

寬頻元素穩態流場解法的研究發展
計畫編號：NSC90-2212-E-002-187
執行期限：90 年 8 月 1 日 9 年 7 月 31 日
主持人：顏瑞和 國立台灣大學機械系
參與人員：蔡孟修 國立台灣大學機械系

一、 中文摘要

本文的主要目的在於改良 PISO 算則，並配合寬頻元素法高準確度的特性，發展 MPISO-II 算則應用到不可壓縮之 Navier-Stokes 方程式。在本文中，我們分別將不同的算則如：Stiffly stable 法、全隱性法、Simple 法、MPISO-I 法以及 MPISO-II 法代入穩態以及暫態流場來比較。在穩態流場中，如何有效地跨大時間間距、減少計算時步是決定計算效率的主要目標；在暫態流場中，如何配合算則的特性，一方面增加時間間距，一方面維持計算過程中的準確度是暫態算則的主要目標。在此我們所測試的流場包含了穩態流場：Kovasznay、穴流以及突張流流場；暫態流場：圓柱流場。由結果得知，改良的 MPISO-II 算則無論在暫態以及穩態流場計算效率都是最佳的。

關鍵字：PISO 法、寬頻元素法、Navier-Stokes 方程式、Stiffly stable 法、全隱性法、Simple 法、MPISO 法。

二、 ABSTRACT

The main purpose of this thesis is to modify the method of pressure implicit with splitting operator (PISO). The new modified PISO was developed by an implicit corrector step. It can be applied to the transient and steady flows.

The new scheme was tested by the Kovasznay, driven cavity, sudden expansion flow and the flow over a cylinder. The schemes, which are stiffly stable, fully implicit, simple, are compared with the new

scheme. For the steady state solver, by the new method, the computational efficiency can be improved very much by introducing the relaxation factor. For the transient solver, it shows that the new method is the second order accurate and the time step is much larger than the other transient solver such as the stiffly stable scheme. As a consequence, the computational efficient is improved significantly.

Key words：PISO, spectral element method, Navier-stokes equation, Stiffly stable, Fully-implicit, SIMPLE, MPISO

三、 緣由與目的

在直接數值模擬中，流場以及壓力場是由 Navier-Stokes 方程式所解出來的，而一般在求解的過程中，若不考慮熱傳效應以及流體性質變化的情形，統御方程式通常以壓力修正法(Pressure correction method)[1]選擇解 Navier-Stokes 方程式的不可壓縮型式。壓力修正法中又分為分步驟法以及預測修正法。第一種是藉由分步驟法(Fractional-stepping method)或稱為分離法(splitting method)來處理。此法透過不滿足連續方程式的中間速度項的引入，將 Navier-Stokes 方程式中速度與壓力之耦合關係分離開來，並由滿足質量守恆的連續方程所推得的壓力方程式求得壓力值。第二種是預測修正法，此法基本上乃是經過先預測、再作修正的程序所構成。藉由猜測的壓力場使其與速度項的耦合關係分

離，而所得到的中間速度項因為尚未滿足連續方程式的條件所以需要作修正，其修正量的大小則由壓力方程式來決定，重複上述的程序使得速度項越來越達到連續方程式的要求而收斂至動量方程式的解。此種預測修正法包含了 SIMPLE 算則[2-5]，以及 PISO (Pressure Implicit with Splitting Operators)算則[6,7]。

文獻回顧中，可以知道非線性項的處理方式對於算則的計算效率影響甚鉅。若採取半隱性法的方式以顯性法來處理非線性項將會遇到有條件穩定性的影響而使時間間距無法跨大，而導致計算穩態流場時效率低落的問題。而反觀全隱性法對於非線性項是利用對時間離散化的方式則可以以隱性法處理之，計算穩態流場時對於時間方向是無條件穩定性，也就是時間間距可以較半隱性法大幅跨大，而達到穩態所需的計算時間也遠小於半隱性法。

處理暫態問題時，如果以全隱性法處理雖然時間間距比半隱性法大，但是由於非線性項作線性展開時只有一階的準確度，而半隱性法可以有二階的準確度。因此以往解暫態時，會選擇時間間距較小，但準確性較高的半隱性算則。

本研究主要的工作為改良 PISO 算則，稱之為 MPISO- II (Modified PISO)。主要是以全隱性 MPISO- I 法為基礎，第一部份是將原本舊有的 MPISO- I 法程式改為對時間準確度提昇至二階的 Gear method 第二部份是改良非線性項對時間作展開時在時間方向只有一階準確度的情形。第三部分是改善壓力修正方程式，使時間間距可以更加跨大。

寬頻法(spectral method)[8,9]是一整體性(global)的方法，此種方法是藉由選取特定的內差函數，並配合上適當的格點配置及權重值，使所求得的誤差會隨著內

