

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

顧客價值分析隨機模型建立之研究

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC93-2416-H-002-013-

執行期間：93 年 08 月 01 日至 94 年 07 月 31 日

執行單位：國立臺灣大學工商管理學系

計畫主持人：郭瑞祥

共同主持人：蔣明晃

報告類型：精簡報告

報告附件：出席國際會議研究心得報告及發表論文

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 94 年 8 月 1 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

顧客價值分析隨機模型建立之研究

Stochastic Modeling of Customer Value Analysis

計畫編號： NSC93-2416-H-002-013

執行期限： 93/08/01 ~ 94/07/31

主持人：郭瑞祥 台灣大學工商管理學系 rsguo@ntu.edu.tw

共同主持人：蔣明晃 台灣大學工商管理學系 cmh@ntu.edu.tw

摘要

隨著資訊科技的快速進步以及相關演算法的發展,現今顧客終生價值已經可以得到比以往更好的估計結果。本研究的主要目的是提出一個能夠估計顧客終生價值的系統化模型而且進行實際模型的驗證。

本研究系統化模型包含下列步驟：

1. 建構顧客購買行為之隨機模型以及提出顧客購買頻率及金額之機率分配假設。
2. 利用馬可夫鏈描述顧客購買行為的改變,並且根據 RFM(recency-frequency -monetary)模型定義顧客之購買狀態。
3. 根據貝氏定理推導顧客購買狀態之移轉機率。
4. 建立顧客之移轉矩陣及利潤矩陣,並且計算顧客之終生價值。

本研究亦利用某工業用電腦廠商之實際銷售資料進行本模型之驗證,得到以下結論：

1. 本模型之估計結果的確優於其他業界常用之顧客價值分析方法,並能得到一個非常準確的顧客價值之估計。
2. 我們所提出的模型不但可以捕捉顧客的異質性,並且可以有效預測每個顧客的購買行為。

關鍵詞：顧客價值分析, 馬可夫鏈, 貝氏統計

Abstract

With the rapid progress of information technology and development of related algorithms, customers' lifetime value can now be better estimated. The goal of this research is to propose a systematic method to estimate customers' lifetime value and conduct empirical validation.

Our proposed model consists of the following steps:

1. Construct a stochastic model of customers' purchase behavior and propose the underlying probability distributions of customers' purchase frequency and monetary.
2. Model the customer' purchase behavior as a Markov chain and the associated transition states based on RFM (recency frequency monetary) model.
3. Use Bayesian theorem to derive transition state probability.
4. Construct customers' transition and reward matrices and calculate customers' lifetime value.

The proposed method has been validated using an industrial computer company's sales data. Results show that:

1. Our model outperforms the current empirical estimated practices and achieves a very accurate estimation of customers' value.
2. The proposed method is able to model customers' heterogeneity and predict each customer's purchase behavior.

Keywords: Customer value analysis, Markov chain, Bayesian statistics

顧客價值分析隨機模型建立之研究

郭瑞祥
國立台灣大學

緒論

隨著資訊科技的快速進步以及相關演算法的發展，現今顧客終生價值已經可以得到比以往更好的估計結果。因此，企業可以掌握更多顧客的資訊並藉此和具有價值之顧客建立更進一步的關係。有鑑於此，如何去判斷或預測顧客的價值就成為一個非常重要的課題。

現有學者所提出之顧客價值分析的相關文獻主要以顧客購買行為之隨機模型及顧客價值分析模型為主。首先，針對顧客購買行為的分析，有不少學者建構了隨機模型捕捉顧客的購買行為，其主要方法為對顧客之購買行為建立機率分配之假設，從而推估顧客未來之購買行為，但是此類研究的重點大多以建構顧客購買行為隨機模型為主，對於如何應用模型估計顧客價值之探討仍然不多，或僅大略帶過，於顧客預期利潤之推估著墨甚少。再者，有關探討顧客價值分析模型之相關文獻，因為大部分學者對於顧客價值的闡述，過去皆依照 Kotler (2000) 的定義：「企業從顧客身上所獲得的收益和企業為吸引及服務顧客的成本相比較，收益超過成本的部分即顧客價值」，並依此定義發展出基本的折現公式估計顧客價值，並針對特定情境設立不同之假設進行分析，然而這類顧客價值模型，對於顧客價值計算之方式缺乏詳細之定義及系統化之架構，故實用性並不高。

有鑑於以上之討論，本論文希望能提出一套系統化的顧客價值分析模型，並且利用實證資料說明模型的實用性，為企業提供一個能夠分析顧客價值的可能方案，因此本論文主要目的如下：

建立顧客購買行為隨機模型以描述顧客行為

本研究將結合 Ehrenberg (1959) 及 Colombo & Jiang (1999) 對顧客行為之機率分配假設，建立本研究之顧客購買行為隨機模型，以描述顧客的購買行為。

建構結合 RFM 模型及馬可夫鏈的顧客價值分析模型

本研究假設顧客購買行為的改變為馬可夫鏈隨機

過程，並利用 Hughes (1994) 所提出之 RFM 模型定義顧客購買狀態。此外本研究利用貝氏機率推導顧客購買狀態移轉機率，根據顧客行為隨機模型計算各購買狀態下之預期利潤進行顧客利潤矩陣之估計。最後結合顧客購買狀態移轉矩陣及利潤矩陣，進行顧客價值估計。

進行顧客價值分析模型的資料實證及比較

本研究利用某工業用電腦廠商之實際顧客交易資料，進行本顧客價值分析模型之資料實證，並將分析結果和目前業界常用之顧客價值預測方法進行比較。

文獻探討與建立假說

顧客價值分析模型之發展

Kotler (2000) 認為關係行銷的重心要放在如何和最具有價值的顧客建立長期並為公司帶來利潤的關係，而 Morgan & Hunt (1994) 更明白點出顧客價值已經成為顧客關係行銷的一個中心教條，如同 Wyner (1996) 所提，顧客價值已經重新詮釋了傳統行銷的活動：把顧客視為一種資產，評估其未來收益以及成本以決定是否進行行銷活動。Wyner (1996) 更指出，企業 80% 的銷售利潤是來自於 20% 的顧客，而其餘 20% 的銷售利潤，卻花了公司 80% 的行銷費用。由此可知，如何找出具有價值的顧客，對企業的獲利來說是多麼重要。而根據 Kotler & Armstrong (1996) 所下的定義，具有價值的顧客為「一個未來為公司帶來的利潤大過於公司花在其身上的成本之顧客」。

顧客價值之計算主要是將顧客在未來數年間之消費金額與相對應之產品成本與維持成本加以扣除，再折現以求得出顧客未來數年淨貢獻的現值。在這樣的理論基礎之下，發展出了不少顧客價值分析模型。Dwyer (1989) 首先定義顧客終生價值為「由顧客面所預期之利潤，減去與顧客相關成本的現值」。此外 Sewell & Brown (1990)、Hughes (1994)、Kotler (2000) 等學者也分別在不同的假設以及定義之下提出了各自對顧客價值的計算公式，不過大都是在特定的假設以及參數之下所提出的例子。而 Berger & Nasr (1998) 有鑑於此，試圖提出一

套有系統的模型計算顧客價值，他們針對 Jackson (1985) 提出的二類顧客之特色加以整理，對該二類型的顧客之終生價值提出了五種類型的模型。而 Hughes (1994) 所提出之 RFM 顧客價值分析模型不同於其他之方法，此模型利用三種指標：最近購買日(Recency)、購買頻率(Frequency)及購買金額(Monetary)，以判斷顧客的價值，Stone (1995) 更在其研究中利用此模型分析信用卡顧客之價值，因為一般企業的顧客交易資料庫中都可以萃取出這些資訊，因此 RFM 模型可以說是目前企業界最常用的顧客價值分析方法之一。

顧客購買行為之隨機模型

在行銷相關文獻中其實對顧客購買行為的研究已經有相當久的時間，大部分的文獻是利用假設的機率分配捕捉顧客購買行為的變化，通常都是利用卜松(Poisson)或指數(Exponential)分配捕捉顧客購買時間以及次數，再利用 Gamma 分配捕捉顧客的異質性，這方面的文獻以 Ehrenberg (1959) 所提出的負二項(Negative Binomial Distribution)模型最具代表性，負二項模型主要是結合 Poisson 分配以及 Gamma 分配而成的混合型模型(Mixture Model)，應用在估計顧客購買頻率上，這個模型也成為後來許多探討顧客購買行為之文獻的基礎。如 Schmittlein et al. (1987) 所提出的 SMC 模型就是結合了負二項分配以及 Pareto 分配推導顧客的存活機率以及期望交易次數。此外還有結合了指數分配以及 Gamma 分配的模型用來捕捉顧客購買時間間隔的分配(Hadie et al., 1998)，以及結合了二項式分配和 Beta 分配的 BB 模型(Beta-Binomial)用來捕捉顧客重複選擇的行為，如品牌選擇行為。而 Brockett et al. (1996) 三位學者曾針對不同分配的假設，試圖提出一個具有彈性的一般性顧客購買頻率模型。

