

專 論

利用模糊集理論推估河川流量之研究

A Study of Fuzzy Set Theory for Streamflow Forecast

國立臺灣大學農業工程學系副教授

張 斐 章

Fi-John Chang

國立臺灣大學農業工程學系研究助理

徐 國 麟

Kuo-Lin Hsu

摘 要

傳統的集合理論，對事件之發生，以邏輯之「真」與「偽」來命題，此一邏輯之判斷方式，對於事件本身具有含糊概念時，其便無法處理的很好。模糊集合理論之主要概念，乃是以一從屬函數來描述一事件出現之關連程度。因此，其命題可以非絕對之「真」或「偽」決定，而以具有某種程度的真實性來描述之。因而，其提供專家系統建立者對於不精確及不確定之資料處理或不明確之語言表達方式一個極有效可行之方式。

水資源規劃常係藉由統計或數學方法以決定未來氣象或流量發生之情況（或大小等級），但實際運轉上並沒有一個客觀準則可決定大小等級之真確數值，因這之間隱含著模糊特質，故以模糊概念及經由適當之模糊分類之從屬函數將可用來分辨預測之事物。本研究以石門水庫上游的高義站月流量之推估為實證範例。結果顯示此一方法將可更精確合理的描述實際河川流量預估情況。

ABSTRACT

Classical set theory is governed by a logic that permits a proposition to possess one of only two values: "true" or "false". This logic does not accord well with the need to represent vague concepts. The key idea in fuzzy set theory is that an element has a degree of membership in a fuzzy set. Thus a proposition need not be simply true or false, but may be partly true to any degree. Consequently, fuzzy reasoning is specifically designed to deal with the inexactness (or fuzziness) that is present in the knowledge used by human experts. The concept of fuzzy logic will assist expert system builders greatly in the handling of imprecise and inexact data as well as linguistic imprecision.

In water resource planning, the grades of weather or streamflow conditions are estimated or classified by mathematical or statistical methods. However, there is no strict demarcation line for the classification of a forecasting object. Hence the concepts involve fuzziness. If fuzzy concept is used to the classification of forecasting are designed correspondingly, we can make a stream forecast of

classification by the method of fuzzy mathematics. The monthly streamflow of the Kaohsiung station which is an upper station of the Shih-Men reservoir is used as a case study. The result shows that method can more precisely represent the practical case of the streamflow forecast.

一、前 言

真實系統常無法精確的被模擬或描述，主要的原因是人們僅能以可獲得之片段，有限資料來了解或模擬該系統；以部份之偵測訊息，來揣測實物世界之狀況，就好像盲人摸象一般，由其部份之概念推論「象」應如「水管」，如「柱」，如「牆」，而其和象本身終究還是不一樣的；就如同只看到樹影子，便認為它就是樹一般，其影像與實體之間尚有一段距離存在。由於所認知的思維及感受到的觀念、圖像、聲音、味道並無法真確的用符號或語言表達出來，倘若再以日常之語言和邏輯語言比較，邏輯語言所能表達的將更為貧乏、有限，因此更無法讓原始的思維及感受能以一對一的方式對應到數學邏輯二分法觀念架構之模式，使其能完整的表現出來。

模糊集理論的產生，主要是為了避免傳統集合理論之表達方式與我們所表達或認知方式在某些方面有不一致或不切合而設計的 (Klir & Folger, 1988)。例如「晴天」之觀念，吾人可精確認定 0% 之雲遮比，可視為晴天，而在 10~20% 之雲遮比，尚可接受其為晴天，若以傳統之集合概念，假設 25% 之雲遮比以下為晴天，超過 25% 之雲遮比則被為非晴天。如此一來，26% 即不為晴天，1% 之差距，造成兩種絕然不同之判斷差異。在這裏，利用二分法的概念將全集 (Universe) 區分成兩個子集，集合中之元素，僅有兩個選擇，即「屬於」與「不屬於」的關係，其成員與非成員之間有一個十分明顯的尖銳區隔，在這一線之間，性質將完全迥異。而模糊集之理論，則以緩和之漸變關係來處理這中間的尖銳區隔變化關係，諸如上例而言，可利用一函數的方式，使其依雲遮量漸增而逐漸減弱其隸屬於晴天之關係。因而較傳統之集合理論關係更與我們的直覺感受相吻合。

模糊集自 1965 年由自動控制學家 L.A. Zadeh 提出其理論概念以後，廣受學術界的注目且以驚人的速度發展，僅 1965 至 1984 二十年間，於各領域之

專論與應用上便已達 4000 篇以上 (Lee, 1990)，其同時亦集結了其它數學理論與運作法則，而成一特殊之學問。模糊集合理論之應用，提供了一個對於各種不同層面不確定性問題的處理方法，尤其是系統不明及未定義明確的程序操作過程，可不需預知該系統內在動態運作原理與控制方程式，還是可以被有效運作處理得很好。

本研究除介紹模糊集理論之基本概念外，並將河川流量分為「不足」、「正常」與「充足」等三種狀況以引進模糊概念，配合從函數之設定而進行歸類判分，最後再與多變量常態假設之貝氏推論判別結果相互比較，以證明模糊理論之實用性。

二、模糊集理論

本節將簡述非模糊集與模糊集之基本理論概念，詳細之理論分析可參考 Zadeh (1965), Xie & Kedrosian (1984), Maiers & Sherif (1985), IBir (1988), 及 Lee (1990) 等人之著作。

2.1. 非模糊集 (Non-fuzzy Set or Classical Set)

在基本非模糊集中， U 為全集 (Universe) 代表所有之元素的集合； A 為 U 的子集 (Subset)，在 A 之元素，皆為 U 之元素，如圖 1。 x 為 U 中之元素，則 x 與 A 存在下列兩個中之一個關係； x 為 A 中之一元素，以 $x \in A$ 表示，若 x 不為 A 中之一元素，以 $x \notin A$ 表示。為了區分全集 U 中之個別元素 x 與集合 A 之關係，我們定義一特徵函數或稱為區別函數 (characteristic or discriminate function), $U_A(x)$

$$U_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{當 } x \in A \text{ 時,} \\ 0 & \text{當 } x \notin A \text{ 時.} \end{cases}$$

