行政院國家科學委員會專題研究計畫　成果報告

三維非對稱層域系統暫態應力波傳的理論解析與實驗量測

計畫類別：個別型計畫
計畫編號：NSC92-2212-E-002-065-
執行期間：92 年 08 月 01 日至 93 年 07 月 31 日
執行單位：國立臺灣大學機械工程學系暨研究所

計畫主持人：馬劍清

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中　華　民　國 93 年 8 月 10 日

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※
※ 三維非對稱層域系統暫態應力波傳的理論解析與實驗量測 ※
※ **Theoretical Analysis and Experimental Measurement of Three** ※
※ **Dimension Unsymmetric Transient Wave Propagating** ※
※ **in Layered Media** ※
※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

計畫類別：☑個別型計畫　　□整合型計畫
計畫編號：NSC 92-2212-E-002-065
執行期間：92 年 08 月 01 日至 93 年 07 月 31 日

計畫主持人：馬劍清　教授
共同主持人：

本成果報告包括以下應繳交之附件：
□赴國外出差或研習心得報告一份
□赴大陸地區出差或研習心得報告一份
□出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
□國際合作研究計畫國外研究報告書一份

執行單位：國立台灣大學機械工程學系

中　華　民　國　九　十　三　年　八　月　一　日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

三維非對稱層域系統暫態應力波傳的理論解析與實驗量測

Theoretical Analysis and Experimental Measurement of Three Dimension Unsymmetric Transient Wave Propagating in Layered Media

計畫編號：NSC 92-2212-E-002-065

執行期限：92 年 8 月 1 日至 93 年 7 月 31 日

主持人：馬劍清　　　　國立台灣大學機械工程學系

計畫參與人員：陳熙洪、黃思堯

一、中文摘要

本研究計劃以理論解析及實驗的量測相互配合驗證，以了解層域系統受動力載荷的暫態應力波傳。計畫中利用射線展開法，建立三維層域非對稱動態作用力波傳問題的數學模型解析解；本問題為應力波在有限域中的波傳，故有無窮多波的特性，本計畫主要以解析解作為基礎進行層域系統內的暫態應力及位移數值計算；在實驗方面則建立一套完整系統以模擬理論分析的邊界條件及動力加載方式。本實驗主要量測自由表面之暫態位移以與理論分析作比較，計畫中所使用的波源由毛細玻璃管或鉛筆芯斷裂所產生的動力加載模擬為步階函數之點波源量測自由表面之位移。本研究計劃之完成不但在學術上可了解應力波傳之物理現象，並建立應力波在界面的反射與折射波分析法，在實用上亦可於非破壞檢測材料性質的應用上提供新的量測方法。本計畫的內容涵蓋了理論解析、數值計算與實驗量測、內容相當完整而豐富且兼具學術與實用性。

二、英文摘要

In this research project, the theoretical analysis as well as experimental measurement will be conducted on the dynamic responses of a layered medium. We will develop the theory of transient wave propagation in a three dimensional configuration by the ray expansion method. Furthermore, the exact theory will be compared with the experimental results. We measure the vertical displacement of the layered medium on the top surface by applying a point force with step time function, which is obtained by the fracture break of a capillary or pencil lead. A complete methodology of using the transient wave theory in estimating the configuration and material properties will be developed in this project.

三、緣由與目的

波在多層介質中的產生與傳播，長久以來一直是學者們所關心的課題。彈性波理論在不同領域中有許多感興趣的應用，例如：根據地震波在地表面之記錄來確定震源的位置與性質、尋找地層中的礦脈與石油（地層探勘）；淺海水層中，聲源的定位與所接收訊號的判別；利用材料或結構發生塑性變形或破壞前，由於局部快速釋放應變能所產生的暫態波（音射）來監測大型結構的安全性、以超音波或暫態彈性波來檢測複合材料中的脫層與裂紋的偵測（非破壞檢測）。隨科技發展的進步，層域問題引起了不少的注意。在微機械領域中，利用積體電路製造過程所做成之微小器械，其封裝、鍍膜等過程，薄膜之幾何特性（如鍍層厚度）、材料性質及其受機械載荷所產生的動態響應，均是值得研究的重要課題，又如在通訊應用中極