此外也有一些從不同觀點切入的文獻：如 Colombo & Jiang (1999) 提出一個隨機 RFM 模型，利用負二項分配捕捉顧客購買時間以及 Gamma-Gamma 混合型模型捕捉購買金額的分布；此外，Fader et al. (2001) 提出一個估計新產品銷售之顧客行為動態隨機模型，概念主要是在購買發生後設立行為改變點以及改變機率，而 Huang (2002) 另外又針對顧客瀏覽網頁的行為建構了一個完整的動態隨機模型。

馬可夫鏈於行銷上之應用

早期結合馬可夫鏈的行銷文獻如 Parfitt & Collins

(1968) 所提出之 Trial-Repeat Model 與 Silk & Urban (1978) 所提出之 Assessor Model，皆利用馬可夫鏈捕捉顧客不同品牌購買行為的改變機率及重複購買之行為，以估計新產品未來之市場佔有率。而近期之文獻，如利用馬可夫鏈推估顧客購買行為，並且結合顧客價值計算概念的 Pfeifer & Carraway (2000)；但是，以上相關文獻都有一個共同點：對於馬可夫鏈移轉矩陣或利潤矩陣中之移轉機率及預期利潤都沒有探討其估計方式，或是缺乏嚴謹之理論推導。

貝氏機率於行銷上之應用

近年來貝氏機率於顧客行銷模型上之應用逐漸興起，但是由於發展時間尚短，因此相關文獻並不多，其應用方式可以分為兩類：首先，一些學者利用貝氏機率估計顧客購買行為改變的機率，其方式為將顧客之前的購買紀錄定義為貝式機率中之事前觀測值，並據此估計顧客未來購買行為之事後機率；如 Huang (2002) 所提出之顧客網頁瀏覽行為之整合性隨機模型即為此例。此外，由於貝式統計的發展，有學者應用貝式統計的觀念建構顧客購買行為之隨機模型，並進行顧客個人之估計值分析，以作為進行一對一行銷時之參考；如 Jen et al. (2002) 所提出之貝式層級模型(Hierarchical Bayes Model)，這三位學者利用貝式層級模型捕捉顧客購買頻率，並利用 MCMC (Markov Chain Monte-Carlo) 演算法估計行為參數之個人估計值，以預測顧客未來之購買頻率。

綜合以上探討，本研究接下來將介紹本顧客價值分析模型之建構方法。首先將結合負二項分配(Ehrenberg, 1959)以及 Gamma-Gamma 混合型函數(Colombo & Jiang, 1999)對顧客行為之假設，建立一個隨機模型捕捉顧客的購買行為，並結合馬可夫鏈及 RFM 模型。本研究假設顧客購買行為為一馬可夫鏈，且應用 RFM 模型定義顧客之購買狀態。而本研究的主要貢獻即為利用貝氏機率於隨機模型之假設下，估計顧客購買狀態之改變機率，並且建構移轉矩陣及利潤矩陣，提出一個系統化的顧客價值分析模型。

顧客價值分析模型之建構方法

圖 1 所示為本研究之顧客價值分析模型建構架構圖。本研究所建構之顧客價值分析模型，主要結合顧客購買行為隨機模型、馬可夫鏈、RFM 模型及貝氏機率此四個理論或模型所發展而成。首先，本研究建立顧客

購買行為隨機模型，並根據顧客之歷史交易資料估計模型假設中之先驗分配參數。此外，本研究利用馬可夫鏈描述顧客購買行為，並且根據 Hughes (1994) 所提出之 RFM 顧客價值分析模型，定義馬可夫鏈中之不同顧客購買行為狀態，以建構顧客購買狀態之馬可夫鏈移轉矩陣及利潤矩陣。而本研究最主要的貢獻為：根據貝氏機率推導顧客在已觀察到前期購買行為狀態時，其下期購買行為狀態之事後機率分配，並以之估計顧客購買狀態移轉矩陣之移轉機率。此外，本研究依據顧客購買行為隨機模型之行為機率分配假設，估計顧客於不同購買狀態下之預期貢獻利潤，以建立利潤矩陣。最後，結合顧客購買狀態移轉矩陣以及顧客利潤矩陣進行顧客價值之分析。

購買行為隨機模型之假設

本購買行為隨機模型建立方式主要為設立六個顧客購買行為之假設，利用此六大假設描述顧客購買行為以建構此隨機模型。本隨機模型結合 Ehrenberg (1959) 所提出之負二項分配模型及 Colombo & Jiang (1999) 提出之 Gamma-Gamma 混合型模型，設立顧客每期購買頻率及購買金額之機率分配假設，並利用 Gamma 分配捕捉顧客之異質性，以描述顧客之購買行為。

假設一：

假設顧客購買頻率和購買金額兩個不同的行為維度是互相獨立，不具有相關性。因此這兩個行為機率函數的參數互相獨立。

假設二：

假設顧客的購買狀態移轉行為符合馬可夫鏈的假設，這表示顧客下一期購買狀態發生的機率只和上一期的購買狀態有關。

假設三：

假設個別顧客購買頻率 f 為卜松分配 (Poisson Distribution)：

$$P_f[F = f | \lambda] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^f}{f!} \quad \lambda > 0 \quad (1)$$

公式(1)表示，在單位時間平均購買次數為 λ 之下，單位時間內購買次數為 f 的機率。

假設四：

因為考慮顧客的異質性，故假設個別顧客單位時間平均購買次數 λ 服從 Gamma 分配：

$$g_\lambda(\lambda | w, \alpha) = \frac{\alpha^w}{\Gamma(w)} \lambda^{w-1} e^{-\alpha\lambda} \quad w > 0, \alpha > 0 \quad (2)$$

假設五：

假設個別顧客發生購買行為之各期平均單次購買金額為 Gamma 分配，因為購買金額不可能為負，不適合用常態分配來捕捉，因此依據 Colombo & Jiang (1999) 之假設，本研究採用更具有彈性、並且符合購買金額不為負之特性的 Gamma 分配：

$$g_m(m | u, \theta) = \frac{\theta^u}{\Gamma(u)} m^{u-1} e^{-\theta m} \quad u > 0, \theta > 0 \quad (3)$$

公式(3)中， m 代表各期平均單次購買金額。

假設六：

依據 Colombo & Jiang (1999) 之假設，由於顧客各期平均單次購買金額服從之 Gamma 分配的平均值為 u/θ ，為了考慮顧客的異質性，本研究假設此 Gamma 分配的平均值 u/θ 隨著不同顧客而變動，因此，本研究將 u 定義為常數值，利用 θ 捕捉每位顧客購買金額行為之不同，假設顧客平均單次購買金額的 Gamma 分配之參數 θ 符合另一個 Gamma 分配：

$$g_\theta(\theta | v, \phi) = \frac{\phi^v}{\Gamma(v)} \theta^{v-1} e^{-\phi\theta} \quad v > 0, \phi > 0 \quad (4)$$

首先根據假設三和假設四可以推導出顧客購買頻率的機率為負二項分配 (Ehrenberg, 1959)：

$$P_{NBD}[F = f | \alpha, w] = \frac{\Gamma(w+f)}{\Gamma(w)f!} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^w \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^f \quad (5)$$

根據假設五和假設六可以推導出顧客各期平均單次購買金額的機率密度函數為 Gamma-Gamma 混合型函數 (Colombo & Jiang, 1999)：

$$g_{G-G}(m | u, v, \phi) = \frac{\Gamma(u+v)}{\Gamma(u)\Gamma(v)} \left(\frac{m}{\phi+m}\right)^u \left(\frac{\phi}{\phi+m}\right)^v \frac{1}{m} \quad (6)$$

顧客購買狀態移轉矩陣之定義

於本節中將利用 Hughes (1994) 所提出之 RFM 模型定義顧客購買狀態之馬可夫鏈移轉矩陣。

定義顧客購買狀態

本研究依據 RFM 模型定義馬可夫鏈移轉矩陣的顧客購買狀態，依此假設建立顧客狀態如下：R 為 0 到 r 種狀態、F 為 1 到 f 種狀態、M 為 1 到 m 種狀態，其中 R 表示自最近發生購買行為之一期計起，距現在已有幾期沒有購買行為的發生。舉例說明，如果顧客第一期有購買行為，那在第二期初及第一期末的 R 為 0，假使顧客在第四期有購買，但是第五期沒有購買，那在第六期初及第五期末的 R 為 1。此外，F 與 M 為顧客最近一期發生購買行為時的購買頻率和平均單次購買金額狀態，此處的購買頻率為單期內之總購買次數。此外當顧客最近購買期間 R 的狀態為 $r+1$ ，表示至少已有 $r+1$ 期以上未再交易，於是判斷其為已流失的顧客，並且不會再移轉到其他狀態，故稱 $R=r+1$ 時為吸收狀態 (Absorbing State)。因此在這樣的假設下，當顧客上一期狀態為 $R=r+1$ 時，此顧客下一期移轉到狀態 $R=r+1$ 的機率為 1，而移轉到其他狀態機率將會為 0。於吸收狀態 $(r+1)$ 該如何決定？根據 Schmittlein & Morrison (1985) 及 Colombo & Jiang (1999) 所提出的方法，在公式 (1) 的假設下，一個顧客在平均購買次數為 λ 下，觀察到上一個購買發生後已經過了 r 期沒購買的機率為 $e^{-\lambda r}$ 。因此可根據公式 (1) 及 (2) 推導出任意一個顧客發生單期購買 f 次的行為之後，結果有 r 期沒購買的機率密度函數為 (見附錄 A)：

$$z(r|f) = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+1+r} \right)^{w+f} \quad (7)$$