差階數的增加而成指數型式降低，這種現象被稱為寬頻精確性(Spectral Accuracy)，但是缺點是無法如有限元素法一樣可以任意調整幾何形狀。寬頻元素法[10]乃是由 Patera 所發表，好處在於我們可以如同有限元素法一樣的自由調整元素的配置及其大小，以適應不同的幾何形狀。由於寬頻元素法是同時承接寬頻法以及有限元素法，所以同時具有這兩種方法的優點，雖然因為元素的連接處理上增加了些許的誤差，但仍然具有寬頻精確性。

本研究的主要目的是分別就穩態流場和暫態流場以效率以及準確度兩方面來探討以 PISO 算則為基礎所修改的 MPISO- II 算則，和其他算則，如半隱性法，全隱性法，SIMPLE 法以及 PISO 法之差異。

四、數值方法

這裡我們討論 MPISO- II 算則所改善的部份，第一部份是壓力方程式的改良，將原本壓力方程式

$$\nabla^2 P^* = \nabla \cdot \left\{ \frac{\vec{V}^n}{\Delta t} - N(\vec{V}^n) \right\}$$

改為將非線性項以中間速度處理較為隱性

$$\nabla^2 P^{n+1} = \nabla \cdot \left\{ \frac{\vec{V}^n}{\Delta t} - N(\vec{V}^*) \right\}$$

第二部份則是將算則以二階 Gear method 改寫，改善時間離散化之誤差；第三部份則是增加一個內部迴圈，可以改善非線性項線性化後只有一階準確度的缺點。

五、實例應用

這裡我們分別將不同的算則代入穩態流場(driven cavity)以及暫態流場(圓柱流場)來比較算則之間的計算效率。

1. 穩態流場：

此流場中我們將計算區間分為四個元素，元素裡的格點數是 13x13。由表 1 以及表 2 我們可以看出無論在 Re=100 或 200，都是以 MPISO- II 的時間間距最大，而計算

時步最小，因此計算效率都是最快的。另外，我們可以發現當雷諾數增大為 200 時，屬於分步驟法的 Stiffly stable 法以及全隱性法的時間間距所受的限制較多，Stiffly stable 法時間間距縮小至雷諾數 100 的三分之一，而全隱性法則縮小為之前的一半不到。反觀使用預測修正法的 SIMPLE 法、MPISO- I 法以及 MPISO- II 法對於雷諾數的增加可以靠著鬆弛係數的調整而比較不受限制。所耗費的時間 Stiffly stable 法增加約 200%，全隱性法增加約為 110%，而 Simple 法增加約為 80%，MPISO- I 法以及 MPISO- II 法均增加分別為 52% 以及 75%。由此可見對於高雷諾數預測修正法有較佳的計算效率。由於時間間距可以跨大，而時間間距以及總計算時步都是以 MPISO- II 法表現最佳。接著表 3 分別代表無鬆弛係數下，MPISO- I 法以及 MPISO- II 法的計算效率比較，可以結論出無鬆弛係數的影響下，MPISO- II 法的確比 MPISO- I 法來的收斂性較佳。

2. 暫態流場：

當雷諾數大於 49 時，流場將產生週期性的擺盪，在此我們藉由不同雷諾數下測得的週期來判斷準確與否。首先我們分別以數值以及實驗來作比對，圖 1 以及表 4 分別可以看出 MPISO- II 法以及 Stiffly stable 法彼此結果吻合，並準確到有效位數第四位；圖 2 是 MPISO- II 法以及實驗數據的比對，也可以驗證 MPISO- II 法的準確性。接著比較兩算則之效率，當 $Re = 180$ 時，Stiffly stable 法的最大時間間距為 $\Delta t = 0.0072$ ；MPISO- II 法的最大時間間距為 $\Delta t = 0.02$ 。而跑完一個週期所需耗費的 CPU 時間分別為 Stiffly stable 法的 1589 秒，以及 MPISO- II 法的 339 秒，所以就計算效能而言，MPISO- II 法遠遠超出 Stiffly stable 法。由於暫態算則中誤差會隨著時間間距的二次方放大，為

求精準將兩算則的時間間距同時縮小為 $\Delta t = 0.005$ ，此時跑一個週期所耗費的 CPU 時間分別為 Stiffly stable 法的 2158 秒以及 MPISO- II 法的 1057 秒。中此可以結論出即使在相同的時間間距下，MPISO- II 法所花費的計算時間仍比 Stiffly stable 法少，因此整體而言 MPISO- II 法在暫態流場的計算效率較佳。

六、 結論

在穩態算則中，應該配合適當的鬆弛係數以加快收斂節省計算時間。當雷諾數增加時，預測修正法的效能明顯較分離步驟法佳。由暫態或者是穩態流場等不同流場的測試可知新發展出的流場，MPISO- II 法的計算效率都是最佳的。