為重要的表面聲波元件亦是應力波傳理論的實際應用十分成功的範例。故探討應力波在層域內傳播的現象，不僅可研究動力載荷作用下層域中暫態應力的分佈，且其一些波動基本特性更可被應用於量測層域系統之材料參數、幾何特性等非破壞檢測方面。早期對層狀介質的研究主要處理其頻散方程與探討穩態響應。而對層狀介質中暫態彈性波傳播的理論解析則以廣義射線理論為主。廣義射線理論將層狀固體中之動態反應依觀察時限而遞增之波傳射線表達，若用於計算初期之動態反應，極為正確；然隨時間之增加，由於應力波在界面間交互產生的反射與透射波，其數目急遽增加，使得射線理論在長時間計算上產生困難。

研究暫態應力波傳問題不論在理論的數學解析，數值計算或是實驗量測，皆是相當複雜且困難的問題，尤其為有限邊界之狀況時，應力波就會在這有限域中來回傳播而產生波的數目急速增加。而本計畫則完成了最具挑戰性且最困難的真正非對稱的三維層域應力波傳問題。本計畫以三維層狀介質受非對稱動力載荷的邊界值問題出發，有系統地處理此無窮多暫態彈性波的波傳問題。希望藉由理論的解析與計算，增進對層狀介質中波傳問題的瞭解，進而提供暫態彈性波在應用上的基礎。當對結構體施加一動力衝擊載荷時，結構體內部的質點將有劇烈的運動而產生應力波的傳遞，此應力波若遇到自由邊界將會反射，通過界面則會折射，若碰到幾何不連續處時，則會產生繞射，其間之情況相當複雜。自 1950 年來，關於彈性體內應力波之暫態波傳的理論解析已有相當的成果[1,2]。自 1904 年 Lamb[3]提出半無窮域(half-space)平面上施加一點載荷的波傳問題，固體內應力波的探討開始被廣泛的討論。然而 Lamb 所求得的僅是轉換域中的解，而 Cagniard(1958)將拉普拉斯域轉換的積分映射到 Cagniard 路徑中，解決了波傳問題在拉普拉斯域中逆轉換的問題。在 Lamb 的同篇論文中還求得半無窮域受一線載荷(line loading)之轉換域中的解。Garvin(1955)[4]探討了半無窮域受線載荷的問題。Chao(1960)[5]則解得半無窮域受剪力的問題。Pekeris(1955)[6][7]則研究表面下受徹體力及半無窮域垂直施加一點波源的問題。在 1970 年及 1974 年，Gakenheimer[8]和 Mooney[9]曾以數值的方法求解 Lamb 問題 。Pao(1979,1981)[10][11]則以廣義射線理論解得半無窮域受點波源之問題。對於薄板中的波傳問題，由於波的數目會隨反射次數的增加而急劇增加，使得在理論解析上增加許多困難度。Davids(1959)[12]求得板受載荷時，施力軸上的暫態分析。Miklowitz(1962)[13]使用殘值定理及 stationary phase 分析無限域層板之暫態波傳現象。Alterman and Karal(1968)[14]曾以有限差分法來求得層板中的彈性波傳問題，但這在數值分析上過於複雜且精確度不易掌握。Norwood (1975) [15]則以轉換矩陣的方法解得板內的暫態響應。而綜觀前人的研究，由於疊加方法上的局限，而未能有一套較完整、較廣泛的分析方式，因此所得之結果較為片面零散，不同的問題便需各自發展不同的解題技巧，而本研究計劃所應用的方法，為主持人近幾年所提出，可適用的範圍相當廣泛且前人應用以往的解析方式所無法觸及或分析的問題，都可迎刃而解。本研究計劃所要處理之問題為三維層域非對稱問題的波傳，故需處理自由邊界的反射波以及界面產生的反射及折射波，這個問題的解析在波動力學中是相當重要，且有很大的實際應用價值。

本研究計劃除了在理論方面的發展之外更建立了實驗的量測技術以與理論推導及數值計算的結果相互印證，而本實驗的設立最主要是量測自由表面的垂直位移，因為此處之位移是最易量測且較有發展為實際應用之潛力。本實驗的系統為經由錐形感應換能器(NBS Conical Transducer)接收波傳訊號，經由前置放大器，數位類比轉換器送至個人電腦，直接由理論結果與實驗結果作比較。而感應換能器所量測之物理量為垂直於量測面之位移。