根據公式 (7)，如果有 r 期以上沒購買之機率小於某門檻值 (Threshold) 時，即可判斷此顧客可能已流失，因此可利用此公式作為決定吸收狀態的理論基礎，但是在實務上，其實可以憑藉歷史資料的情況以及需求預測部門對其顧客行為之經驗，直接決定適當的 r 值作為吸收狀態。因此顧客狀態共有 $(r+1) \times f \times m + 1$ 種情形。

購買狀態之移轉情形

圖 2 為顧客購買狀態移轉情形， $P_{(ijk,lmn)}$ 代表當顧客這期的購買狀態 (R,F,M) 為 (i,j,k) 時，下一期會移轉到狀態為 (l,m,n) 的機率。舉例說明狀態移轉情形：假設本期顧客曾購買商品，其在本期末或下期初之狀態為 $(R,F,M) = (0,X,Y)$ ，如果顧客在下一期有購買產品，而且其購買頻率為 I 、平均單次購買金額狀態為 J ，則顧客下期末及下下期初的狀態由 $(0,X,Y)$ 移轉到 $(0,I,J)$ 。假使顧客在下一期沒有購買，則其狀態由 $(0,X,Y)$ 移轉到 $(1,X,Y)$ 。

建立購買狀態移轉矩陣

依照前一小節所述之顧客購買狀態移轉情形，可以得知，假設顧客前一期之購買狀態為 $(R,F,M) = (Z,X,Y)$ ，當顧客下一期發生購買行為時，其可能移轉之購買狀態必為 $R=0$ 之購買狀態其中之一，如果顧客下一期沒有發生購買行為，則其必移轉至 $(R,F,M) = (Z+1,X,Y)$ 之購買狀態。圖 3 即為顧客前後期之可能移轉情形。因此可以定義顧客購買狀態的移轉矩陣為 $(r+1) \times f \times m + 1$ 行乘以 $(r+1) \times f \times m + 1$ 列的矩陣如圖 4 所示。

根據貝氏機率推導狀態移轉機率

由於本研究假設顧客購買頻率 (F) 和購買金額 (M) 獨立，故先分開討論其個別移轉機率，再結合兩者計算顧客之 RFM 購買狀態移轉機率，並討論特殊情境下之狀態移轉機率。

推導購買頻率狀態移轉機率

根據貝氏機率及公式 (1) 與 (2)，在觀察到已發生之購買頻率狀態 $R=r_1$ 和 $F=f_1$ 時，購買頻率機率分配的參數 λ 之事後機率密度函數如下 (見附錄 B)：

$$\begin{aligned} \rho_{\lambda}(\lambda | r_1, f_1) &= \frac{(1+r_1+\alpha)^{f_1+w}}{\Gamma(f_1+w)} \lambda^{f_1+w-1} e^{-\lambda(1+r_1+\alpha)} \\ &= g_{\lambda}(\lambda | f_1+w, 1+r_1+\alpha) \end{aligned} \quad (8)$$

根據公式 (1) 及 (8)，則可以推導出當移轉矩陣中起始狀態為 $R=r_1$ 和 $F=f_1$ 時，則下一期購買頻率之事後機率如下 (見附錄 C)：

$$\begin{aligned} f_f(f_2 | f_1, r_1) &= \frac{(1+r_1+\alpha)^{f_1+w}}{\Gamma(f_1+w) f_2!} \frac{\Gamma(f_2+f_1+w)}{(2+r_1+\alpha)^{f_2+f_1+w}} \end{aligned} \quad (9)$$

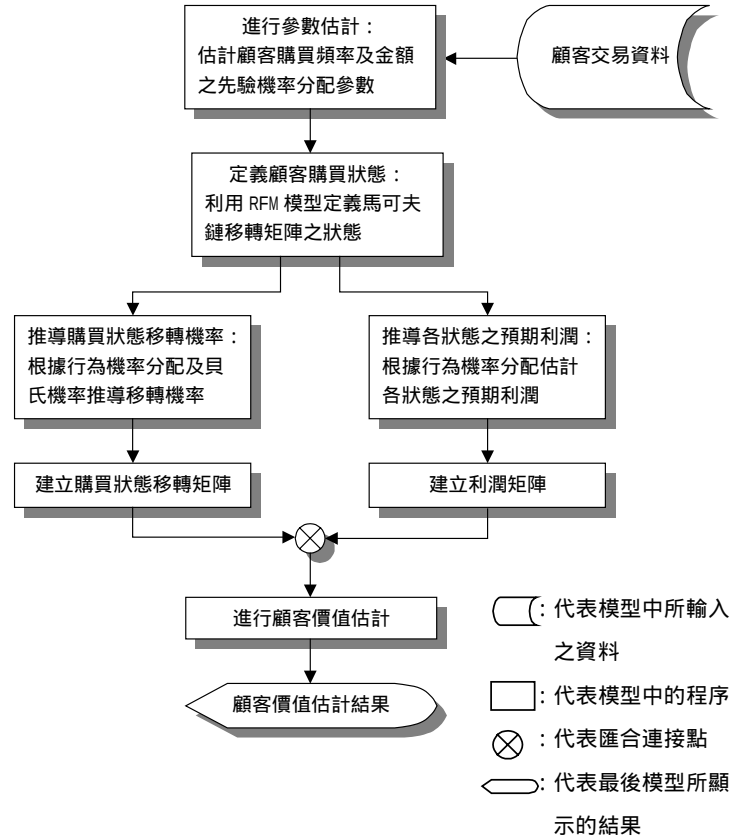
根據公式 (9)，可利用顧客購買頻率狀態之移轉機率同時定義最近購買期間狀態之移轉機率：假設當移轉矩陣中起始狀態為 $R=r_1$ 和 $F=f_1$ 時，下一期會移轉到 $(r,f) = (0,f_2)$ 的機率為 $f_f(f_2 | f_1, r_1)$ ，此時 $f_2 > 0$ ，表示下一期顧客發生購買行為；而當下一期顧客沒有發生購買行為時，顧客移轉到 $(r,f) = (r_1+1, f_1)$ 的機率為 $f_f(0 | f_1, r_1)$ 。

推導購買金額狀態移轉機率

根據貝氏機率以及公式 (3)、(4) 和 (6)，在觀察到已發生之購買金額為 m_1 時，購買金額機率分配的參數 θ

圖 1：顧客價值分析模型建構架構圖

6



之事後機率密度函數如公式(10)。

$$\begin{aligned}\rho_{\theta}(\theta | m_1) &= \frac{g_m(m_1 | \theta) g_{\theta}(\theta)}{g_{G-G}(m_1)} \\ &= \frac{(\phi + m_1)^{u+v}}{\Gamma(u+v)} \theta^{u+v-1} e^{-\theta(m_1 + \phi)} \\ &= g_{\theta}(\theta | u+v, \phi + m_1)\end{aligned}\quad (10)$$

根據公式(3)和(10)，可推導當觀察到購買金額為 m_1 時，下一期購買金額之事後機率密度函數如下：

$$\begin{aligned}f_m(m | m_1) &= \int_0^{\infty} g_m(m | \theta) \rho_{\theta}(\theta | m_1) d\theta \\ &= \frac{m^{u-1} (\phi + m_1)^{u+v} \Gamma(2u+v)}{\Gamma(u) \Gamma(u+v) (m_1 + m + \phi)^{2u+v}}\end{aligned}\quad (11)$$

但因購買金額為連續性之變數，所以其每一個狀態應定義為某個範圍。因此，為了估計購買金額狀態轉移機率，本研究根據公式(6)及公式(10)推導當觀察到顧客前期之購買金額 m_1 屬於某一購買金額狀態時(假設此購買金額狀態範圍為： $a_1 < m_1 < b_1$)，下一期購買金額之事後機率密度函數如公式(12)。

$$\begin{aligned}f_m(m | a_1 < m_1 < b_1) &= \frac{P(m) \cap P(a_1 < m_1 < b_1)}{P(a_1 < m_1 < b_1)} \\ &= \frac{\int_{a_1}^{b_1} \frac{m^{u-1} (\phi + m_1)^{u+v} \Gamma(2u+v)}{\Gamma(u) \Gamma(u+v) (m_1 + m + \phi)^{2u+v}} W dm_1}{\int_{a_1}^{b_1} \frac{\Gamma(u+v)}{\Gamma(u) \Gamma(v)} \left(\frac{m}{\phi + m} \right)^u \left(\frac{\phi}{\phi + m} \right)^v \frac{1}{m} dm} \\ W &= \left[\frac{\Gamma(u+v)}{\Gamma(u) \Gamma(v)} \left(\frac{m_1}{\phi + m_1} \right)^u \left(\frac{\phi}{\phi + m_1} \right)^v \frac{1}{m_1} \right]\end{aligned}\quad (12)$$

