\gamma_{x\theta} = c \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.18)$$

其中 $c$ 為中心軸到最外層的距離。利用對(2.16)式取傅立業轉換，可求得 $\theta$ 的穩態波解為：

$$\hat{\theta}(x,\omega) = a_2(\omega)e^{ik_2x} + d_2(\omega)e^{-ik_2x} \quad (2.19)$$

其中，



$$k_2 = \sqrt{\omega^2 \frac{\rho}{G} - i\omega \frac{\zeta_\theta}{GI_x}} \quad (2.20)$$

為扭轉波之波數。  $a_2$  和  $d_2$  為未定常數，  $a_2$  表示穩態波的波幅，朝向負的  $x$  方向傳播，  $d_2$  表示另一穩態波的波幅，沿正  $x$  方向傳播。扭轉力矩的穩態解可由(2.17)式得到：

$$\hat{T}(x, \omega) = GI_x ik_2 [a_2(\omega)e^{ik_2 x} - d_2(\omega)e^{-ik_2 x}] \quad (2.21)$$

而扭轉波所產生的剪應變由(2.18)式可得：

$$\hat{\gamma}_{x\theta}(x, \omega) = cik_2 [a_2(\omega)e^{ik_2 x} - d_2(\omega)e^{-ik_2 x}] \quad (2.22)$$

假設在理想狀態下，材料不具有阻尼力( $\zeta_\theta = 0$ )，則(2.20)式可改寫為：

$$k_2 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} \quad (2.23)$$

根據(2.7)和(2.23)式則可得到理想狀態下之扭轉波波速  $c_2$  為：

$$c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (2.24)$$

如同軸向波的情形，扭轉波的波速亦和頻率無關，只和材料性質( $G$ 、 $\rho$ )有關，故理想狀態下的扭轉波為一頻散波(Dispersive Wave)，其運動方程式可由(2.16)、(2.24)推得為：

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.25)$$

理想狀態下的桿件的扭轉角、扭矩和扭轉剪應變則可將(2.23)式分別代入(2.19)、(2.21)和(2.22)式求得之。

如同(2.1)節的軸向波，扭轉波也有達南貝的瞬態解，不再贅述。

## 2.3 撓曲波的傳播

在 2.1 節中，我們提到頻散波(Dispersive Wave)和非頻散波(Nondispersive Wave)之間的差異。理想狀態下的軸向波和扭轉波為非頻散波，其運動方程式在時間域下具有達南貝的瞬態解(D'Alembert Solution)，然而，理想狀態下之撓曲剪力波為頻散波，其運動方程式在時間域下不具有達南貝解，而必須利用傅立葉轉換先將

方程式轉到頻率域下來求解，之後再用傅立業逆轉換可求得時間域下的解。這也是為何我們要採用頻譜分析的方法來分析整個問題，而不直接在時間域下求解，因為撓曲波在時間域下難以直接求解偏微分方程。

本節就兩種不同的理論模型，白努利樑(Bernoulli-Euler Beam)和提摩盛科樑(Timoshenko Beam)來討論撓曲剪力波在桿件中的傳播情形，比較其高頻波和低頻波波數之差異。首先，考慮一樑和其內部的一微小段受力情形如下(圖 2.2)：

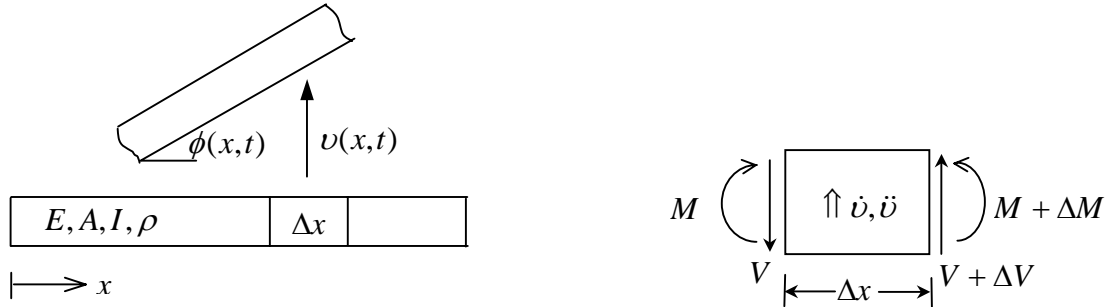


圖 2.2：樑中微小段元素的受力情形

若我們先不考慮材料阻尼力，則根據垂直向( $y$  軸向)力平衡：

$$-V + (V + \Delta V) = \rho A \Delta x \ddot{v}$$

上式經整理後可得：

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = \rho A \ddot{v}$$

或

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.26)$$

根據  $z$  軸向的彎矩平衡：

$$-M + (M + \Delta M) + V \Delta x = \rho I_z \Delta x \ddot{\phi}$$

其中， $\rho I_z \Delta x \ddot{\phi}$  為慣性力矩， $I_z$  為桿件  $z$  軸向之面積慣性矩， $\phi$  為桿件之撓曲角。

上式經整理後可得：

$$\frac{\Delta M}{\Delta x} + V = \rho I_z \ddot{\phi}$$

或

$$\frac{\partial M}{\partial x} + V = \rho I_z \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2.27)$$

我們首先推導白努利樑的撓曲波運動方程式，並假設材料阻尼力不存在，其理論的基本假設為：第一，平面截面受力變形後依然為平面；第二，樑元素與中立面

(Neutral Surface)垂直者，變形後依然與中立面垂直，意即由剪力所引起的垂直向變形可忽略；第三，樑元素之轉動慣量可被忽略；第四，樑之材料特性符合虎克定律，故可得彎矩和撓度有以下之關係：

$$M = EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.28)$$

將(2.28)式代入(2.27)式且忽略轉動慣量後可得：

$$V = -EI_z \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \quad (2.29)$$

將(2.29)式代入(2.26)式可得：

$$EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (2.30)$$

為白努利樑之撓曲波運動方程式。(2.30)式不具有達南貝解，故我們取其傅立業轉換後為：

$$EI_z \frac{d^4 \hat{v}}{dx^4} - \omega^2 \rho A \hat{v} = 0 \quad (2.31)$$

(2.31)式的長為分方程式具有通解為：

$$v(x, \omega) = a_3(\omega)e^{ik_3x} + d_3(\omega)e^{-ik_3x} + a_4(\omega)e^{ik_4x} + d_4(\omega)e^{-ik_4x} \quad (2.32)$$

其中，

$$k_3 = \sqrt{\omega} \left[ \frac{\rho A}{EI_z} \right]^{1/4}, \quad k_4 = -i\sqrt{\omega} \left[ \frac{\rho A}{EI_z} \right]^{1/4}$$

我們由(2.32)式可觀查出，此一撓曲波具有  $k_3$ 、 $k_4$  兩種模態。在任何頻率之下， $k_3$  皆為正實數， $k_4$  則為負虛數，由此可知，(2.32)式的前兩項為傳波項(Wave Solution)，後兩項則不傳波，而為一空間阻尼(Spatially Damped Vibrations)或稱為響應項(Ringing Terms)，隨著傳播距離的增長，其使得撓曲波逐漸地衰減(Attenuate)。

由(2.7)式和(2.32)可得：

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\omega} \left[ \frac{EI}{\rho A} \right]^{1/4} \quad (2.33)$$

由上式我們可知撓曲波波速與頻率有關，為一頻散波。(2.33)式的波速  $c$  稱為相位速度(Phase Speed)，它代表一特定頻率  $\omega$  的波行進的速度。而我們定義：

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = 2\sqrt{\omega} \left[ \frac{EI}{\rho A} \right]^{1/4} = 2c \quad (2.34)$$

其中，我們稱  $c_g$  為群速度(Group Speed)，它代表所有頻率的波疊加後整體的行進速度。圖 2.3 為此兩種波速與頻率的關係圖，如圖，當頻率很高時，兩種波速都會趨近於無窮大，此為白努利樑理論的基本假設誤差所導致的不合理現象，以下，我們將以提摩盛科樑理論來修正此一現象。

提摩盛科樑理論的基本假設為：第一，平面截面受力變形後依然為平面；第二，樑元素與中立面(Neutral Surface)垂直者，變形後與中立面不再垂直，意即由剪力所引起的垂直向變形不可忽略；第三，除了線性慣量外，兼考慮樑元素的轉動慣量；第四，樑之材料特性符合虎克定律。根據以上之假設，我們可知，樑的垂直向撓度  $v$  由彎矩和剪力同時作用所造成，即：

$$v = v_b + v_s \quad (2.35)$$

其中  $v_b$  表示由彎矩所造成的垂直向撓度， $v_s$  表示由剪力所造成的垂直向撓度。且由虎克定律，可將剪力和彎矩表為：

$$V = \kappa GA \frac{\partial v_s}{\partial x} \quad M = EI_z \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} \quad (2.36)$$

其中， $\kappa$  為剪力係數。而撓曲角  $\phi$  則為：

$$\phi = \frac{\partial v_b}{\partial x} \quad (2.37)$$

將(2.35)、(2.36)和(2.37)式代入(2.26)、(2.27)式中，整理後可得：

$$\begin{cases} \kappa GA \frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 (v_s + v_b)}{\partial t^2} \\ EI_z \frac{\partial^3 v_b}{\partial x^3} + \kappa GA \frac{\partial v_s}{\partial x} = \rho I_z \frac{\partial^3 v_b}{\partial x \partial t^2} \end{cases} \quad (2.38)$$

(2.38)式即為提摩盛科樑之撓曲波運動方程式，將其取傅立業轉換後可得：

$$\begin{cases} \kappa GA \frac{d^2 \hat{v}_s}{dx^2} = -\rho A \omega^2 (\hat{v}_s + \hat{v}_b) \\ EI_z \frac{d^3 \hat{v}_b}{dx^3} + \kappa GA \frac{d\hat{v}_s}{dx} = -\rho I_z \omega^2 \frac{d\hat{v}_b}{dx} \end{cases} \quad (2.39)$$

求解上式的常微分聯立方程式，我們可先假設：

$$\begin{cases} \hat{v}_b(x, \omega) = H(\omega) e^{ikx} \\ \hat{v}_s(x, \omega) = L(\omega) e^{ikx} \end{cases} \quad (2.40)$$

將(2.40)式代入(2.39)式中，整理後可以矩陣形式表為：

$$\begin{bmatrix} \rho\omega^2 & \rho\omega^2 - \kappa Gk^2 \\ \rho I_z \omega^2 - EI_z k^2 & \kappa GA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H(\omega) \\ L(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

上式的  $H(\omega)$ 、 $L(\omega)$  有非零解的條件為：

$$\begin{vmatrix} \rho\omega^2 & \rho\omega^2 - \kappa Gk^2 \\ \rho I_z \omega^2 - EI_z k^2 & \kappa GA \end{vmatrix} = 0$$

上式展開整理後可得：

$$k^4 - \rho\omega^2 \left( \frac{1}{\kappa G} + \frac{1}{E} \right) k^2 + \rho^2 \omega^4 \left( \frac{1}{E\kappa G} - \frac{A}{EI\rho\omega^2} \right) = 0 \quad (2.42)$$

(2.42)式為運動方程式(2.39)的特徵方程式，其具有四個根為：

$$k = \pm \frac{\omega \sqrt{1 + \eta \pm \sqrt{(1 + \eta)^2 - 4\left(\eta - \frac{c_1^2}{R_z^2 \omega^2}\right)}}}{\sqrt{2}c_1} \quad (2.43)$$

其中，

$$\eta = \frac{E}{\kappa G}$$

$c_1$  為軸向波波速， $R_z$  則為迴轉半徑(Radius of Gyration)，即：

$$c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad R_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

由(2.41)式我們可以得到：

$$\alpha(\omega) = \frac{L(\omega)}{H(\omega)} = \frac{EI_z k^2 - \rho I_z \omega^2}{\kappa GA} = \frac{R_z^2}{\kappa c_1^2} (c_1^2 k^2 - \omega^2) \quad (2.44)$$

由(2.40)、(2.43)和(2.44)式我們可以得到：

$$\begin{aligned} \hat{v}_b(x, \omega) &= \sum_{j=3}^4 H_j(\omega) e^{ik_j x} \\ \hat{v}_s(x, \omega) &= \sum_{j=3}^4 \alpha_j(\omega) H_j(\omega) e^{ik_j x} \end{aligned} \quad (2.45)$$

由於  $k$  之解可以分為兩組，而每組中的兩個  $k$  均只差一個正負號，且所對應的  $\alpha$  相等，故(2.45)式可寫為：

$$\begin{aligned}\hat{v}_b(x, \omega) &= a_3 e^{ik_3 x} + d_3 e^{-ik_3 x} + a_4 e^{ik_4 x} + d_4 e^{-ik_4 x} \\ \hat{v}_s(x, \omega) &= \alpha_3 a_3 e^{ik_3 x} + \alpha_3 d_3 e^{-ik_3 x} + \alpha_4 a_4 e^{ik_4 x} + \alpha_4 d_4 e^{-ik_4 x}\end{aligned}\quad (2.46)$$

其中，

$$\alpha_j = R_z^2 \frac{c_1^2 k_j^2 - \omega^2}{\kappa c_2^2}, \quad j = 3, 4 \quad (2.47)$$

$c_2$  為扭轉剪力波波速。而  $k_3$  在任何頻率下都是正的實數：

$$k_3 = \frac{\omega \sqrt{1 + \eta + \sqrt{(1 + \eta)^2 - 4(\eta - \frac{c_1^2}{R_z^2 \omega^2})}}}{\sqrt{2} c_1} \quad (2.48)$$

$k_4$  則在超過一個截止頻率(Cut-Off Frequency)  $\omega_c$  時為正的實數， $\omega_c$  以下則為負的虛數：

$$\begin{aligned}k_4 &= \frac{\omega \sqrt{1 + \eta - \sqrt{(1 + \eta)^2 - 4(\eta - \frac{c_1^2}{R_z^2 \omega^2})}}}{\sqrt{2} c_1}, \quad \text{當 } \omega > \omega_c \\ k_4 &= \frac{-\omega \sqrt{1 + \eta - \sqrt{(1 + \eta)^2 - 4(\eta - \frac{c_1^2}{R_z^2 \omega^2})}}}{\sqrt{2} c_1}, \quad \text{當 } \omega < \omega_c\end{aligned}\quad (2.49)$$

其中，

$$\omega_c = \frac{c_1}{R_z \sqrt{\eta}}$$

故我們可得橫向位移  $v$  為：

$$\begin{aligned}\hat{v}(x, \omega) &= \hat{v}_b(x, \omega) + \hat{v}_s(x, \omega) \\ &= (1 + \alpha_3)(a_3 e^{ik_3 x} + d_3 e^{-ik_3 x}) + (1 + \alpha_4)(a_4 e^{ik_4 x} + d_4 e^{-ik_4 x})\end{aligned}\quad (2.50)$$

和白努利樑的情形類似，(2.50)式的前兩項無論在任何頻率下皆為傳播項，後兩項在超過截止頻率後為傳波項，低於截止頻率時，則為一空間阻尼(Spatially Damped Vibrations)。而由(2.7)及(2.34)式亦可求得提摩盛科樑的撓曲波相位波速(Phase Speed)和群速度(Group Speed)。圖 2.4 中，繪出了提摩盛科樑理論的  $k - \omega$  關係圖，圖 2.5 則繪出  $c/c_1 - \omega$  和  $c_g/c_1 - \omega$  的關係圖。很明顯地，提摩盛科樑的撓曲波亦為

一頻散波。

當我們求得橫向位移  $v_b$ 、 $v_s$  後，將其代入(2.36)式既可求得剪力和彎矩為：

$$\hat{V}(x, \omega) = i\kappa AG[k_3\alpha_3(a_3e^{ik_3x} - d_3e^{-ik_3x}) + k_4\alpha_4(a_4e^{ik_4x} - d_4e^{-ik_4x})] \quad (2.51)$$

$$\hat{M}(x, \omega) = -EI_z[k_3^2(a_3e^{ik_3x} + d_3e^{-ik_3x}) + k_4^2(a_4e^{ik_4x} + d_4e^{-ik_4x})] \quad (2.52)$$

將其代入(2.37)可求得撓曲角為：

$$\hat{\phi}(x, \omega) = ik_3(a_3e^{ik_3x} - d_3e^{-ik_3x}) + ik_4(a_4e^{ik_4x} - d_4e^{-ik_4x}) \quad (2.53)$$

而樑在正  $y$  面所量到，因撓曲波而產生的軸向應變  $\hat{\epsilon}_{xu}$  為：

$$\hat{\epsilon}_{xu}(x, \omega) = -c_y \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} = c_y [k_3^2(a_3e^{ik_3x} + d_3e^{-ik_3x}) + k_4^2(a_4e^{ik_4x} + d_4e^{-ik_4x})] \quad (2.54)$$

其中， $c_y$  表示在局部座標下中立面至量測面的距離。

對於截面另一個主軸  $z$  方向，我們可以利用相同的步驟，求得  $z$  方向的橫向位移  $\hat{w}(x, \omega)$  為：

$$\hat{w}(x, \omega) = (1 + \alpha_5)(a_5e^{ik_5x} + d_5e^{-ik_5x}) + (1 + \alpha_6)(a_6e^{ik_6x} + d_6e^{-ik_6x}) \quad (2.55)$$

其中，

$$\alpha_j = R_z^2 \frac{c_1^2 k_j^2 - \omega^2}{\kappa c_2^2}, \quad j = 5, 6 \quad (2.56)$$

$k_5$  在任何頻率下都是正的實數：

$$k_5 = \frac{\omega \sqrt{1 + \eta + \sqrt{(1 + \eta)^2 - 4(\eta - \frac{c_1^2}{R_z^2 \omega^2})}}}{\sqrt{2}c_1} \quad (2.57)$$

$k_6$  則在超過一個截止頻率(Cut-Off Frequency)  $\omega_c$  時為正的實數， $\omega_c$  以下則為負的虛數：

$$k_6 = \frac{\omega \sqrt{1 + \eta - \sqrt{(1 + \eta)^2 - 4(\eta - \frac{c_1^2}{R_z^2 \omega^2})}}}{\sqrt{2}c_1}, \quad \text{當 } \omega > \omega_c$$

$$k_6 = \frac{-\omega \sqrt{1+\eta} - \sqrt{(1+\eta)^2 - 4\left(\eta - \frac{c_1^2}{R_z^2 \omega^2}\right)}}{\sqrt{2}c_1}, \text{ 當 } \omega < \omega_c \quad (2.58)$$

而對應的剪力  $\hat{W}$  和彎矩  $\hat{N}$  則為：

$$\hat{W}(x, \omega) = i\kappa AG[k_5 \alpha_5 (a_5 e^{ik_5 x} - d_5 e^{-ik_5 x}) + k_6 \alpha_6 (a_6 e^{ik_6 x} - d_6 e^{-ik_6 x})] \quad (2.59)$$

$$\hat{N}(x, \omega) = -EI_z [k_5^2 (a_5 e^{ik_5 x} + d_5 e^{-ik_5 x}) + k_6^2 (a_6 e^{ik_6 x} + d_6 e^{-ik_6 x})] \quad (2.60)$$

其對應的撓曲角  $\hat{\psi}$  為：

$$\hat{\psi}(x, \omega) = ik_5 (a_5 e^{ik_5 x} - d_5 e^{-ik_5 x}) + ik_6 (a_6 e^{ik_6 x} - d_6 e^{-ik_6 x}) \quad (2.61)$$

而樑在正  $z$  面所量到，因撓曲波而產生的軸向應變  $\hat{\varepsilon}_{xw}$  為：

$$\hat{\varepsilon}_{xw}(x, \omega) = -c_z \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} = c_z [k_5^2 (a_5 e^{ik_5 x} + d_5 e^{-ik_5 x}) + k_6^2 (a_6 e^{ik_6 x} + d_6 e^{-ik_6 x})] \quad (2.62)$$

其中， $c_z$  表示在局部座標下中立面至量測面的距離。

以上的推導，為不考慮材料阻尼的情形。假若我們引進速度相依型的材料阻尼參數至提摩盛科樑理論中，則其樑元素的垂直向力平衡(2.26)式可改寫為：

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \zeta_v \frac{\partial v}{\partial t} = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.63)$$

而彎矩平衡(2.27)式可改寫為：

$$\frac{\partial M}{\partial x} + V - \zeta_\phi \frac{\partial \phi}{\partial t} = \rho I_z \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2.64)$$

其中， $\zeta_v$  表示樑元素在垂直向運動的阻尼係數， $\zeta_\phi$  則為樑元素在撓曲轉動的阻尼係數。將(2.35)式、(2.36)式及(2.37)式代入(2.63)式和(2.64)式可得：

$$\begin{cases} \kappa GA \frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2} - \zeta_v \frac{\partial (v_b + v_s)}{\partial t} = \rho A \frac{\partial^2 (v_s + v_b)}{\partial t^2} \\ EI_z \frac{\partial^3 v_b}{\partial x^3} + \kappa GA \frac{\partial v_s}{\partial x} - \zeta_\phi \frac{\partial^2 v_b}{\partial x \partial t} = \rho I_z \frac{\partial^3 v_b}{\partial x \partial t^2} \end{cases} \quad (2.65)$$

將上式取傅立葉轉換後可得：

$$\begin{cases} \kappa GA \frac{d^2 \hat{v}_s}{dx^2} - i\omega \zeta_v (\hat{v}_s + \hat{v}_b) = -\rho A \omega^2 (\hat{v}_s + \hat{v}_b) \\ EI_z \frac{d^3 \hat{v}_b}{dx^3} + \kappa GA \frac{d\hat{v}_s}{dx} - i\omega \zeta_\phi \frac{d\hat{v}_b}{dx} = -\rho I_z \omega^2 \frac{d\hat{v}_b}{dx} \end{cases} \quad (2.66)$$



求解上式聯立常微分方程式，我們一樣地可以假設：

$$\begin{cases} \hat{v}_b(x, \omega) = H(\omega)e^{ikx} \\ \hat{v}_s(x, \omega) = L(\omega)e^{ikx} \end{cases}$$

將上式代入(2.66)式，整理後可以矩陣形式表示為：

$$\begin{bmatrix} \rho A \omega^2 - i\omega\zeta_v & \rho A \omega^2 - \kappa G A k^2 - i\omega\zeta_v \\ \rho I_z \omega^2 - EI_z k^2 - i\omega\zeta_\phi & \kappa G A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H(\omega) \\ L(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

上式的  $H(\omega)$ 、 $L(\omega)$  有非零解的條件為：

$$\begin{vmatrix} \rho A \omega^2 - i\omega\zeta_v & \rho \omega^2 - \kappa G k^2 - i\omega\zeta_v \\ \rho I_z \omega^2 - EI_z k^2 - i\omega\zeta_\phi & \kappa G A \end{vmatrix} = 0$$