故可知，特徵函數 $U_A(x)$ ，將 U 中之所有元素投射至包含 0 和 1 之集合中。以下式表示：

$$U_A : U \rightarrow \{0, 1\}$$

圖 1. 及圖 2 斜線部份顯示 A 集合的元素與非 A 集合元素之集合。

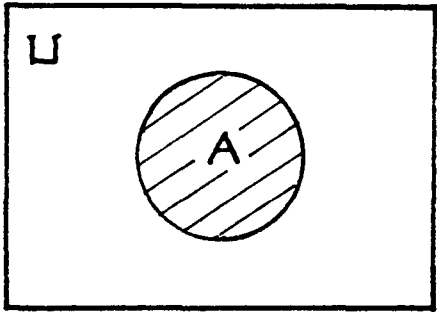


圖1 A集合與U之關係

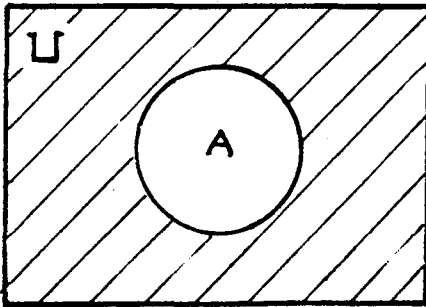


圖2 非A元素集合

例如，若U表示臺北地區氣溫之集合，而A代表臺北地區氣溫 10°C 以下之集合，則在臺北地區 10°C 以下之氣溫皆為A之元素，而 10°C 以上之元素則不是A元素。但若我們定義集合A為臺北地區氣溫「寒冷」所成之集合，在這種情況下，我們對「寒冷」的意義便不十分明確，因此，對某一氣溫是否屬於A，則不易判定。然而，若明確的定義臺北地區 10°C 以下為寒冷，那麼「寒冷」與「不寒冷」，便會被嚴格的區分，小於 10°C 視為寒冷，大於 10°C 則視為「非寒冷」，而失去中間逐漸變化之現象。

人們的思維，知覺語言表達與決策過程常含有

大量定義不明確的表達方式，如「很香」、「很美」，「大」、「中」、「小」，「年輕」、「年老」，……等等。在許多情況中，常具大量隱晦不明的訊息，還是需要由人為方式來判斷，此乃因機械本身缺乏對模糊不清之事件的認知能力，假若有一種近似人類思維表達之方式，或可解決此類問題。

2.2 模糊集 (Fuzzy Set)

如前所言，非模糊集常遭到判斷或決策困難之情況。其中，部份困難的產生乃因其要求以「是」與「否」來回答從屬關係。假如，我們可想像其是某種程度的隸屬或可接受的關係，該困難或可解決。Zadeh (1965) 於1960年代提出之模糊集合論乃允許表達某一事件與其屬於某一指定集合之狀況，可不必以非肯定即否定 (Yes or No) 之基底來表示。而事件本身與指定集合間以隸屬之「強弱程度關係」來表示，其稱為從屬函數 (Membership function)。從屬函數之定義如下：

在一U全集 (Universe) 中之模糊集合A，其特性以從屬函數 (membership function) μ_A 來描述，在其從屬函數值在 $[0, 1]$ 之間，即

$$\mu_A: U \rightarrow [0, 1]$$

若將其從屬函數只取 $\{0, 1\}$ 兩個值，那麼便可將之視為一般之非模糊集。一個模糊集A，可由一系列之元素 x_i 及從屬函數 U_i 來表示如下：

$$A = \{(x_i, \mu_A(x_i)) \mid x_i \in U\}$$

當U為連續時，模糊集A表示為：

$$A = \int_U \mu_A(x) / x$$

當U為不連續時，模糊集A表示為：

$$A = \mu_1/x_1 + \mu_2/x_2 + \dots + \mu_n/x_n \\ = \sum_{i=1}^n \mu_i/x_i$$

對於不同模糊集，如「高溫」，「少雨」，「晴天」，各有其相對屬性之從屬函數，如圖3所示。

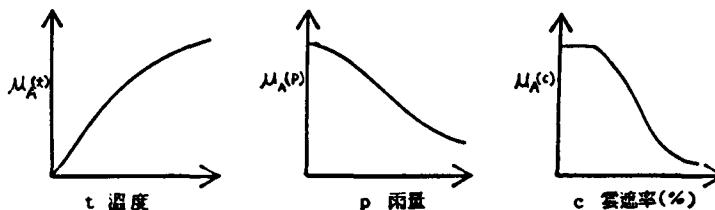


圖3 a)高溫 b)少雨 c)晴天 模糊集之從屬函數

相對於「年輕」及「年老」集合之從屬函數如表一所示。

表一 「年輕」與「年老」之從屬函數值。

從屬函數值 年齡	年 輕	年 老
5	1.0	0
10	0.9	0
15	0.8	0
20	0.7	0
30	0.3	0.1
40	0.1	0.3
50	0.05	0.5
60	0	0.7
70	0	0.9
80	0	1.0
90	0	1.0
100	0	1.0
100—	0	1.0

由表一中，可看出一個小孩10歲隸屬於「年輕」之集合為 0.9，而20歲年紀隸屬「年輕」之可從屬函數值為 0.7，40歲隸屬「年輕」之從屬函數為 0.1；其年齡 x_i 對應「年輕」之從屬函數值愈高，則該年齡隸屬於「年輕」概念之集合程度愈強。相對於「年老」的集合而言，年齡 X_i 愈高，則從屬函數愈高。