根據公式(12)即可推導購買金額狀態轉移機率，假設當觀察到顧客前期購買金額狀態為 $a_1 < m_1 < b_1$ 時，則此顧客下一期購買金額 m_2 移轉至某一購買金額狀態(假設此購買金額狀態範圍為： $a_2 < m_2 < b_2$)的事後機率如下：

$$\begin{aligned}f_m(a_2 < m_2 < b_2 | a_1 < m_1 < b_1) &= \int_{a_2}^{b_2} f_m(m_2 | a_1 < m_1 < b_1) dm_2\end{aligned}\quad (13)$$

推導完整顧客購買狀態轉移機率

根據購買頻率和金額的狀態轉移機率，以及顧客的購買頻率和金額獨立之假設，可推導出顧客 RFM 狀態之轉移機率如公式(14)

$$f_{r,f,m}(r_1+1, f_1, a_1 < m_1 < b_1 | r_1, f_1, a_1 < m_1 < b_1) = f_f(0 | f_1, r_1) \quad (14)$$

公式(14)表示當顧客下一期沒有發生購買行為時之購買狀態移轉機率，顧客購買狀態從(R,F,M)=($r_1, f_1, a_1 < m_1 < b_1$)移至($r_1+1, f_1, a_1 < m_1 < b_1$)。

同理可推導當顧客下一期發生購買行為時之購買狀態移轉機率如下：

$$f_{r,f,m}(0, f_2, a_2 < m_2 < b_2 | r_1, f_1, a_1 < m_1 < b_1) = f_f(f_2 | f_1, r_1) f_m(a_2 < m_2 < b_2 | a_1 < m_1 < b_1) \quad (15)$$

$$f_2 > 0$$

公式(15)表示當顧客購買狀態從(R,F,M)=($r_1, f_1, a_1 < m_1 < b_1$)移轉至($0, f_2, a_2 < m_2 < b_2$)時之機率。

推導特殊之購買頻率移轉機率

此外，在定義購買頻率狀態時，必須考慮到最後一個購買頻率的狀態要如何定義。如果將最後一個狀態定義為某一購買頻率 f ，此即表示假設顧客的購買頻率之最大值為 f ，此為不合理的假設，因此本研究中將購買頻率最後一個狀態 f 定義為：購買頻率 $\geq f$ 。至於如何決定 f 之值可利用公式(5)計算顧客購買頻率 $\geq f$ 的機率，並參考實際資料分布的情況。由此可決定 f 的大小，使得顧客購買頻率 $\geq f$ 的機率小於某一個門檻，如此一來即可有效減少估計上的誤差。而根據公式(8)及(9)，此購買頻率狀態移轉至其他狀態之機率如公式(16)。

$$f_f(f_2 | r_1, f_1 \geq f) = \frac{P(f_2, r_1, f_1 \geq f)}{P(r_1, f_1 \geq f)} = \frac{\sum_{f_1=f}^{\infty} f_f(f_2 | r_1, f_1) f_{r,f}(r_1, f_1)}{\sum_{f_1=f}^{\infty} f_{r,f}(r_1, f_1)}$$

$$= \frac{\sum_{f_1=f}^{\infty} \left[\frac{(1+r_1+\alpha) f_1^{1+w} \Gamma(f_2 + f_1 + w)}{\Gamma(f_1 + w) f_2! (2+r_1+\alpha) f_2^{2+f_1+w}} \frac{\alpha^w \Gamma(f_1 + w)}{\Gamma(w) f_1! (1+r_1+\alpha) f_1^{1+w}} \right]}{\sum_{f_1=f}^{\infty} \left[\frac{\alpha^w \Gamma(f_1 + w)}{\Gamma(w) f_1! (1+r_1+\alpha) f_1^{1+w}} \right]} \quad (16)$$

圖 2：狀態移轉情形

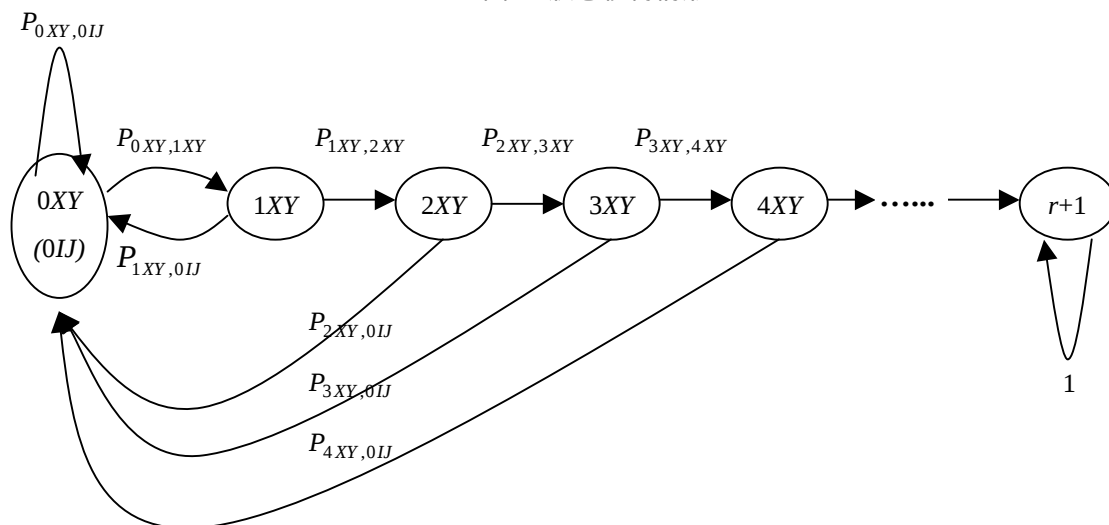


圖 3：顧客購買狀態前後期之移轉情形

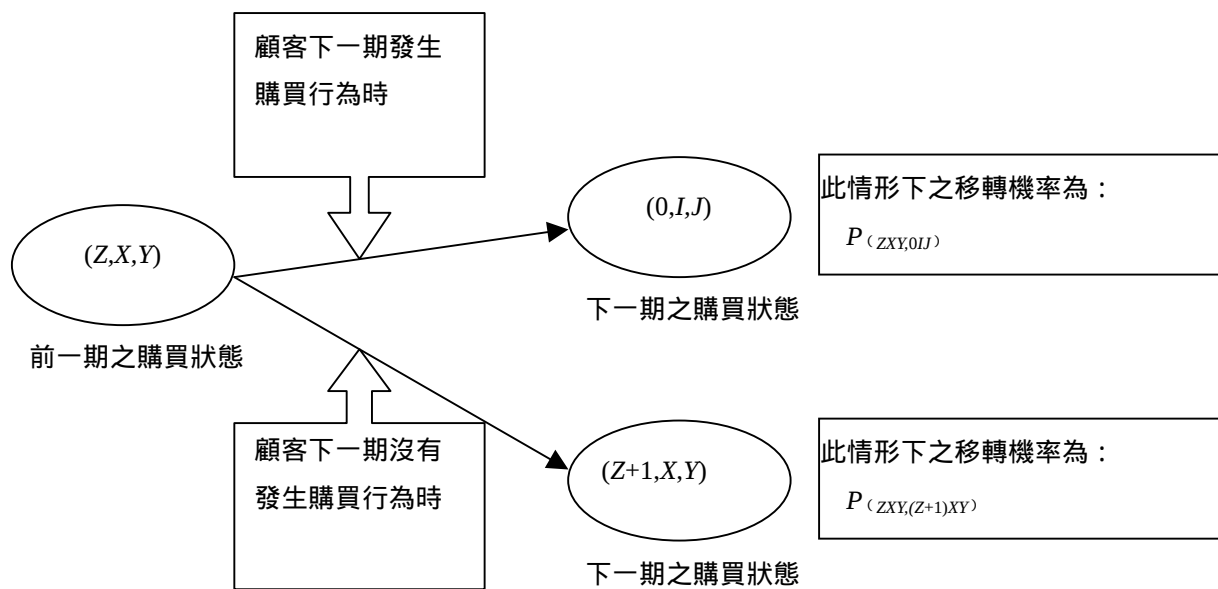


圖 4: 移轉矩陣

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix}
 P_{(011,011)} & P_{(011,012)} & P_{(011,013)} & P_{(011,014)} & \Lambda & P_{(011,0\ fm)} & P_{(011,111)} & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\
 P_{(012,011)} & P_{(012,012)} & P_{(012,013)} & P_{(012,014)} & \Lambda & P_{(012,0\ fm)} & 0 & P_{(012,112)} & \Lambda & 0 & 0 \\
 P_{(013,011)} & P_{(013,012)} & P_{(013,013)} & P_{(013,014)} & \Lambda & P_{(013,0\ fm)} & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\
 P_{(014,011)} & P_{(014,012)} & P_{(014,013)} & P_{(014,014)} & \Lambda & P_{(014,0\ fm)} & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\
 \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \Lambda & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \Lambda & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\
 P_{(111,011)} & P_{(111,012)} & P_{(111,013)} & P_{(111,014)} & \Lambda & P_{(111,0\ fm)} & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\
 \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \Lambda & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \Lambda & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\
 P_{(211,011)} & P_{(211,012)} & P_{(211,013)} & P_{(211,014)} & \Lambda & P_{(211,0\ fm)} & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\
 \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \Lambda & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \Lambda & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\
 P_{(rfm,011)} & P_{(rfm,012)} & P_{(rfm,013)} & P_{(rfm,014)} & \Lambda & P_{(rfm,0\ fm)} & 0 & 0 & \Lambda & 0 & P_{(rfm,r+1)} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 1
 \end{bmatrix}$$