將上式展開化簡後可得特徵方程式為：

$$k^4 - \frac{\omega^2}{c_1^2} B k^2 + \frac{\omega^4}{c_1^4} D = 0 \quad (2.68)$$

其中，

$$B = 1 + \eta - \frac{i}{\rho \omega I_z} (R_z^2 \eta \zeta_v + \zeta_\phi)$$

$$D = \eta - \frac{c_1^2}{R_z^2 \omega^2} + \frac{i}{\rho \omega I_z} \left( \frac{E \eta_v}{\rho \omega^2} - \eta \zeta_\phi \right) - \frac{\eta \zeta_v}{\rho \omega A} \left( i + \frac{\zeta_\phi}{\rho \omega I_z} \right)$$

(2.68)式具有四個根為：

$$k = \pm \frac{\omega \sqrt{B \pm \sqrt{B^2 - 4D}}}{\sqrt{2} c_1}$$

且由(2.67)式可得：

$$\alpha(\omega) = \frac{L(\omega)}{H(\omega)} = \frac{EI_z k^2 - \rho I_z \omega^2 + i\omega\zeta_\phi}{\kappa G A} = \frac{R_z^2}{\kappa c_1^2} (c_1^2 k^2 - \omega^2) + \frac{i\omega\zeta_\phi}{\kappa G A}$$

如同無阻尼時的情況一樣， $k$  之解可分為兩組，每組中的兩個  $k$  只差一個正負號，且所對應的  $\alpha$  相等。故我們一樣可將其分為  $k_3$ 、 $k_4$  兩組。 $k_3$ 、 $k_4$  無論在任何一頻率下皆為複數，其中包含了一正的實數，和一負的虛數。正實數代表傳波項，負虛數代表阻尼項。圖 2.6 繪出了有阻尼情況下， $k_3$ 、 $k_4$  與  $\omega$  的關係圖，其中，阻尼係數取  $\zeta_v = 0.1$ 、 $\zeta_\phi = 0.1$ ，這只是為了方便我們觀察比較無阻和有阻尼情況下取線的變化情形。一般而言，材料的阻尼係數非常小，故圖 2.6 和圖 2.4 一般差異不

大。

$$k_3 = \frac{\omega\sqrt{B + \sqrt{B^2 - 4D}}}{\sqrt{2}c_1} \quad (2.69)$$

$$k_4 = \frac{\omega\sqrt{B - \sqrt{B^2 - 4D}}}{\sqrt{2}c_1} \quad (2.70)$$

之後，我們可求得  $k_3$ 、 $k_4$  所對應的  $\alpha_3$ 、 $\alpha_4$  為：

$$\alpha_j = R_z^2 \frac{c_1^2 k_j^2 - \omega^2}{\kappa c_2^2} + \frac{i\omega\zeta_\phi}{\kappa GA}, \quad j = 3, 4 \quad (2.71)$$

將求得的  $k_3$ 、 $k_4$ 、 $\alpha_3$ 、 $\alpha_4$  代入(2.50)~(2.54)式，同樣地可求得材料有阻尼時，桿件的撓度、撓角、剪力、彎矩、應變等物理量。而截面的另一個方向( $z$  軸向)的情況類似，故不再贅述。

## 2.4 剛架節點和桿件的座標

對於一三維剛架(Frame)，有許多的桿件(Member)在節點(Joint)結合，我們以數字來標明這些桿件和節點。例如，一個三維的剛架，如圖 2.7 所示，其擁有  $n$  個節點和  $m$  根桿件。則每一個節點我們以 1 到  $n$  的其中一個數字來代表它，而桿件則用兩個字母來標示，如 12、21、23...。物理量和節點或桿件有關的，則將其放在上標。例如， $\mathbf{f}^J$  表示作用在  $J$  點上的一外力向量，而  $u^{JK}$  表示桿件  $JK$  的軸向變形。另外，我們用  $n^J$  表示  $J$  點的鄰近節點數， $m^J$  表示連接於  $J$  點的桿件數，當然  $n^J = m^J$ 。則我們可以找到以下之關係式：

$$\sum_{J=1}^n m^J = 2m \quad (2.72)$$

其中， $J = 1, 2, \dots, n$ ， $K = 1, 2, \dots, n$ 。

本文之總體座標與局部座標均定為右旋系統，如圖 2.8，所有節點的位置以一總體座標  $(X, Y, Z)$  表示，例如  $(X^J, Y^J, Z^J)$  表示節點  $J$  在總體座標下的位置。另外，對每一根桿件  $JK$ ，我們引入兩組局部座標  $(x, y, z)^{JK}$  和  $(x, y, z)^{KJ}$ ，其原點分別在  $J$  點和  $K$  點，軸  $x^{JK}$  表示原點在節點  $J$ ，沿著桿件  $JK$  的中心線，以朝向節點  $K$  為正的軸。我們選定  $y^{JK}$  和  $y^{KJ}$  方向相反，由於  $x$  軸和  $y$  軸的右旋關係  $z^{JK}$  與  $z^{KJ}$  同向。如  $l^{JK}$  表示  $JK$  的長度，則兩個局部座標  $(x, y, z)^{JK}$  和  $(x, y, z)^{KJ}$  之關係為：

$$x^{JK} = l^{JK} - x^{KJ}, y^{JK} = -y^{KJ}, z^{JK} = z^{KJ} \quad (2.73)$$

由於下一節我們在討論力平衡方程式和位移諧和方程式時，必須將向量在局部座標下的分量轉換成在總體座標下的分量，所以在此我們先定義兩組座標系統的幾何關係。如圖 2.8，假設空間中有一桿件  $JK$ ，則如前所述我們可以確定局部座標的正  $x^{JK}$  軸即為沿著桿件  $JK$  的中心線，朝向節點  $K$  的方向。然而局部座標下的  $y^{JK}$ 、 $z^{JK}$  軸位於垂直  $x^{JK}$  軸的法面(Normal Surface)下具有無限多種組合，因此我們必須人為地定義出其中一組  $y^{JK}$ 、 $z^{JK}$ ，以作為運算上的依據。首先，將總體座標下的  $Z$  軸對局部座標下的  $x^{JK}$  軸取外積，所得到的方向定義為局部座標下的  $y^{JK}$  軸，再將  $x^{JK}$  軸對  $y^{JK}$  軸取外積即為局部座標下的  $z^{JK}$  軸。其運算的過程為：

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{I}_Z \times \mathbf{i}_x \\ \mathbf{i}_y &= \frac{\bar{\mathbf{y}}}{|\bar{\mathbf{y}}|} \\ \mathbf{i}_z &= \mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_y \end{aligned} \quad (2.74)$$

其中， $\mathbf{I}_X$ 、 $\mathbf{I}_Y$ 、 $\mathbf{I}_Z$  表示總體座標下  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  軸的單位向量， $\mathbf{i}_x$ 、 $\mathbf{i}_y$ 、 $\mathbf{i}_z$  表示局部座標下  $x^{JK}$ 、 $y^{JK}$ 、 $z^{JK}$  軸的單位向量。

特殊情況下，若  $x^{JK}$  軸與  $Z$  軸平行，則(2.74)式中  $\mathbf{I}_Z \times \mathbf{i}_x = \mathbf{0}$ ，而無法定義出  $y^{JK}$ 、 $z^{JK}$  軸的方向，此時，我們改採將局部座標下的  $x^{JK}$  軸對總體座標下的  $X$  軸取外積，所得到的方向定義為局部座標下的  $y^{JK}$  軸，再將  $x^{JK}$  軸對  $y^{JK}$  軸取外積即為局部座標下的  $z^{JK}$  軸。其運算的過程為：

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{i}_x \times \mathbf{I}_X \\ \mathbf{i}_y &= \frac{\bar{\mathbf{y}}}{|\bar{\mathbf{y}}|} \\ \mathbf{i}_z &= \mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_y \end{aligned} \quad (2.75)$$

由以上的定義可以得到空間中任一桿件  $JK$  的一組局部座標系統  $(x, y, z)^{JK}$ ，而桿件另一組座標系統  $(x, y, z)^{KJ}$  也可以同樣方法運算而得。此外，由於我們所求解的力、變位在空間中有六個自由度，包括三個軸向的位移、內力和三個軸向的轉角、內力矩，因此我們由局部座標和總體座標的幾何關係，建立起桿件  $JK$  的轉換矩陣(Transform Matrix)[25]為：

$$\mathbf{T}^{JK} = \begin{bmatrix} \gamma_{xX} & \gamma_{xY} & \gamma_{xZ} & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{yX} & \gamma_{yY} & \gamma_{yZ} & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{zX} & \gamma_{zY} & \gamma_{zZ} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{xX} & \gamma_{xY} & \gamma_{xZ} \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{yX} & \gamma_{yY} & \gamma_{yZ} \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{zX} & \gamma_{zY} & \gamma_{zZ} \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.76)$$

其中,  $\gamma_{ij} = \cos\theta_{ij}$  ( $i = x, y, z$   $J = X, Y, Z$ ),  $\theta$  代表局部座標軸  $i$  和總體座標軸  $J$  的夾角。 $\gamma_{ij}$  可利用向量的內積來計算求得:

$$\gamma_{ij} = \cos\theta_{ij} = \frac{\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{I}_J}{|\mathbf{i}_i| |\mathbf{I}_J|} \quad (2.77)$$

### 第三章 彈性波在剛架節點之散射分析

本章將進一步探討幾種彈性波在節點的散射情形。首先，先根據第二章所推導之各種彈性波的波幅與力、變位之間的關係式來表示局部座標下的力與變位，之後再利用轉換矩陣將內力轉到整體座標後與外力、慣性力平衡，將桿件變位轉到整體座標後，同一節點的各桿變位相等。如此即可建立節點之力平衡與位移諧合方程式，再藉由此力平衡與位移諧合方程式以建立不同邊界條件下節點的散射矩陣和波源行向量。

#### 3.1 節點之力平衡

在上一章討論到桿件內三種應力波的傳播，各桿件的位移及內應力均為局部座標下的分量，欲以這些物理量來建立平衡方程式和諧和方程式，則必須將這些局部座標下的分量，利用轉換矩陣，轉換成總體座標下的分量。首先，假設節點  $J$  在總體座標下受到外力為  $\mathbf{f}^J(t)$ ，節點之變位為  $\mathbf{U}^J(t)$ ，其定義為：

$$\mathbf{f}^J(t) = \begin{Bmatrix} f_x^J(t) \\ f_y^J(t) \\ f_z^J(t) \\ m_x^J(t) \\ m_y^J(t) \\ m_z^J(t) \end{Bmatrix} \quad \mathbf{U}^J(t) = \begin{Bmatrix} U_x^J(t) \\ U_y^J(t) \\ U_z^J(t) \\ \Theta_x^J(t) \\ \Theta_y^J(t) \\ \Theta_z^J(t) \end{Bmatrix}$$

若有  $m^J$  根桿件連於此一節點  $J$  上，其中任意一根桿件  $JK$  在局部座標的內力、位移向量分別為  $\mathbf{F}^{JK}(x^{JK}, t)$ 、 $\mathbf{u}^{JK}(x^{JK}, t)$ ，則：

$$\mathbf{F}^{JK}(x^{JK}, t) = \begin{Bmatrix} F^{JK}(x^{JK}, t) \\ V^{JK}(x^{JK}, t) \\ W^{JK}(x^{JK}, t) \\ T^{JK}(x^{JK}, t) \\ N^{JK}(x^{JK}, t) \\ M^{JK}(x^{JK}, t) \end{Bmatrix} \quad \mathbf{u}^{JK}(x^{JK}, t) = \begin{Bmatrix} u^{JK}(x^{JK}, t) \\ v^{JK}(x^{JK}, t) \\ w^{JK}(x^{JK}, t) \\ \theta^{JK}(x^{JK}, t) \\ \psi^{JK}(x^{JK}, t) \\ \phi^{JK}(x^{JK}, t) \end{Bmatrix}$$

對於節點  $J$  而言，連接於節點  $J$  的所有桿件在  $J$  點( $x^{JK} = 0$ )的內力和必須等於作用於節點  $J$  的外力，此即為節點  $J$  的動態力平衡方程式，可以寫為：

$$\sum_{K=1}^{m^J} \mathbf{T}^{JK} \mathbf{F}^{JK}(0,t) + \mathbf{f}^J(t) - \mathbf{K}^J \mathbf{U}^J(t) = \Phi^J \ddot{\mathbf{U}}^J(t) \quad (3.1)$$

其中， $\Phi^J$  為節點  $J$  的質量及轉動慣量分配矩陣：

$$\Phi^J = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^J & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}^J \end{bmatrix}$$

其中， $\boldsymbol{\mu}^J$  為節點  $J$  的質量矩陣，為一  $3 \times 3$  對角矩陣。 $\mathbf{I}^J$  為節點  $J$  的轉動慣量矩陣，為一二階對稱張量，具有六個獨立分量。即：

$$\boldsymbol{\mu}^J = \begin{bmatrix} \mu^J & 0 & 0 \\ 0 & \mu^J & 0 \\ 0 & 0 & \mu^J \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}^J = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{yx} & I_{zx} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{zy} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$\mu^J$  為節點  $J$  的質量。 $\mathbf{K}^J$  為節點  $J$  所連接的彈簧支承(Spring Support)之勁度分配矩陣：

$$\mathbf{K}^J = \begin{bmatrix} k_u^J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_v^J & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_w^J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_\theta^J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_\psi^J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_\phi^J \end{bmatrix}$$

其中， $k_u^J$  到  $k_\phi^J$  為對應  $J$  點各個自由度的彈簧勁度。當彈簧勁度趨近於無窮大時，代表  $J$  點在此一自由度方向有一剛性支承(Rigid Support)。例如， $J$  點若為鉸接支承(Hinge Support)，則  $k_\theta^J \rightarrow \infty, k_\psi^J \rightarrow \infty, k_\phi^J \rightarrow \infty$ 。若節點不具有彈簧支承時， $\mathbf{K}^J$  為一零矩陣。一般實際結構物，其支承處大多不是完全剛性，而是具有柔度(Flexibility)的。例如，橋樑版在置於兩端支呈處，其接觸的地方都會有橡膠墊以作為局部的緩衝，若我們將其視為完全剛性支承來分析，則其真實的動態反應會比分析的結果來得大，若視其為彈簧支承來計算則較接近於真實的情況。

在一般土木結構中，節點之重量與轉動慣量遠較桿件的為小，而節點的線性和轉動加速度均不大，只有在太空結構中，節點之重量遠較桿件為大，故此慣性項不能隨意略去。對於空構架或樓板質量相對很小時，可忽略節點的質量及轉動慣量，則(3.1)式的慣性項可略去而改寫為：

$$\sum_{K=1}^{m^J} \mathbf{T}^{JK} \mathbf{F}^{JK}(0, t) + \mathbf{f}^J(t) - \mathbf{K}^J \mathbf{U}^J(t) = \mathbf{0}_{6 \times 1} \quad (3.2)$$

上式取傅立業轉換後為：

$$\sum_{K=1}^{m^J} \mathbf{T}^{JK} \hat{\mathbf{F}}^{JK}(0, \omega) + \hat{\mathbf{f}}^J(\omega) - \mathbf{K}^J \hat{\mathbf{U}}^J(\omega) = \mathbf{0}_{6 \times 1} \quad (3.3)$$

由(2.8)、(2.21)、(2.51)、(2.52)、(2.59)、(2.60)式可求得桿件內力與入射波、出射波波幅的關係為：

$$\hat{\mathbf{F}}(x^{JK}, \omega) = \mathbf{A}_f^{JK}(x^{JK}, \omega) \mathbf{a}^{JK}(\omega) + \mathbf{D}_f^{JK}(x^{JK}, \omega) \mathbf{d}^{JK}(\omega) \quad (3.4)$$

其中，

$$\mathbf{A}_f^{JK}(x^{JK}, \omega) = \begin{bmatrix} EAik_1 e^{ik_1 x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\kappa AGk_3 \alpha_3 e^{ik_3 x} & i\kappa AGk_4 \alpha_4 e^{ik_4 x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i\kappa AGk_5 \alpha_5 e^{ik_5 x} & i\kappa AGk_6 \alpha_6 e^{ik_6 x} \\ 0 & iGI_x k_2 e^{ik_2 x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_y k_5^2 e^{ik_5 x} & EI_y k_6^2 e^{ik_6 x} \\ 0 & 0 & -EI_z k_3^2 e^{ik_3 x} & -EI_z k_4^2 e^{ik_4 x} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_f^{JK}(x^{JK}, \omega) = \begin{bmatrix} -EAik_1 e^{-ik_1 x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\kappa AGk_3 \alpha_3 e^{-ik_3 x} & -i\kappa AGk_4 \alpha_4 e^{-ik_4 x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\kappa AGk_5 \alpha_5 e^{-ik_5 x} & -i\kappa AGk_6 \alpha_6 e^{-ik_6 x} \\ 0 & -iGI_x k_2 e^{-ik_2 x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_y k_5^2 e^{-ik_5 x} & EI_y k_6^2 e^{-ik_6 x} \\ 0 & 0 & -EI_z k_3^2 e^{-ik_3 x} & -EI_z k_4^2 e^{-ik_4 x} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩陣  $\mathbf{A}_f^{JK}$ 、 $\mathbf{D}_f^{JK}$  各稱為桿件  $JK$  的入射波內力波相矩陣和出射波內力波相矩陣

(Phase Matrix)，其觀念類似一動態的勁度矩陣。將(3.3)式代入(3.4)式可得：

$$\sum_{K=1}^{m^J} \mathbf{T}^{JK} [\mathbf{A}_f^{JK}(0, \omega) \mathbf{a}^{JK}(\omega) + \mathbf{D}_f^{JK}(0, \omega) \mathbf{d}^{JK}(\omega)] + \hat{\mathbf{f}}^J(\omega) - \mathbf{K}^J \hat{\mathbf{U}}^J(\omega) = \mathbf{0}_{6 \times 1} \quad (3.5)$$

(3.5)式包含六條平衡方程式，其中之未知數包括入射波波幅  $6m^J$  個及出射波波幅  $6m^J$  個，和節點  $J$  在總體座標下的位移和轉角 6 個，總數共  $12m^J + 6$  個。而對於所有交會於節點  $J$  之桿件，我們可將各桿件的入射波波幅向量  $\mathbf{a}^{JK}(\omega)$  與出射波波幅向量  $\mathbf{d}^{JK}(\omega)$  ( $K = 1, 2, \dots, m^J$ ) 組合成節點之入射波與出射波波幅向量，即令：

$$\mathbf{a}^J(\omega) = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^{J1}(\omega) \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{JK}(\omega) \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{Jm^J}(\omega) \end{Bmatrix} \quad \mathbf{d}^J(\omega) = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{J1}(\omega) \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{JK}(\omega) \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{Jm^J}(\omega) \end{Bmatrix}$$

上式中，每一根桿件的入射波波幅向量  $\mathbf{a}^{JK}$  和出射波波幅向量  $\mathbf{d}^{JK}$  都具有六個量：

$$\mathbf{a}^{JK}(\omega) = \begin{Bmatrix} a_1^{JK}(\omega) \\ a_2^{JK}(\omega) \\ a_3^{JK}(\omega) \\ a_4^{JK}(\omega) \\ a_5^{JK}(\omega) \\ a_6^{JK}(\omega) \end{Bmatrix} \quad \mathbf{d}^{JK}(\omega) = \begin{Bmatrix} d_1^{JK}(\omega) \\ d_2^{JK}(\omega) \\ d_3^{JK}(\omega) \\ d_4^{JK}(\omega) \\ d_5^{JK}(\omega) \\ d_6^{JK}(\omega) \end{Bmatrix}$$

則(3.5)式整理後可得節點力平衡之矩陣方程式為：

$$\mathbf{A}_1^J \mathbf{a}^J + \mathbf{D}_1^J \mathbf{d}^J + \hat{\mathbf{f}}^J - \mathbf{K}^J \hat{\mathbf{U}}^J = \mathbf{0}_{6 \times 1} \quad (3.6)$$

其中， $\mathbf{A}_1^J$ 、 $\mathbf{D}_1^J$  為  $6 \times 6m^J$  之矩陣：

$$\mathbf{A}_1^J = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{J1} \mathbf{A}_f^{J1}(0, \omega) & \cdots & \mathbf{T}^{JK} \mathbf{A}_f^{JK}(0, \omega) & \cdots & \mathbf{T}^{Jm^J} \mathbf{A}_f^{Jm^J}(0, \omega) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_1^J = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{J1} \mathbf{D}_f^{J1}(0, \omega) & \cdots & \mathbf{T}^{JK} \mathbf{D}_f^{JK}(0, \omega) & \cdots & \mathbf{T}^{Jm^J} \mathbf{D}_f^{Jm^J}(0, \omega) \end{bmatrix}$$

### 3.2 節點的位移諧合

桿件端點的位移量與角位移量，應和其連接的節點之運動量相同。因為我們將節點視為一質點，節點上所有點的位移，均可視為節點質量中心的運動。因此節點的變形量應和桿件端點的變形量相同，因此我們共可得到  $6m^J$  條位移諧合方程式為：

$$\mathbf{T}^{JK} \mathbf{u}^{JK}(0, t) = \mathbf{U}^J(t) \quad K = 1, 2, \dots, m^J \quad (3.7)$$

上式取傅立業轉換後可得：

$$\mathbf{T}^{JK} \hat{\mathbf{u}}^{JK}(0, \omega) = \hat{\mathbf{U}}^J(\omega) \quad (3.8)$$

由(2.5)、(2.19)、(2.50)、(2.53)、(2.55)、(2.16)式可求得桿件變形量與入射波、出射波波幅的關係為：

$$\hat{\mathbf{u}}(x^{JK}, \omega) = \mathbf{A}_u^{JK}(x^{JK}, \omega) \mathbf{a}^{JK}(\omega) + \mathbf{D}_u^{JK}(x^{JK}, \omega) \mathbf{d}^{JK}(\omega) \quad (3.9)$$



其中，

$$\mathbf{A}_u^{JK}(x^{JK}, \omega) = \begin{bmatrix} e^{ik_1x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\alpha_3)e^{ik_3x} & (1+\alpha_4)e^{ik_4x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\alpha_5)e^{ik_5x} & (1+\alpha_6)e^{ik_6x} \\ 0 & e^{ik_2x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -ik_5e^{ik_5x} & -ik_6e^{ik_6x} \\ 0 & 0 & ik_3e^{ik_3x} & ik_4e^{ik_4x} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_u^{JK}(x^{JK}, \omega) = \begin{bmatrix} e^{-ik_1x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\alpha_3)e^{-ik_3x} & (1+\alpha_4)e^{-ik_4x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\alpha_5)e^{-ik_5x} & (1+\alpha_6)e^{-ik_6x} \\ 0 & e^{-ik_2x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ik_5e^{-ik_5x} & ik_6e^{-ik_6x} \\ 0 & 0 & -ik_3e^{ik_3x} & -ik_4e^{ik_4x} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩陣  $\mathbf{A}_u^{JK}$ 、 $\mathbf{D}_u^{JK}$  各稱為桿件  $JK$  的入射波位移波相矩陣和出射波位移波相矩陣 (Phase Matrix) 將(3.9)式代入(3.8)式整理後,可得到節點位移諧合之矩陣方程式為:

$$\mathbf{A}_2^J \mathbf{a}^J + \mathbf{D}_2^J \mathbf{d}^J = \mathbf{U}_2^J \hat{\mathbf{U}}^J \quad (3.10)$$

