

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

時域階梯近似與離散時域電磁理論之研究

Staircase-Approximation Time-Domain and Discrete-Time Electromagnetic Theory

計畫類別：☒個別型計畫 ☐整合型計畫

計畫編號：NSC 91-2213-E-002-075

執行期間：91 年 8 月 1 日至 92 年 7 月 31 日

計畫主持人：鄭士康

共同主持人：

計畫參與人員：蔡志勇、許可欣、馬自莊

本成果報告包括以下應繳交之附件：

- ☐赴國外出差或研習心得報告一份
- ☐赴大陸地區出差或研習心得報告一份
- ☒出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
- ☐國際合作研究計畫國外研究報告書一份

執行單位：國立台灣大學電信工程研究所

中 華 民 國 九 十 二 年 九 月

時域階梯近似與離散時域電磁理論研究

Staircase-Approximation Time-Domain and Discrete-Time Electromagnetic Theory

計畫編號 NSC91-2213-E-002-075

執行期限：91 年 8 月 1 日至 92 年 7 月 31 日

主持人：鄭士康 台大電信研究所

計畫參與人員：蔡志勇、許可欣、馬自莊

台大電信研究所

中文摘要

本研究共分兩個主題，一為針對二維導體圓柱散射的時域分析，引入離散電磁理論之特例--階梯近似法--來解決二維導體圓柱散射問題。除了介紹階梯近似法的原理之外，也詳述階梯近似法在二維導體圓柱散射之時域分析上的計算及結果。二為以時域階梯近似法來分析被動元件電路暫態響應，在時域分析上，影響訊號完整性之電路主要為具有時間記憶效應的電容與電感。時域階梯近似法可把電容與電感轉化成數學形式類似電阻之元件，使得採用簡單的節點分析法便能對由線性被動元件組成之電路進行時域響應之分析。實例證明此法保有前尤拉公式為基礎之法的效率兼具以梯形公式為基礎之法的準確度。此外，依此法推導的分析公式具有簡潔與易程式化等等之特性，易於與其它具有效率的演算法結合。

關鍵字：階梯近似法，圓柱散射，線性電路分析，暫態響應

Abstract

This research is divided into two parts, one is using the staircase approximation time domain method (SATD), which is a special case of discrete-time electromagnetic theory, to solve the scattering from a 2D conducting cylinder. The other is to analyze the transient response of passive circuit elements applying SATD. First we introduce the principle of SATD, next we describe the calculations and results by SATD. In time domain, the major circuit elements that

affect the signal integrity are capacitances and inductances. Using SATD we can transform the mathematical description of capacitances and inductances into a form similar to that of a resistor such that we can analyze the time domain response of circuits composed of linear passive elements by nodal analysis. Examples are provided to show that this method can keep both the efficiency of the forward-Euler formula and the accuracy of the trapezoid formula. Besides, the formulae derived from SATD are simple and easy to be combined with other effective algorithm.

Keywords: SATD, Scattering of cylinder, Linear circuit analysis, transient response

簡介

階梯近似法 (Staircase Approximation Time Domain) 是新近才提出的一種時域計算方法[1][2]，為離散時域電磁理論[3]的特例。本計畫研究階梯近似法於時域電磁理論及電路暫態分析的應用。時域電磁理論問題以圓柱散射問題為例，其目的為將階梯近似法應用範拓展到二維的問題；電路暫態分析以被動元件電路暫態響應之研究為例，利用階梯近似法改善電路分時域分析的速度和複雜度。將分支電流與節點電壓以矩形脈衝函數表示再代入元件的特性方程式中，並以 Galerkin 法對欲分析之時間區間進行離散化，最後可得一組隨時間行進計算電路時域響應的演算法則。時域階

梯近似法採用之離散方法具有等同於使用尤拉公式方法之準確度，然因其不涉及未知時刻變數的微分，所以不需預測而使得其運算量維持在最低的情況。在實際做法上，只要將各實際或等效之電阻電感電容值置入依本法產生之電路結構矩陣中即可進行時域響應分析。