根據公式(16)可估計從購買頻率狀態 $(r_1, f_1 \geq f)$ 移轉到其他購買頻率狀態的機率, 因此從 $(r_1, f_1 \geq f)$ 移轉到 $(0, f_2 \geq f)$ 的機率如公式(17)。

$$\begin{aligned}
 & f_f(f_2 \geq f | r_1, f_1 \geq f) \\
 &= \sum_{f_2=f}^{\infty} f_f(f_2 | r_1, f_1 \geq f) \quad (17)
 \end{aligned}$$

而從其他購買頻率狀態 (r_1, f_1) 移轉到最後一個購買頻率狀態 $(0, f_2 \geq f)$ 的機率如下：

$$f_f(f_2 \geq f | r_1, f_1) = \sum_{f_2=f}^{\infty} f_f(f_2 | r_1, f_1) \quad (18)$$

利潤矩陣

定義利潤矩陣

利潤矩陣即為不同購買狀態下之顧客對企業的平均利潤貢獻所構成之矩陣。例如, 當顧客的購買狀態為 $(0,1,1)$ 時, 對於企業的利潤貢獻如公式(19)。

$$G_{(0,1,1)} = \bar{g}_{(0,1,1)} \times \bar{Q}_{(0,1,1)} - \bar{C}_{(0,1,1)} \quad (19)$$

其中

$G_{(0,1,1)}$:代表此種狀態下, 顧客的利潤貢獻額

$\bar{g}_{(0,1,1)}$:為此一顧客的購買頻率, 此例子中其值為 1

$\bar{Q}_{(0,1,1)}$:為此一購買金額狀態的平均單次購買金額

$\bar{C}_{(0,1,1)}$:代表花費在此名顧客的行銷成本

因此相對應於移轉矩陣的 $[(r+1) \times f \times m + 1]$ 列乘以利潤矩陣 $\mathbf{G}$ 可以建立如公式(20)。

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix}
 E[\bar{g}_{(0,1,1)} \bar{Q}_{(0,1,1)} - \bar{C}_{(0,1,1)}] \\
 E[\bar{g}_{(0,1,2)} \bar{Q}_{(0,1,2)} - \bar{C}_{(0,1,2)}] \\
 \mathbf{M} \\
 E[\bar{g}_{(0,f,m-1)} \bar{Q}_{(0,f,m-1)} - \bar{C}_{(0,f,m-1)}] \\
 E[\bar{g}_{(0,f,m)} \bar{Q}_{(0,f,m)} - \bar{C}_{(0,f,m)}] \\
 -\bar{C}_{(1,1,1)} \\
 \mathbf{M} \\
 -\bar{C}_{(r+1)}
 \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中

$\bar{g}_{(X,Y,Z)}$ 代表顧客的購買頻率

$\bar{Q}_{(X,Y,Z)}$ 代表各種購買狀態下顧客平均單次購買金額

$\bar{C}_{(X,Y,Z)}$ 代表各種購買狀態下企業對該名顧客的行銷成本

$E[\]$ 代表期望值

利潤矩陣中, 每一列的值代表各購買狀態下顧客之預期利潤, 由公式(19)可知, 當購買狀態 R 等於 0 時, 表示顧客發生購買行為, 因此有利潤產生, 而當 R 不等於 0 時, 表示顧客沒有發生購買行為, 故預期利潤貢獻為負值。

估計利潤矩陣

根據購買行為隨機模型以及公式(6), 可以推導出利潤矩陣中各購買金額狀態下之平均單次購買金額的期望值如公式(21)。

$$E(\bar{Q}_{(0, f_1, a_1 < m_1 < b_1)}) = \left[\frac{1}{\int_{a_1}^{b_1} \frac{\Gamma(u+v)}{\Gamma(u)\Gamma(v)} \left(\frac{m}{\phi+m}\right)^u \left(\frac{\phi}{\phi+m}\right)^v \frac{1}{m} dm} \right] \times \left[\int_{a_1}^{b_1} m_1 * \frac{\Gamma(u+v)}{\Gamma(u)\Gamma(v)} \left(\frac{m_1}{\phi+m_1}\right)^u \left(\frac{\phi}{\phi+m_1}\right)^v \frac{1}{m_1} dm_1 \right] \quad (21)$$

但是於估計購買金額之最後一個狀態時，因為此狀態定義為大於某個金額，因此在估計其期望值時，本研究把公式(21)中的 b_1 以過去資料裡每期平均單次購買金額之最大值代入，而不是以無限大(∞)，因為如以 $b_1 = \infty$ 代入公式(21)，其結果將會發散或造成嚴重高估的現象。

根據公式(5)可估計最後一個購買頻率狀態的購買頻率之期望值公式如(22)。

$$E[g_{(0, f_1 \geq f, m_1)}] = \sum_{f_1=f}^{\infty} \frac{f_1 * \frac{\Gamma(w+f_1)}{\Gamma(w)f_1!} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^w \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{f_1}}{\sum_{f_2=f}^{\infty} \frac{\Gamma(w+f_2)}{\Gamma(w)f_2!} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^w \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{f_2}} \quad (22)$$

本研究以過去資料裡每期購買頻率之最大值代替公式(22)中的無限大(∞)。不同的是，根據實際資料的驗證，本研究發現在購買頻率的情形裡，不論是以每期頻率之最大值或是無限大(∞)代入公式(22)，其結果非常接近。

顧客價值的計算

根據顧客狀態移轉矩陣以及利潤矩陣，可以計算出各種狀態下之顧客在未來的每一期中對於企業的利潤貢獻，此外，計算顧客價值可以分以下兩種計算方式：

在有限期間內計算顧客價值

以有限期間來計算顧客價值的計算公式如(23)。

$$\mathbf{V}^T = \sum_{t=1}^T \left[(1+d)^{-1} \mathbf{P} \right]^t \mathbf{G} \quad (23)$$

$\mathbf{V}^T$ 為顧客在未來 T 期所創造的價值

$\mathbf{P}$ 為顧客移轉矩陣

$\mathbf{G}$ 代表利潤矩陣

d 代表折現率

t 為顧客購買期間距今的期數

在無限期間下計算顧客價值

以無限期來計算顧客價值如公式(24)。

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{V}^T \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \left[(1+d)^{-1} \mathbf{P} \right]^t \mathbf{G} \\ &= \left[(1+d)^{-1} \mathbf{P} \right] \left[\mathbf{I} - (1+d)^{-1} \mathbf{P} \right]^{-1} \mathbf{G} \end{aligned} \quad (24)$$

其中

$\mathbf{V}$ 為顧客未來所創造的總價值

$\mathbf{P}$ 為顧客移轉矩陣

$\mathbf{G}$ 代表利潤矩陣

d 代表折現率

$\mathbf{I}$ 為單位矩陣

t 為顧客購買期間距今的期數

參數估計

本小節的重點在如何估計購買行為隨機模型裡的機率分配參數，這對於估計顧客價值而言是非常重要的，因為不論是移轉矩陣的估計和利潤矩陣的估計都是根據購買行為隨機模型裡的參數計算而得。

估計購買頻率之機率分配參數

根據所建立之模型，購買頻率所要估計的參數為 α 和 w ，這兩個參數為個別顧客之平均每期購買頻率 λ 的先驗分配參數，本研究以最大概似法(Maximum Likelihood Method)估計 α 和 w 。

假設共有 n 名顧客，每一名顧客的平均購買頻率為 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ 。則對數之最大概似函數(Log-Likelihood Function)如公式(25)。

$$LL(\alpha, w | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^n \ln[g_{\lambda}(\lambda_i | \alpha, w)] \quad (25)$$

根據公式(25)，即可利用最大概似法求出 α 和 w 之最大概似估計值(Maximum Likelihood Estimate)，得到 λ 之先驗分配參數。

估計購買金額之機率分配參數

購買金額所要估計之先驗分配參數有 u, v, ϕ 三個，如同 Colombo & Jiang (1999)所提出的參數估計方法，本研究以最大概似法估計 u, v, ϕ 。假設共有 n 名顧客，且每一個顧客有發生購買行為之期數為 $h_k (k=1, 2, \dots, n)$ ，另外每一名顧客於有發生購買行為之

期別，其單期之平均單次購買金額為 $\bar{m}_{i,j} (i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,h_i)$ ，其中 i 表示是那一顧客， j 表示是那一期別。則對數之最大似函數(Log-Likelihood Function)如公式(26)。

$$LL(u, v, \phi | \bar{m}_{i,j}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{h_i} \ln[g_{G-G}(\bar{m}_{i,j} | u, v, \phi)] \quad (26)$$

根據公式(26)，即可利用最大似法求出 u, v, ϕ 之最大似估計值，得到購買金額之先驗分配參數。

研究資料實證及比較

資料介紹

本研究所使用資料為某工業用電腦廠商(以下稱 A 公司)的某遙控輸入輸出模組產品系列之實際歷史交易資料。其時間長度為 30 個月，由 1997 年 11 月至 2000 年 4 月，包含 701 個顧客。本研究利用前 24 個月之資料估計模型參數，再利用後 6 個月進行模型分析結果之驗證。