其中,  $\mathbf{A}_2^J$ 、 $\mathbf{D}_2^J$  為  $6m^J \times 6m^J$  之矩陣:

$$\mathbf{A}_2^J = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{J1} \mathbf{A}_u^{J1}(0, \omega) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^{J2} \mathbf{A}_u^{J2}(0, \omega) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{T}^{Jm^J} \mathbf{A}_u^{Jm^J}(0, \omega) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_2^J = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{J1} \mathbf{D}_u^{J1}(0, \omega) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^{J2} \mathbf{D}_u^{J2}(0, \omega) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{T}^{Jm^J} \mathbf{D}_u^{Jm^J}(0, \omega) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{U}_2^J$  為  $6m^J \times 6$  之矩陣:

$$\mathbf{U}_2^J = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \\ \vdots \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

其中  $\mathbf{I}$  為  $6 \times 6$  之單位矩陣。

### 3.3 彈性波在剛性自由節點之散射

在應力波的傳播過程中，節點的穩態波來源有二。其一為會加於節點之外力作用後，於各桿件所產生的穩態波波源。其二為某一桿件之應力波到達節點後，由反射及折射而傳至其它桿件之穩態波。由此我們可推得一節點  $J$  的入射波和出射波有以下之關係：

$$\mathbf{d}^J = \mathbf{S}^J \mathbf{a}^J + \mathbf{s}^J \quad (3.11)$$

其中， $\mathbf{s}^J$  為節點  $J$  的波源行矩陣，表示由作用於  $J$  點的外力所引發的穩態波波幅。 $\mathbf{S}^J$  為節點  $J$  的散射矩陣，表示由其它節點的應力波到達  $J$  點後，經過一散射的過程，而將穩態波的能量大小重新分配於接於節點  $J$  的所有桿件上。而此一波源行矩陣與散射矩陣我們正可由節點的力平衡和位移諧合的邊界條件求得。首先，我們先推導剛性自由節點(Rigid Joint)的波源行矩陣與散射矩陣，將(3.6)式與(3.10)式聯立：

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1^J \mathbf{a}^J + \mathbf{D}_1^J \mathbf{d}^J + \hat{\mathbf{f}}^J - \mathbf{K}^J \hat{\mathbf{U}}^J = \mathbf{0}_{6 \times 1} \\ \mathbf{A}_2^J \mathbf{a}^J + \mathbf{D}_2^J \mathbf{d}^J = \mathbf{U}_2^J \hat{\mathbf{U}}^J \end{cases} \quad (3.12)$$

上式共包含 6 條平衡方程式和  $6m^J$  條諧合方程式，然而，未知數的總數為  $12m^J + 6$  (包括入射波波幅  $\mathbf{a}^J$ 、出射波波幅  $\mathbf{d}^J$  和節點之位移轉角向量)，因此，仍需要額外提供  $6m^J$  條方程式方能求解。首先，假設節點的穩態波只有由外力所引發的部分。即令  $\mathbf{a}^J = \mathbf{0}$  代入(3.12)式後，以矩陣的形式整理後可表示為：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^J & -\mathbf{K}^J \\ \mathbf{D}_2^J & -\mathbf{U}_2^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^J \\ \hat{\mathbf{U}}^J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{f}}^J \\ \mathbf{0}_{6m^J \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

故由求解(3.11)式和(3.13)式可得剛性自由節點  $J$  之波源行矩陣為：

$$\mathbf{s}^J = \mathbf{d}^J = - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6m^J \times 6m^J} & \mathbf{0}_{6m^J \times 6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^J & -\mathbf{K}^J \\ \mathbf{D}_2^J & -\mathbf{U}_2^J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}^J \\ \mathbf{0}_{6m^J \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

若我們假設節點之穩態波來源只由其它節點的出射波到達  $J$  點所產生，而無節點外力源的影響。即令  $\hat{\mathbf{f}}^J = \mathbf{0}$  代入(3.12)式後，以矩陣的形式整理後可表示為：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^J & -\mathbf{K}^J \\ \mathbf{D}_2^J & -\mathbf{U}_2^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^J \\ \hat{\mathbf{U}}^J \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^J \\ \mathbf{A}_2^J \end{bmatrix} \mathbf{a}^J \quad (3.15)$$

故由求解(3.11)式和(3.15)式可得剛性自由節點  $J$  之散射矩陣為：

$$\mathbf{S}^J = - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6m' \times 6m'} & \mathbf{0}_{6m' \times 6} \\ \mathbf{D}_1^J & -\mathbf{K}^J \\ \mathbf{D}_2^J & -\mathbf{U}_2^J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^J \\ \mathbf{A}_2^J \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

### 3.4 彈性波在鉸接節點之散射

當應力波通過鉸接節點(Hinge Joint)時，由於其邊界條件和自由節點不同，故節點的散射情形也不同。吾人可藉由改變(3.12)式中的力平衡方程式和位移諧合來求解，然而此一分析過程使得矩陣的排置較為複雜，而不利於計算機程式的運算。一種較為簡易的方法為類似矩陣勁度法中的桿件釋放(Member Release)的方法 [25]，利用節點力的釋放過程，來改變勁度矩陣。

以下我們將藉由類似的過程，來改變節點的內力波相矩陣。首先，由(2.8)、(2.21)、(2.51)、(2.52)、(2.59)、(2.60)式可求得節點  $J$  ( $x^{JK} = 0$ ) 的內力和內力矩為：

$$\begin{aligned} \hat{F}(0, \omega) &= EAik_1[a_1(\omega) - d_1(\omega)] \\ \hat{V}(0, \omega) &= i\kappa AG[k_3\alpha_3a_3(\omega) + k_4\alpha_4a_4(\omega) - k_3\alpha_3d_3(\omega) - k_4\alpha_4d_4(\omega)] \\ \hat{W}(0, \omega) &= i\kappa AG[k_5\alpha_5a_5(\omega) + k_6\alpha_6a_6(\omega) - k_5\alpha_5d_5(\omega) - k_6\alpha_6d_6(\omega)] \\ \hat{T}(0, \omega) &= GI_x ik_2[a_2(\omega) - d_2(\omega)] \\ \hat{N}(0, \omega) &= EI_y[k_5^2a_5(\omega) + k_6^2a_6(\omega) + k_5^2d_5(\omega) + k_6^2a_6(\omega)] \\ \hat{M}(0, \omega) &= -EI_z[k_3^2a_3(\omega) + k_4^2a_4(\omega) + k_3^2d_3(\omega) + k_4^2a_4(\omega)] \end{aligned} \quad (3.17)$$

由於節點  $J$  為鉸接節點，故其不傳遞彎矩和扭矩，故我們可直接令(3.17)式中：

$$\begin{aligned} \hat{T}(0, \omega) &= GI_x ik_2[a_2(\omega) - d_2(\omega)] = 0 \\ \hat{N}(0, \omega) &= EI_y[k_5^2a_5(\omega) + k_6^2a_6(\omega) + k_5^2d_5(\omega) + k_6^2a_6(\omega)] = 0 \\ \hat{M}(0, \omega) &= -EI_z[k_3^2a_3(\omega) + k_4^2a_4(\omega) + k_3^2d_3(\omega) + k_4^2a_4(\omega)] = 0 \end{aligned}$$

故可得：

$$\begin{aligned} a_2(\omega) &= d_2(\omega) \\ a_3(\omega) &= -\frac{k_4^2}{k_3^2}a_4(\omega) - d_3(\omega) - \frac{k_4^2}{k_3^2}d_4(\omega) \\ a_5(\omega) &= -\frac{k_6^2}{k_5^2}a_6(\omega) - d_5(\omega) - \frac{k_6^2}{k_5^2}d_6(\omega) \end{aligned} \quad (3.18)$$

將(3.18)代入(3.17)式整理後可得：

$$\begin{aligned}
\hat{F}(0, \omega) &= EAik_1[a_1(\omega) - d_1(\omega)] \\
\hat{V}(0, \omega) &= i\kappa AG[k_4(\alpha_4 - \frac{k_4}{k_3}\alpha_3)a_4(\omega) - 2k_3\alpha_3d_3(\omega) - k_4(\alpha_4 + \frac{k_4}{k_3}\alpha_3)d_4(\omega)] \\
\hat{W}(0, \omega) &= i\kappa AG[k_6(\alpha_6 - \frac{k_6}{k_5}\alpha_5)a_6(\omega) - 2k_5\alpha_5d_5(\omega) - k_6(\alpha_6 + \frac{k_6}{k_5}\alpha_5)d_6(\omega)] \\
\hat{T}(0, \omega) &= 0 \\
\hat{N}(0, \omega) &= 0 \\
\hat{M}(0, \omega) &= 0
\end{aligned}$$

上式可以矩陣的形式表示為：

$$\hat{\mathbf{F}}^{JK}(0, \omega) = \tilde{\mathbf{A}}_f^{JK} \mathbf{a}^{JK}(\omega) + \tilde{\mathbf{D}}_f^{JK} \mathbf{d}^{JK}(\omega) \quad (3.19)$$

其中， $\tilde{\mathbf{A}}_f^{JK}$ 、 $\tilde{\mathbf{D}}_f^{JK}$  既為我們所要求的絞接節點之入射波內力波相矩陣和出射波內力波相矩陣：

$$\tilde{\mathbf{A}}_f^{JK} = \begin{bmatrix} EAik_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\kappa AGk_4(\alpha_4 - \frac{k_4}{k_3}\alpha_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\kappa AGk_6(\alpha_6 - \frac{k_6}{k_5}\alpha_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_f^{JK} = \begin{bmatrix} -EAik_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i\kappa AGk_3\alpha_3 & -i\kappa AGk_4(\alpha_4 + \frac{k_4}{k_3}\alpha_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2i\kappa AGk_5\alpha_5 & -i\kappa AGk_6(\alpha_6 + \frac{k_6}{k_5}\alpha_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

將(3.19)代入(3.3)式可得到絞接節點的力平衡方程式如同(3.6)式的形式：

$$\tilde{\mathbf{A}}_1^J \mathbf{a}^J + \tilde{\mathbf{D}}_1^J \mathbf{d}^J + \hat{\mathbf{f}}^J - \mathbf{K}^J \hat{\mathbf{U}}^J = \mathbf{0}_{6 \times 1} \quad (3.20)$$

其中， $\tilde{\mathbf{A}}_1^J$ 、 $\tilde{\mathbf{D}}_1^J$  為  $6 \times 6m^J$  之矩陣：

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}_1^J &= \left[ \mathbf{T}^{J1} \tilde{\mathbf{A}}_f^{J1} \quad \dots \quad \mathbf{T}^{JK} \tilde{\mathbf{A}}_f^{JK} \quad \dots \quad \mathbf{T}^{Jm^J} \tilde{\mathbf{A}}_f^{Jm^J} \right] \\ \tilde{\mathbf{D}}_1^J &= \left[ \mathbf{T}^{J1} \tilde{\mathbf{D}}_f^{J1} \quad \dots \quad \mathbf{T}^{JK} \tilde{\mathbf{D}}_f^{JK} \quad \dots \quad \mathbf{T}^{Jm^J} \tilde{\mathbf{D}}_f^{Jm^J} \right]\end{aligned}$$

而由於接於鉸接節點的各桿，在此節點上的角位移並不相等，因此(3.10)式的 $6m^J$ 條諧合方程式僅剩 $3m^J$ 條，故(3.10)式須改寫為：

$$\tilde{\mathbf{A}}_2^J \mathbf{a}^J + \tilde{\mathbf{D}}_2^J \mathbf{d}^J = \tilde{\mathbf{U}}_2^J \hat{\mathbf{U}}^J \quad (3.21)$$

其中， $\tilde{\mathbf{A}}_2^J$ 、 $\tilde{\mathbf{D}}_2^J$ 為 $3m^J \times 6m^J$ 之矩陣：

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}_2^J &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}^{J1} \tilde{\mathbf{A}}_u^{J1}(0, \omega) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}}^{J2} \tilde{\mathbf{A}}_u^{J2}(0, \omega) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \tilde{\mathbf{T}}^{Jm^J} \tilde{\mathbf{A}}_u^{Jm^J}(0, \omega) \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{D}}_2^J &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}^{J1} \tilde{\mathbf{D}}_u^{J1}(0, \omega) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}}^{J2} \tilde{\mathbf{D}}_u^{J2}(0, \omega) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \tilde{\mathbf{T}}^{Jm^J} \tilde{\mathbf{D}}_u^{Jm^J}(0, \omega) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$\tilde{\mathbf{A}}_u^{JK}(0, \omega)$ 、 $\tilde{\mathbf{D}}_u^{JK}(0, \omega)$ 為鉸接節點之入射波位移波相矩陣和出射波位移波相矩陣：

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}_u^{JK}(0, \omega) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\alpha_3 & 1+\alpha_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\alpha_5 & 1+\alpha_6 \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{D}}_u^{JK}(0, \omega) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\alpha_3 & 1+\alpha_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\alpha_5 & 1+\alpha_6 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$\tilde{\mathbf{U}}_2^J$ 為 $3m^J \times 6$ 之矩陣：

$$\tilde{\mathbf{U}}_2^J = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{I}} \\ \tilde{\mathbf{I}} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{I}} \end{bmatrix}$$

其中：

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

將(3.20)式和(3.21)式聯立後可得：

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{A}}_1^J \mathbf{a}^J + \tilde{\mathbf{D}}_1^J \mathbf{d}^J + \hat{\mathbf{f}}^J - \mathbf{K}^J \hat{\mathbf{U}}^J = \mathbf{0}_{6 \times 1} \\ \tilde{\mathbf{A}}_2^J \mathbf{a}^J + \tilde{\mathbf{D}}_2^J \mathbf{d}^J = \tilde{\mathbf{U}}_2^J \hat{\mathbf{U}}^J \end{cases} \quad (3.22)$$

如同前面 3.3 節的求解過程，首先假設  $\mathbf{a}^J = \mathbf{0}$  代入上式整理後可得：

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_1^J & -\mathbf{K}^J \\ \tilde{\mathbf{D}}_2^J & -\tilde{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^J \\ \hat{\mathbf{U}}^J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{f}}^J \\ \mathbf{0}_{3m^J \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

上式中， $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_1^J & -\mathbf{K}^J \\ \tilde{\mathbf{D}}_2^J & -\tilde{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}$  的維度為  $(3m^J + 6) \times (6m^J + 6)$ ，故其逆矩陣不存在。因此，

我們採用 Pseudo-inverse 或 Singular-Value-Decomposition(SDV)[26]的方法，可求得鉸接節點之波源行矩陣為：

$$\mathbf{s}^J = \mathbf{d}^J = -\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6m^J \times 6m^J} & \mathbf{0}_{6m^J \times 6} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_1^J & -\mathbf{K}^J \\ \tilde{\mathbf{D}}_2^J & -\tilde{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_1^J & -\mathbf{K}^J \\ \tilde{\mathbf{D}}_2^J & -\tilde{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_1^J & -\mathbf{K}^J \\ \tilde{\mathbf{D}}_2^J & -\tilde{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}^J \\ \mathbf{0}_{3m^J \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

同理，假設  $\hat{\mathbf{f}}^J = \mathbf{0}$ ，則可求得鉸接節點之散射矩陣為：

$$\mathbf{S}^J = -\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6m^J \times 6m^J} & \mathbf{0}_{6m^J \times 6} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_1^J & -\mathbf{K}^J \\ \tilde{\mathbf{D}}_2^J & -\tilde{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_1^J & -\mathbf{K}^J \\ \tilde{\mathbf{D}}_2^J & -\tilde{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_1^J & -\mathbf{K}^J \\ \tilde{\mathbf{D}}_2^J & -\tilde{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_1^J \\ \tilde{\mathbf{A}}_2^J \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

### 3.5 彈性波在球型支承點之散射

3.1 節中談到，當彈簧支承勁度分配矩陣  $\mathbf{K}^J$  中，若彈簧的勁度趨近於無窮大，則對應此一自由度方向的束制為一剛性支承。由此一結論，我們可得到，欲求剛性支承點之散射情形，我們可以在對應自由度的  $\mathbf{K}^J$  矩陣上，給予一個很大的值，即可求得近似於剛性支承的狀態。另外一個方法，則是直接改變節點的邊界條件(改變力平衡及位移諧合方程式)來求解，如此可求得精確解(Exact Solution)而非如前述方法的近似解。以下介紹此一方法。

若一節點  $J$  置於球型支承(Ball Support)，則不允許節點移動，但允許節點轉動。節點的外力不再是已知數，但節點之位移則為零，因此我們必須改變力平衡及位移諧合方程式為：

$$\begin{cases} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J \mathbf{a}^J + \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1^J \mathbf{d}^J + \mathbf{L}_1 \hat{\mathbf{f}}^J - \mathbf{L}_1 \mathbf{K}^J \hat{\mathbf{U}}^J = \mathbf{L}_1 \mathbf{0}_{6 \times 1} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J \mathbf{a}^J + \mathbf{L}_2 \mathbf{D}_2^J \mathbf{d}^J = \mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \hat{\mathbf{U}}^J \end{cases} \quad (3.26)$$

其中，

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{為作用彎矩及扭矩之位置向量；}$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{L}' & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}' & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{L}' \end{bmatrix} \text{為 } 3m^J \times 6m^J \text{ 之矩陣；}$$

$$\mathbf{L}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{為軸向與橫向之位置矩陣；}$$

$$\bar{\mathbf{U}}_2^J = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{為 } 6m^J \times 6 \text{ 之矩陣，其中 } \mathbf{0} \text{ 為 } 6 \times 6 \text{ 之零矩陣。}$$

之後，如同前面 3.3 節的求解過程，首先假設  $\mathbf{a}^J = \mathbf{0}$  代入(3.26)式整理後可得：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1^J & -\mathbf{L}_1 \mathbf{K}^J \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{D}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^J \\ \hat{\mathbf{U}}^J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_1 \hat{\mathbf{f}}^J \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{0}_{6m^J \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

上式中， $\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1^J & -\mathbf{L}_1 \mathbf{K}^J \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{D}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}$  的維度為  $(3m^J + 3) \times (6m^J + 6)$ ，故其逆矩陣不存在。因

此，如同前面 3.4 節中，我們採用 Pseudo-inverse 的方法，可求得球型支承點之波源行矩陣為：

$$\mathbf{s}^J = -\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6m^J \times 6m^J} & \mathbf{0}_{6m^J \times 6} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1^J & -\mathbf{L}_1 \mathbf{K}^J \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{D}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1^J & -\mathbf{L}_1 \mathbf{K}^J \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{D}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1^J & -\mathbf{L}_1 \mathbf{K}^J \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{D}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \hat{\mathbf{f}}^J \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{0}_{6m^J \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

同理，假設  $\hat{\mathbf{f}}^J = \mathbf{0}$ ，則可求得鉸接節點之散射矩陣為：

$$\mathbf{S}^J = -\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6m^J \times 6m^J} & \mathbf{0}_{6m^J \times 6} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1^J & -\mathbf{L}_1 \mathbf{K}^J \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{D}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1^J & -\mathbf{L}_1 \mathbf{K}^J \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{D}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1^J & -\mathbf{L}_1 \mathbf{K}^J \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{D}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

### 3.6 彈性波在固定支承點之散射

若節點置於固定支承(Fixed Support)，則不允許節點移動，且不允許節點轉動。節點的外力與外力矩不再是已知數，故無法使用(3.6)式。但節點之位移及角位移則為零，故雖然少掉了六條方程式，但亦少了六個未知數。故(3.12)式的聯立方程式僅剩下位移諧合方程式為：

$$\mathbf{A}_2^J \mathbf{a}^J + \mathbf{D}_2^J \mathbf{d}^J = \mathbf{0} \quad (3.30)$$

如同前面 3.3 節的求解過程，首先假設  $\mathbf{a}^J = \mathbf{0}$  代入上式可求得固定支承點的波源行矩陣為：

$$\mathbf{s}^J = \mathbf{d}^J = \mathbf{0}_{6m^J \times 1} \quad (3.31)$$

(3.31)式的結果是合理的，因為作用於固定支承的載重，無論載重的形式為何，都無法在結構上產生任何的波動，故波源行矩陣為零矩陣。而由(3.30)式我們可以直接求得入射波波幅與出射波波幅的關係為：

$$\mathbf{d}^J = -(\mathbf{D}_2^J)^{-1} \mathbf{A}_2^J \mathbf{a}^J \quad (3.32)$$

將(3.31)、(3.32)式代入(3.11)式，於是我們可以得到固定支承點的散射矩陣為：

$$\mathbf{S}^J = -(\mathbf{D}_2^J)^{-1} \mathbf{A}_2^J \quad (3.33)$$

以上推導出自由節點(包括剛接節點、鉸接節點)、支承節點(包括彈簧支承、球型支承和固定支承)的波源行矩陣和散射矩陣。之後，我們可將所有節點的波源行矩陣  $\mathbf{s}^J$  和散射矩陣  $\mathbf{S}^J$  組合成結構總體之波源行矩陣  $\mathbf{s}$  和散射矩陣  $\mathbf{S}$ 。再將所有節點之入射波波幅向量  $\mathbf{a}^J$  和出射波波幅向量  $\mathbf{d}^J$  組合成結構之入射波波幅向量  $\mathbf{a}$  和出射波波幅向量  $\mathbf{d}$ ，於是可得到以下之關係：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^J \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & \ddots \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{S}^J & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{S}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^1 \\ \mathbf{d}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}^J \\ \vdots \\ \mathbf{d}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{s}^1 \\ \mathbf{s}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{s}^J \\ \vdots \\ \mathbf{s}^n \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

由(2.72)式可知上式各矩陣向量的維度，故(3.34)可更簡潔地表為：

$$\mathbf{a}_{12m \times 1} = \mathbf{S}_{12m \times 12m} \mathbf{d}_{12m \times 1} + \mathbf{s}_{12m \times 1} \quad (3.35)$$



## 第四章 空間構架之彈性波射迴傳分析

本章中，我們將藉由矩陣排列整理的方式來表達結構中各桿件如何相接的幾何關係。然後結合前一章所推導的節點散射結果，我們可以求得整體結構在每一次傳波後，各節點波幅大小，再將每一次傳波的結果疊加，即可得到我們所要的結果。