再以一實例說明非模糊集與模糊集之區分差異：

(1)非模糊集：

定義集合「多雨」為降雨量 100mm以上，

則 100mm以下之降雨量為「非多雨」

當降雨事件 X_i 發生 ≥ 100 mm時，

則 $x_i \in$ 多雨，其特徵函數值 $\mu(X_i)=1.0$

當降雨事件 x_i 發生 < 100 mm 時，則 $x_i \notin$ 多雨，其特徵函數值 $\mu(x_i) = 0.0$ 若降雨事件 x_i 為 99.99mm 時，其應歸屬於「非多雨」，而 99.99 mm 與 100mm 僅有 0.01mm 之差別，然而其屬性却迥然相異，其界定是否合理？此一「多雨」之特徵函數如圖 4 所示。

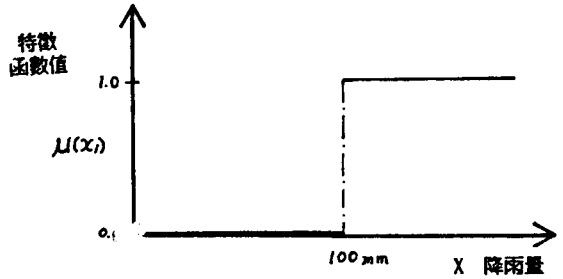


圖 4 非模糊集多雨集合之特徵函數

(2)模糊集：

若多雨集合之從屬函數如圖 5 所示，則降雨事件 100mm 以上隸屬「多雨」集合之程度為 1.0，80mm 隸屬於「多雨」集合之程度為 0.8，60mm 隸屬「多雨」集合之程度為 0.4，……以此關係來建立集合與元素之間的關係，可得到良好之契合關係。

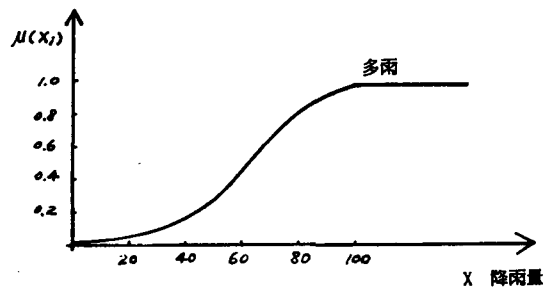


圖 5 雨多模糊集之從屬函數

不以二分法來界定事件與集合間之關係，而以從屬函數來表示之隸屬程度，可更適切地描述其現象。就從屬函數而言，如何設定雖無一定之標準，但其確定過程除了考量人們知覺及心裏感受程份在內，亦包含外界事件發生之強弱訊息。心理學的大量實驗中顯示，人們的各種感覺所反應出來的心理量，與外界刺激的物理量間，保持一相當密切的關係（馮、樓，1988），此一關係便使吾人對從屬函數之設定需於外界條件之設限來建立，而不是全然主觀的捏造。

對從屬函數之設定，已有相當多的文章專門討論 (Kanfmann, 1976; Procyk & Mamdani, 1979; Norwich & Turksen, 1984)，其亦可依驗證來取得最佳之近似。另外，亦有多位學者研究具適應變化調適其從屬函數之過程，以求得在不確定性高或時變性系統之適應與較佳之近似（

Norwich & Turksen, 1984; Baaklini & Mamdani, 1984; Xu & Zailu, 1987)。

三、應用模糊觀念推估河川流量

本研究中，將河川月流量分成三個不同程度，即「充足」，「正常」，及「不足」三種情況，因此一程度關係具有不明確的區別概念，若將分類程度觀念給予一個適當之從屬函數，則對河川流量分級預報上將有很大的幫助。

3.1 預報模式之建立與推估

石門水庫上游高義站四月份流量之分級預報是為本研究之範例，首先選定三個可能影響該流量之因子，即三月份平均日流量 (x_1)，三月份最大日流量 (x_2)，及三月份平均日雨量 (x_3) 等三個預報因子，而四月份平均日流量 (R) 分類為充足，正常，或不足，三種等級。採用資料年限自民國46年至民國74年，共計29年，並以75，76兩年進行預報驗證工作。

四月份日平均流量三個不同等級之區分如下：

R_1 ：流量不足 9 CMS $> R$

R_2 ：流量正常 16 CMS $\geq R \geq 9$ CMS

R_3 ：流量充足 50 CMS $\geq R > 16$ CMS

將三個預報因子各分成三個區間，如表二所示。

表二 預報因子區間區分表

預報因子	預報因子區分	數據區分
X_1	X_{11}	0~10CMS
	X_{12}	10~16CMS
	X_{13}	16CMS以上
X_2	X_{21}	0~20CMS
	X_{22}	20~50CMS
	X_{23}	50CMS以上
X_3	X_{31}	0~20mm
	X_{32}	20~45mm
	X_{33}	45mm 以上

表二中各預報因子於各區間與四月份流量對應於不同區間出現之次數，列入表三。其中 n_{kj} 為第K

個預報因子，在 j 區間相對於四月份流量在第 i 區間之次數。如第一種預報因子（三月份流量），於第一個區間（低流量區，0~10CMS）由過去資料顯示其 (X_{11}) 相對於四月份流量是流量不足的機會有5次（即 $n_{11}^1=5$ ），是流量正常的機會有3次（即 $n_{11}^2=3$ ）。而各預報因子間與四月份流量等級之關係可由圖6，7，8中看出，其分佈區分不甚明顯，對分類判別結果將會有影響。

表三 預報因子與四月份各種流量出現次數 n_{kj}

預報因子	流量不足	流量正常	流量充足	累積值 $\sum_{i=1}^3 n_{kj}^i$
X_{11}	5	3	0	8
X_{12}	4	4	3	11
X_{13}	0	3	7	10
X_{21}	6	4	1	11
X_{22}	2	3	3	8
X_{23}	1	3	6	10
X_{31}	6	3	0	9
X_{32}	1	5	3	9
X_{33}	2	3	6	11