由於 A 公司的客戶主要為企業界，因此大多採直接銷售的方式，所以在產品的定價上差異非常大。因此，本研究為了去除種種商業上對實際購買金額的影響，將直接對顧客之購買數量進行預測，取代購買金額。

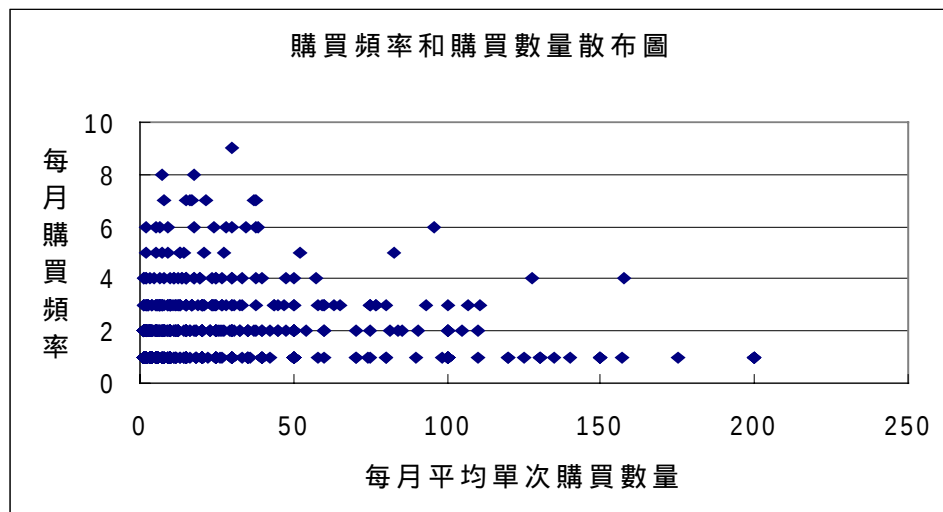
對顧客進行分群

由於本研究的模型屬於同質性模型(Homogenous Model)，利用同一組參數進行所有顧客價值的估計，因此，如果顧客之間行為異質性過大，將造成模型所估計之參數對整體顧客的行為不具有代表性，導致估計結果不準確。因此，本研究為了使參數更能代表整體顧客的行為，將先對所有 701 位顧客進行分群，而經過對顧客的交易資料之初步分析，結果顯示主要有兩種顧客：一種為低購買頻率且低購買數量之低價值顧客，一種為高購買頻率且高購買數量之高價值顧客，而且此產品的銷售量有 85% 左右來自約 3% 的顧客，顯示顧客行為有兩極化的現象。因此本研究將先利用集群分析把顧客分為兩群，再分別進行顧客價值的估計。

對假設進行驗證

本研究的模型有兩個重要的前提假設：顧客購買頻

圖 5: 購買頻率及數量散佈圖



資料分析

資料實證之說明

於資料分析之前，本研究將檢驗資料是否符合模型之假設；再者，為了符合實際資料之特性，本研究進行資料驗證時，將先對資料進行初步的處理，此外，所估計之顧客價值和模型原本之定義有所差異。以下將分別詳述之。

對數量進行預測

率和購買數量(金額)兩個行為維度互相獨立，以及顧客的購買行為符合馬可夫鏈特性。首先針對第一個獨立性假設，在對資料進行分析之後，發現所有顧客之每月購買頻率和每月平均單次購買數量的相關係數為 0.1817，呈現低度正相關，此兩變數之散佈圖如圖 5 所示。

就圖 5 而言，並沒有發現明顯之線性或非線性關係，因此第一個獨立性假設應可適用於此資料。再者，為了使資料的特性更符合馬可夫鏈的假設，因此本研究

希望移轉矩陣中，當前後兩期移轉時，至少涵蓋顧客的一個購買週期，確保顧客前後兩期購買行為之關聯性。因此本研究將會對分群後的兩群顧客，分別設定其每期時間長短，使兩期的時間長度至少要大於每群顧客的平均購買週期。

進行顧客分群

本研究以常用之集群分析法進行分群，採用 k-means 演算法，利用每位顧客的平均每月購買頻率及平均每次購買數量兩個變數作為分群的依據，把顧客分為兩群，其分群結果如圖 6 所示。

根據集群分析之 k-means 演算法分群之後，得到第一群 25 名顧客(圖 6 之正方形點)以及第二群 676 名顧客(圖 6 之三角形點)。由圖 6 可以看出：第一群顧客為高購買頻率或高購買數量的高價值顧客，第二群顧客為低購買頻率及低購買數量的低價值顧客。接下來將分別針對這兩群顧客進行價值分析。

定義顧客狀態

第一群之高價值顧客

因為此群顧客之平均每月購買頻率為 1.5 次，故將每期長度定為 1 個月。而根據公式(7)及資料本身的情況，發現顧客如果已有整整 4 期沒有發生購買行為，其繼續購買的機率非常之低，因此將吸收狀態定為 4 ($4 = r + 1, r = 3$)。此外，根據圖 7，可知顧客單期購買頻率 5 次以上(包含 5 次)發生的比率只有 5.6%，而且根據公式(5)所估計之負二項分配，單期購買頻率 5 次以

上之理論機率僅有 7.1%，因此將最後一個購買頻率狀態定義為 > 4 ，也就是 ≥ 5 。

而經過實際資料驗證，本研究發現將所有顧客每期之平均購買數量依集群分析之 k-means 演算法進行分群，並以分群結果作為狀態定義之依據最為適當，因為此分群方法不但能有效區分具有差異之顧客購買金額行為，並能更有效地預測顧客之購買數量。本研究將購買數量狀態分為三種，分佈結果如表 1。

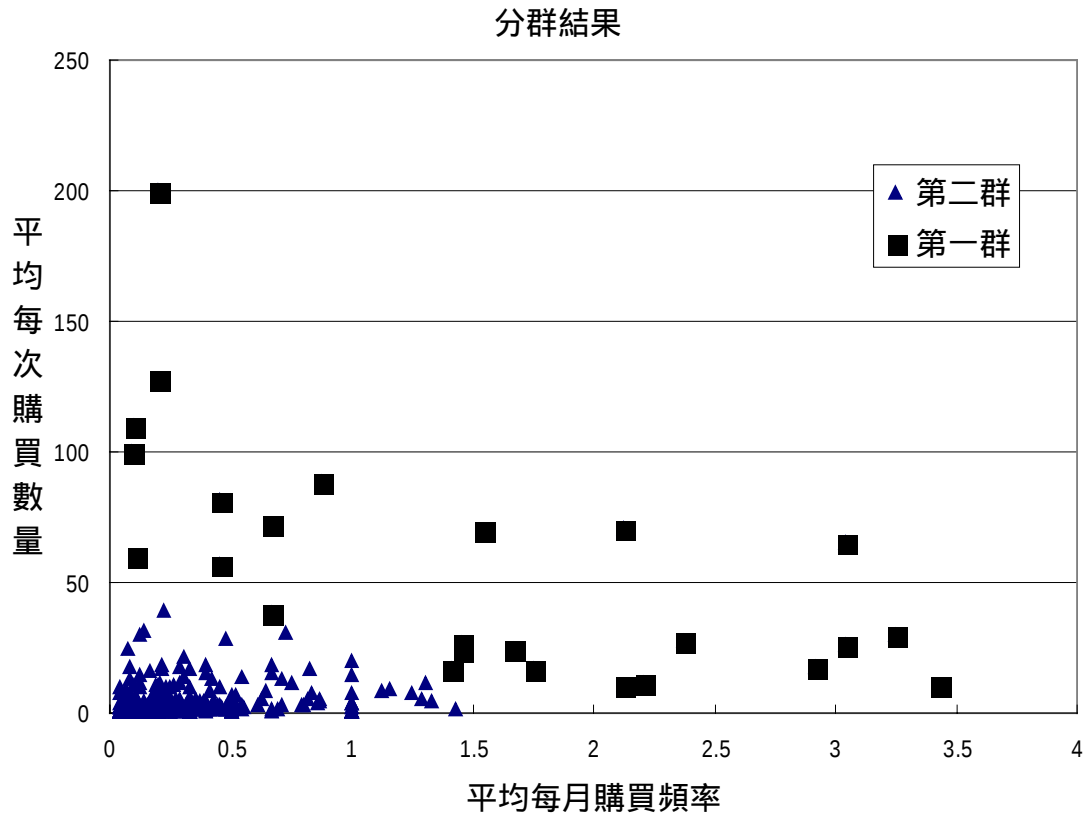
第二群之低價值顧客

由於此群顧客之平均每月購買頻率為 0.22 次，因此把每期的長度定為 3 個月。根據公式(7)以及資料本身的情況，顯示顧客如果已經有整整 4 期，亦即已 12 個月沒有發生購買行為時，其繼續購買之機率已非常低，因此將吸收狀態定為 4 ($= r + 1$)。而根據公式(5)所估計之負二項分配，第二群顧客單期購買頻率在 5 次以上的理論機率僅有 0.7%，而且在過去兩年(1997 年 11 月至 1999 年 10 月)的實際資料中，顧客實際單期購買頻率在 5 次以上的比率也相當低。因此，本研究將最後一個購買頻率狀態定義為 > 4 ，也就是 ≥ 5 。最後，本研究將第二群顧客之購買數量狀態分為三種，分佈結果如表 2。因此，第一群和第二群顧客狀態皆定義為 61 ($= 4 \times 5 \times 3 + 1$)種狀態，而其移轉矩陣和利潤矩陣都將有 61 列。