### 4.1 傳播矩陣

上一章最後提到結構總體的入射波波幅向量  $\mathbf{a}$  和出射波波幅向量  $\mathbf{d}$  各含有  $12m$  個未知數，總共有  $24m$  個未知數，然而(3.35)式卻只提供了  $12m$  條方程式，這是因為我們在同一根桿件  $JK$  中引進了兩個局部座標系統  $(x^{JK}, y^{JK}, z^{JK})$  和  $(x^{KJ}, y^{KJ}, z^{KJ})$ ，故仍需從此兩個座標的幾何關係來尋求額外的  $12m$  條方程式來求解。由觀察可發現，實際上每根桿件的入射波波幅向量  $\mathbf{a}^{JK}$  和出射波波幅向量  $\mathbf{d}^{KJ}$ ，兩者有一相位差的關係。當一個出射波由桿件  $JK$  的  $J$  點產生後，沿著此一桿件朝向  $K$  點傳播，由  $K$  點這一端來看，此波則為一入射波。因此，在同一桿件中，由一端來看為入射波者，和由另一端所看到的出射波，應有一對應的關係。考慮桿件  $JK$  中，由  $J$  點這一端來看，有一軸向的入射波，則如 2.1 節所述，此波所引發的軸向位移沿著桿件  $JK$  的變化可寫為：

$$\hat{u}^{JK}(x^{JK}, \omega) = a_1^{JK}(\omega) e^{ik_1 x^{JK}} \quad (4.1)$$

由桿件  $KJ$  的  $K$  點這一端來看，則應有一軸向的出射波，此波所引發的軸向位移沿著桿件  $KJ$  的變化可寫為：

$$\hat{u}^{KJ}(x^{KJ}, \omega) = d_1^{KJ}(\omega) e^{-ik_1 x^{KJ}} \quad (4.2)$$

由 2.4 節所定義的局部座標系統，我們可知桿件  $JK$  在  $J$  點的軸向位移，由  $J$  點的座標系統來看和由  $K$  點的座標系統來看是不一樣的，兩者有以下的關係：

$$\hat{u}^{JK}(x^{JK}, \omega) = -\hat{u}^{KJ}(x^{KJ}, \omega) \quad (4.3)$$

將(4.1)、(4.2)式代入(4.3)式中，

$$a_1^{JK} e^{ik_1 x^{JK}} = -d_1^{KJ} e^{-ik_1 x^{KJ}}$$

又已知  $x^{KJ} = l - x^{JK}$ ，代入上式則我們可得到  $a_1^{JK}$  和  $d_1^{KJ}$  的關係為：

$$a_1^{JK} = -d_1^{KJ} e^{-ik_1 l} \quad (4.4)$$

利用同樣的方法，我們亦可求得  $a_2^{JK}$  與  $d_2^{KJ}$ 、 $a_3^{JK}$  與  $d_3^{KJ}$ 、 $a_4^{JK}$  與  $d_4^{KJ}$  的關係為：

$$a_2^{JK} = -d_2^{KJ} e^{-ik_2 l} \quad (4.5)$$

$$a_3^{JK} = -d_3^{KJ} e^{-ik_3 l} \quad (4.6)$$

$$a_4^{JK} = -d_4^{KJ} e^{-ik_4 l} \quad (4.7)$$

而由於桿件  $JK$  兩個局部座標系統下的  $z$  軸方向相同，故  $J$  點在  $z$  軸的橫向位移和轉角，由  $J$  點的座標系統來看和由  $K$  點的座標系統來看，有以下之關係：

$$\hat{w}^{JK}(x^{JK}, \omega) = \hat{w}^{KJ}(x^{KJ}, \omega) \quad (4.8)$$

$$\hat{\phi}^{JK}(x^{JK}, \omega) = \hat{\phi}^{KJ}(x^{KJ}, \omega) \quad (4.9)$$

故同理，我們亦可求得  $a_5^{JK}$  與  $d_5^{KJ}$ 、 $a_6^{JK}$  與  $d_6^{KJ}$  的關係為：

$$a_5^{JK} = d_5^{KJ} e^{-ik_5 l} \quad (4.10)$$

$$a_6^{JK} = d_6^{KJ} e^{-ik_6 l} \quad (4.11)$$

於是，我們可將(4.4)、(4.5)、(4.6)、(4.7)、(4.10)、(4.11)聯立後以矩陣的形式表為：

$$\mathbf{a}^{JK}(\omega) = \mathbf{P}^{JK}(l, \omega) \mathbf{d}^{KJ}(\omega) \quad (4.12)$$

其中，

$$\mathbf{P}^{JK}(l, \omega) = \begin{bmatrix} -e^{-ik_1 l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-ik_2 l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-ik_3 l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-ik_4 l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-ik_5 l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-ik_6 l} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

(4.13)式表示在同一根桿件上，由一端來看為入射波者，和由另一端來看為出射波者之關係。為了能將整個結構中的情形表示出來，我們先定義一新的桿件出射波波幅向量  $\tilde{\mathbf{d}}^J$ ：

$$\tilde{\mathbf{d}}^J = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{1J} \\ \mathbf{d}^{2J} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{m^J J} \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

而新的結構出射波波幅向量  $\tilde{\mathbf{d}}$  為：

$$\tilde{\mathbf{d}} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{d}}^1 \\ \tilde{\mathbf{d}}^2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{d}}^n \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

利用(4.12)式，將每一根桿件的入射波波幅與出射波波幅的關係排列如下：

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}^2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{P}^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{d}}^1 \\ \tilde{\mathbf{d}}^2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{d}}^n \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

或更簡潔地，

$$\mathbf{a}(\omega) = \mathbf{P}(l, \omega) \tilde{\mathbf{d}}(\omega) \quad (4.17)$$

(4.17)式的物理意義代表結構中每一根桿件的應力波由一端傳播到另一端的過程， $\mathbf{P}(l, \omega)$  既代表此一傳播過程的運算因子。故我們稱  $\mathbf{P}(l, \omega)$  為結構整體之傳播矩陣 (Propagation Matrix)，其為一  $12m \times 12m$  的對角線矩陣。

## 4.2 轉列矩陣

在(4.17)式中，我們引入了新的總體出射波波幅向量  $\tilde{\mathbf{d}}$ ，其中所有的元素均為各桿件出射波波幅，故並未增加新的變數，而只是改變排列方式而已。為了由(3.35)式求出出射波波幅向量  $\mathbf{d}$  和入射波波幅向量  $\mathbf{a}$ ，我們必須找出  $\mathbf{d}$  和  $\mathbf{a}$  的另一個關係式。而我們只需找出  $\tilde{\mathbf{d}}$  和  $\mathbf{d}$  的關係，再由(4.17)式即可得到  $\mathbf{d}$  和  $\mathbf{a}$  的另一個關係式。然而， $\tilde{\mathbf{d}}$  和  $\mathbf{d}$  的組成元素均為出射波波幅，只是在行矩陣中之位置不同，故我們可運用轉列矩陣  $\mathbf{U}$  (Permutation Matrix)，來表示  $\tilde{\mathbf{d}}$  和  $\mathbf{d}$  的關係為：

$$\tilde{\mathbf{d}}(\omega) = \mathbf{U} \mathbf{d}(\omega) \quad (4.18)$$

其中， $\mathbf{U}$  為  $12m \times 12m$  的矩陣，其可視為將  $\mathbf{d}$  中  $d_i^{JK}$  和  $d_i^{KJ}$  位置互掉的一個矩陣。 $\mathbf{U}$  中的每一列及每一行均只有一個位置的元素值為 1，而其它位置的元素值均等於 0。轉列矩陣的型式與節點編號的順序即組成  $\mathbf{d}$  向量之  $\mathbf{d}^J$  的排列順序有關。例如： $\mathbf{d}_{25}$  與  $\mathbf{d}_{52}$  分別為  $\mathbf{d}$  向量之第  $i$  列與第  $p$  列元素，則位於轉列矩陣中之第  $i$  列、第  $p$  行之元素  $U_{ip}$  與位於轉列矩陣中之第  $p$  列、第  $i$  行之元素  $U_{pi}$  等於 1，而位於第  $i$  列、第  $p$  列與第  $i$  行、第  $p$  行之其它位置的元素值均為 0。上述之說明可以表示如下：

$$\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{U} \mathbf{d} \quad (4.19)$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{d}_{52} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{25} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdots & 2-th & \cdots & 5-th & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2-th & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5-th & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{d}_{25} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{52} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

### 4.3 結構之迴傳矩陣

將(4.18)式代入(4.17)式，於是我們可以得到  $\mathbf{d}$  和  $\mathbf{a}$  的另一個關係式為：

$$\mathbf{a}(\omega) = \mathbf{P}(l, \omega) \mathbf{U} \mathbf{d}(\omega) \quad (4.20)$$

緊接著，我們將(4.20)式代入(3.35)式可得：

$$\mathbf{d} = \mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{U} \mathbf{d} + \mathbf{s}$$

上式共有  $12m$  條方程式，且僅有  $12m$  個未知數，故可直接求得出射波波幅向量為：

$$\mathbf{d}(\omega) = [\mathbf{I} - \mathbf{S}(\omega) \mathbf{P}(l, \omega) \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{s}(\omega) \quad (4.21)$$

我們可定義：

$$\mathbf{R}(\omega) = \mathbf{S}(\omega) \mathbf{P}(l, \omega) \mathbf{U} \quad (4.22)$$

其中  $\mathbf{R}(\omega)$  即稱為結構之迴傳矩陣(Reverberation Matrix)，將(4.22)式代入(4.21)式可得：

$$\mathbf{d}(\omega) = [\mathbf{I} - \mathbf{R}(\omega)]^{-1} \mathbf{s}(\omega) \quad (4.23)$$

當我們求得結構整體的出射波波幅向量  $\mathbf{a}(\omega)$  和入射波波幅向量  $\mathbf{d}(\omega)$  後，即可進一步求解結構的位移、內力、應變等反應。利用(3.4)式，我們可以求得結構桿件在頻率域下的內力、內力矩為：

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{A}_f \mathbf{a}(\omega) + \mathbf{D}_f \mathbf{d}(\omega) \quad (4.24)$$

其中， $\mathbf{A}_f$ 、 $\mathbf{D}_f$  為將各桿的內力波向矩陣排列而組成的整體內力波向矩陣。同理，由(3.9)式可求得結構桿件在頻率域下的位移、角位移為：

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{A}_u \mathbf{a}^{JK}(\omega) + \mathbf{D}_u \mathbf{d}^{JK}(\omega) \quad (4.25)$$

而由(2.9)、(2.22)、(2.54)、(2.62)式，我們可以求得桿件  $JK$  的應變為：

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{JK}(x^{JK}, \omega) = \mathbf{A}_\varepsilon^{JK}(x^{JK}, \omega) \mathbf{a}(\omega) + \mathbf{D}_\varepsilon^{JK}(x^{JK}, \omega) \mathbf{d}(\omega) \quad (4.26)$$

其中， $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x^{JK}, \omega)$  代表桿件  $JK$  應變行矩陣：

$$\hat{\mathbf{e}}(x^{JK}, \omega) = \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_{xu}(x^{JK}, \omega) \\ \hat{\gamma}_{x\theta}(x^{JK}, \omega) \\ \hat{\varepsilon}_{xv}(x^{JK}, \omega) \\ \hat{\varepsilon}_{xw}(x^{JK}, \omega) \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

$\hat{\varepsilon}_{xu}(x^{JK}, \omega)$  表示桿件  $JK$  上由軸向力所產生的軸向應變反應， $\hat{\gamma}_{x\theta}(x^{JK}, \omega)$  表示由扭矩所引發的扭剪應變反應， $\hat{\varepsilon}_{xv}(x^{JK}, \omega)$  表示由  $z^{JK}$  方向彎矩所產生的軸向應變反應， $\hat{\varepsilon}_{xw}(x^{JK}, \omega)$  表示由  $y^{JK}$  方向彎矩所產生的軸向應變反應。而  $\mathbf{A}_\varepsilon^{JK}(x^{JK}, \omega)$ 、 $\mathbf{D}_\varepsilon^{JK}(x^{JK}, \omega)$  則分別表示桿件  $JK$  的入射波應變波相矩陣和出射波應變波相矩陣：

$$\mathbf{A}_\varepsilon^{JK}(x^{JK}, \omega) = \begin{bmatrix} ik_1 e^{ik_1 x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cik_2 e^{ik_2 x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_y k_3^2 e^{ik_3 x} & c_y k_4^2 e^{ik_4 x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_z k_5^2 e^{ik_5 x} & c_z k_6^2 e^{ik_6 x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_\varepsilon^{JK}(x^{JK}, \omega) = \begin{bmatrix} -ik_1 e^{-ik_1 x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -cik_2 e^{-ik_2 x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_y k_3^2 e^{-ik_3 x} & c_y k_4^2 e^{-ik_4 x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_z k_5^2 e^{-ik_5 x} & c_z k_6^2 e^{-ik_6 x} \end{bmatrix}$$

然後將各桿的應變行矩陣組合成結構整體之應變行矩陣，則可得到結構整體在頻率域下的應變反應為：

$$\hat{\mathbf{e}}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{A}_\varepsilon \mathbf{a}(\omega) + \mathbf{D}_\varepsilon \mathbf{d}(\omega) \quad (4.28)$$

其中， $\mathbf{A}_\varepsilon$ 、 $\mathbf{D}_\varepsilon$  為將各桿的內力波向矩陣排列而組成的整體內力波向矩陣。而吾人所欲求的是結構的歷時反應，故必須使用逆傅立業轉換將(4.24)、(4.25)、(4.28)式的頻率域反應(穩態解)轉為在時間域的反應(瞬態解)：

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{A}_f \mathbf{a}(\omega) + \mathbf{D}_f \mathbf{d}(\omega)] d\omega \quad (4.29)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{A}_u \mathbf{a}(\omega) + \mathbf{D}_u \mathbf{d}(\omega)] d\omega \quad (4.30)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{A}_\varepsilon \mathbf{a}(\omega) + \mathbf{D}_\varepsilon \mathbf{d}(\omega)] d\omega \quad (4.31)$$

(4.29)~(4.31)式即為我們最後所要求的局部座標下內力、位移、應變歷時反應。而我們可利用(2.76)式的轉換矩陣將局部座標下的結構反應轉為總體座標下的結構反應。

## 4.4 入射波與反射波之因果關係

(4.23)式理論上可以求得出射波波幅  $\mathbf{d}(\omega)$ ，然後利用(3.35)式或(4.20)式求出入射波波幅  $\mathbf{a}(\omega)$ ，之後代入(3.4)、(3.9)式，即可求得頻率域下結構桿件的內力、位移等反應，最後再利用逆傅立業轉換即可求得歷時反應。然而，在某些特定頻率時， $\mathbf{I} - \mathbf{R}(\omega)$  為奇異的(Singular)，使得  $[\mathbf{I} - \mathbf{R}(\omega)]^{-1}$  並不存在，因此會使得最後逆傅立業轉換的積分過程，在實軸上出現大量的極點(Pole)。欲解決此積分，必須使用留數定理(Residue Theorem)，此方法需要大量而精確的極點，而使得實際計算上變得十分困難。為了避開奇異性的問題，我們可利用諾曼級數展開(Newmann Series Expansion)的方法，將  $[\mathbf{I} - \mathbf{R}(\omega)]^{-1}$  展開為：

$$[\mathbf{I} - \mathbf{R}(\omega)]^{-1} = [\mathbf{I} + \mathbf{R}(\omega) + \mathbf{R}^2(\omega) + \cdots + \mathbf{R}^N(\omega)] + \mathbf{Q}_N \quad (4.32)$$

其中， $\mathbf{Q}_N$  為餘項：

$$\mathbf{Q}_N = [\mathbf{I} - \mathbf{R}(\omega)]^{-1} \mathbf{R}^{N+1}(\omega) \quad (4.33)$$

將(4.32)代入(4.23)式，且忽略餘項  $\mathbf{Q}_N$  不計，則(4.23)式可改寫為：

$$\mathbf{d}(\omega) = [\mathbf{I} + \mathbf{R}(\omega) + \mathbf{R}^2(\omega) + \cdots + \mathbf{R}^N(\omega)]\mathbf{s}(\omega) \quad (4.34)$$

(4.34)式中，迴傳矩陣每運算一次即代表應力波在結構桿件中傳播一次(節點的散射一次)，故  $\mathbf{R}^N \mathbf{s}$  即代表應力波已傳播  $N$  次。最後，正如(4.34)式，將所有項數疊加的結果既為傳播  $N$  次後的出射波波幅，我們可以用  $\mathbf{d}^{(N)}$  來表示。同理， $\mathbf{d}^{(1)}$  表示傳播一次後的出射波波幅， $\mathbf{d}^{(2)}$  表示傳播兩次後的出射波波幅...。而  $\mathbf{d}^{(0)}$  則為應力波未傳播時，節點的出射波波幅，我們可直觀地想像，此一波幅就是波源。將上述的結果以數學式表示為：

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{(0)} &= \mathbf{I}\mathbf{s} \\ \mathbf{d}^{(1)} &= (\mathbf{I} + \mathbf{R})\mathbf{s} \\ \mathbf{d}^{(2)} &= (\mathbf{I} + \mathbf{R} + \mathbf{R}^2)\mathbf{s} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \mathbf{d}^{(N)} &= (\mathbf{I} + \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 + \cdots + \mathbf{R}^N)\mathbf{s} \end{aligned} \quad (4.35)$$

若我們將(4.34)式直接代入(4.20)式的入射波與反射波座標關係式，我們可以求得傳播  $N$  次後的入射波波幅  $\mathbf{a}^{(N)}$  為：

$$\mathbf{a}^{(N)} = \mathbf{P}\mathbf{U}\mathbf{d}^{(N)} = \mathbf{P}\mathbf{U}[\mathbf{I} + \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 + \cdots + \mathbf{R}^N]\mathbf{s} \quad (4.36)$$

(4.36)的推導看似十分合理，但是如果我們將(4.34)式代回(3.35)式的入射波與反射波迴傳關係式，我們發現：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}^{(N)} &= \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{d}_N - \mathbf{s}) = \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 + \cdots + \mathbf{R}^N - \mathbf{I})\mathbf{s} \\
 &= \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{R} + \mathbf{R}^2 + \cdots + \mathbf{R}^N)\mathbf{s} \\
 &= \mathbf{S}^{-1}[(\mathbf{SPU}) + (\mathbf{SPU})(\mathbf{SPU}) + \cdots + \underbrace{(\mathbf{SPU})(\mathbf{SPU})\cdots(\mathbf{SPU})}_{\text{共}N\text{項}}]\mathbf{s} \\
 &= [\mathbf{PU} + \mathbf{PU}(\mathbf{SPU}) + \cdots + \underbrace{\mathbf{PU}(\mathbf{SPU})\cdots(\mathbf{SPU})}_{\text{共}N-1\text{項}}]\mathbf{s} \\
 &= \mathbf{PU}(\mathbf{I} + \mathbf{R} + \cdots + \mathbf{R}^{N+1})\mathbf{s} \\
 &= \mathbf{PUd}^{(N-1)}
 \end{aligned}$$

於是我們得到應力波傳播  $N$  次後的入射波幅  $\mathbf{a}^{(N)}$ ：

$$\mathbf{a}^{(N)} = \mathbf{PUd}^{(N-1)} \quad (4.37)$$

很顯然地，(4.36)式與(4.37)式似乎產生了矛盾，我們在這裡先將(4.36)式的入射波近似解稱為解  $\mathbf{a}_A$ ；(4.37)式的入射波近似解稱為解  $\mathbf{a}_B$ 。解  $\mathbf{a}_A$ 、 $\mathbf{a}_B$  的不同似乎隱含(4.20)式與(3.35)式其中之一的推導有誤。然而，我們若是仔細檢驗(4.20)式與(3.35)式的數學關係與物理上的含意，兩者並無互相違背。

(4.20)式是以座標幾何關係找出入射波與出射波之間的關係，當我們求的是解析解時，入射波與出射波在此式下不會有任何先後次序的關係，此時，解  $\mathbf{a}_A$ 、 $\mathbf{a}_B$  完全相同。因為此時  $\mathbf{a}(\omega)$  和  $\mathbf{d}(\omega)$  代表時諧波(Harmonic Wave)的傳播，傳播時間由正無窮大到負無窮大，兩者間並不會有相位的差異。然而若將入射波  $\mathbf{d}(\omega)$  以級數近似展開為  $\mathbf{d}^{(N)}$  後，入射波與出射波就會隱含一先後次序關係(Condition of Causality)，此時我們就必需檢驗以  $\mathbf{d}^{(N)}$  代入(4.20)求  $\mathbf{a}^{(N)}$  的正確性。

然而(3.35)式代表入射波與出射波在節點上的散射關係，兩者同時發生，並無先後次序的關係，因此對於入射波展開近似解而言，使用(3.35)所求得的解  $\mathbf{a}_B$ ，會有相較於  $\mathbf{a}_A$  而言較精確的近似解果。為了檢驗上述之關係的正確性，吾人實際計算了圖 4.1 的二維剛架結構。若考慮節點 1 的垂直向位移，理論上必須為零(節點鉸接支呈)。然而分別使用解  $\mathbf{a}_A$  與解  $\mathbf{a}_B$ ，取  $N = 30$  (迴傳 30 次)來求節點 1 的垂直向位移隨時間的變化(如圖 4.2)，發現解  $\mathbf{a}_A$  所求出的值並不為零，而相較而言解  $\mathbf{a}_B$  所求得的值很接近零，此說了解  $\mathbf{a}_A$  較解  $\mathbf{a}_B$  來得精確。然而在一般情況下，迴傳多次後，兩者差異的比例上並不大。如圖 4.3，若考慮節點 6 的垂直向位移隨時間