在從屬函數之設定上，對於「不足」，「正常」，「充足」之觀念，可分別以三個從屬函數，即(a)半哥西下降分佈(descending demi-Cauchy distribution)，(b)哥西分佈(Cauchy distribution)及(c)半哥西上升分佈(ascending demi-Cauchy distribution)來描述，如圖9所示。圖9中(a)「不足」之從屬函數設定，其R值愈小，則相對符合「不足」之觀念程度愈高，反之，當R值愈高時，則符合「不足」之觀念從屬程度便降低。同理，相對「正常」及「充足」之概念，亦可由(b)，(c)中之分佈特性來描述。

在本例中，相對「流量不足」，「流量正常」及「流量充足」之從屬函數，即分別引用上述概念，並設定如下：

流量不足之屬函數：

$$\mu_1(R) = \begin{cases} \frac{1}{1+(0.08R)^2} & 16.0 \text{ CMS} \geq R \geq 0 \text{ CMS} \\ 0 & R > 16 \text{ CMS} \end{cases}$$

流量正常從屬函數：

$$\mu_2(R) = \begin{cases} \frac{1}{1+(0.2(R-12.5))^2} & 25 \text{ CMS} \geq R \geq 0 \text{ CMS} \\ 0 & R > 25 \text{ CMS} \end{cases}$$

流量充足之從屬函數：

$$\mu_3(R) = \begin{cases} 0 & 9 \text{ CMS} > R \\ \frac{1}{1+(0.2(R-9.0))^{-2}} & 50 \text{ CMS} \geq R \geq 9 \text{ CMS} \end{cases}$$

在每一個區間 R_1, R_2, R_3 ，其區間各別離散化從屬函數之平均值，可由每一區間相對該從屬函數積分再除以其區間值獲得，各從屬函數離散化平均值，如圖10所示。可得 R_1, R_2, R_3 模糊集區間從屬函數如表四。

表四、從屬函數於各區間之平均值

流量 區間	R_1	R_2	R_3
從屬 函數 平均值	$9.0 > R \geq 0$	$16 > R \leq 9.0$	$50 \leq R \leq 16.0$
$U_1(R)$	0.8667	0.5064	0.0
$U_2(R)$	0.3220	0.8725	0.3220
$U_3(R)$	0	0.3211	0.9266

出現次數之模糊區分，可由 $\tilde{n}_{kj}^m = \sum_{i=1}^m U_i^m n_{kj}^i$

計算求得， \tilde{n}_{kj}^m 為預報因子 X_k 在 X_{kj} 區間相對推估流量為 R_m 之模糊出現次數。例如預報因子 X_1 在 X_{11} 區間出現推估流量為「正常」，即 R_2 之模糊次數為 $\tilde{n}_{11}^2 = \sum_{i=1}^3 U_i^2 n_{11}^i = 5 \times 0.3220 + 3 \times 0.8725 + 0.0 \times 0.3220 = 4.227$ 。各推估區間之模糊出現次數 \tilde{n}_{kj}^m 結果如表五所示。再由 $f_{kj}^m = n_{kj} / \sum_{i=1}^m n_{kj}^i$ 計

，其結果列於表六。四月份各流量等級發生之機率，可由各預報因子發生之權重值與模糊頻率值之線性合成而求得，決策時則以四月份流量在「不足」，「正常」，與「充足」等三個區間中選發生機會最大者為預測值。以民國 46 年四月平均日流量之預報為例：預報因子由記錄資料顯示出現之區間為 X_{12}, X_{21} ，及 X_{32} ，即三月份平均流量係屬於中流量 (X_{12})，三月份最大日流量係屬於低流量值 (X_{21})，而三月份雨量係屬於中度值 (X_{32})。此三項預報

表五 預報因子與各階段出現次數模糊區分

預報 因子	流量 不足	流量 正常	流量 充足	累積值 $\sum_{i=1}^m n_{kj}^i$
X11	5.853	4.227	0.963	11.043
X12	5.492	5.744	4.064	15.300
X13	1.519	4.871	7.450	13.840
X21	7.226	5.744	2.211	15.181
X22	3.253	4.227	3.743	11.223
X23	2.386	4.871	6.523	13.780
X31	6.719	4.549	0.963	12.232
X32	3.399	5.650	4.386	13.434
X33	3.253	5.193	6.523	14.969

算預報因子每一區間之模糊統計權重及模糊頻率值

表六 模糊權重及模糊頻率表

預因子	報因子區間	預報因子區間權重	模糊頻率
X ₁	X ₁₁	a ₁₁ =0.28	P ¹ ₁₁ (R ¹)=0.53
			P ² ₁₁ (R ²)=0.38
			P ³ ₁₁ (R ³)=0.09
	X ₁₂	a ₁₂ =0.38	P ¹ ₁₂ (R ¹)=0.36
			P ² ₁₂ (R ²)=0.38
			P ³ ₁₂ (R ³)=0.26
	X ₁₃	a ₁₃ =0.34	P ¹ ₁₃ (R ¹)=0.11
			P ² ₁₃ (R ²)=0.35
			P ³ ₁₃ (R ³)=0.54
X ₂	X ₂₁	a ₂₁ =0.38	P ¹ ₂₁ (R ¹)=0.48
			P ² ₂₁ (R ²)=0.38
			P ³ ₂₁ (R ³)=0.14
	X ₂₂	a ₂₂ =0.28	P ¹ ₂₂ (R ¹)=0.29
			P ² ₂₂ (R ²)=0.38
			P ³ ₂₂ (R ³)=0.33
	X ₂₃	a ₂₃ =0.34	P ¹ ₂₃ (R ¹)=0.17
			P ² ₂₃ (R ²)=0.36
			P ³ ₂₃ (R ³)=0.47
X ₃	X ₃₁	a ₃₁ =0.30	P ¹ ₃₁ (R ¹)=0.55
			P ² ₃₁ (R ²)=0.37
			P ³ ₃₁ (R ³)=0.08
	X ₃₂	a ₃₂ =0.33	P ¹ ₃₂ (R ¹)=0.25
			P ² ₃₂ (R ²)=0.42
			P ³ ₃₂ (R ³)=0.33
	X ₃₃	a ₃₃ =0.37	P ¹ ₃₃ (R ¹)=0.22
			P ² ₃₃ (R ²)=0.35
			P ³ ₃₃ (R ³)=0.43