建立移轉矩陣及利潤矩陣

建立移轉矩陣之前，必須利用過去兩年(1997 年 11 月至 1999 年 10 月)之實際顧客交易資料估計模型之先驗分配參數。表 3 為利用前面提出的方法所估計之參

圖 6: 顧客分群結果



數。從表 3 所列之參數，可發現這兩群顧客所估計出之參數具有相當大之差異，此結果顯示這兩群顧客之購買行為的確具有顯著不同，因此分群後再做分析將可使所估計之參數更能代表各群顧客之購買行為。根據表 3 中之參數，即可利用之前所推導之狀態移轉機率公式，建構顧客購買狀態移轉矩陣。此外，由於本研究於資料實證時所定義之利潤矩陣並不考慮行銷成本，並以購買數量取代購買金額，因此，利潤矩陣中每一個購買狀態之預期每期總購買數量計算方式如公式(27)。

$$\begin{aligned}
 &\text{購買狀態為 } (0, f, m) \text{ 時} \\
 &\Rightarrow \text{總預期購買數量} \\
 &\quad = \text{預期購買頻率} \times \text{預期單次購買數量} \\
 &\text{購買狀態為 } (r, f, m) \text{ 時} \\
 &\Rightarrow \text{總預期購買數量} \\
 &\quad = 0 \quad (r > 0)
 \end{aligned} \tag{27}$$

進行顧客價值的估計

建構移轉矩陣以及利潤矩陣之後，必須計算在 1999 年 10 月底，亦即前兩年交易資料之最後一期末時，61 個購買狀態之顧客人數分佈，之後即可利用之前所推導之顧客價值估計公式計算接下來 6 個月內(1999 年 11 月至 2000 年 4 月)所有顧客之總購買數量。此外，在進行資料驗證時，本研究不考慮折現率。

圖 7：第一群顧客每期購買頻率次數分配圖

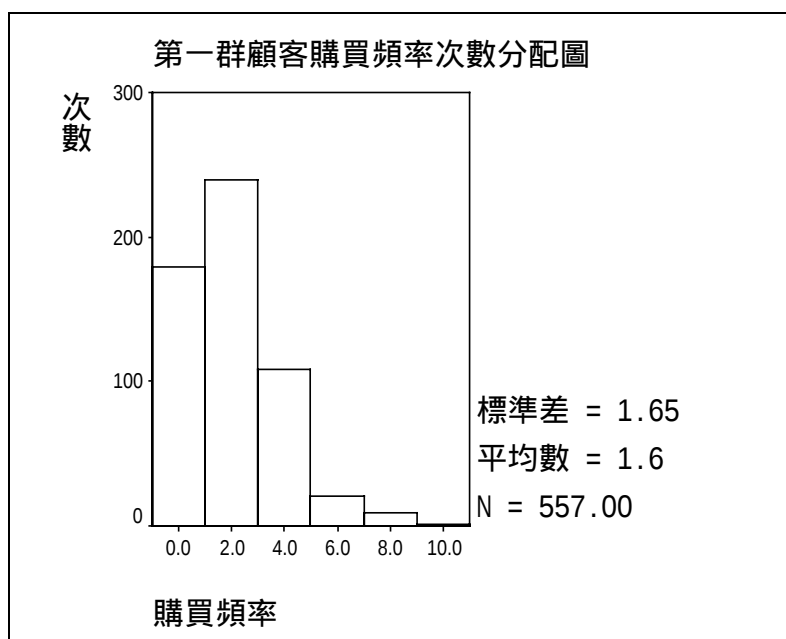


表 1：第一群購買數量狀態分群結果

	第一種狀態	第二種狀態	第三種狀態	
平均單次購買數量範圍	0-58	58-130	>130	(單位：個)

表 2：第二群購買數量狀態分群結果

	第一種狀態	第二種狀態	第三種狀態	
平均單次購買數量範圍	0-13	13-74	>74	(單位：個)

表 3：參數估計結果

群別\估計出之參數	α	w	u	v	ϕ
第一群	0.8177	1.2303	2.25	3.154	40.011
第二群	2.008	1.34	85.9	1.6705	0.0323

資料分析結果比較

本研究把主要之分析結果(利用兩個變數分群之資料進行分析)，和本模型於只用平均購買頻率分群的資料之分析結果、未分群的資料之分析結果、過去值作為預測值的結果、Hughes 計算方式所得之結果以及未來半年(1999 年 11 月至 2000 年 4 月)之實際銷售數量做比較，以驗證本研究模型的實用性。此外，本研究計算前半年之總銷售數量(1999/5-1999/10 之總銷售數量)，作為利用過去值當作預測值之預測方法所得之結果，以

得到此預測方法在未來半年之預測結果。

Hughes 之顧客終生價值估計方法

此處將大略介紹 Hughes(1994)所提出之顧客價值估計方式。依據 Hughes(1994)對於顧客收益的計算方式來看，每位顧客的終生收益方面可包含三個部分：顧客每期的維持率、顧客每次交易的平均金額與期間長短。因此，每位顧客在未來 6 個月中的交易數量可定義如公式(28)。

交易數量

$$= \sum_t \text{顧客數目} \times \text{平均顧客每期的維持率}^t \times \text{每個月交易幾次} \times \text{平均的交易數量} \quad (28)$$

其中

t 代表所計算的期別

平均顧客每期的維持率：

此項乃是推估在下一期的時候仍會購買的舊顧客人數

平均每個月交易次數：

估計所剩餘的顧客每個月會交易幾次

平均的交易數量：

估計顧客每次交易時候購買的數量

期間的長短：

計算之期間的長短，在此乃是預估 6 個月

分析結果比較

根據公式(28)即可得到利用 Hughes(1994)之方法所估計的結果，而各種預測方法的結果整理於表 4，而誤差率計算公式如公式(29)。

$$\text{誤差率} = |\text{預測值} - \text{實際值}| / \text{實際值} \quad (29)$$

由表 4 可得知，本研究結果誤差率最低，究其原因如下：

1. Hughes 的方法由於假設了顧客的維持率，卻沒有考慮顧客回流的可能性，導致嚴重低估顧客的購買數量。而且在 Hughes 的模型中，僅以三個變數：每期顧客維持率、每期交易次數以及每次交易數量來描述顧客的購買行為，缺乏對顧客購買

行為的隨機性以及異質性的假設，過度簡化了顧客的購買行為。因此，Hughes 的模型不論在實證以及理論上都還需要再加以補強。

2. 本模型未分群之資料其分析結果也嚴重低估了顧客購買數量，雖然理論上如果利用負二項分配所估計出之參數能夠包含了顧客行為的平均值資訊，那利用此參數所估計之結果應該不會造成嚴重低估的結果，但是因為本模型是利用貝氏機率及馬可夫鏈來推導顧客不同購買狀態的移轉機率，針對不同購買狀態的顧客預測其行為的改變，因此原本負二項分配所估計之參數包含之平均值資訊可能會被貝氏機率的特性所影響，導致顧客事後機率分配之參數所包含之資訊改變，因此在本研究的情況下，如果沒有事先對資料進行分群，所估計出之參數無法捕捉到那極少數之高價值顧客，將導致預測結果低估。
3. 業界常用的方法：直接用過去值當作預測值，此方法的誤差非常小，推測其可能原因為此交易資料來自工業用電腦廠商，而其交易對象主要為企業界，其購買行為較為穩定，因此適合以過去值作為預測值。既然如此，此方法不但簡單而且效果佳，那為何還要提出本研究中如此複雜之模型，其主要理由有三：第一，用過去值作為預測的依據，即假設顧客行為沒有任何變動，此假設並不符實際情況，但本模型假設顧客購買狀態會進行移轉，較符合顧客之實際購買行為。第二，本模型具有理論基礎，並對顧客行為具有完整之

表 4：各方法之計算結果比較

預測方法 結果	用兩變數分群(本研究主要結果)	只用平均購買頻率分群	未分群	過去值 (1999/5-1999/10之總銷售數量)	Hughes
第一群預測值	7964	6950			
第二群預測值	2451	3238			
總預測數量	10415	10189	5231	10078	2604
第一群實際值	7939	7325			
第二群實際值	2498	3112			
總實際值	10437	10437	10437	10437	10437
總誤差率(取絕對值)	0.21%	2.4%	49.88%	3.44%	75.05%

描述及假設，因此本模型較具有彈性並具有發展性，只需更動部分假設即可將模型應用於不同型態之資料，並且能夠加入顧客行為參數之變動性，考慮顧客購買行為受到其他因素影響而變動時之情況。第三：現今的資訊科技已非常發達，即使是個人電腦所具有的計算能力已可媲美以前的超級電腦。本模型在進行實證時所使用的即是個人電腦。因此，在現今的資訊科技幫助下，複雜的計算以及龐大的資料量已不再是重要的考量，如何使準確率更提昇一個百分比也許是許多企業主更關心的重點，這也就是本研究在實用上的價值所在了。