的變化，發現解  $a_A$  與解  $a_B$  的結果幾乎重疊，沒有明顯差異。

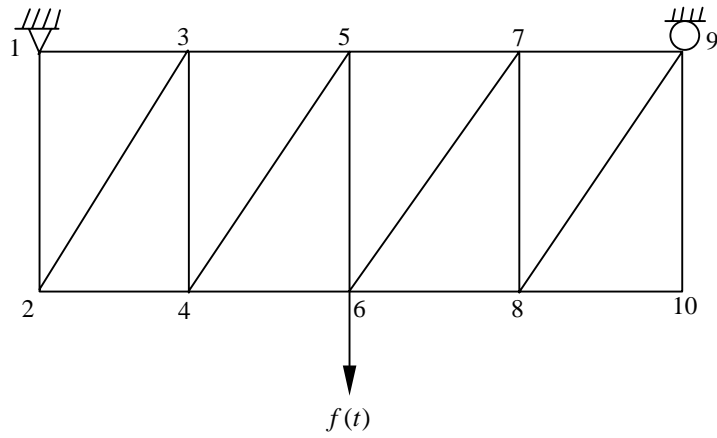


圖 4.1 二維剛架示意圖



## 第五章 迴傳波射法之離散過程與數值方法

由於分析的過程中須使用逆傅立業轉換，將頻率域之結構反應轉換為時域反應，然而在數位化電腦的運算環境中，連續的頻率函數或連續的時間函數須經過離散化的過程才能利用電腦進行計算。首先，吾人將時間以  $\Delta t$  等間隔取樣(離散化)後，假設共取樣  $M$  筆資料，則總觀測時間為  $T = M\Delta t$ ，最大頻寬  $\Omega$  可計算如下：

$$\Omega = \frac{2\pi}{\Delta t} \quad (5.1)$$

頻域間隔  $\Delta\omega$  則為：

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{M\Delta t} \quad (5.2)$$

根據上述的說明，吾人可知快速逆傅立業變換之頻率範圍為  $(-\frac{\Omega}{2}, \frac{\Omega}{2})$ ，故連續逆傅立業轉換之近似值可計算如下[27]：

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \hat{g}_2[k] e^{it(k\Delta\omega)} \Delta\omega \quad (5.3)$$

其中，

$$\hat{g}_2[k] = \hat{g}(k\Delta\omega) \quad k = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

此外，吾人可藉由改變  $\Delta t$  及  $M$  決定分析時所希望的頻寬範圍及頻域解析度等。由(5.1)式可知，當取樣週期  $\Delta t$  較小時，頻寬的範圍越大，因此可得較高頻的反應。然而，由(5.2)式可知，當  $\Delta t$  較小時，則頻率間隔  $\Delta\omega$  變大(頻域解析度會變差)，有可能遺漏部分動力反應的結果，進而使得逆傅立業轉換的結果不夠精確。若取樣數  $M$  較大，則由(5.2)式可知，頻域間隔  $\Delta\omega$  越小，頻域解析度會提昇，可使得(5.3)式之快速逆傅立業轉換的結果值較為精確，惟需花費較多的計算時間。

縱上所述，欲得到較精確的計算結果，則吾人必須提高取樣數目  $M$ ，惟需耗費較長的計算時間；欲增加頻寬範圍，則吾人必須選擇較小的取樣週期  $\Delta t$ ，惟頻域解析度將變差。因此，二者之間必須有所取捨。一般而言，土木結構的振動能量主要集中於低頻，高頻能量所佔的比例不大。因此吾人選擇較小的頻寬範圍進行分析即可，在不影響振動反應的主要趨勢下，提高精確度，降低取樣數目  $M$ ，以節省計算的時間。

此外，總觀測時間(Time Window)並非吾人真正可以觀測的總歷時，(4.34)與

(4.37)式所計算之穩態波波幅為波迴傳有限次數( $N$ 次)後疊加的結果，故真正可以觀測的反應僅限於迴傳 $N$ 次內的時間，於此一可觀測時間之後的反應則不準確，吾人將不予採信。例如，假設軸向波(波速最快)在結構中迴傳一次最短的時間為 $t_a$ ，則實際可觀測的時間 $T_r$ 為：

$$T_r = Nt_a \quad (5.4)$$

故當 $N$ 取愈大時，則我們有更長的可觀測的時間 $T_r$ 。然而，這不但會增加(4.34)、(4.37)式的運算時間，並且會使得反應頻譜的主要反應更集中於 $\omega = 0$ 附近，於是，使得我們必須取更大的精度( $\Delta\omega$ 取更小)，才能計算出正確的反应歷時。

## 第六章 試驗環境之建構與衝擊載重試驗結果

### 6.1 三維鋁模型剛架

為進行三維剛架結構之靜力與動力波傳試驗，本研究中設計一棟二層樓之鋁方管立體模型剛架。該剛架係由八根橫梁與八根柱子所構成，試驗時模型將固定於型鋼製之基礎上，如照片 6.1 所示。鋁模型剛架之尺寸詳圖 6.1，其平面尺寸為  $50\text{ cm} \times 80\text{ cm}$ ，樓層高度為  $90\text{ cm}$ ，總樓高為  $180\text{ cm}$ ，模型重約為  $6.09\text{ kg}$ 。四根柱腳分別焊在鋁板上(長、寬與厚度為  $13\text{ cm} \times 13\text{ cm} \times 1\text{ cm}$ )，俾便將鋁模型剛架固定於基礎上。梁、柱構件均使用相同斷面之鋁方管，其斷面尺寸為  $2.5\text{ cm} \times 2.5\text{ cm} \times 0.2\text{ cm}$  (長 $\times$ 寬 $\times$ 厚度)。鋁之材料性質與梁、柱之斷面性質如表 6.1 所示。梁、柱接頭採氬焊方式接合，以模擬剛接的情況。

### 6.2 加載機構

為便於水平向靜力或驟加衝擊力之加載(照片 6.2(a))，遂於二樓一隅之梁、柱接頭處加裝掛鉤，如照片 6.2(b)所示，同時設計一滑輪支承柱(照片 6.2(a))，使得施力於掛鉤上之釣魚線可跨置於滑輪(照片 6.2(c))上。照片 6.2(d)為吾人模擬施加靜力於鋁模型構架的情形。將釣魚線一端固定於結構之掛鉤上，然後攀跨過滑輪，另一端則懸吊質塊(照片 6.2(e))以模擬施加於結構之水平力。質塊每塊重約  $8\text{ kg}$ ，可依據試驗所需之水平力將數塊質塊層疊後一起懸吊。當進行驟加衝擊力試驗時，可利用噴燈或打火機(照片 6.3)將釣魚線燒斷(約需  $30 \times 10^{-6} \sim 50 \times 10^{-6}$  秒)，以模擬階梯荷載(step loading)。驟加衝擊力之研製經歷數次嘗試後，吾人發現：採用釣魚線(尼龍材質，拉力強度可達  $91\text{ kg}$ )懸吊質塊再利用噴燈將釣魚線燒斷是最理想的設計方式，由於釣魚線的線徑僅約  $1.2\text{ mm}$ ，加上噴燈的火源是由瓦斯瓶加壓噴出的瓦斯點火燃燒所產生，其火焰較先前以打火機點火的方式猛烈，因此釣魚線可迅速被燒斷，可模擬理想之階梯荷載。此外，持續增加質塊的重量提高釣魚線的拉力亦可加速釣魚線燒斷的時間，惟釣魚線有可能在試驗人員加載的過程中瞬間斷裂，因此進行加載時人員應配戴安全帽、護目鏡、手套等安全防護設備，且人員應避免站立於釣魚線燒斷時可能彈射的方向。

### 6.3 三維鋁模型構架之迴傳波射動力分析

吾人根據表 6.1 之材料及斷面性質，利用第五章所述之迴傳波射法分析二層樓鋁構架試驗模型受到驟加衝擊力作用之波動反應。吾人將懸吊質塊之釣魚線固定於節點 9(圖 2.7)，隨後將釣魚線燒斷，此時鋁構架模型所受到的外力可表示如下：

$$f(t) = W[1 - h(t)] \quad (6.1)$$

其中， $W$  表示釣魚線懸吊的質塊總重，本試驗之質塊總重為 48kg， $h(t)$  為單位階梯函數(Unit Step Function)。然而，在計算分析上無法直接求得(6.1)式的傅立業轉換，故吾人可先行計算鋁構架受到  $f(t) = h(t)$  作用時之反應，最後以靜力的結果扣除此一反應即可求得(6.1)式之外力所產生的波動反應。若直接利用傅立業轉換，吾人可得頻率域之外力函數為：

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega} \quad (6.2)$$

根據表 6.1 之材料參數吾人可求得軸向波在鋁架中傳播的波速為：

$$c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{70 \times 10^9}{2700}} = 5091.8 \text{ m/sec}$$

假設  $l_0 = 0.1\text{m}$  代表一個正規化長度(Normalize Length)，吾人將軸向波行經一個正規化長度的時間定義為一個正規化時間(Normalize Time) $t_0$ ，則：

$$t_0 = \frac{l_0}{c_1} = \frac{0.1}{5091.8} = 1.964 \times 10^{-5} \text{ sec}$$

時間間隔設定為  $\Delta t = 0.1t_0 = 1.964 \times 10^{-6} \text{ sec}$ ，快速傅立業轉換之筆數為  $M = 2^{15} = 32768$ ，彈性波迴傳之次數  $N = 30$  次。由於結構中最短的桿件長度為  $5l_0$ ，因此波迴傳一次最少需時  $5t_0$ ，故真實的觀測時間為：

$$T_r = 5Nt_0 = 150t_0 = 0.0029 \text{ sec}$$

外力函數可利用(6.2)式計算，惟僅需計算至觀測時間  $T_r$  即可，計算結果如下所示：

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [h(t) - h(t - Tr)]e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega} (1 - e^{-i\omega T_r}) \quad (6.3)$$

## 6.4 三維鋁模型構架之衝擊載重試驗(空心斷面)

吾人首先將釣魚線一端固定於節點 9(照片 6.2(b))之掛勾，然後攀跨過滑輪，另一端則懸吊 6 塊質塊(總重約 48kg)以模擬施加於結構之水平靜力。當進行驟加衝擊力試驗時，將點燃之噴燈移至節點 9 附近，火焰對準釣魚線並迅速將其燒斷，可產生一階梯荷載。此外，吾人於梁桿件 3-6(距節點 3 約 10cm 之左、右兩面)、梁桿件 5-11(距節點 5 約 30cm 之前、後兩面)、梁桿件 8-11(距節點 11 約 10cm 之

上、下兩面)及柱桿件 4-5(距節點 5 約 40cm 之前、後兩面)、柱桿件 8-9(距節點 8 約 20cm 之前、後兩面)等 5 處各黏貼一對電阻式應變計(共 10 枚,方向與桿件之軸向平行,如照片 6.4 所示),俾便將衝擊力試驗之應變結果與迴傳波射分析所得之應變結果進行比較。此外,吾人於節點 9 下方約 2.5cm 處額外黏貼一枚壓電式應變計作為觸發訊號(trigger source,照片 6.2(b)),當釣魚線燒斷時,該應變計偵測到一應變訊號且立即傳送至示波器之外部觸發通道(照片 6.6(a)),此時示波器便可同步擷取應變資料。

進行驟加衝擊力試驗所使用之儀器設備(照片 6.5)包括：

(一)高頻示波器：LeCroy Digital Oscilloscope(LT322)

如照片 6.6(a)所示,主要功能為顯示及擷取資料,共有 2 個類比輸入通道(channel)及一個外部輸入觸發通道,最大取樣率(sum sampling rate)為 200MHz,類比/數位(A/D)轉換之解析度為 8-bit。此外,示波器尚具有觸發型式設定、取樣頻率(週期)設定、電壓值範圍設定、量測工具選項、資料儲存及螢幕列印等功用。

(二)應變計訊號調節放大器：Measurements Group(2100 System)

如照片 6.7 所示,含一組 2110A 電源供應器(power supply),可供應直流電源 0.5~12V;四組 2120 訊號調節模組(conditioner module),增益(gain)放大倍率介於 1~2100,共有 8 個類比輸入通道(照片 6.7(b)),每個通道之最大取樣率為 5kHz。應變計訊號輸入線之接頭為軍用接頭(照片 6.8),吾人根據使用手冊之說明,將訊號線焊接於軍用接頭之特定接腳可分別得到 1/4 電橋(應變計之電阻值為 120 $\Omega$ 、350 $\Omega$ 及 1000 $\Omega$ 時使用)、半橋及全橋(quarter, half and full-bridge)的輸入型式,視感應器的種類、特性選擇適當的型式。

(三)應變計：Measurements Group

如照片 6.8 所示,應變計長度(gage length)共有 **8mm** (EA-06-250BF-350,分類號為 R-A44AD01,電阻值為 350.0  $\pm$  0.15% (24 $^{\circ}$ C),應變計係數(gage factor)為 2.015  $\pm$  0.5% (24 $^{\circ}$ C),最大可量測應變約為 0.05)、**3.2mm** (CEA-06-125UW-120,分類號為 R-A58AD816,電阻值為 120.0  $\pm$  0.3% (24 $^{\circ}$ C),應變計係數為 2.070  $\pm$  0.5% (24 $^{\circ}$ C),最大可量測應變約為 0.05)及 **1.6mm** (EA-13-060LZ-120,分類號為 R-A55AF501,電阻值為 120.0  $\pm$  0.3% (24 $^{\circ}$ C),應變計係數為 2.125  $\pm$  0.5% (24 $^{\circ}$ C),最大可量測應變約為 0.03)等三種,其精

確度差異不大，惟模型或試體之斷面尺寸較小時，採用長度較短之應變計黏貼較為合適。應變計訊號線接至 2100 訊號調節放大器後之應變量與電壓值之關係為  $1000 \mu/V$ 。

本次試驗之取樣週期設定為  $\Delta t = 0.2 \mu \text{ sec}$  (取樣頻率為  $f = 1/\Delta t = 5 \text{ MHz}$ ，訊號之最大截止頻率為  $f_c = 1/(2\Delta t) = 2.5 \text{ MHz}$ )，示波器之水平軸(時間)每一格 (division) 設定為  $0.0005 \text{ sec}$ ，螢幕上共有 10 格，故總取樣時間為  $0.005 \text{ sec}$ 。垂直軸(電壓)每一格 (division) 設定為  $0.05 \text{ V}$ ，螢幕上共有 8 格，故電壓值之量測範圍為  $\pm 0.2 \text{ V}$ ，相當於應變之量測範圍為  $\pm 200 \mu$ 。由於波在鋁構架中傳遞的速度約為  $5091.8 \text{ m/sec}$ ，稍縱即逝，因此無法以人工(手動)的驅動方式擷取應變歷時記錄。當質塊吊掛完成後(靜力狀態)，吾人可利用示波器之觸發功能設定，選擇單一模式 (single)，同時將觸發準位(trigger level)設定為  $-0.005 \text{ V}$  (僅針對本試驗)，此時示波器處於預備狀態；當釣魚線被燒斷瞬間，鋁構架模型將受到衝擊載重的作用，節點 9 附近之應變計會偵測到一大於  $-0.005 \text{ V}$  之訊號，此時示波器便同步擷取螢幕上 10 格之應變歷時資料一次，並將應變訊號(電壓值)顯示在螢幕上。試驗完成後，吾人可透過示波器後面之 RS232 接附(照片 6.6(b))以傳輸線將示波器所擷取的資料傳送至電腦儲存，以便吾人進行後續之訊號處理與分析。

圖 6.2~圖 6.11 為衝擊力試驗與理論分析應變值之比較，圖中所示之應變結果已先行將原始資料  $50,000 \text{ Hz}$  ( $f_c/50 \text{ Hz}$ ) 以上之高頻雜訊過濾掉。由圖可知，在軸向波與彎矩波所引起之應變方面，試驗結果與理論分析結果二者的趨勢極為相符，大趨勢可充分掌握，惟理論分析的結果較為平滑，試驗的結果則有較高頻的波動反應。此外，由於試驗的環境與儀器設備難免會受到雜訊或是電磁波的干擾，吾人於鋁構架模型未受力前所量測得之應變值約為  $4 \sim 5 \mu$ ，可視為雜訊干擾。一般而言，彎矩波所引起之應變較軸向波所引起之應變大，本次試驗彎矩波所引起之應變可達  $150 \mu$  (柱桿件 8-9)，噪訊比(signal to noise ratio)相對而言較大，因此訊號的趨勢較為清晰。

## 6.5 三維鋁模型構架之衝擊載重試驗(實心斷面)

實心斷面之兩層樓鋁模型剛架係由八根橫梁與八根柱子所構成，與空心斷面之鋁模型剛架相同，平面尺寸為  $50 \text{ cm} \times 80 \text{ cm}$ ，惟樓層高度變更為  $80 \text{ cm}$ ，總樓高為  $160 \text{ cm}$ 。梁、柱構件均使用相同斷面之實心鋁方管，其斷面尺寸為

1.9cm×1.9cm(長×寬)。鋁之材料性質如表 6.2 所示。

吾人於柱桿件 7-8(距節點 7 約 20cm 之前、後兩面)、柱桿件 8-9(距節點 8 約 20cm 之前、後兩面)、柱桿件 4-5(距節點 4 約 20cm 之前、後兩面)及梁桿件 8-11(距節點 8 約 40cm 之上、下兩面)等 4 處各黏貼一對電阻式應變計(共 8 枚，方向與桿件之軸向平行)，俾便將衝擊力試驗之應變結果與迴傳波射動力分析所得之應變結果進行比較。

觸發訊號(trigger source)的產生吾人嘗試兩種方法，其一為製作一電路，電路中串接一顆 1.5V 之乾電池，當魚線燒斷時，原導通之電路瞬間變成短路，電壓由 1.5V 驟降至 0V，如此可產生一觸發訊號源並傳送至示波器之外部觸發通道，此時示波器便可同步擷取應變資料。由於電壓驟降的結果(相當於產生一巨大的磁場)，使得應變計訊號於觸發瞬間有一突波產生(圖 6.12)，須使用昂貴的濾波器加以克服。因此初步排除此一構想，而以方案二進行試驗。吾人於節點 9 下方約 2.5cm 處額外黏貼一枚壓電式應變計作為觸發訊號，當釣魚線燒斷時，該應變計偵測到一應變訊號並立即傳送至示波器之外部觸發通道，此時示波器便可同步擷取應變資料。吾人可於試驗前首先擷取觸發訊號，得知觸發訊號振動的方向及大小，如圖 6.13 所示，以期能夠設定較佳之觸發準位，於釣魚線燒斷瞬間即開使擷取各應變計的訊號，若觸發準位設定太大，則無法計錄到魚線真正燒斷時之應變訊號，所擷取之訊號與理論分析的結果將有一時間差存在。本試驗之觸發準位電壓設定為 0.05V，驟加衝擊力試驗所使用之儀器設備同 6.4 節所述。

圖 6.14~圖 6.17 為衝擊力試驗與理論分析應變值之比較(由軸向波與彎矩波共同引起)。由圖可知，試驗結果與理論分析結果二者的趨勢極為相符，尤其柱桿件 8-9 之試驗應變值與理論分析的結果於 50 個正規化時間內契合的程度相當良好，顯示本試驗觸發訊號的產生及試驗架構的設置相當理想，試驗的結果可充分反應出應力波動的特性，惟部份試驗結果於 100 個正規化時間之後與理論分析的結果(柱 8-9、柱 7-8-Back、梁 8-11-Top)差異較為明顯，是否為應變計黏貼上的瑕疵或是數值分析之迴傳次數( $N = 30$  次)所造成，可進一步更換應變計再另行試驗確認。此外，由試驗的結果亦可發現，應變訊號抖動的情形已顯少發生，說明鋁構架模型採用空心斷面或是實心斷面製作，其應力波動的特性將有所差異。

## 第七章 結論

本計劃全程三年，規劃之研究項目包括靜力載重試驗及衝擊載重(階梯式驟加外力)試驗等。本研究完成：應力波傳之理論分析程式(靜力與動力分析)、三維鋁模型剛架之製作、波動量測儀器之採購、靜力試驗及衝擊載重試驗(含空心與實心構材斷面)。根據理論分析與試驗的結果，吾人歸納以下結論：

- (1) 迴傳矩陣法(Reverberation Matrix Method, RMM)分析所得之結果與有限元素軟體 SAP2000 分析所得之結果相當一致；兩層樓三維鋁模型剛架之靜力試驗結果顯示，試驗與理論分析結果契合的程度相當高，印證以迴傳矩陣法分析靜力結構之精確性。
- (2) 利用釣魚線懸吊質塊，並以噴燈迅速將釣魚線燒斷之驟加衝擊力機構相當穩定，每次試驗所產生之衝擊力約略相等，有助於重複進行相同的試驗。此外，觸發訊號的設計可在衝擊力施加於結構的瞬間即開始擷取資料。
- (3) 空心斷面之兩層樓三維鋁模型構架之驟加衝擊載重試驗顯示，試驗結果與理論分析結果二者的趨勢極為相符，大趨勢可充分掌握，惟理論分析的結果較為平滑，試驗的結果則有較多高頻的波動反應。
- (4) 實心斷面之兩層樓三維鋁模型構架之驟加衝擊載重試驗顯示，試驗結果與理論分析結果二者的趨勢極為相符，試驗應變值與理論分析的結果於 50 個正規化時間內契合的程度相當高。此外，應變訊號抖動的情形已顯少發生，說明鋁構架模型採用空心斷面或是實心斷面製作，其應力波動的特性將有所差異，空心斷面之高頻波動之特性須另外建立理論分析模型加以考慮。



## 參考文獻

- [1] E. C. Pestal and F. A. Leckie, “Matrix Methods in Elastomechanics”, McGraw-Hill, New York, Chap. 4, 1963.
- [2] 柯德清, 「彈性波在三維剛架內之傳播與結構動應力分析」, 博士論文 - 國立台灣大學應用力學研究所, 1996。
- [3] N. Davids, “Transient Analysis of Stress-Wave Penetration in Plates”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 26, 1978, pp. 441-452.
- [4] B. R. Mace, “Wave Reflection and Transmission in Beams”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 97, No. 2, 1984, pp. 237-246.
- [5] C. R. Steele, “The Finite Beam with a Moving Load”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 34, 1967, pp. 111-118.
- [6] X. Y. Su and Y. H. Pao, “Ray, Normal Mode and Hybrid Analysis of Transient Waves in a Finite Beam”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 151, No. 2, 1992, pp. 361-368.
- [7] J. Miklowitz and P. Calif, “Flexural Wave Solutions of Coupled Equations Representing More Exact Theory by Beams”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 20, 1953, pp. 511-514.
- [8] J. F. Doyle, “Wave Propagation in Structure: An FFT-Based Spectral Analysis Methodology”, Springer-Verlag, New York, Chap. 5, 1989.
- [9] J. P. Lee and H. Kolsky, “The Generation of Stress Pulses at the Junction of Two Noncollinear Rods”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 39, 1972, pp. 809-813.
- [10] T. P. Desmond, “Theoretical and Experimental Investigation of Stress Waves at a Junction of Three bars”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 48, 1981, pp. 148-154.
- [11] K. H. Yong and K. J. Atkins, “Generation of Elastic Stress Waves at a Corner Junction of Square Rods”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 84, No. 3, 1982, pp. 431-441.
- [12] K. H. Yong and K. J. Atkins, “Generation of Elastic Stress Waves at a T-Junction of Square Rods”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 88, No. 4, 1983, pp. 431-436.
- [13] K. R. Y. Simha and W. L. Fourny, “Investigation of Stress Wave Propagation through Intersecting Bars”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, 1984, pp. 345-353.
- [14] J. F. Doyle and S. Kamle, “An Experimental Study of the Reflection and Transmission of Flexural Waves at Discontinuities”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, 1985, pp. 669-673.