因子在區間中之權重由表六查出分別為0.38，0.38及0.33，而其相對之模糊頻率值則如下列矩陣值

$$\begin{pmatrix} 0.36 & 0.38 & 0.26 \\ 0.48 & 0.38 & 0.14 \\ 0.25 & 0.42 & 0.33 \end{pmatrix}$$

各區間發生之或然率，可由權重因子與模糊頻率值之線性合成計算而得，如下所示

$$(0.38 \ 0.38 \ 0.33) \begin{pmatrix} 0.36 & 0.38 & 0.26 \\ 0.48 & 0.38 & 0.14 \\ 0.25 & 0.42 & 0.00 \end{pmatrix} = (0.4017 \ 0.4274 \ 0.2609)$$

其中以「正常」流量之機率為最大，故以正常流量為選定區間。以歷史記錄29年作為驗證，預測正確次數18次正確率為62.1%，再以75，76兩年作實際預報，結果判定皆為流量「充足」，此與實際記錄相吻合。全部預報結果顯示於表七中。

表七 高義站歷年四月份平均日流量驗證與預測

年	平均流量	類別	驗證	符合結果
1977	4.60	R1	R1	+
1963	5.60	R1	R1	+
1964	6.10	R1	R1	+
1965	6.70	R1	R1	+
1967	7.00	R1	R1	+
1971	8.20	R1	R1	+
1969	8.30	R1	R2	-
1976	8.70	R1	R1	+
1981	8.80	R1	R3	-
1958	9.40	R2	R2	+
1966	9.40	R2	R2	+
1982	9.70	R2	R3	-
1972	10.00	R2	R1	-
1980	10.30	R2	R2	+
1961	11.80	R2	R3	-
1970	12.50	R2	R3	-
1960	12.70	R2	R1	-
1979	14.40	R2	R2	+
1973	15.50	R2	R1	-
1959	17.20	R3	R1	-
1957	17.30	R3	R3	+
1975	22.00	R3	R3	+
1984	22.10	R3	R2	-
1962	22.60	R3	R3	+
1974	24.50	R3	R2	-
1968	26.70	R3	R3	+
1985	31.00	R3	R3	+
1978	33.00	R3	R3	+
1983	36.80	R3	R3	+
預報				
1986	22.18	R3	R3	+
1987	22.30	R3	R3	+

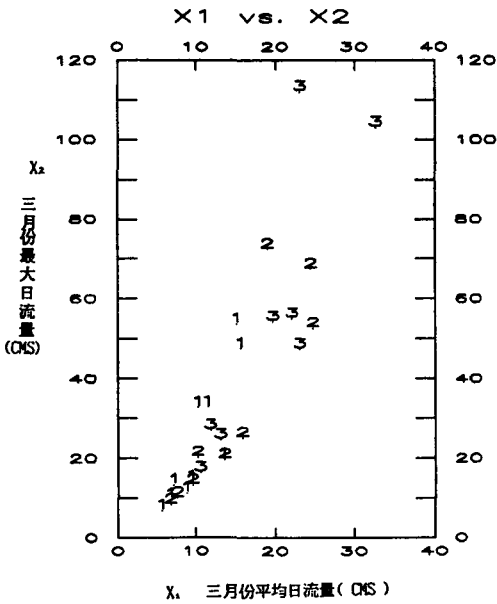


圖 6 四月份流量區分與預報因子 X_1 , X_2 之關係 (1957—1985)

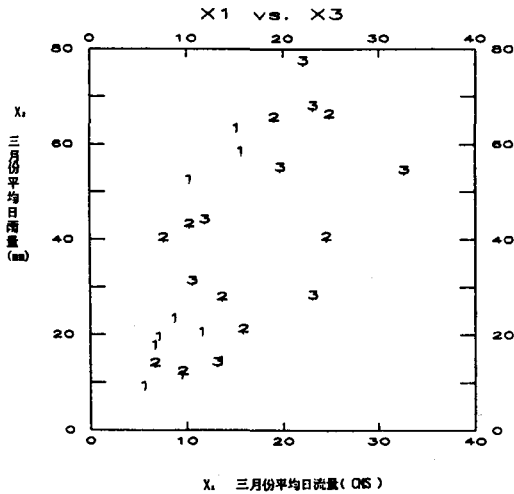


圖 7 四月份流量區分與預報因子 X_1 , X_3 之關係 (1957—1985)

3.2 常態分佈假設之貝氏理論之區別判定

在多組判別中，貝氏判定準則 (Baye's Decision Rule) 亦常被採用。此一判別方式，乃是指定 p 維變數空間之待判樣本 $X = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ 在 g 組之中具最大條件概率者，即 $\max P(\pi_i/x)_{i=1-g}$ ，作為最後樣本判定之組，此條件概率亦稱後驗機率 (Posterior Probability) $P(\pi_i/X)$ 可以下式表示：

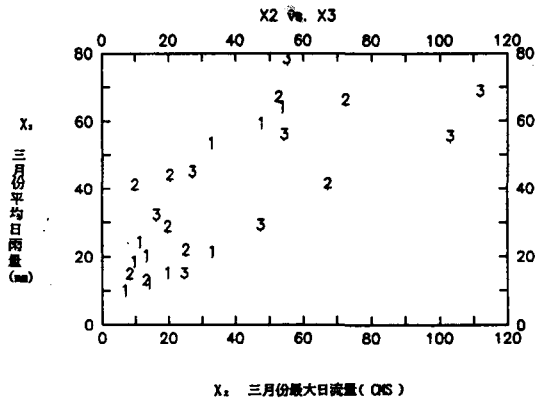


圖 8 四月份流量區分與預報因子 X_2 , X_3 之關係 (1957—1985)

$$P(\pi_i/X) = \frac{p_i f_i(X)}{\sum_{i=1}^g p_i f_i(X)} \quad (1)$$

$i=1, 2, \dots, g$

式中 π_i 為各組別

p_i 為 π_i 組之先驗概率

(Prior Probability)