階梯近似法

階梯近似法 (Staircase Approximation Time Domain Method) 是一套近年來才發展的全新數值計算方法[1][2]。它的原理是將信號對時間的變化做切割取樣。在每一個時間切割段對應的訊號量值，則用矩形脈衝函數乘上相應的倍數來表示。藉由此法，可以將訊號的時間變數以及空間變數分離，方便其後的處理。階梯近似法的特性及使用上的便利性可整理如下：

- 1、方程式形式類似於頻域分析所得之方程式，解形式也類似，可應用解純量頻域方程式的經驗於此分析方法。
- 2、階梯矩陣對一般運算均具有封閉性。
- 3、階梯矩陣具有乘法交換性。
- 4、階梯矩陣處理色散或隨頻率變化狀況之難度與一般線性狀況相同。
- 5、階梯矩陣在計算時可以降低記憶體消耗量及計算複雜度。

假設欲處理的訊號為空間和時間的函數 $f(x, y, z, t)$ ，若將切割的時間間隔定為 Δt ，且定義方波函數 $h(t)$ 為

$$h_j(t) = \begin{cases} 1, & j\Delta t \leq t < (j+1)\Delta t \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

可以將原本的函數近似為

$$f(x, y, z, t) \approx \sum_{j=0}^n f_j(x, y, z) h_j(t)$$

將方波函數對時間積分，名之為 $\tilde{h}(t)$ 。其定義如下：

$$\tilde{h}_j(t) = \begin{cases} \Delta t, & t \geq (j+1)\Delta t \\ t - j\Delta t, & j\Delta t \leq t < (j+1)\Delta t \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

定義兩函數的內積為

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^t f(\tau) g(\tau) d\tau$$

將之前得到的近似函數對各個時間切割段 $h_k(t)$ 取內積，其中 $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ，便可得到訊號在各時段的狀態。使用階梯近似法之後，原來同時對時間與空間微分的方程式會變成時間變數與空間變數分離的矩陣方程，其形式與頻域分析法得到的方程式非常類似

經上述做法，得到 Maxwell 方程之階梯近似式

$$\begin{aligned} \nabla \times [\bar{E}(x, y, z)] &= -\mu \frac{[M]^{-1}}{\Delta t} [\bar{H}(x, y, z)] - [\bar{M}(x, y, z)] \\ \nabla \times [\bar{H}(x, y, z)] &= \varepsilon \frac{[M]}{\Delta t} [\bar{E}(x, y, z)] + [\bar{J}(x, y, z)] \end{aligned}$$

其中

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

導體圓柱散射的階梯近似解

將入射場 $E_z^i(\bar{\rho}, t)$ 依前述方法做時間軸上的切割，可得

$$E_z^i(t, \rho, \phi) \approx \sum_{j=0}^n E_{z,j}^i(\rho, \phi) h_j(t)$$

描述本狀況之波函數為

$$\nabla_r^2 [E_z(x, y)] - [K] E_z(x, y) = 0$$

解此微分方程，得到

$$[E_z] = e^{-[K](x-L)} \cdot [E_1] + e^{[K](x-L)} \cdot [E_2]$$

假設散射場之形式為

$$[E_z^s] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [b_n] K_n([K]\rho) e^{j n \phi} \cdot e^{-[K]L} \cdot [E_0]$$

其中 $[b_n]$ 為係數矩陣。代入邊界條件：在導體圓柱的邊上，即 $\rho = a$ 處，入射場加上散射場之值為零。即

$$[E_z]_{\rho=a} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} ([I_n]([K]a) + [b_n] K_n([K]a)) e^{j n \phi} \cdot e^{-[K]L} \cdot [E_0] = 0$$