四、結果與討論

在理論方面，本計畫在卡氏座標系統下，透過傅立葉積分轉換的技巧，直接處理此層狀介質的邊界值問題。有別於以往的代數 Bromwich 展開法，提出矩陣 Bromwich 展開法，將此問題在轉換域中的波動射線解寫成矩陣形式的無窮級數；級數的每一項由矩陣代表之，其中包括有由載荷產生之波在層狀介質中，經界面反射或透射相同次數產生的散射波；而所有相同波源與接收模式(中間反射模式不論)的反射與透射

波均加總於此矩陣中的一元素內。對一 n 層介質而言其波源發射與接收模式共有 $6n\times 6n$ 種，亦即以 $6n\times 6n$ 的大矩陣來代表一組散射波。每一個大矩陣，如同廣義射線理論，是由波源矩陣、界面間的反射與透射係數矩陣乘積、接收矩陣所連乘而成，其物理意義恰如廣義射線理論所述。

而轉換域中的矩陣解，可透過 Cagniard's method 做積分逆轉換，求得其在時域中的暫態解。有關於波源的歷時函數部分，則以步階函數為問題之格林函數，透過摺積定理(convolution theorem)來求得不同歷時函數時的波動解。以下先對三維非對稱問題的基本方程及邊界值問題作簡單之敘述。

在均質等向性介質中，以質點位移向量 $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ 表示的運動方程式，不計徹體力的情況下可表為

$$(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}+\mu\nabla^2\mathbf{u}=\rho\ddot{\mathbf{u}}$$

其中 ρ 為密度；λ 和 μ 為此介質的拉梅常數。應力張量 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$ 與位移場 $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ 的關係可透過虎克氏定律(Hookes'law) 與應變位移關係求得，結果為

$$\boldsymbol{\sigma}=\lambda(\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbf{I}+\mu(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla)$$

其中 $\mathbf{I}$ 為單位張量而 $\mathbf{u}\nabla$ 為 $\nabla\mathbf{u}$ 之轉置張量。利用荷姆霍茲(Helmholtz)定理，可將位移向量 $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ 分解為非旋性(irrotational)及旋性(solenoidal)向量場的兩個部分

$$\mathbf{u}=\nabla\phi+\nabla\times\mathbf{\Psi}\ , \qquad (1)$$

式中

$$\nabla\cdot\mathbf{\Psi}=0\ ; \qquad (2)$$

ϕ 為一純量勢能場，$\mathbf{\Psi}$ 則為一旋性向量勢能場。若此二位移勢能場滿足下列波動方程式

$$c_L^2\nabla^2\phi=\ddot{\phi}, \qquad (3)$$

$$c_T^2\nabla^2\mathbf{\Psi}=\ddot{\mathbf{\Psi}}, \qquad (4)$$

其中

$$c_L=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}\equiv 1/s_L \qquad (5)$$

$$c_T=\sqrt{\mu/\rho}\equiv 1/s_T \qquad (6)$$

則式(1)自動滿足位移運動方程式。式(3)和式(4)均是標準的波動方程式，c_L 與 c_T 分別為此介質中的縱波（壓力波、P 波）與橫波（剪力波、S 波）波速；而 s_L、s_T 分別為縱波慢度(P wave slowness)與橫波慢度(S wave slowness)。經過此一變換，可簡化原本為耦合聯立偏微分方程組的運動方程式，為非耦合的波動方程式。

在卡氏座標(Cartesian Coordinate)下，位移勢能與位移的關係(1)式，可表為：

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\psi_z}{\partial y}-\frac{\partial\psi_y}{\partial z}\ ,$$

$$v=\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{\partial\psi_z}{\partial x}+\frac{\partial\psi_x}{\partial z}\ ,$$

$$w=\frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}-\frac{\partial\psi_x}{\partial y}\ , \qquad (7a\sim c)$$

而旋性向量勢能場 $\mathbf{\Psi}$ 的各分量間需滿足散度為零的條件式(2)即

$$\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\frac{\partial\psi_y}{\partial y}+\frac{\partial\psi_z}{\partial z}=0\ , \qquad (8)$$