$f_i(X)$ 為 π_i 組之機率密度函數

各組之先驗概率 p_i 可由實際應用中之各組樣本頻率為其估計值獲得，即

$$p_i = \frac{n_i}{n} \quad i=1, 2, \dots, g \quad (2)$$

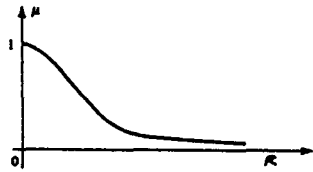
式中 n_i 為樣本在第 π_i 組之個數， n 為總樣本之個數，若假設各組之機率密度函數為一多變數常態分佈，其平均值為 μ_i 共變異數矩陣為 Σ_i ，則 $f_i(X)$ 可以下式表示：

$$f_i(X) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma_i|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(X-\mu_i)^T \Sigma_i^{-1} (X-\mu_i)\right] \quad (3)$$

$i=1, 2, \dots, g$

由(1)式，當 $p_k f_k(X) = \max p_i f_i(X)$ ， $i=1, \dots, g$ 時，吾人便可判定樣本 X 應屬 π_k 組。取自然對數

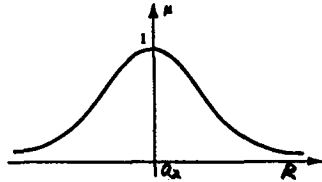
$$\begin{aligned} \ln p_k f_k(X) &= \max^i \ln p_i f_i(X) \\ &= \ln p_k - \frac{p}{2} \ln (2\pi) - \frac{1}{2} \ln |\Sigma_k| \\ &\quad - \frac{1}{2} (X-\mu_k)^T \Sigma_k^{-1} (X-\mu_k) \quad (4) \end{aligned}$$



(a) "流量不足"從屬函數

$$\mu_1(R) = \frac{1}{1 + (K_1 R)^2}, R \geq 0$$

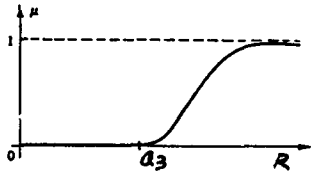
$$= 0, R < 0$$



(b) "流量正常"從屬函數

$$\mu_2(R) = \frac{1}{1 + (K_2(R - a_2))^2}, R \geq 0$$

$$= 0, R < 0$$

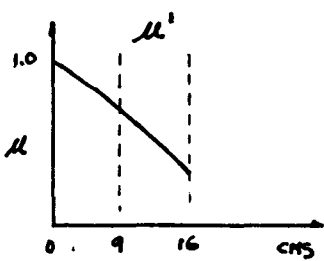


(c) "流量充足"從屬函數

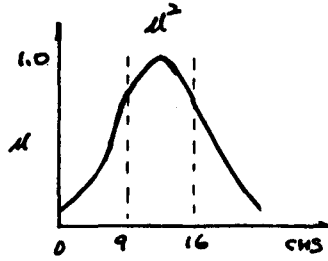
$$\mu_3(R) = \frac{1}{1 + (K_3(R - a_3))^{-2}}, R \geq a_3$$

$$= 0, R < a_3$$

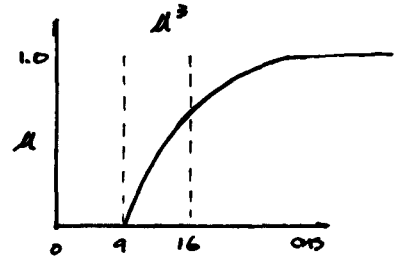
圖9 相對(a)"不足", (b)"正常", (c)"充足"之從屬函數設定



"流量不足"從屬函數



"流量正常"從屬函數



"流量充足"從屬函數

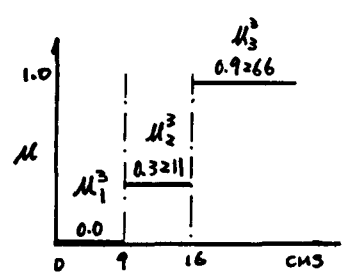
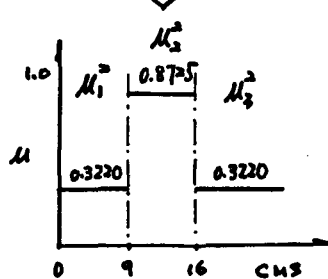
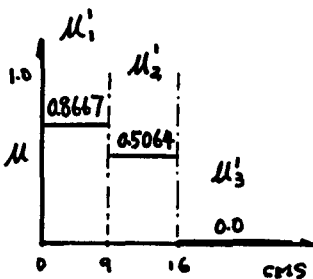


圖10 從屬函數於各區間離散化之平均值

(3)式中常數 $(p/2) \ell_n(2\pi)$ 在判定比較時，可不加以考慮，故對各組 i 之二次判別得點 (quadratic discrimination score) 如下：

$$d_i^q(X) = -\frac{1}{2} \ell_n |\Sigma_i| - \frac{1}{2} (X - \mu_i)^T \Sigma_i^{-1} (X - \mu_i) + \ell_n p_i, \quad i=1, 2, \dots, g \quad (5)$$

若(5)式中，各組之共變異矩陣假設相同，亦即 $\Sigma_i = \Sigma, i=1, 2, \dots, g$ ，則(5)式判別得點分解如下

$$d_i^q(X) = \frac{1}{2} \ell_n |\Sigma| - \frac{1}{2} X^T \Sigma^{-1} X + \mu_i^T \Sigma^{-1} X - \frac{1}{2} \mu_i^T \Sigma^{-1} \mu_i + \ell_n p_i \quad (6)$$