- [15] I. T. Lu and L. B. Felsen, "Ray, Mode, and Hybrid Options for Source Excited Propagation in an Elastic Plate", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 78, No. 2, 1985, pp. 701-714.
- [16] B. A. Boley and C. C. Chao, "Impact on Pin-Jointed Trusses", *American Society of Civil Engineers Transactions*, Vol. 122, 1957, pp. 39-63.
- [17] A. H. von Flotow, "Disturbance Propagation in Structural Networks", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 106, No. 3, 1986, pp. 433-450.
- [18] S. Gopalakrishnan, M. Martin and J. F. Doyle, "A Matrix Methodology for Spectral Analysis of Wave Propagation in Multiple Connected Timoshenko Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 158, No. 1, 1992, pp. 11-24.
- [19] R. J. Nagem and J. H. Williams, "Dynamic Analysis of Large Space Structures Using Transfer Matrices and Joint Coupling Matrices", *Mechanics of Structures and Machines*, Vol. 17, No. 3, 1989, pp. 349-371. Mechanics of structures and machines
- [20] S. M. Howard, "Transient Stress Waves in Trusses and Frames, " *Ph.D. Dissertation*, Cornell University, Ithaca, NY, 1990.
- [21] S. M. Howard and Y. H. Pao, "Analysis and Experiments on Stress Waves in Planar Trusses", *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 124, No. 8, 1998, pp. 884-891.
- [22] Y. H. Pao, D. C. Keh and S. M. Howard, "Dynamic Response and Wave Propagation in Plane Trusses and Frames", *AIAA Journal*, Vol. 37, No. 5, 1999, pp. 594-603.
- [23] R. D. Mindlin and G. Herrmann, "A One-Dimensional Theory of Compressional Wave in an Elastic Rods", *Proceedings of the First U. S. Congress of Applied Mechanics*, 1951, pp. 187-191.
- [24] W. K. Cornelus and W. K. Kubitza, "Experimental Investigation of Longitudinal Wave Propagation in an Elastic Rod with Coulomb Friction", *Experimental Mechanics*, Vol. 10, 1970, pp. 137-144.
- [25] Aslam Kassimali, "Matrix Analysis of Structures", Brooks/Cole Publishing Company, California, Chap.7 & 8, 1999.
- [26] G. J. Borse, "Numerical Methods with MATLAB: A Resource for Scientists and Engineers", PWS Publishing, Boston, Chap. 3, 1997.
- [27] Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer with John R. Buck, "Discrete-time Signal Processing", Prentice Hall, New Jersey, 2<sup>nd</sup> edition, 1999.

表 6.1 鋁材之材料性質(空心斷面)

物 理 量	大 小
楊氏模數	$70\text{ GPa}$
剪力模數	$26\text{ GPa}$
密 度	$2700\text{ kg/m}^3$
斷面尺寸	$2.5\text{ cm} \times 2.5\text{ cm} \times 0.2\text{ cm}$
斷 面 積	$1.840\text{ cm}^2$
慣 性 矩	$1.635\text{ cm}^4$
極慣性矩	$3.270\text{ cm}^2$
剪力係數 $\kappa$	$\pi^2/12$
卜桑比 $\nu$	0.348

表 6.2 鋁材之材料性質(實心斷面)

物 理 量	大 小
楊氏模數	$70\text{ GPa}$
剪力模數	$26\text{ GPa}$
密 度	$2700\text{ kg/m}^3$
斷面尺寸	$1.9\text{ cm} \times 1.9\text{ cm}$
斷 面 積	$3.61\text{ cm}^2$
慣 性 矩	$1.086\text{ cm}^4$
極慣性矩	$2.172\text{ cm}^2$
剪力係數 $\kappa$	$\pi^2/12$
卜桑比 $\nu$	0.348

### Spectrum Relations for the Timoshenko Beam Theory

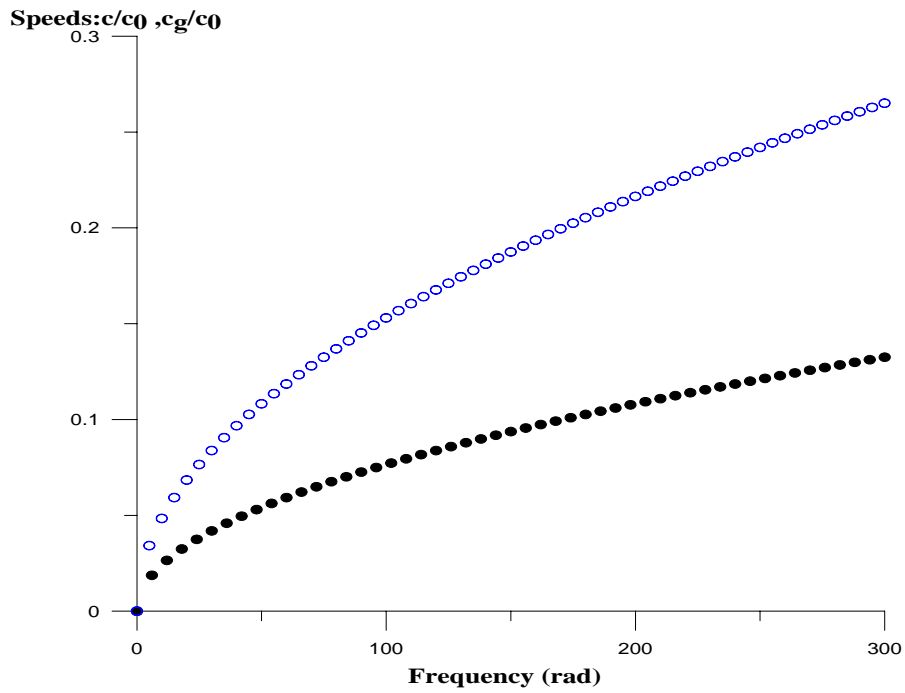


圖 2.3 白努利樑的撓曲波波速與頻率的關係

### Spectrum Relations for the Timoshenko Beam theory without Damping

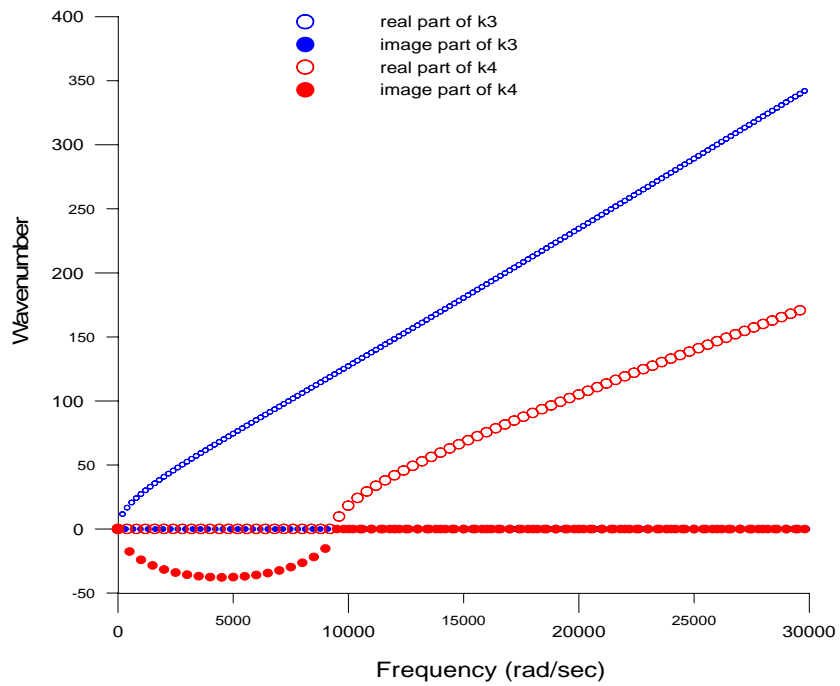


圖 2.4 提摩盛科樑的撓曲波波數與頻率的關係(無阻尼)

### Spectrum Relations for the Timoshenko Beam Theory

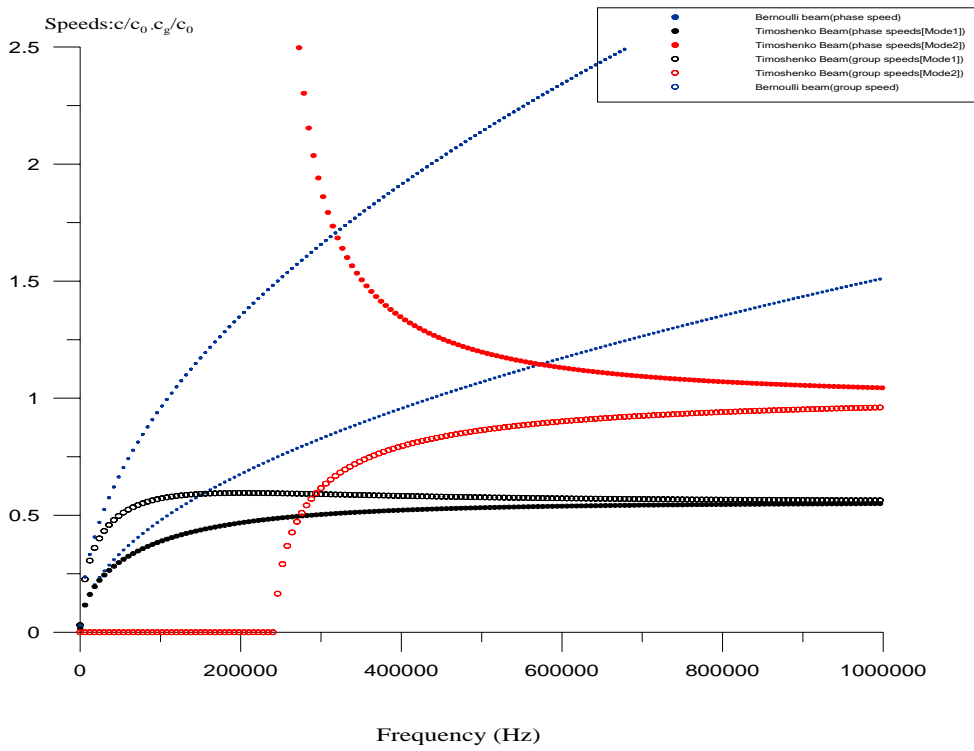


圖 2.5 提摩盛科樑的撓曲波波速與頻率的關係

### Spectrum Relations for the Timoshenko Beam theory with Damping

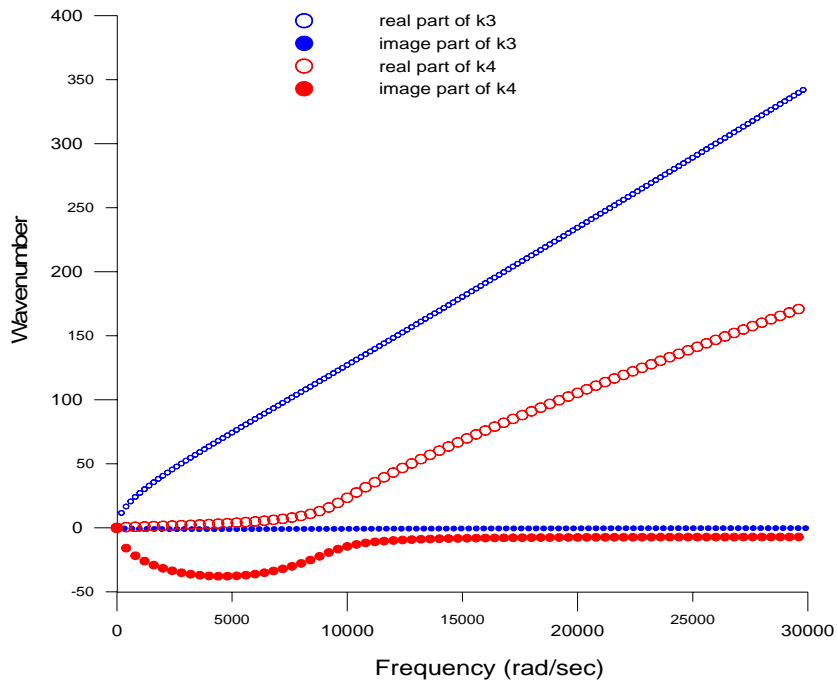


圖 2.6 提摩盛科樑的撓曲波波速與頻率的關係(有阻尼)

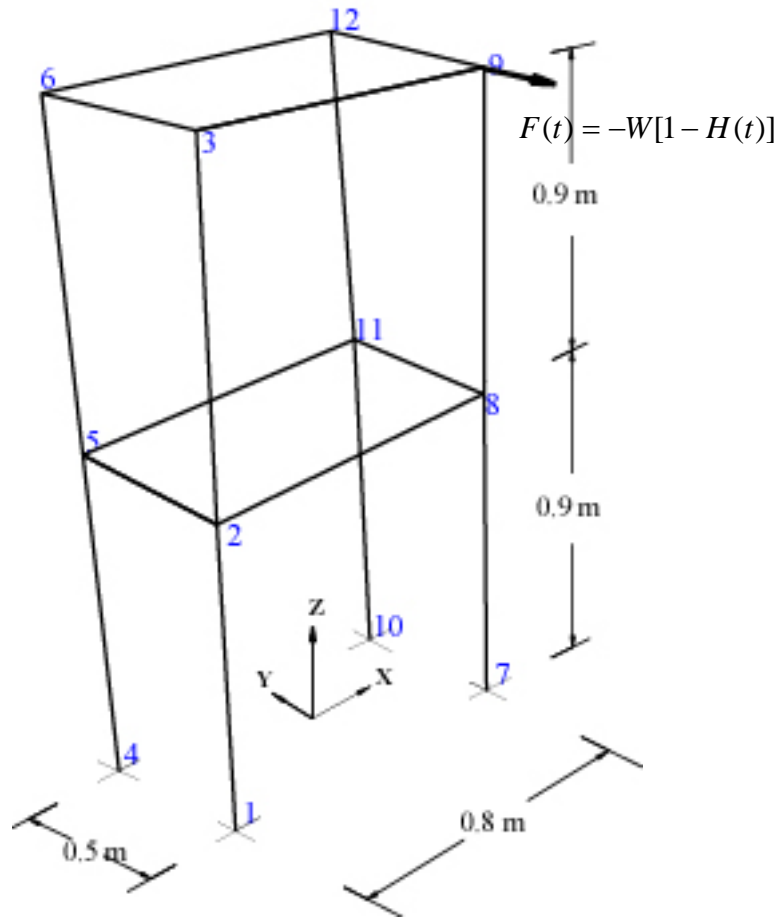


圖 2.7 三維剛架結構

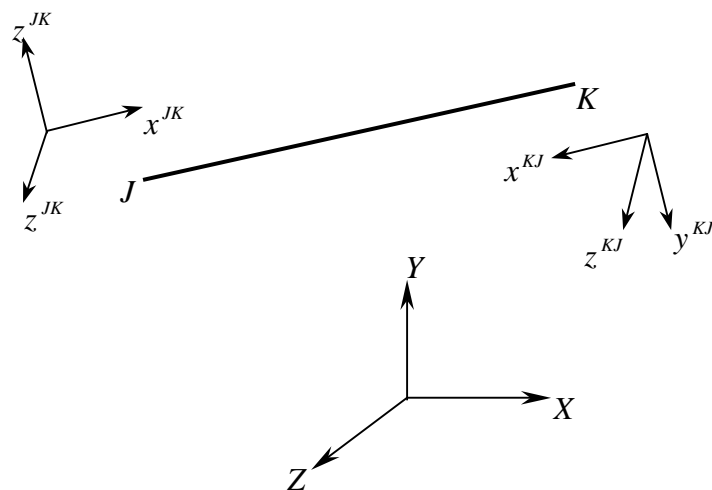


圖 2.8 桿件的座標系統

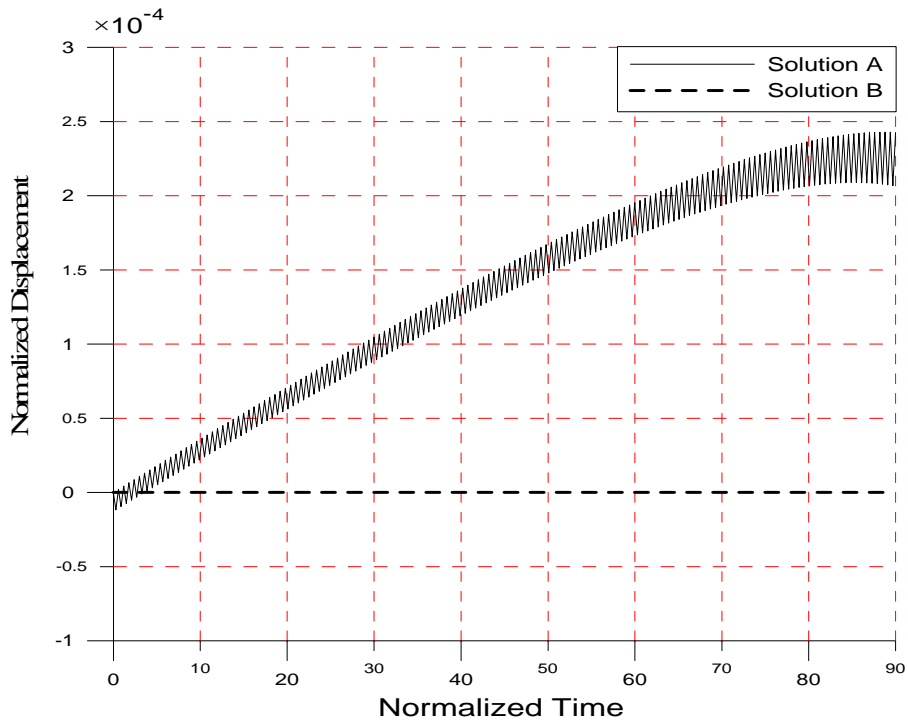


圖 4.2 節點 1 的垂直位移。—— 解  $a_A$  ; - - - - -  $a_B$

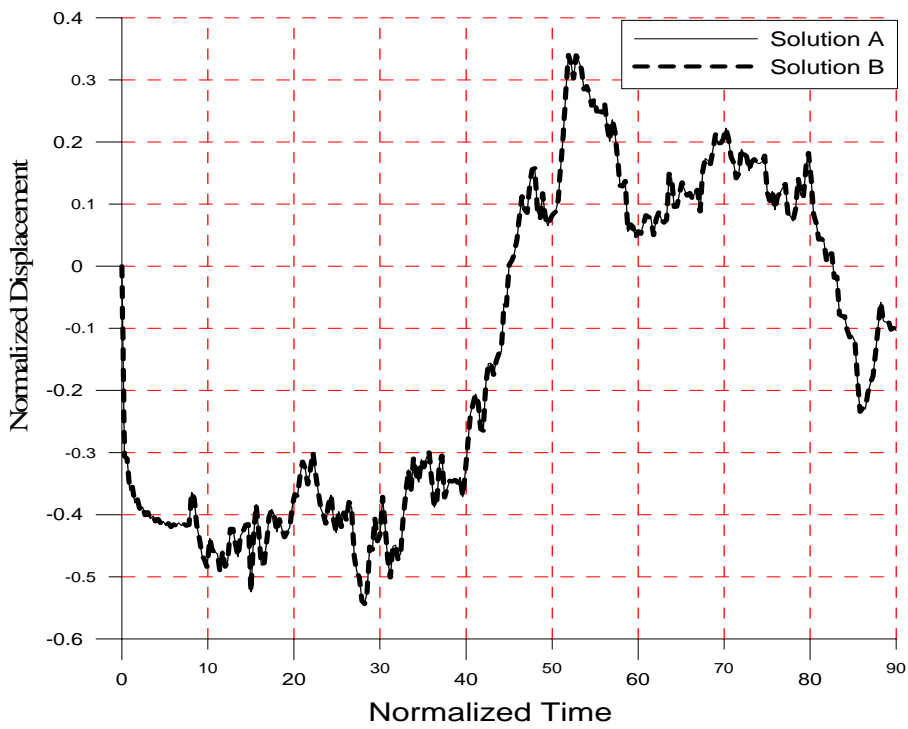


圖 4.3 節點 6 的垂直位移。—— 解  $a_A$  ; - - - - -  $a_B$





照片 6.1(a) 鋁模型剛架



照片 6.1(b) 鋁模型剛架(短向)



照片 6.1(c) 鋁模型剛架(長向)

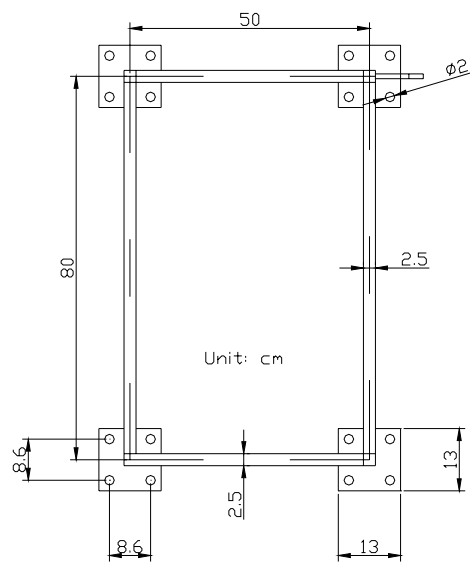


圖 6.1(a) 鋁模型剛架(上視圖)

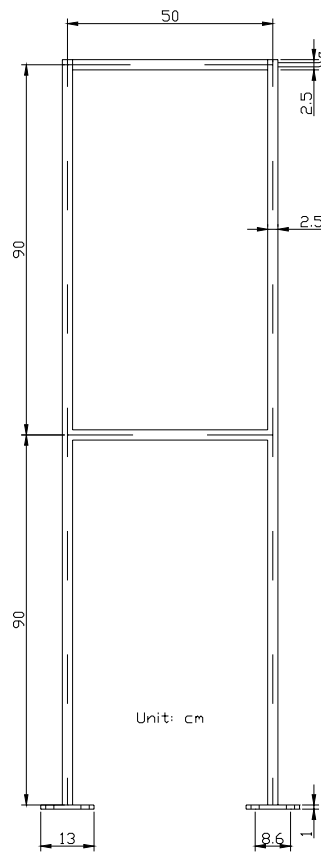


圖 6.1(b) 鋁模型剛架-側視圖(短向)