由此，我們可以得到係數矩陣 $[b_n]$ 為

$$[b_n] = -I_n([K]a) \cdot \{K_n([K]a)\}^{-1}$$

解得散射場。

被動元件電路暫態響應

首先將分支電流與節點電壓以脈衝函數表示如下：

$$v(t) \approx \sum_{i=0}^m v_i h_i(t)$$

$$i(t) \approx \sum_{j=0}^m i_j h_j(t)$$

將電容電感電阻的特性方程式化成下列矩陣型式，
電容：

$$[i_c] = [G_c][v_c] + [I_{s,c}]$$

電感：

$$[i_i] = [G_i][v_i] + [I_{s,i}]$$

電阻:

$$[G_r]_{n \times n} = (g'_{ij}), \text{ with } g'_{ij} = \begin{cases} R, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

其中

$$[G_c]_{n \times n} = (g^c_{ij}), \quad g^c_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j \\ 2C / \Delta t, & i = j \\ (-1)^{(i+j)} (4C / \Delta t), & i > j \end{cases}$$

$$[G_l]_{n \times n} = (g^l_{ij}), \quad g^l_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j \\ \Delta t / (2L), & i = j \\ \Delta t / L, & i > j \end{cases}$$

$$[I_{s,c}]_{\text{nd}} = (i^c_{s,j}), \quad i^c_{s,j} = \left\{ \left(\frac{2C}{\Delta t} \right) v_c(t_0) + i_c(t_0) \right\} \times (-1)^{j+1}$$

$$[I_{s,l}]_{\text{nd}} = (i^l_{s,j}), \quad i^l_{s,j} = \left\{ \left(\frac{\Delta t}{2L} \right) v_l(t_0) + i_l(t_0) \right\}$$

經推導，可得以下時進時域階梯近似法 (time-marching SATD) :

$$\begin{bmatrix} e_1(t_k) \\ e_2(t_k) \\ \vdots \\ e_p(t_k) \end{bmatrix} = [G_{kk}]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} i_{s,1}(t_k) \\ i_{s,2}(t_k) \\ \vdots \\ i_{s,p}(t_k) \end{bmatrix} - \sum_{j=0}^{k-1} [G_{kj}] \begin{bmatrix} e_1(t_j) \\ e_2(t_j) \\ \vdots \\ e_p(t_j) \end{bmatrix} \right\}$$

等號右邊的 K 次矩陣向量乘法，因本法的一些特性，實際上每個時刻只需做兩次。

數值驗證及結論

在此一系列研究中，時間單位令為

Δt ，可以任意設定而不影響結果。在距離單位上，定光速走一單位時間之距離為單位距離。大小是相對的。

I. 導體圓柱散射

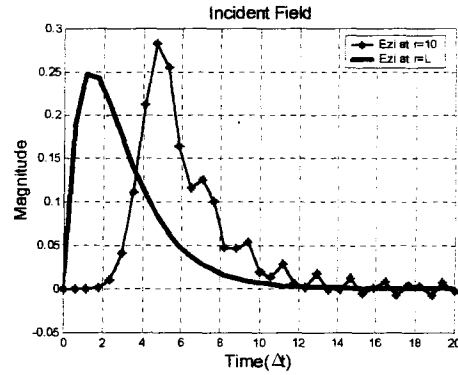
圓柱體半徑 a 為 1 單位；觀察點的距離 ρ 為 10 單位；時間原點的位置 L 則為 15 單位。

為了解決發散問題及改進運算速度，引入 Jordan 正則式，計算方法修正後，入射場的計算變為

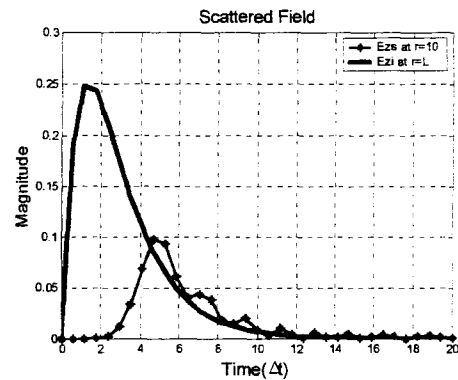
$$[E'_i] = [Q] \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n([J]\rho) e^{-[J]\rho} e^{jnp} [Q]^{-1} e^{-[K](L-\rho)}$$