(6)式中，前兩項對 $d_i^q(X), i=1, 2, \dots, g$ 各項皆相同，故在判定時，可同時忽略不計。故將(6)式改寫成 $-X$ 之線性組合，即線性判別得點 (linear discriminant score) 如下：

$$d_i(X) = \mu_i^T \Sigma^{-1} X - \frac{1}{2} \mu_i^T \Sigma^{-1} \mu_i + \ell_n p_i \quad (7)$$

最後，則以樣本於各組中具最大之判別得點值者為其判定組別，即

$$d_k(X) = \max_i d_i(X), \quad i=1, 2, \dots, g \text{ 時，}$$

π_k 為樣本 X 之判定組別

以前述流量推估為例，以三組區分判定，即 π_1, π_2, π_3 分別代表「不足」，「正常」與「充足」之結果，每一樣本 $X = (x_1, x_2, x_3)$ 其中 x_1, x_2 及 x_3 與前例所選擇之預報因子相同，則每一樣本其相對應羣屬於 π_1, π_2 或 π_3 組中之一，也就是說當預報因子為 x_1, x_2, x_3 時，其將導致 π_k 之結果，此時 $P(\pi_k | X) = \max_i P(\pi_i | X) i=1, 2, 3$ ，即各組之後驗機率最大者。以各組為多變數常態假設之線性判別得點，如(7)式，比較由1957至1985年計29年間其各組之先驗概率 p_1, p_2, p_3 分別為 $9/29, 10/29$ 及 $10/29$ (如表七) 驗證判定之結果與實際之發生組別比較 (如表八)，發現有15年資料判定正確，判別率約為 51.72%，可見分屬不同組之各樣本點在變護空間上相互混合，致使判別不易。

四、結果與討論

1.由圖 6, 7 及 8 中，大致上可看出三個預報因子與四月平均日流量歸類關係，其分羣關係不甚明顯，可知選用之預報因子對於預測流量之區分關係並不是很好。預報因子之選擇對預報之結果有很

表八 多變數常態分佈假設，貝氏推論判定結果

年	平均流量	類別	驗證	符合結果
1977	4.60	R1	R1	+
1963	5.60	R1	R1	+
1964	6.10	R1	R1	+
1965	6.70	R1	R1	+
1967	7.00	R1	R1	+
1971	8.20	R1	R1	+
1969	8.30	R1	R2	-
1976	8.70	R1	R2	-
1981	8.80	R1	R2	-
1958	9.40	R2	R2	+
1966	9.40	R2	R2	+
1982	9.70	R2	R3	-
1972	10.00	R2	R1	-
1980	10.30	R2	R1	-
1961	11.80	R2	R3	-
1970	12.50	R2	R2	+
1960	12.70	R2	R2	+
1979	14.40	R2	R2	+
1973	15.50	R2	R1	-
1959	17.20	R3	R1	-
1957	17.30	R3	R2	-
1975	22.00	R3	R2	-
1984	22.10	R3	R2	-
1962	22.60	R3	R1	-
1974	24.50	R3	R2	-
1968	26.70	R3	R3	+
1985	31.00	R3	R3	+
1978	33.00	R3	R3	+
1983	36.80	R3	R3	+

大之關係，適當的因子，可準確的反應預報變數之結果。但水文或氣象預報系統本身，其影響因子常十分複雜可能是長延時記憶之反應系統，亦可能是短延時記憶之反應系統，對長時期之記憶系統而言，其反應時間稽延較長，故可由較前期之預報因子推估而得較佳之結果。反之，對於快速反應之系統，因其輸入與反應間距短，若要求長期之預報，便很難真正抓住其輸入訊息且可能引入部份雜訊干擾，而影響推估之結果。因此，可知預報因子之選擇對於真正有效訊息之傳遞是十分重要的，本研究若

選擇其它預報因子，如氣壓、氣溫等或可得到最佳的預報結果。

2. 在沒有任何訊息可資提供之情況，對三個區間之預測，答對率應為33%。若以多變數常態假設，並以貝氏理論推判，在本研究29組測試中正確判定15組，判別率為51.7%。若以模糊集理論配合假設之從屬函數，判別率可達62%以上。

3. 流量「缺乏」，「正常」，與「充足」各別模糊從屬函數之選擇與結果之判定有關，適當之從屬函數，可得到更好的結果。最佳之從屬函數之選擇，可利用參數檢驗方式，調整各從屬函數以求得最佳之分類結果。

五、結 論

模糊集理論有異於傳統之集合理論，其不以二分尖銳區別方式，而以緩和漸變之近似屬性來處理不明確的訊息；二十多年來，在各學科領域之應用證實了它的可用性，尤其是在類型判別 (Pattern Recognition) 及訊息處理 (Information Process) 問題上更為明顯。近年來，學者從事模糊集理論與應用之研究，更結合了傳統之邏輯、代數、拓撲、圖論等使其更富有彈性，對於不確定性高，運作複雜而不易以精確數學方程式描述得很好的系統及專家系統之建立都有很大的幫助。本研究應用了模糊集理論以推估月流量的可能區間，因預報因子與推估之河川流量的分羣關係不十分明確，故預報的結果未臻理想，判別率62%。惟此一結果較隨機猜測及貝氏推論，判別率分別為33%及51.7%，之結果為佳，因此若能尋獲更適宜之預報因子，應用模糊集理論之推測必將有所改善，值得進一步的探討。