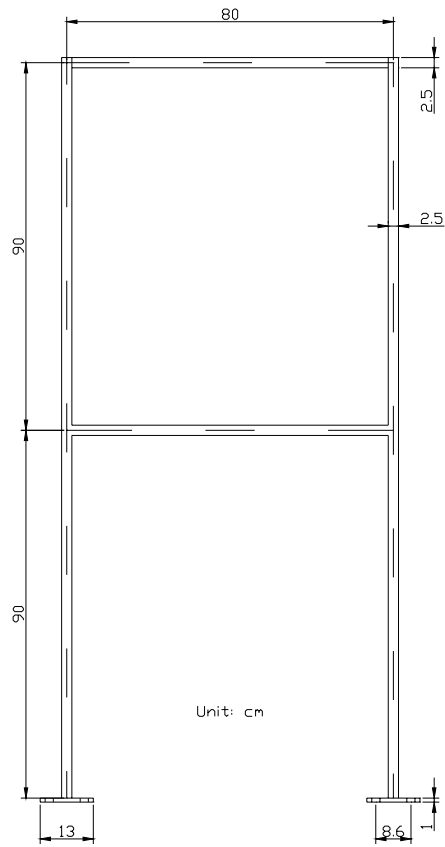


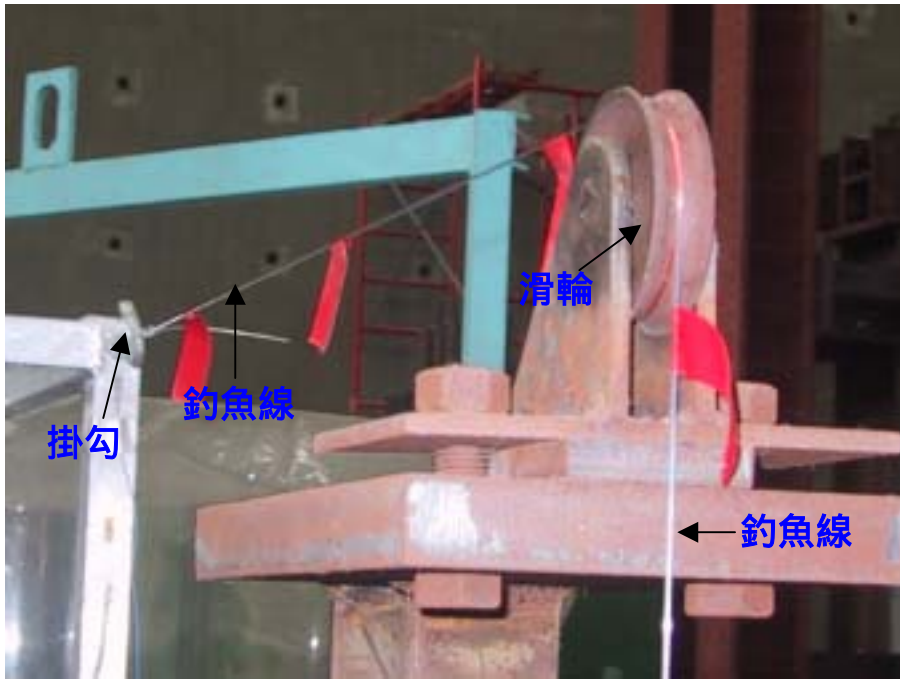
圖 6.1(c) 鋁模型剛架-側視圖(長向)



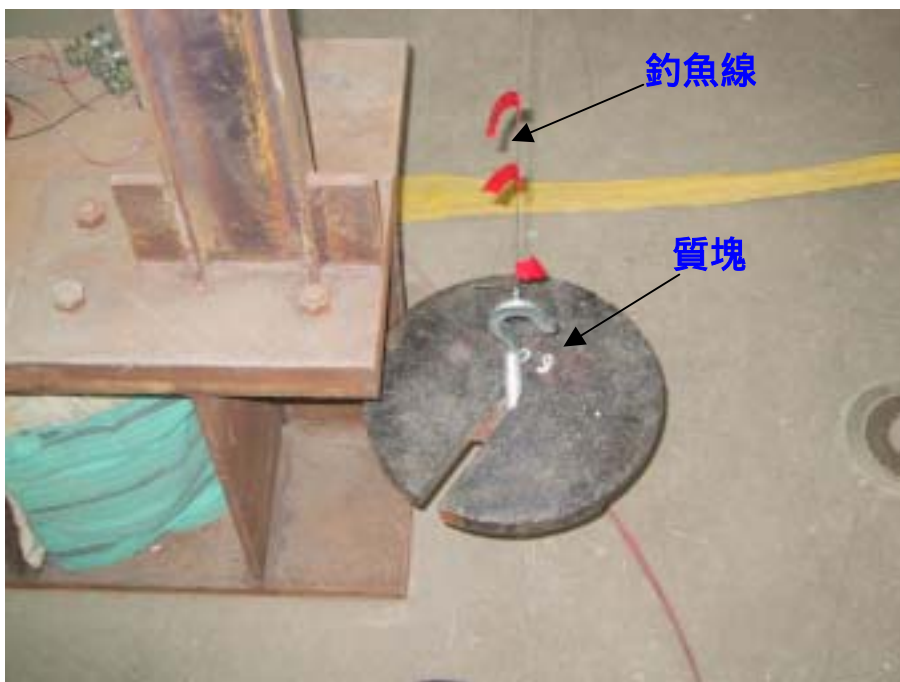
照片 6.2(a) 加載機構



照片 6.2(b) 釣魚線固定於掛勾



照片 6.2(c) 釣魚線跨過滑輪



照片 6.2(d) 釣魚線懸吊質塊



照片 6.2(e) 質塊



照片 6.3 噴燈及釣魚線





照片 6.4(a) 黏貼於鋁構架模型之應變計



照片 6.4(b) 黏貼於鋁構架模型之應變計



照片 6.5 衝擊載重試驗之儀器設備



照片 6.6(a) 高頻示波器(前視)



照片 6.6(b) 高頻示波器(後視)



照片 6.7(a) 訊號調節放大器-惠斯敦電橋(前視)



照片 6.7(b) 訊號調節放大器-惠斯敦電橋(後視)



照片 6.8 應變計及軍用接頭

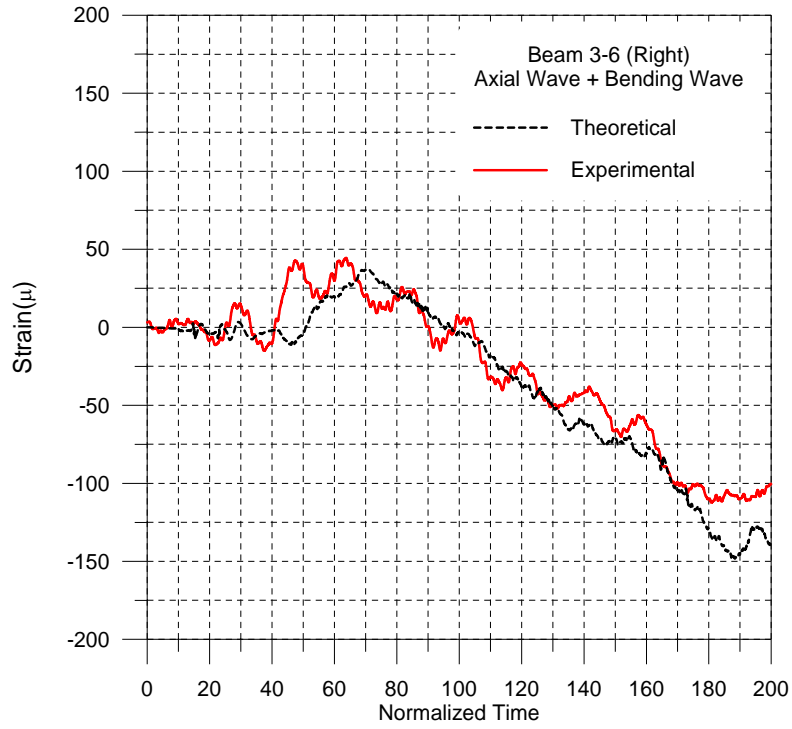


圖 6.2 軸向波與彎矩波產生之應變(梁桿件 3-6-Right)

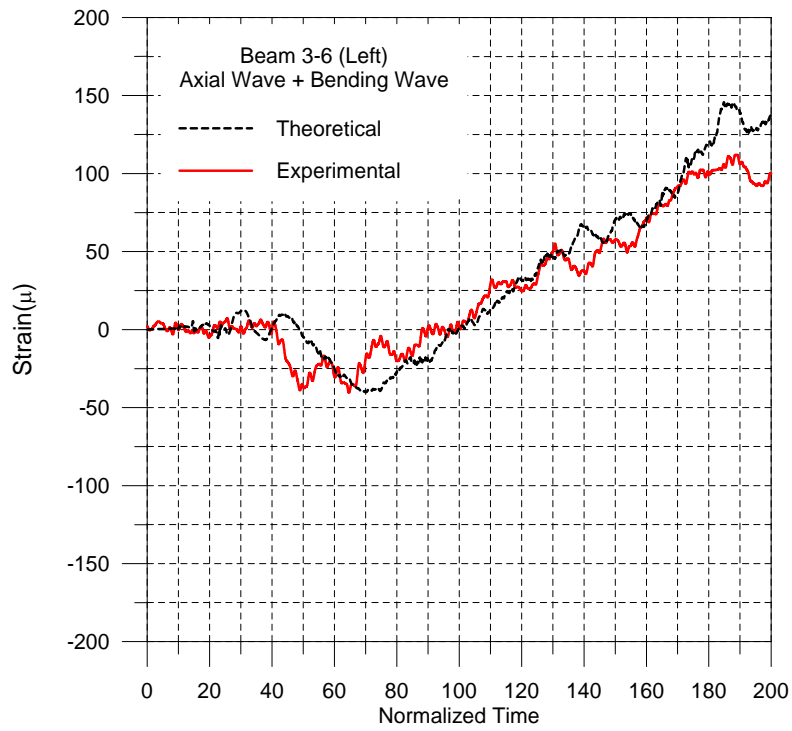


圖 6.3 軸向波與彎矩波產生之應變(梁桿件 3-6-Left)



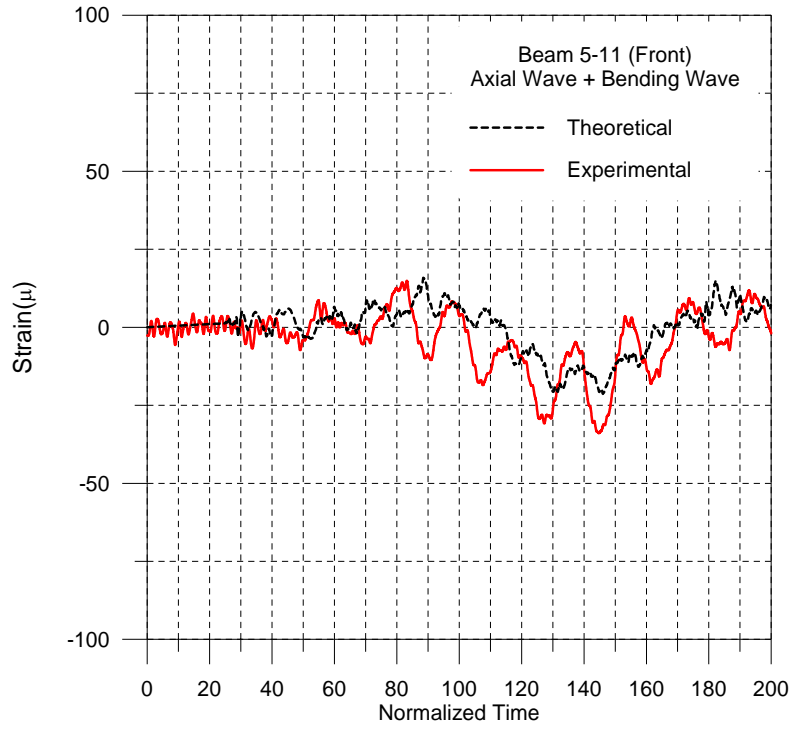


圖 6.4 軸向波與彎矩波產生之應變(梁桿件 5-11-Front)

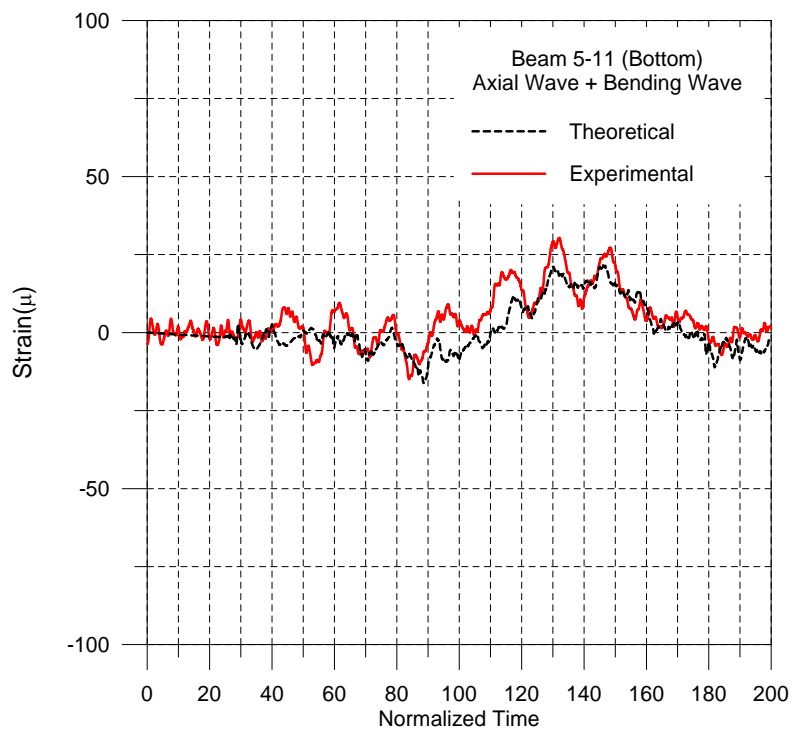


圖 6.5 軸向波與彎矩波產生之應變(梁桿件 5-11-Bottom)

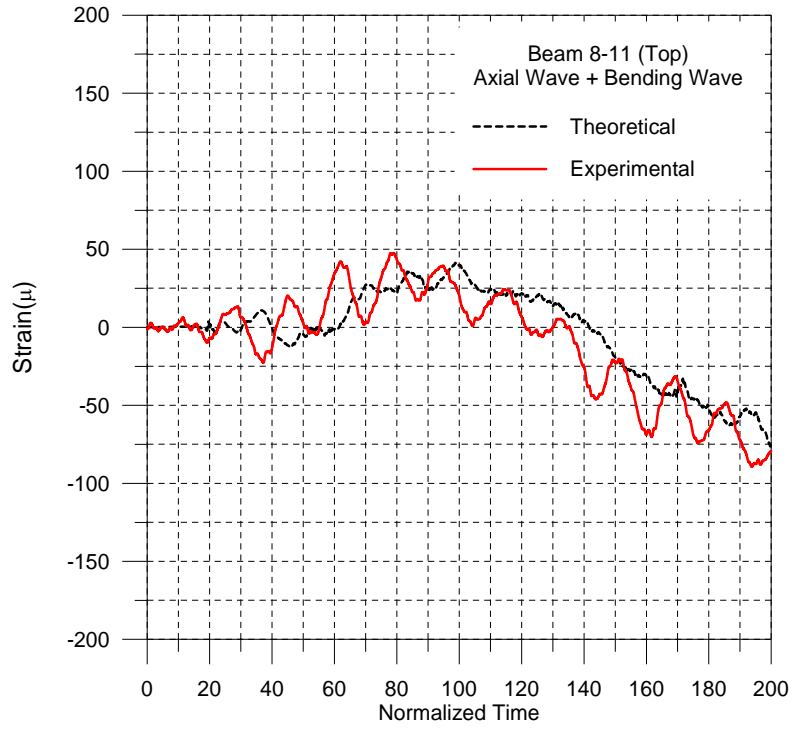


圖 6.6 軸向波與彎矩波產生之應變(梁桿件 8-11-Top)

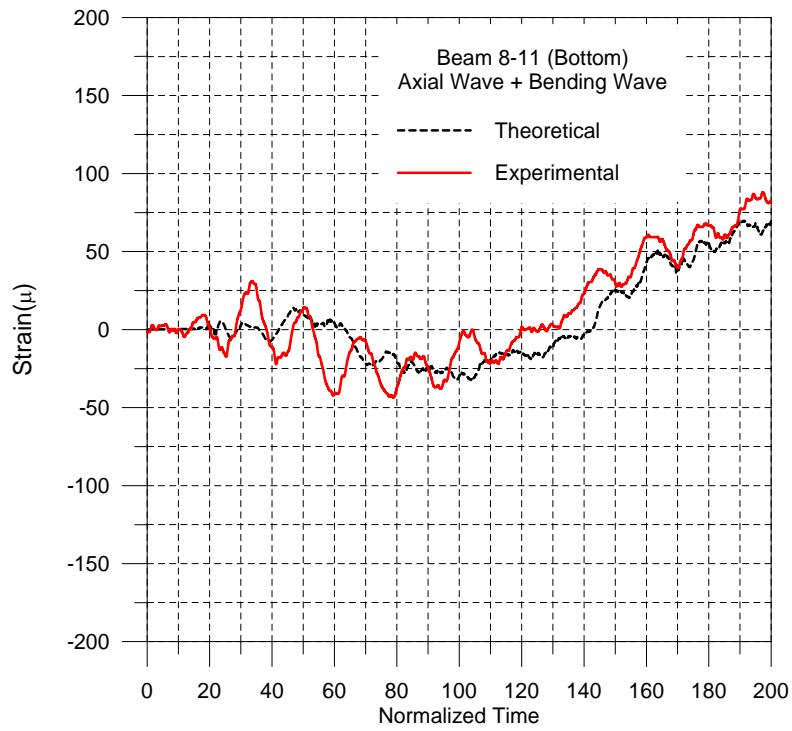


圖 6.7 軸向波與彎矩波產生之應變(梁桿件 8-11-Bottom)

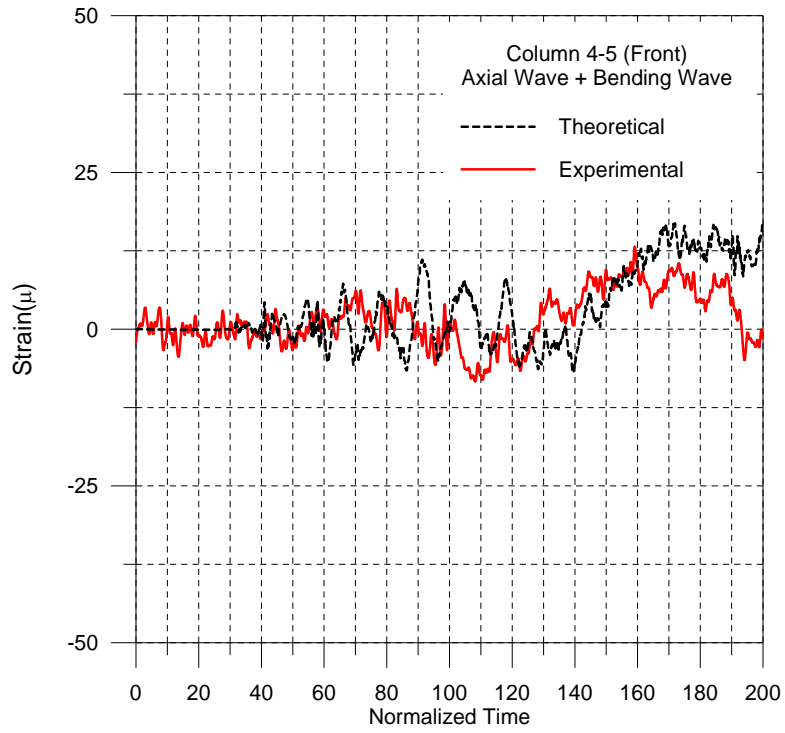


圖 6.8 軸向波與彎矩波產生之應變(柱桿件 4-5-Front)

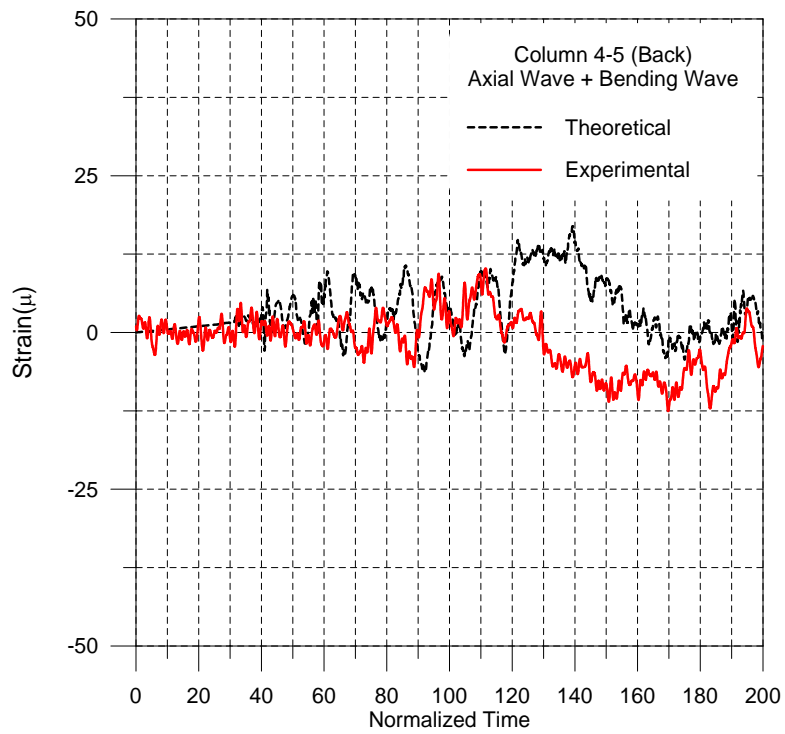


圖 6.9 軸向波與彎矩波產生之應變(柱桿件 4-5-Back)



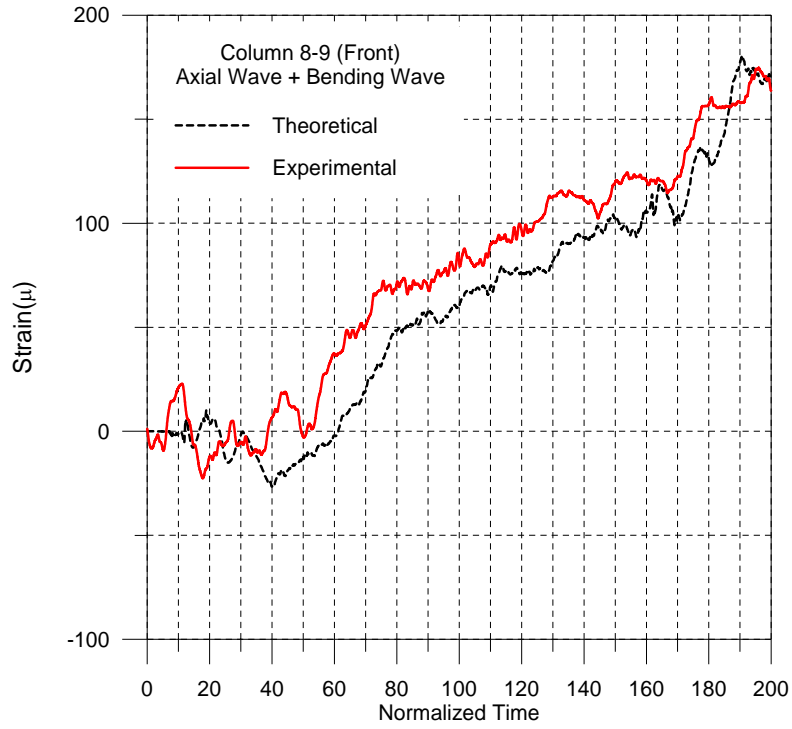


圖 6.10 軸向波與彎矩波產生之應變(柱桿件 8-9-Front)