此一方程又稱為尺度條件(gauge condition)。四個勢能函數 ϕ、(ψ_x,ψ_y,ψ_z) 與三個位移量 (u,v,w) 間的關係，可透過(7a~c)與(8)四個方程式，完全確定。各個應力分量與位移勢能的關係可表如下：

$$\sigma_{xx}=\mu\left(\left(s_T^2-2s_L^2\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial z}\right)\right)$$

$$\sigma_{yy}=\mu\left(\left(s_T^2-2s_L^2\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi_z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi_x}{\partial y\partial z}\right)\right)$$

$$\sigma_{zz}=\mu\left(\left(s_T^2-2s_L^2\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\psi_x}{\partial y\partial z}\right)\right)$$

$$\sigma_{xy}=\mu\left(2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2\psi_z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi_z}{\partial x^2}\right)$$

$$\sigma_{yz}=\mu\left(2\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2\psi_x}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\psi_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\psi_z}{\partial x\partial z}\right)$$

$$\sigma_{xz}=\mu\left(2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi_z}{\partial y\partial z}\right)。$$

(9a~f)

此時已應用了波動方程式與關係式 $\lambda s_L^2=\mu(s_T^2-2s_L^2)$。透過(7a~c)與(9a~f)式，各個問題的邊界條件與勢能的關係可直接獲得。本計畫主要考慮暫態波傳的現象，當時間小於零時(參考時間原點)，物體假設為靜止。對於此問題，其初始條件為

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\mathbf{0}, \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)=\mathbf{0} \quad \text{for} \quad t\le 0, \tag{10}$$

本計畫利用積分轉換技巧，求得波動方程式在轉換域中的通解；建立應力與位移在轉換域中和勢能函數通解的關係式，以利於層板系統中邊界條件的代入與問題的解析。

考慮一以平行面接合的 n 層複合材料如圖 1 所示，每層介質假設為由等向均質材料組成如圖所繪。而所有有關於第 i 層介質的量均冠以上標或下標(i)來表示。對一初始靜止的物體而言其初始條件為

$$\mathbf{u}^{[i]}(\mathbf{x},0)=\dot{\mathbf{u}}^{[i]}(\mathbf{x},0)=\mathbf{0}。 \tag{11}$$

在此先處理所有的載荷均位於邊界或界面上的情況。此 n 層介質上下兩表層曳力的邊界條件可寫為：

上表面：

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}^{(1)}(x,y,0,t)&=\sigma_{xz}^{[0]}(x,y,t)\\ \sigma_{yz}^{(1)}(x,y,0,t)&=\sigma_{yz}^{[0]}(x,y,t) \quad \text{for} \quad \begin{matrix}-\infty<x<\infty\\ -\infty<y<\infty\end{matrix},\\ \sigma_{zz}^{(1)}(x,y,0,t)&=\sigma_{zz}^{[0]}(x,y,t)\end{aligned} \tag{12}$$

下表面：

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}^{(n)}(x,y,-h_n,t)&=\sigma_{xz}^{[n]}(x,y,t)\\ \sigma_{yz}^{(n)}(x,y,-h_n,t)&=\sigma_{yz}^{[n]}(x,y,t) \quad \text{for} \quad \begin{matrix}-\infty<x<\infty\\ -\infty<y<\infty\end{matrix}。\\ \sigma_{zz}^{(n)}(x,y,-h_n,t)&=\sigma_{zz}^{[n]}(x,y,t)\end{aligned} \tag{13}$$

其中

$$h_j=\sum_{i=1}^{j}h_{(i)}, \tag{14}$$

且 $h_{(i)}$ 為第 i 層介質的厚度。本計畫允許界面上有加載的情況；當載荷施加於界面 $z=-h_i$ 時，會造成的界面上下兩層材料在界面處位移與曳力的不連續，其條件為：

$$\begin{aligned}u^{(i)}(x,y,-h_i,t)-u^{(i+1)}(x,y,-h_i,t)&=u^{[i]}(x,y,t)\\ v^{(i)}(x,y,-h_i,t)-v^{(i+1)}(x,y,-h_i,t)&=v^{[i]}(x,y,t)\\ w^{(i)}(x,y,-h_i,t)-w^{(i+1)}(x,y,-h_i,t)&=w^{[i]}(x,y,t)\end{aligned}$$

$$i=1,2,...,n-1 \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}^{(i)}(x,y,-h_i,t)-\sigma_{xz}^{(i+1)}(x,y,-h_i,t)&=\sigma_{xz}^{[i]}(x,y,t)\\ \sigma_{yz}^{(i)}(x,y,-h_i,t)-\sigma_{yz}^{(i+1)}(x,y,-h_i,t)&=\sigma_{yz}^{[i]}(x,y,t)\\ \sigma_{zz}^{(i)}(x,y,-h_i,t)-\sigma_{zz}^{(i+1)}(x,y,-h_i,t)&=\sigma_{zz}^{[i]}(x,y,t)\end{aligned}$$

$$i=1,2,...,n-1 \tag{16}$$

其中小括號中的上標，$\bullet^{(i)}$ 及 $\bullet^{(i+1)}$，分別用以標示第 i 層與第 $i+1$ 層中的位移或應力分量。而方程式 (12)~(16)中，加載量均標以方括號上標 $\bullet^{[i]}$ 且其函數為已知，以資分別加載量與場量之間的差異。