而散射場則變為

$$[E'_s] = [Q] \sum_{n=-\infty}^{\infty} -I_n([J]\rho) e^{-[J]\rho} \{K_n([J]\rho)\}^{-1} K_n([J]\rho) e^{jnp} [Q]^{-1} e^{-[K](L-\rho)}$$



圖一 入射場

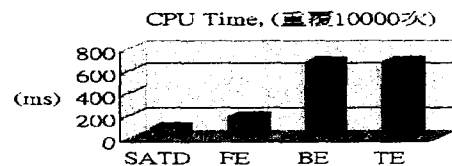


圖二 散射場

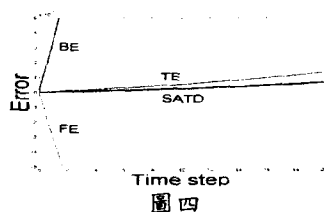
利用階梯近似法得到的入射場及散射場之結果，分別如圖一及圖二所示。在此所附的結果是只切割 35 點的結果。可以看到其趨勢及大略的形狀。因為計算發散的問題仍未能徹底解決，因此此處所附的結果不甚準確，其理論計算仍有待改進之處。

II. 被動元件電路暫態分析

首先，以 [4, p325-329] 之例比較以尤拉公式為基礎之三方法 (分別是 FE, BE, TE) 及本研究之方法 (SATD) 的效率與準確度。BE 及 TE 在每一個時刻各做三次修正。就此問題做運算量分析可知 SATD 的運算量最小，而 FE 的運算量約為 SATD 的二倍，BE 及 TE 的運算量約為 SATD 的七倍。圖三可看出此一分析預測結果，圖四是各方法準確度之比較。由此二圖可看出以時域階梯近似法解此問題具有 CPU 耗時最少準確度最高之優越性。

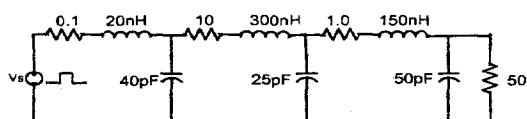


圖三

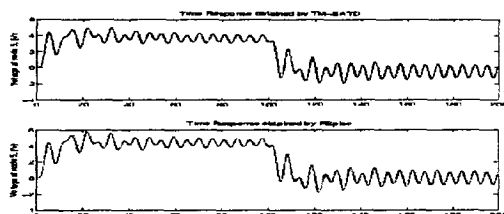


圖四

接著，以圖五之梯形電路來驗證以本方法做時域響應分析之正確性並與 PSPICE 模擬之結果做比較。圖六是模擬第二個電容器電壓之時域響應，上圖是以本法計算，下圖則是 PSPICE 算出之結果。很明顯的，用本法可以得到正確的分析資料。



圖五 三級 RLC 串接之梯形電路



圖六 模擬結果 SATD vs. PSPICE

至於與 PSPICE 的效能比較可從表一中看出。表一之結果是以相同於圖一的電路做更多的 RLC 串接所形成之較大電路用以測試的效率。

RLC 串接級數	SATD	PSPICE
3	1.47	14.35
8	3.15	19.12
12	5.69	22.91
26	19.81	36.35

表一 CPU 耗時，SATD vs. PSPICE

在我們的方法中，關於解矩陣方程式上採用的是傳統的矩陣向量乘法及 LU 分解法，並未使用任何快速演算法或矩陣縮減法。從幾個測試的例子看來，以此類電路分析方法而言本法優於 PSPICE 所使用的方法。