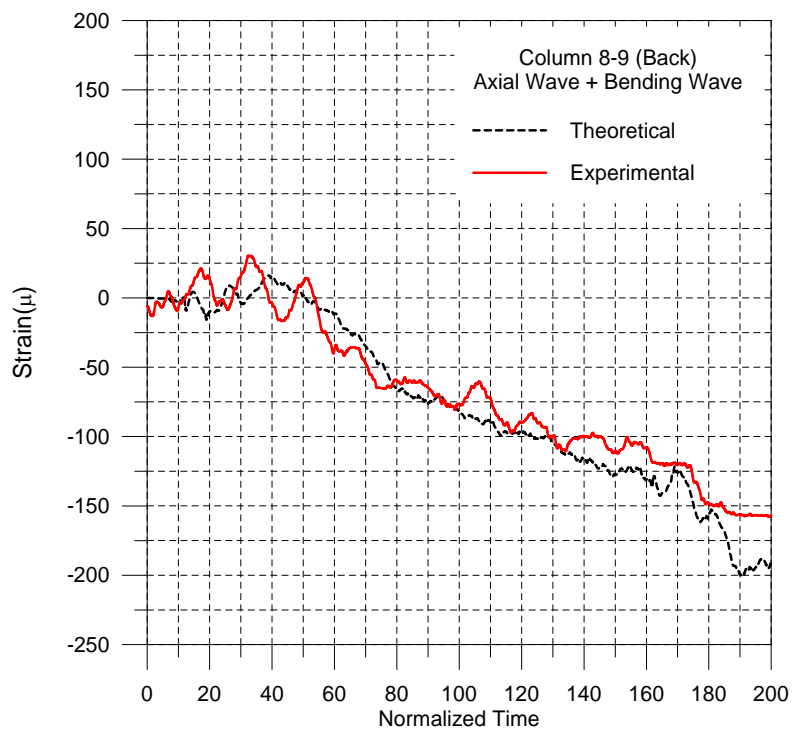


圖 6.11 軸向波與彎矩波產生之應變(柱桿件 8-9-Back)

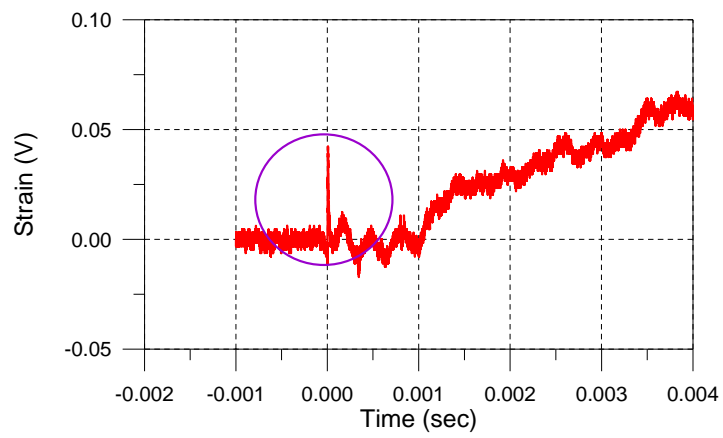
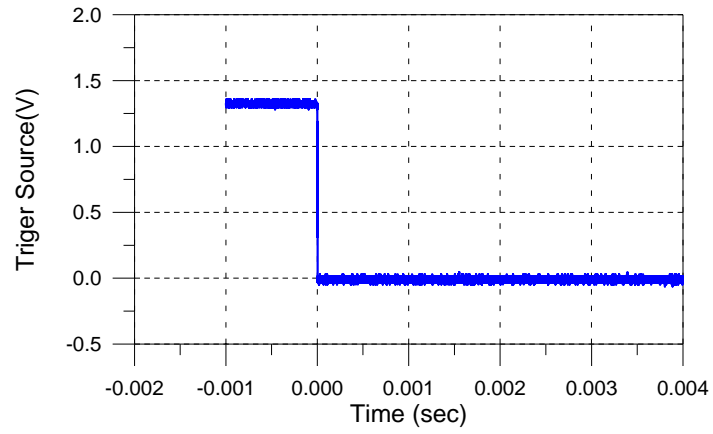


圖 6.12 觸發訊號源之製作

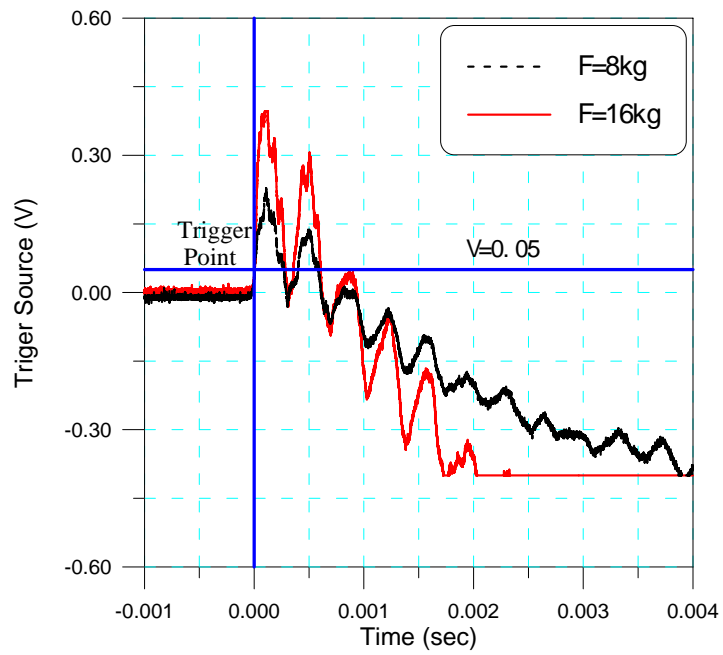


圖 6.13 壓電式應變計觸發訊號源之歷時

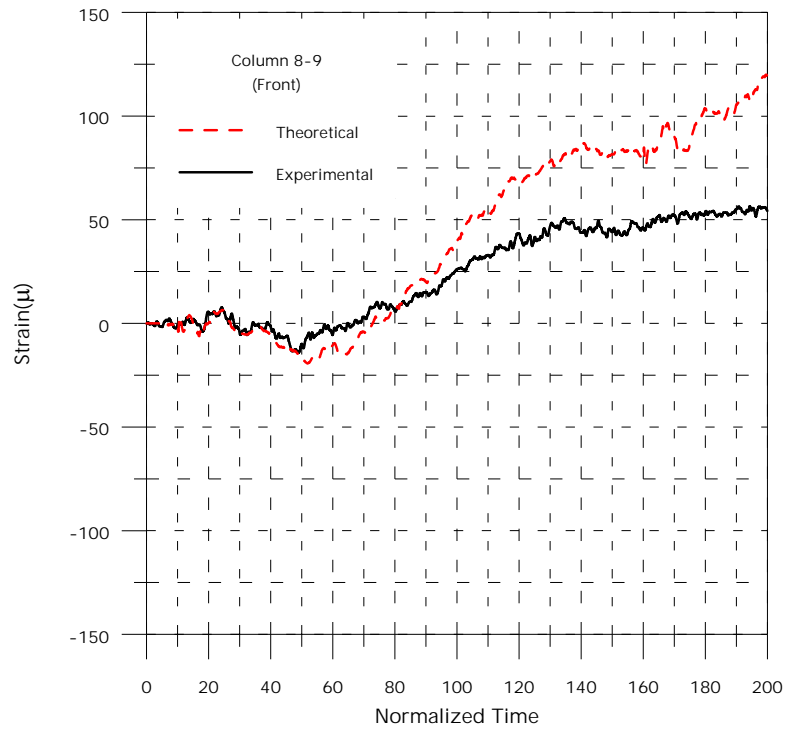


圖 6.14(a) 軸向波與彎矩波產生之應變(柱桿件 8-9-Front)

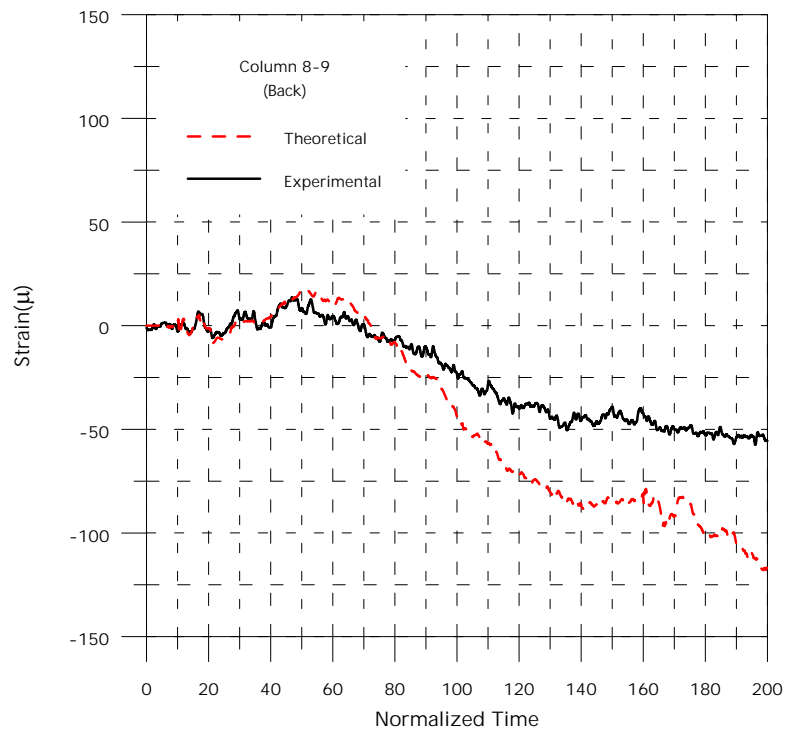


圖 6.14(b) 軸向波與彎矩波產生之應變(柱桿件 8-9-Back)

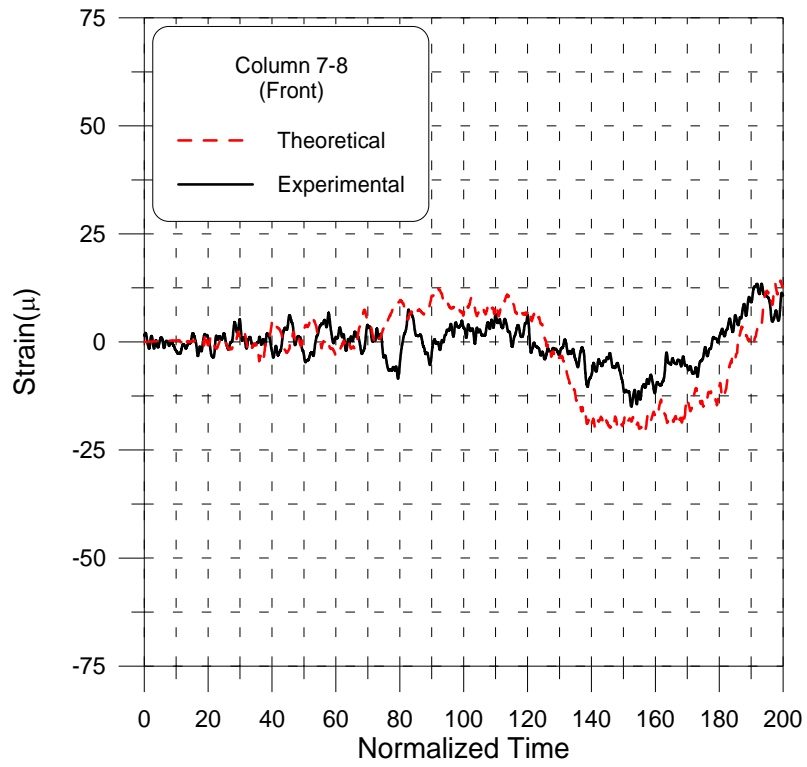


圖 6.15 (a) 軸向波與彎矩波產生之應變(柱桿件 7-8-Front)

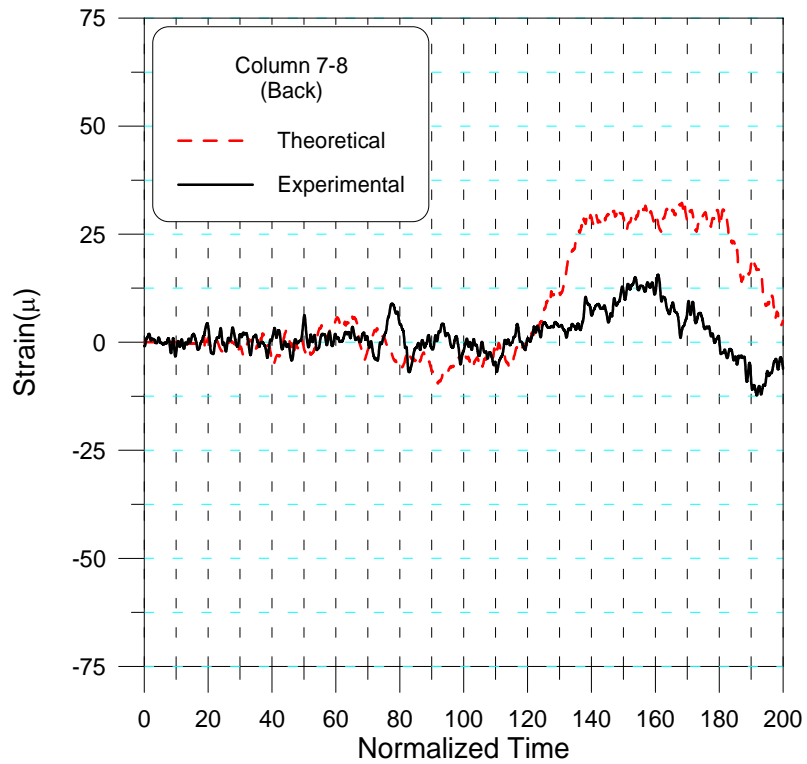


圖 6.15 (b) 軸向波與彎矩波產生之應變(柱桿件 7-8-Back)

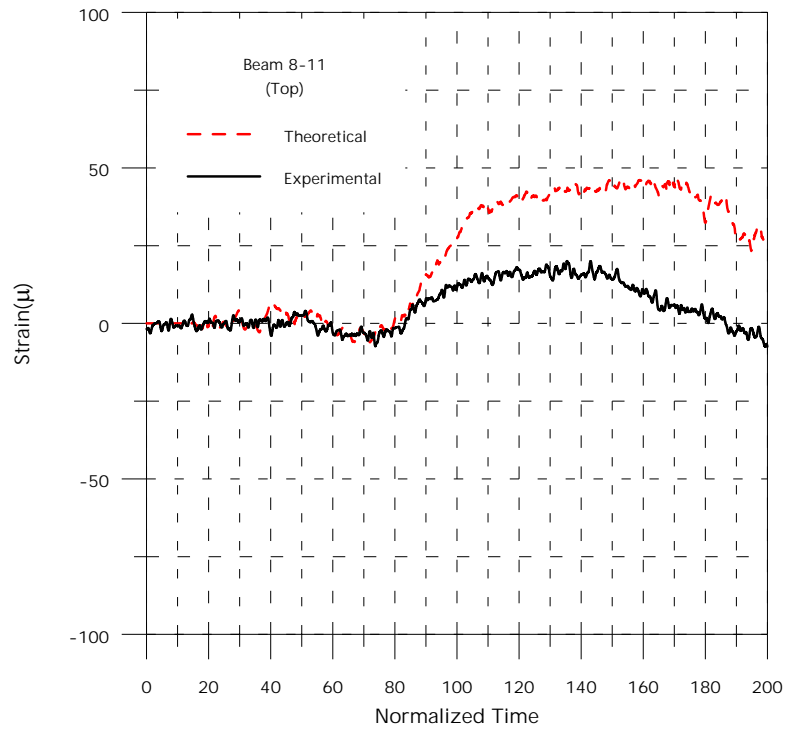


圖 6.16 (a) 軸向波與彎矩波產生之應變(梁桿件 8-11-Top)

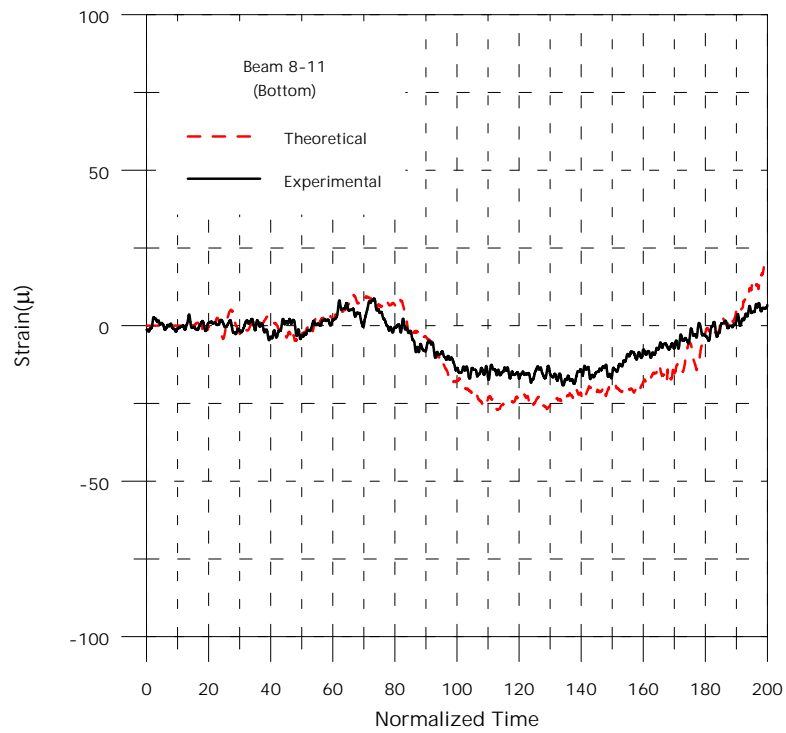


圖 6.16 (b) 軸向波與彎矩波產生之應變(梁桿件 8-11-Bottom)

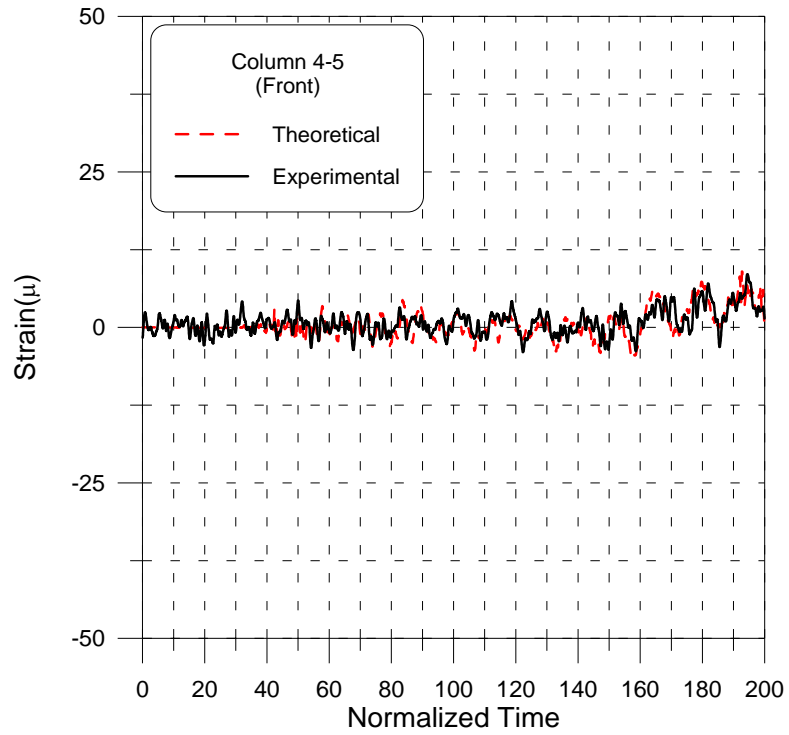


圖 6.17(a) 軸向波與彎矩波產生之應變(柱桿件 4-5-Front)

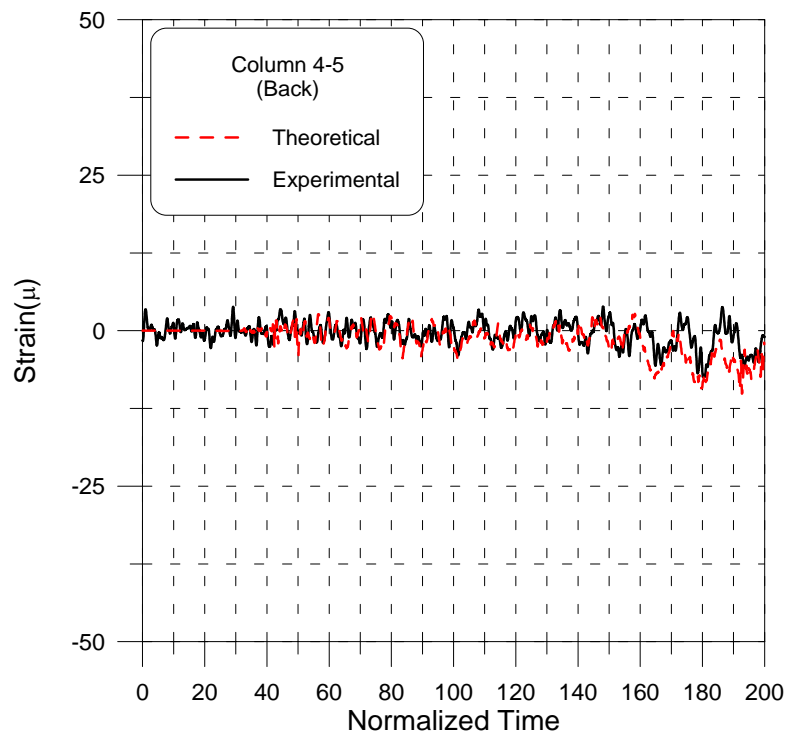


圖 6.17(b) 軸向波與彎矩波產生之應變(柱桿件 4-5-Back)