由式(1)至式(16)的詳細說明，我們已將三維層域系統的波傳問題轉換為數學問題，計畫中推導此複雜問題的理論解析解，它需滿足式(3)(4)的波動方程，式(11)的初始條件，式(12)(13)的邊界條件，以及式(15)(16)的跳躍不連續條件。

圖 2 為三維薄膜問題承受非對稱動力作用，亦為數值計算及實驗的幾何圖形，考慮一層固體覆於無窮大之固體上，其薄膜厚度為 h，且固體間之界面為完美接合，動力加載的歷時函數為 $H(t)$。圖 3 為三維雙層半無窮域上表面受步階時間函數軸對稱點力時，位於上層材料兩倍厚度的表面上之垂直位移圖。時間軸以縱波傳遞一倍厚度的特徵時間無因次化，而縱軸無因次座標為 $\mu_{(1)}v/\sigma_3 h$。本圖所選之材料參數為配合實驗，相近於壓克力-鋼接合時的雙層半無窮域材料。下層材料的剛性非常大，相較之下，上層材料似乎黏著在一剛體之上，其邊界條件近似於剛性邊界條件(rigid boundary)，此時於界面處之位移幾近不動。若入射一組波進入剛性邊界，其反射波的位移量大致為入射波位移之奇函數以抵銷剛性邊界的效應。然而上表面為一自由邊界，若入射一組波於自由邊界則其反射波的位移量大致為入射波位移之偶函數。兩種反射型態時而相加時而相減，在表面波通過後即出現震盪的情形。因步階時間函數型態的加載，在長時間的反應則會趨向靜力解。此震盪衰減的現象在後章中的實驗可清楚看出。圖4為相同材料受步階時間函數軸對稱點力時，位於兩倍厚度的表面之橫向位移圖。其歷時反應與縱向位移相仿。當波前到達接收點時，存在跳躍性(finite jump)；此跳躍性主要由加載步階時間函數所引起，可由引進具有上升時間的步階函數來降低。值得一提的是，在圖 3、圖 4 中所考慮的波約有一千五百萬個，但因波的退化，使得真正需要計算的波只有大約一千根射線。當時間增加到 40 倍特徵時間時真正所需考慮的波只需大約一千五百根射線，然而所考慮到的波則共有六、七億個。由此可見隨時間增長、反射次數的增加，所謂波的退化愈形嚴重。圖 5

則為兩材料不同的剪力模數比時其垂直位移的變化，可見不同的比值其位移的反應亦有相當大的變化。

圖 6 為在自由表面承受橫向動力加載時之垂直及水平位移暫態反應圖，可見其位移隨時間的變化在雷利波通過後即趨於平緩，這與自由表面承受動力加載(圖 3,4)有相當大的差異。圖 7 為壓克力板承受動力加載時之垂直位移暫態反應的理論分析及實驗結果，圖中顯示兩者有相當良好的一致性，也說明了理論分析的正確性。