此研究提出一個新的被動電路時域暫態分析方法。由於此法在時域上採用的特殊離散

化方式，使得它能兼具效率與準確性。同時，分析指出其所需記憶體資源與常用之標準作法相較並未提升。從理論分析可知，由本法產生之電路結構矩陣，其特性並未被改變，因此，以尤拉公式為基礎的方法能結合其它特殊演算法用以發展更高階之特殊電路分析法[5]，如此作法亦可運用至本法之中以更大幅提升大型電路分析效率，節省更多電腦運算資源。

參考文獻

- [1] I. T. Chiang and S. K. Jeng, "Staircase-approximation for transients of multisection dispersive transmission lines with nonlinear loads," IEEE Antenna and Propagation Symposium 2001.
- [2] I. T. Chiang and S. K. Jeng, "Staircase-approximation time domain method for transient analysis of dispersive and nonlinear,"
- [3] S. K. Jeng, "Discrete-time electromagnetic theory," 2002 IEEE AP-S International Symposium and USNC/URSI National Science Meeting, San Antonio, USA, 2002.
- [4] J. Vlach, and K. Singhal, *Computer Methods for Circuit Analysis and Design*, 2nd Ed., Van Nostrand Reinhold, 1994
- [5] T. H. Chen, and C. C. P. Chen, "Efficient large-scale power grid analysis based on preconditioned Krylov-subspace iterative methods," DAC 2001, Las Vegas, Nevada, 2001

預定而未參加
2003 IEEE
天線與傳播學會
國際研討會
(2003 IEEE Antennas and
Propagation Society
International Symposium)
之報告

鄭士康
台大電機系/電信研究所
中華民國九十二年九月六日

此次獲國科會補助，進行「時域階梯近似與離散時域電磁理論研究」，已具成果，個人更應用離散電磁理論(Discrete-Time Electromagnetic Theory)，解出一維不勻介質層之時域散射問題，撰寫論文投稿 2003 IEEE 天線與傳播學會國際研討會(2003 IEEE AP-S International Symposium and USNC/URSI National Radio Science Meeting)，經審查通知錄取，預定於六月底大會發表論文。此一研討會為世界電磁研究人員一年一度，規模最大之盛會之一，重要論文常於此發表。此次國科會原已補助研究計劃之國際會議費用支出，敝人亦已註冊，並預定旅館。

詎料於五月間爆發 SARS 風暴，敝人猜想恐將延續不短之時間，為避免屆時不能參加，註冊費將僅能退回小部分，甚至無法退回，因此去函主辦單位美國俄亥俄州立大學，表示將無法參加，論文亦予撤回。因此原編列之國際會議費用預算只好全部繳回國庫，註冊費退費被扣除美金五十元亦自行吸收。

此次感謝國科會於計劃中補助敝人參與此一會議，雖因 SARS 及個人判斷，無法成行，希望明年不再有意外事件，盼能再有機會參加。

附投稿獲接受之論文原稿。

**A Staircase-Approximation Time-Domain Matrix Integral Equation
Approach to the Computation of One-Dimensional Transient Propagation
through an Inhomogeneous Slab***

Shyh-Kang Jeng

**Department of Electrical Engineering and
Graduate Institute of Communication Engineering,
National Taiwan University
Taipei, Taiwan**

email: skjeng@ew.ee.ntu.edu.tw

Abstract

A novel method based on the staircase-approximation time-domain matrix integral equation (SATDMIE) is proposed to solve one-dimensional transient propagation through an inhomogeneous slab. A numerical scheme is developed to compute the transient response iteratively. This scheme only needs to factorize a K by K matrix once, and requires $O(NK^2)$ storage and matrix element computations. Here N and K are the number of time steps and spatial divisions, respectively. The whole theory framework is quite general. It can be extended to solve 3D problems like the transient radiation and scattering of wire antennas.

Introduction

The staircase-approximation time-domain (SATD) method [1][2] has been successfully applied to transmission line transient problems. In order to extend it to general electromagnetic problems, the author tries the one-dimensional transient propagation through an inhomogeneous slab as the first step. Although this problem has been solved by time-domain integral equation [3][4], and could also be computed via taking the inverse Fourier transform of the frequency domain solution, the proposed new approach is efficient and easier to formulate as well as generalize.