六、誌 謝

本研究之水文資料由經濟部水資源委員會提供，研究期間承蒙臺大農工系易教授任及水資會金科長紹興提供寶貴意見及協助獲取相關資料，於此一併致謝。

參 考 文 獻

1. 馮德益，樓世博編著，「模糊數學方法與應用」，科技圖書股份有限公司，1988。
2. 羅積玉編著，「多元統計分析方法與應用」，科技圖書股份有限公司，pp.263—281，1990。
3. Baaklini, N. and E. H. Mamdani, "An Identification of Fuzzy Relational Systems", *Fuzzy Sets Syst.*, Vol. 13, pp.153—167, 1984.
4. Henkind, S. J. and M. C. Harrison, "An Analysis of Four Uncertainty Calculi", *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, Vol. SMC-18, no. 5, pp. 700—714, 1988.
5. Kanfmann, A. "Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets", New York Academic Press, 1976.
6. Klir, G. J and T. A. Folger, "Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information", Prentice-Hall International, Inc., 1988.
7. Lee, C. C., "Fuzzy Logic in Control Systems: Fuzzy Logic Controller-Part I", *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, Vol. SMC-20, no. 2, pp. 404—418, 1990.
8. Lee, C. C., "Fuzzy Logic in Control Systems: Fuzzy Logic Controller-Part II", *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, Vol SMC-20, no. 2, pp. 419—435, 1990.
9. Li, Z., Z. Chen, and J. Li, "A Model of Weather Forecast By Fuzzy Grade Statistics", *Fuzzy Sets Syst.*, Vol. 26, pp. 275—281, 1988.
10. Maiers, J. and Y. S. Sherif, "Applications of Fuzzy Set Theory", *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, Vol. SMC-15, no. 1, pp. 175—178, 1985.
11. Norwich, A. M. and T. B. Turksen, "A model for the Measurement of Membership and the Consequences of Its Empirical Implementation", *Fuzzy Sets Syst.*, Vol. 12, pp. 1—25, 1984.
12. Negoita, C. V., "Expert Systems and Fuzzy Systems", 開發，1985.
13. Negoita, C. V. and D. Ralescu, "Simulation, Knowledge-Based Computing, and Fuzzy Statistics", Van Nostrand Reinhold Company, 1987.
14. Procyk, T. J. and E. H. Mamdani, "A

Linguistic Self-Organizing Process Controller", Automat., Vol. 15, no. 1, pp. 15-30, 1979.

15. Rouse, W. B., "Systems Engineering Models of Human-Machine Interaction", 六藝, 1985.
16. Xie, W. X. and S. D. Bedrosian, "An Information Measure for Fuzzy Sets", IEEE Trans. Syst. Man Cybern., Vol. SMC-14, no. 1, pp. 151-156, 1984.
17. Xu, C. W. and Y. Zailu, "Fuzzy Model Identification and Self-Learning for

Dynamic Systems", IEEE Trans. Syst. Man Cybern Vol. SMC-17, no. 4, pp. 683-689, 1987.

18. Zadeh, L. A., "Fuzzy Sets", Informat. Control". Vol. 8, pp. 338-353, 1965.
19. Zimmermann, H. J., "Fuzzy Set Theory and Its Application" Kluwer-Nejhoff Publishing, 1985.

收稿日期：民國79年10月23日

修正日期：民國79年10月30日

接受日期：民國79年11月7日

(上接第48頁)

$$\begin{aligned}
 & + \left[(H_r - H_r) - (h_r - h_r) \frac{\partial H_r}{\partial h_r} \right]_s \Delta F_r \\
 & + \left[F_1 \left(\frac{\partial H_1}{\partial h_1} - \frac{\partial H_r}{\partial h_r} \right) \right]_s \Delta h_1 + \left[F_r \left(\frac{\partial H_r}{\partial h_r} - \frac{\partial H_r}{\partial h_r} \right) \right]_s \Delta h_r \\
 & - \left[\frac{\partial^2 H_r}{\partial h_r^2} \left\{ F_1 (h_1 - h_r) + F_r (h_r - h_r) + W_r \right\} \right]_s \Delta h_r \\
 & + \left[F_1 \frac{\partial H_1}{\partial T_1} \right]_s \Delta T_1 + \left[F_r \frac{\partial H_r}{\partial T_r} \right]_s \Delta T_r \\
 & + \left[F_1 \left\{ -\frac{\partial H_r}{\partial T_r} - (h_1 - h_r) \frac{\partial^2 H_r}{\partial h_r \partial T_r} \right\} \right]_s \\
 & + F_r \left\{ -\frac{\partial H_r}{\partial T_r} - (h_1 - h_r) \frac{\partial^2 H_r}{\partial h_r \partial T_r} \right\} + \frac{\partial Q_r}{\partial T_r} \\
 & - W_r \frac{\partial^2 H_r}{\partial h_r \partial T_r} \right]_s \Delta T_r - \left[\frac{\partial H_r}{\partial h_r} \right]_s \Delta W_r + \Delta Q_r \\
 & + \left[-\frac{\partial Q_r}{\partial T_r} \right]_s \Delta T_r.
 \end{aligned}$$

且令：

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \Delta h_r, X_2 = \Delta T_r, U_1 = \Delta h_1, U_2 = \Delta T_1 \\
 U_3 &= \Delta F_1, U_4 = \Delta T_r, v_1 = \Delta h_r, v_2 = \Delta T_r, v_3 = \Delta T_r, \\
 v_4 &= \Delta Q_r, v_5 = \Delta W_r.
 \end{aligned}$$

則方程式 (A1) 及 (A2) 可再寫為：

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}X_1 + b_{11}U_1 + b_{13}U_3 + b_{14}U_4 + c_{11}U_1 + c_{15}V_5, \quad (A3)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_{21}U_1 + b_{22}U_2 + b_2^0 U_3 \\
 &+ b_{24}U_4 + c_{21}V_1 + c_{22}V_2 + c_{23}V_3 + c_{24}V_4 + c_{25}V_5 \quad (A4)
 \end{aligned}$$

如用矩陣及向量表示方程式 (A3) 及 (A4)，最後便可寫為：

$$\dot{\{X\}} = [A]\{X\} + [B]\{u\} + [C]\{v\}.$$

因此，方程式(15)，便導得。

收稿日期：民國79年10月8日

接受日期：民國79年11月14日