圖表資料

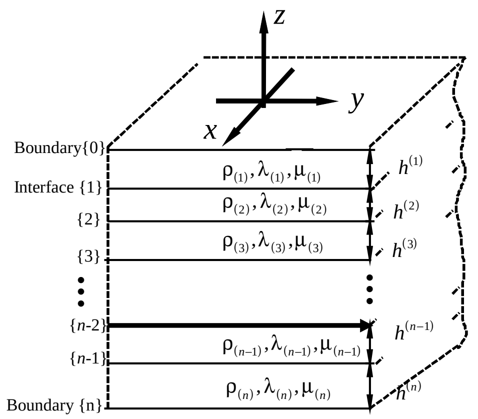

圖 1　三維層狀介質座標及幾何尺寸示意圖

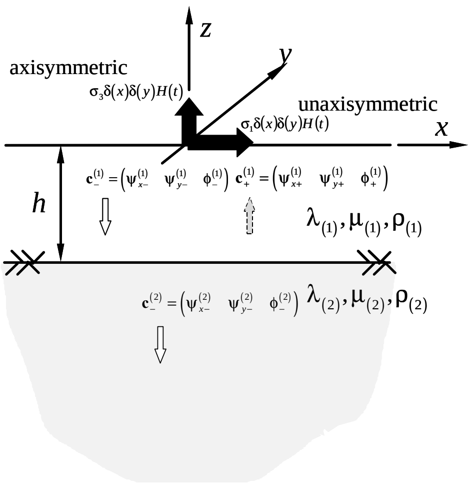

圖 2　三維薄膜問題承受非對稱動力作用示意圖

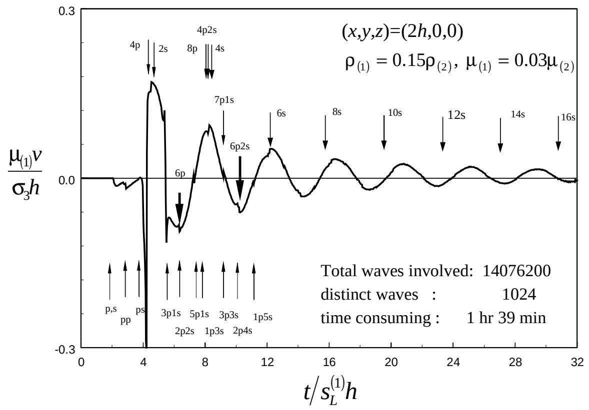

圖 3　二層半無窮域受軸對稱點力其上表面之縱向位移暫態反應圖

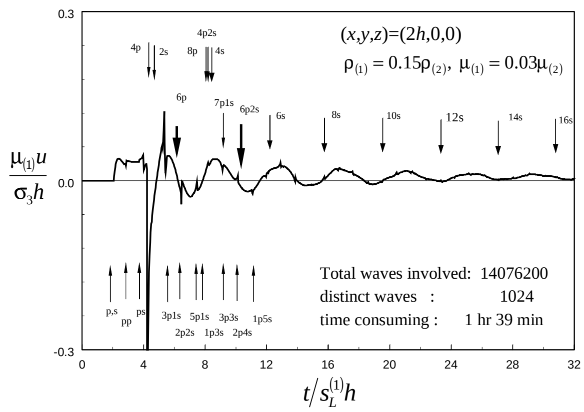

圖 4　二層半無窮域受軸對稱點力其上表面之橫向位移暫態反應圖

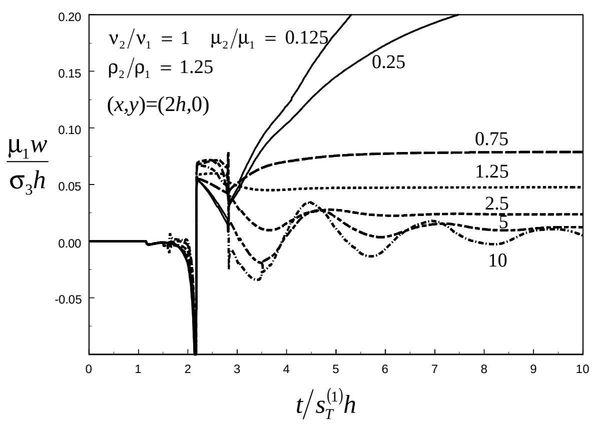

圖 5　兩材料不同剪力模數比時其垂直位移的變化圖

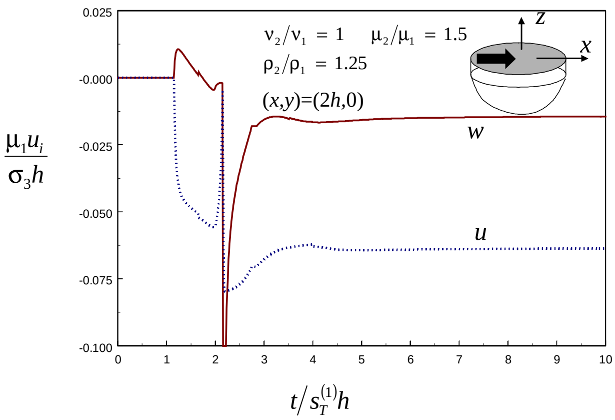

圖 6　在自由表面承受橫向動力加載時之垂直及水平位移暫態反應圖

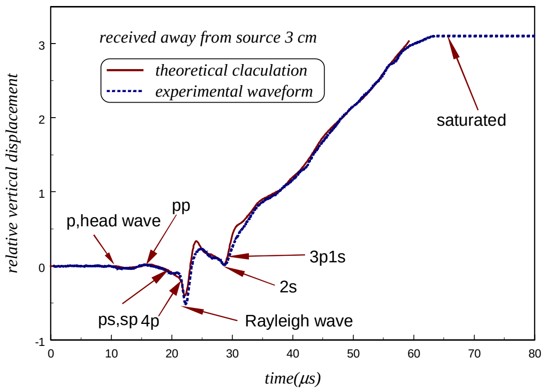

圖 7　壓克力平板受動力加載之縱向位移實驗量測與理論比較圖

結論

本研究計劃的完成，在理論方面所提出之射線展開法可突破以往波傳射線追蹤法的限制，將所有應力波包含於一簡單的級數中，在學術上有其價值與創新性，而在應用方面，則本計劃中的理論可用在以彈性波作非破壞檢測的分析，層域介質受動力作用的波傳分析，可謂相當廣泛。而在實驗方面則除了可與理論分析相互印證外，亦可發展為非破壞檢測的方法。參與本研究計劃的工作人員，除對波傳問題的理論解析深入了解外，亦需進行大量的計算工作以及實驗的設立，故可對整個波傳問題的全貌及其實際的應用有全盤的了解，本計畫的內容兼具理論與實用性，主要特點是開發較高深之理論並實際應用於實務的問題，是一個相當完整的研究計畫。

參考文獻

[1] Pao, Yih-Hsing(1983), "Elastic Waves in Solids, " Journal of Applied Mechanics, ASME Trans., Vol. 50, pp.1152-1164.

[2] Achenbach, J. D. (1973), "Wave propagation in elastic solids", North-Holland publishing company, New York.

[3] Lamb Horace (1904), "On the Propagation of Tremors over the Surface of Anelastic Solid," Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A.203, pp.63-100.

[4] Garvin, W. W.(1955), "Exact Transient Solution of the Buried Line Source Problem," pp.528-541.

[5] Chao, C. C.(1960), "Dynamical Response of an Elastic Half-Space to Tangential Surface Loadings," Journal of Applied Mechanics, Vol. 27, pp.559-568.