*Supported by contract NSC91-2213-E-002-075, National Science Council, Taiwan.

Problem

Consider a plane wave $\hat{x}E^i(z,t) = \hat{x}f(t - \frac{z}{c})$ incident upon a dielectric slab with dielectric constant $\varepsilon_r(z)$ in free space as shown in Fig. 1. The transient behaviors of the reflected field at $z = 0$ and the transmitted field at $z = a$ are to be computed.

Matrix Integral Equation

Apply the SATD approach [1][2], as a special case of discrete-time electromagnetic theory [5], to expand the total field

$$E(z,t) = \sum_{n=0}^{N-1} E_n(z) h_n(t) = [E_n(z)]^T [h_n(t)] \quad (1)$$

where the time-domain rectangular pulse basis function $h_n(t) = \begin{cases} 1, & n\Delta t < t \leq (n+1)\Delta t \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$, and to manipulate the Maxwell equations to obtain the following matrix equation for the scattered field $E^s(z,t) = E(z,t) - E^i(z,t)$

$$\frac{d^2}{dz^2} [E_n^s(z)] = \mu_0 \varepsilon_0 [D_{mn}] \mathbb{P} [E_n^s(z)] + \mu_0 \varepsilon_0 (\varepsilon_r(z) - 1) [D_{mn}] \mathbb{P} [E_n(z)] \quad (2)$$

Here we assume that the incident field and the scattered field have also been expanded in the form of (1) and $[D_{mn}]$ the matrix corresponding to differentiation in time

$$[D_{mn}] = \frac{2}{\Delta t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ -2 & 2 & -2 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3)$$

A matrix Green's function corresponding to (2) satisfying

$$\frac{d^2}{dz^2} [G_{mn}(z, z')] = \frac{1}{c_0^2} [D_{mn}] \mathbb{P} [G_{mn}(z, z')] - \delta(z - z') [\delta_{mn}] \quad (4)$$

is solved as $[G_{mn}(z, z')] = \frac{c_0}{2} e^{-\frac{1}{c_0} [D_{mn}] |z - z'|} [D_{mn}]^{-1}$. With this Green's function

and (2), the scattered field can be written as

$$[E_n^s(z)] = - \int_0^a [G_{mn}(z, z')] \frac{1}{c_0^2} (\varepsilon_r(z) - 1) [D_{mn}] \mathbb{P} [E_n(z')] dz' \quad (5)$$

A matrix integral equation is then deduced as

$$[E_m(z)] = [E_m^i(z)] - \int_0^a (\varepsilon_r(z') - 1) [g_{m-n}(|z - z'|)] [E_n(z')] dz' \quad (6)$$

where $[g_{m-n}(|z - z'|)] = \frac{1}{2c_0} e^{-\frac{1}{c_0} [D_{mn}] |z - z'|} [D_{mn}]$ depends on $m - n$ only.

Numerical Solution Scheme

To solve the matrix integral equation (6), we expand $E_n(z) = \sum_{k=0}^{K-1} E_n^{(k)} b_k(z)$,

where the spatial basis function $b_k(z) = \begin{cases} 1, & k\Delta z < z \leq (k+1)\Delta z \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$, with $\Delta z = a/K$.