七、 參考文獻

1. John C. Tannehill, Dale A. Anderson and Richard H. Pletcher, "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer second edition"
2. S. V. Patankar and D. B. Spalding, "A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows", Int. J. Heat Mass Transfer, 15, 1787-1806 (1972)
3. G. D. Raithby and G. E. Schneider, "Numerical solution of problems in incompressible fluid flow : treatment of the velocity-pressure coupling", Numer. Heat Transfer, 2, 417-440 (1979)
4. S. V. Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere, Washington, DC, (1980)
5. J. P. Van Doormaal and G. D. Raithby, "Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows", Numer. Heat Transfer, 7, 147-163 (1984)
6. R. I. Issa, "Solution of the implicitly discretized fluid flow equations by

operation-splitting”, J. Comput. Phys, 62, 40-65 (1985)

7. R. I. Issa, B. Ahmadi-Befrui, K. R. Beshay and A. D. Gosman, “Solution of the implicitly discretized reacting flow equation by operator-splitting”, J. Comput. Phys, 93, 388-410 (1991)
8. D. Gottlieb and S.A. Orszang, “Numerical Analysis of Spectral Method: Theory and Application”, NSF-CBMS Monograph NO.

26, SIAM, Philadelphia..

9. C. Canuto, M. Y. Hussani, A. Quarteroni, T. A. Zang, “Spectral Methods in Fluids Dynamics”, Springer-Verlag, New York
10. A. T. Patera, “A Spectral Element Method for Fluid Dynamics : Laminar Flow in a Channel Expansion.” J. of Comput. Phys, 54, 468-488

Re=100

	$\Delta t_{\max}$	Time Step	鬆弛係數	Time
StifflyStable	0.2	596	None	112.92
Fully-Implicit	1.0	150	None	16.42
SIMPLE	0.5	350	0.9, 0.8	29.66
MPISO- I	1.0	199	0.7, 0.6	12.02
MPISO- II	1.1	139	1.0, 1.0	9.06

表 1 不同算則之間計算時間的比較，穴流

Re=200

	$\Delta t_{\max}$	Time Step	鬆弛係數	Time
StifflyStable	0.07	2303	None	343.34
Fully-Implicit	0.4	452	None	34.93
SIMPLE	0.7	446	0.9, 0.7	53.33
MPISO- I	0.6	408	0.7, 0.6	18.29
MPISO- II	0.7	338	1.0, 0.5	15.93

表 2 不同算則之間計算時間的比較，穴流

	Re=100				Re=200		
	$\Delta t_{\max}$	Time Step	Time		$\Delta t_{\max}$	Time Step	Time
MPISO- I	0.2	604	20.48	MPISO- I	0.1	1729	43.99
MPISO- II	1.1	139	9.06	MPISO- II	0.2	876	29.88

表 3 無鬆弛係數下 MPISO- I 與 MPISO- II 之比較，穴流

擺盪週期					
Re	50	80	120	160	180
Stifflystable	7.9833	6.4730	5.7010	5.3090	5.1750
MPISO- II	7.9831	6.4734	5.7007	5.3096	5.1740

表 4 不同雷諾數下 Stiffly stable 法與 MPISO- II 法的擺盪週期比較

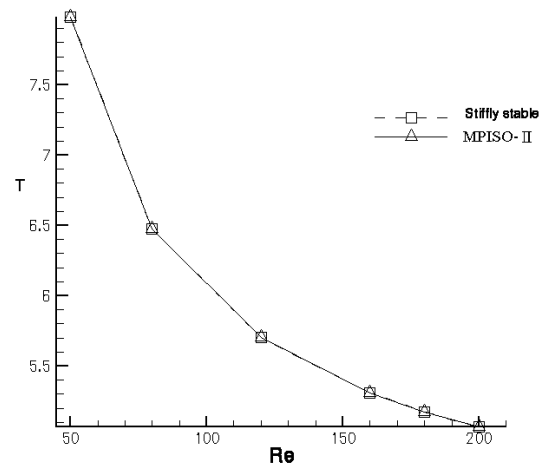


圖 1 MPISO- II 法與 Stiffly stable 法求得的週期比較

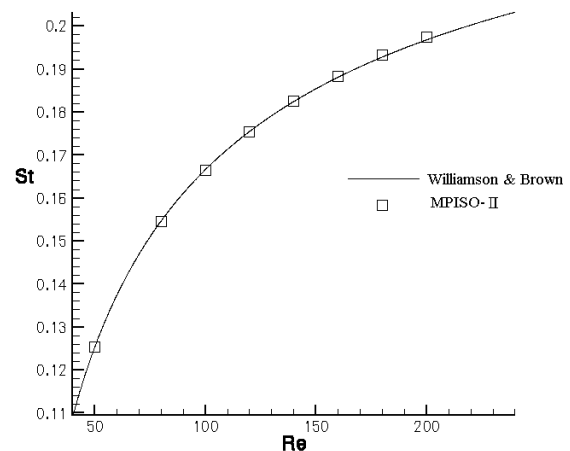


圖 2 不同雷諾數下，MPISO- II 法與實驗據的比較