[6] Pekeris, C. L.(1955), "The Seismic Buried Pulse," Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., Vol. 41, pp.629-639.

[7] Pekeris, C. L.(1955), "The Seismic Surface Pulse," Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., Vol. 41, pp.469-480.

[8] Gakenheimer, D. C. (1970), "Numerical Results for Lamb's Point Load Problem," Journal of Applied Mechanics, ASME Trans., pp.522-524.

[9] Mooney, Harold M.(1974), "Some Numerical Solutions for Lamb's Problem," Bull. Seismol. Soc. Am., Vol. 64, No. 2, pp.473-491.

[10] Ceranoglu, A. N. , and Pao, Yih-Hsing (1981), "Propagation of Elastic Pulses and Acoustic Emission in a Plate," Journal of Applied Mechanics, ASME Trans., Vol. 48, pp.125-147.

[11] Pao, Yih-Hsing, Gajewski, Ralph R. , and Ceranoglu, Ahmet N. (1979), "Acoustic Emission an Transient Waves in an Elastic Plate," J. Acoust. Soc. Am., Vol. 65, No. 1, pp.96-105.

[12] Davids, N. (1959), "Transient Analysis of Stress-Wave Penetration in Plate," Journal of

Applied Mechanics, ASME Trans., Vol. 26, pp.651-660.

[13] Miklowitz, J. (1962), "Transient Compressional Waves in an Infinite Elastic Plate or Elastic Layer Overlying a Rigid Half-Space," Journal of Applied Mechanics, ASME Trans., pp.53-60.

[14] Alterman, Z. , and Karal, F. C. ,Jr.(1968), "Propagation of Elastic Waves in Layered Media by Finite Difference Method," Bull. Seismol. Soc. Am., Vol. 58, No. 1, pp.367-398.

[15] Norwood, F. R. (1975), "Transient Response of an Elastic Plate to Loads With Finite Characteristic Dimensions," Int. J. Solids Structure, Vol. 11, pp.33-51.