Substituting this expansion into (6) and matching the equation at $z_\ell = (\ell + 1/2)\Delta z$, $\ell = 0, 1, 2, \dots, K-1$, we achieve the following recurrence formula

$$[E_m^{(k)}] = ([\delta^{(\ell,k)}] + [P_0^{(\ell,k)}])^{-1} \left\{ [S_m^{(\ell)}] - \sum_{n=0}^{m-1} [P_{m-n}^{(\ell,k)}] [E_n^{(k)}] \right\}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (7)$$

where $[\delta^{(\ell,k)}]$ is an identity matrix of order K , $S_m^{(\ell)} = E_m^i(z_\ell)$, and

$$P_{m-n}^{(\ell,k)} = \int_0^a (\varepsilon_r(z') - 1) g_{m-n}(|z_\ell - z'|) b_k(z') dz'. \quad \text{Through this recurrence equation}$$

we solve $[E_m^{(k)}]$ iteratively in time. Note that in (7) the matrix inversion needs only be factorized once by LU decomposition. This is in contrast to the frequency domain approach, where N matrix inversions must be done. On the other hand, computing the matrix elements in the frequency domain approach requires $O(NK^2)$ computation and $O(K^2)$ storage. For the SATDMIE approach, we have to save $[P_{m-n}^{(\ell,k)}]$, whose computational and storage complexities are both $O(NK^2)$. Note also that $[g_{m-n}(|z_\ell - z'|)]$ can be calculated efficiently using the fast algorithm in [2].

Verification

The above scheme has been implemented as a C++ program. Figure 2 is

the computed transient behaviors for a homogeneous slab with $\epsilon_r = 5$, $a = 8c_0\Delta t$, $\Delta z = c_0\Delta t$, $f(t) = (e^{-t/100\Delta t} - e^{-t/50\Delta t})U(t)$ and $U(t)$ the unit step function. The three 512-point curves agree with those obtained by taking the inverse FFT of the analytic frequency-domain solution. They were computed through a notebook PC with a Pentium III 1.13 GHz CPU and a 256 M memory in 49 seconds.

References

- [1] I. T. Chiang and S. K. Jeng, "Staircase approximation for transients of multisection dispersive transmission lines with nonlinear loads," *2001 IEEE AP-S International Symposium*, Boston, MA, July 2001.
- [2] I. T. Chiang, *Matrix Approaches for Transient Analysis of Complex Transmission Line Circuits Using HWS and SATD*, Ph.D. Thesis, National Taiwan University, Taipei, Taiwan, 2002.
- [3] J. Ch. Bolomey, CH. Durix, and D. Lesselier, "Time-domain integral equation approach for inhomogeneous and dispersive slab problems," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-26, no. 5, pp. 658-667, Sept. 1978.
- [4] Y. Shifman and Y. Leviatan, "On the use of spatio-temporal multiresolution analysis in method of moments solution of transient electromagnetic scattering," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-49, no. 8, pp. 1123-1129, Aug. 2001.
- [5] S. K. Jeng, "Discrete-time electromagnetic theory," *2002 IEEE AP-S International Symposium*, San Antonio, TX, June 2002.

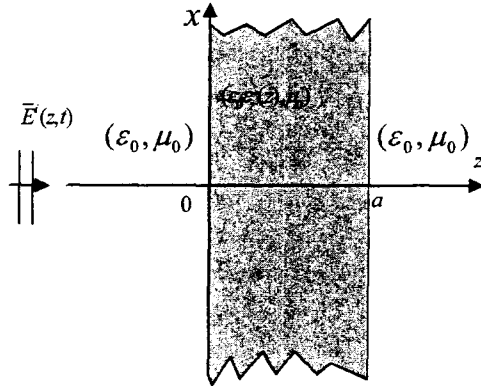


Fig. 1. Transient propagation Problem

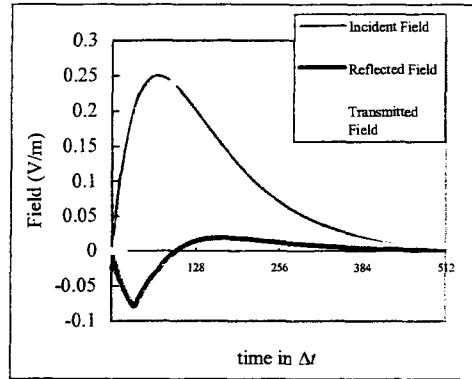


Fig. 2. Incident, Reflected, and Transmitted fields