4. 當本模型應用於已分群之資料時，不論以兩個變數或是一個變數作為分群的依據，其對兩群顧客之預測結果都相當好，表示模型參數的確捕捉到了各群顧客之購買行為，顧客的購買行為也大致符合模型的假設。而從本實證中可以得知，不一定要同時用購買數量以及購買頻率作為分群的依據，只要能夠有效區分具有不同購買行為的顧客，本模型就能夠準確地預測不同群顧客的未來價值。

究其以上論述，可知資料驗證之結果證明了本研究所提出的模型不但能夠在學理上有效地解釋顧客的購買行為，並且可以用於實際資料上作預測，得到相當不錯的預測結果，且其預測結果優於目前其他常用之預測方法，因此本研究所提出之模型的確具有實用上的價值。

結論

在本篇論文中，本研究嘗試建構一個顧客價值分析模型，並且進行實際資料的驗證，根據實證之結果可以發現：結合 RFM 模型及馬可夫鏈能夠更有效捕捉顧客購買行為的改變，而且透過事先分群可以彌補同質性模型(Homogeneous Model)在分析顧客具有異質性的資料時之不足，並可對不同購買狀態的顧客進行預測。此外，建構顧客購買行為隨機模型及利用貝氏機率可使轉移矩陣及利潤矩陣估計結果更為準確。最後，本研究資料實證之結果證明本顧客價值分析模型的確具有實用上之價值。

REFERENCES

- Berger, Paul D. & Nada I. Nasr, 1998. Customer Lifetime Value: Marketing Models and Applications, *Journal of Interactive Marketing*, 12: 17-29.
- Brockett, Patrick L., Linda L. Golden, & Harry H. Panjer, 1996. Flexible Purchase Frequency Modeling, *Journal of Marketing Research*, 33: 94-107.
- Colombo, Richard & Weina Jiang, 1999. A Stochastic RFM Model, *Journal of Interactive Marketing*, 13: 2-12.
- Dwyer, F. Robert, 1989. Customer Lifetime Valuation to Support Marketing Decision Making, *Journal of Direct Marketing*, 3: 8-15.
- Ehrenberg, A.S.C., 1959. The Pattern of Consumer Purchases, *Applied Statistics*, 8(1): 26-41.
- Fader, Peter S., Bruce G.S. Hardie, & Chun-Yao Huang, 2001. An Integrated Trial/Repeat Model for New Product Sales, Working Paper, Wharton School, University of Pennsylvania.
- Huang, Chun-Yao, 2002. An integrated Stochastic Model for the Analysis of Web Site Visiting Behaviors, Ph.D. Dissertation, London Business School, University of London.
- Hughes, A.M., 1994. *Strategic Database Marketing*, Chicago, IL: Probus Publishing Company.
- Jackson, B., 1985. *Winning and Keeping Industrial Customers*, Lexington, MA: Lexington Books.
- Jen, Lichung, Chien-Heng Chou, & Greg M. Allenby, 2002. A Bayesian Approach to Modeling Purchase Frequency, *Marketing Letters*, forthcoming.
- Kotler, P. & G. Armstrong, 1996. *Principles of Marketing*, Prentice Hall.
- Kotler, P., 2000. *Marketing Management*, International Edition, Prentice Hall.
- Morgan, R. & S. Hunt, 1994. The Commitment-Trust Theory of Relationship Marketing, *Journal of Marketing*, 20-38.
- Parfitt, J.H. & B.J.K. Collins, 1968. Use of Consumer Panels for Brand Share Prediction, *Journal of Marketing Research*, 5: 131-46.
- Pfeifer, Phillip E & Robert L. Carraway, 2000. Modeling Customer Relationships as Markov Chains, *Journal*

of *Interactive Marketing*, 14: 43-55.

Schmittlein, David C., Donald G. Morrison, & Richard Colombo, 1987. Counting Your Customers: Who Are They and What Will They Do Next? *Management Science*, 33: 1-24.

Schmittlein, D.C. & D.G. Morrison, 1985. Is The Customer Still Active? *American Statistician*, 39: 291-294.

Sewell, C. & P. Brown, 1990. *Customer for Life: How to Turn That One-Time Buyer into a Lifetime Customer*, New York: Doubledat / Currency, 235-238.

Silk, Alvin J. & Glen L. Urban, 1978. Pre-Test-Market Evaluation of New Packaged Goods: A Model and Measurement Methodology, *Journal of Marketing Research*, 15: 171-91.

Stone, Bob, 1995. *Successful Direct Marketing Methods*, Lincolnwood, IL: NTC Business Books, 29-35.

Wyner, G.A., 1996. Customer Profitability: Linking Behavior to Economics, *Marketing Research*, 8(2): 36-38.

附錄 A：公式(7)的詳細推導過程

$f_{r,f}(r, f)$ 為 r 和 f 同時出現的機率。 $P_{NBD}[f]$ 是在沒有條件機率限制下， f 出現的機率分配，而這機率分配正是負二項分配。

$$\begin{aligned} z(r|f) &= \frac{f_{r,f}(r, f)}{P_{NBD}[f]} \\ &= \frac{\int_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^f}{f!} e^{-\lambda r} \frac{\alpha^w}{\Gamma(w)} \lambda^{(w-1)} e^{-\alpha\lambda} d\lambda}{\frac{\Gamma(w+f)}{\Gamma(w)f!} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^w \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^f} \\ &= \frac{\frac{\alpha^w}{\Gamma(w)f!} \int_0^\infty \lambda^{f+w-1} e^{-\lambda(\alpha+1+r)} d\lambda}{\frac{\Gamma(w+f)}{\Gamma(w)f!} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^w \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^f} \\ &= \frac{\frac{\alpha^w}{\Gamma(w)f!} \left(\frac{1}{\alpha+1+r}\right)^{w+f} \Gamma(w+f)}{\frac{\Gamma(w+f)}{\Gamma(w)f!} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^w \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^f} \\ &= \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+1+r}\right)^{w+f} \end{aligned}$$

附錄 B：公式(8)的詳細推導過程

根據貝氏機率的原理可得下列結果。

$$\begin{aligned} \rho_\lambda(\lambda | r_1, f_1) &= \frac{f_{r,f}(r_1, f_1 | \lambda) g_\lambda(\lambda)}{f_{r,f}(r_1, f_1)} \\ &= \frac{f_r(r_1 | \lambda) P_f[f_1 | \lambda] g_\lambda(\lambda)}{f_{r,f}(r_1, f_1)} \\ &= \frac{\left[e^{-\lambda r_1} \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^{f_1}}{f_1!} \right) \right] \left[\frac{\alpha^w}{\Gamma(w)} \lambda^{w-1} e^{-\alpha\lambda} \right]}{\int_0^\infty e^{-\lambda r_1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{f_1}}{f_1!} \frac{\alpha^w}{\Gamma(w)} \lambda^{w-1} e^{-\alpha\lambda} d\lambda} \\ &= \frac{\lambda^{f_1+w-1} e^{-\lambda(1+r_1+\alpha)}}{\int_0^\infty \lambda^{f_1+w-1} e^{-\lambda(1+r_1+\alpha)} d\lambda} = \frac{\lambda^{f_1+w-1} e^{-\lambda(1+r_1+\alpha)}}{\left(\frac{1}{1+r_1+\alpha} \right)^{f_1+w} \Gamma(f_1+w)} \\ &= \frac{(1+r_1+\alpha)^{f_1+w}}{\Gamma(f_1+w)} \lambda^{f_1+w-1} e^{-\lambda(1+r_1+\alpha)} \\ &= g_\lambda(\lambda | f_1+w, 1+r_1+\alpha) \end{aligned}$$

附錄 C：公式(9)的詳細推導過程

根據貝氏機率的原理可得下列結果。

$$\begin{aligned} f_f(f_2 | f_1, r_1) &= \int_0^\infty P(f_2 | \lambda) \rho_\lambda(\lambda | r_1, f_1) d\lambda \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^{f_2}}{f_2!} \frac{(1+r_1+\alpha)^{f_1+w}}{\Gamma(f_1+w)} \lambda^{f_1+w-1} e^{-\lambda(1+r_1+\alpha)} d\lambda \\ &= \frac{(1+r_1+\alpha)^{f_1+w} \int_0^\infty \lambda^{f_1+f_2+w-1} e^{-\lambda(2+r_1+\alpha)} d\lambda}{\Gamma(f_1+w) f_2!} \\ &= \frac{(1+r_1+\alpha)^{f_1+w} \left(\frac{1}{2+r_1+\alpha} \right)^{f_2+f_1+w} \Gamma(f_2+f_1+w)}{\Gamma(f_1+w) f_2!} \\ &= \frac{(1+r_1+\alpha)^{f_1+w}}{\Gamma(f_1+w) f_2!} \frac{\Gamma(f_2+f_1+w)}{(2+r_1+\alpha)^{f_2+f_1+w}} \end{aligned}$$