

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

鍵驅動平台之動態分析與操控策略(2/2)

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC91-2212-E-002-055-

執行期間：91年08月01日至92年07月31日

執行單位：國立臺灣大學機械工程學系暨研究所

計畫主持人：劉霆

報告類型：完整報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 92 年 10 月 31 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

腱驅動平台機構之動態分析與操控策略(2/2)

Dynamic Modelling and Control Algorithm of Tendon-driven Platform Mechanism

計畫編號：NSC 91-2212-E-002-055

執行期限：91年8月1日至92年7月31日

主持人：劉 霆副教授 國立台灣大學機械系

計畫參與人員：林英隆、徐維澤、葉智榮、王建文、田世昌
研究生兼任助理 國立台灣大學機械研究所

Email: tliu@ntu.edu.tw

一、中文摘要

本研究計劃對腱驅動平台機構之動態分析及其操控策略做進行探討。本計畫分兩年進行，就動態分析及操控策略兩個主題平行進行。本研究計劃第一年，主要探討腱驅動平台機構之動態分析，探討平台運動時，運動空間中之奇異點位置與狀態，並探究配置多餘之腱元件之特性與影響。於第一年中，亦就腱驅動平台機構之平台運動位置與角度進行運動位置及速度之軌跡規劃，並建立一平台機構模型進行測試。本研究應可以促成腱驅動平台機構的應用實現，並可能對發展與創新新型的平台機構有所助益。

關鍵詞： 腱驅動、平台機構

Abstract

This two-year research is aimed to investigate the dynamics and the control algorithm of a special type of platform mechanisms, in which tendons are used as the actuators. In the first year, the dynamic model of the tendon-driven platform mechanism would be developed, and the conditions of tendon redundancy and elastic elements within the tendon also would be investigated. The motion planning based on the position and velocity should be developed, and tests on the experimental platform mechanism will be performed. In the second year, the more comprehensive algorithm based on platform velocity will be the main focus, and the numerical simulation on the

dynamics of the platform mechanism will be performed, and compared with the analytical and experimental results. This research will be helpful for the further understanding in its fundamental theory, design, and applications of this special type of platform mechanisms.

Keywords: tendon-driven,
platform-mechanism

二、緒論

本研究計畫分兩年進行，主要可分成動態分析與操控策略兩個主題，第一年略較偏重動態分析，第二年則略較偏重操控策略之發展。本研究計劃第一個部分，主要探討腱驅動平台機構之動態分析，並配合平面及空間之特別幾何狀態，進行解析分析，探討平台運動時，運動空間中之奇異點位置與狀態。第二個部分，係就腱驅動平台機構之操控策略部分予以探討，主要是以平台運動位置與角度進行運動軌跡的規劃，以能避免奇異點，再以平台速度為設計規劃條件，操控各驅動器之速度，要求能達到平台平穩等速運動，或驅動器速度等速操作或變化量最少的目的。

本研究目前已完成之研究成果以下將分為兩個部分 PART I 以及 PART II，分別予以敘述。

三、PART I 系統化之分析方法

此部分研究發展以一系統化方法直接以螺旋的形式整合呈現腱驅動平台機構中各腱

張力以及姿態，提出以螺旋理論為基礎之一致性分析方法，進行腱驅動平台之運動學及力學分析，包括以螺旋為基礎之轉換矩陣分析、腱與平台之靜平衡及動平衡分析，以及奇異性分析。利用此一系統化一致性之分析方法，將可更簡化腱驅動平台機構之特性分析並提高分析之效率，此部分研究並以一範例說明此一致性分析分法之運用。

1 Introduction

Tendon-driven platform (TDP) mechanisms are a special type of platform mechanisms, in which tendons are used as the actuators and the critical parts of the mechanisms. The tendons, those flexible mechanical elements such as wires, cables, strings, etc., are used as physical constraints to restrict the motion of the connected rigid bodies and as intermediates to transfer forces to the connected rigid bodies. There are several applications of these novel mechanisms [1~8], and the advantages of TDP are: high capacity, low inertia, high speed, large workspace and easy-to setup, etc.

A spatial TDP mechanism which is actuated by eight tendons is shown in figure 1, where B_i and P_i are the connecting points of the i -th tendon on the base and the platform respectively.

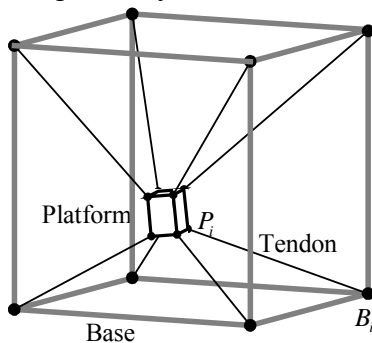


Figure 1 A spatial tendon-driven platform

There have been studies on the kinematics, force analysis and control of TDP, and most analysis in the previous studies uses vector calculation [6~11]. In the analysis of TDP's, due to the nature of the flexible tendon, it is necessary to perform a detailed force analysis along with the kinematic analysis for determining the suitable working condition.

Yet, the two stages were not integrated in the past. It is obvious that the motion and force of a tendon can be better expressed as a screw axis. Thus, a unified approach based on screw axes representation of tendons for establishing a general model for TDP's is proposed in this study. The kinematic and force analysis, therefore, can be combined and investigated as a whole more efficient and simplified.

2 Screw Representation of a Tendon

2.1 General description of a tendon

2.1.1 Direction of a tendon

The difference between the flexible mechanical elements, tendons, and rigid links are that the tendons can provide both kinematical and force constraints, if, and only if, the tendons are tight. Under this condition, there are only tensions exerting on tendons. Another characteristic of a tendon is tendons can't resist any external forces or couples exert on them. According to these concepts, the direction of a tendon could be defined as the tension direction. If a tendon connects on two rigid bodies and it is under tight condition, the direction of tendon, as the same as the tension exert on the tendon, is point from one rigid body to another rigid and vice versa. Therefore, the tension vector of the i -th tendon connecting between base and platform, can be expressed as in equation (1) where f_i means the magnitude of the tension and s_i means the direction of tension which points from platform to base relative to platform.

$$f_i = f_i \cdot s_i \quad (1)$$

2.1.2 Equivalent kinematic chain transformation

Equivalent kinematic chain (EKC) transformation of a tendon is a general concept that using the combination of rigid links and joints to represent a tendon. An actuated tendon which connects on two rigid bodies could be represented as a prismatic joint connects two rigid links where the other terminals of the

two links connect with rigid bodies by using revolute joints in plane and spherical joints in space, as shown in Figure 2.

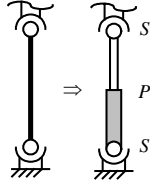


Figure 2 EKC transform of a tendon in space

2.2 Kinematic expression of a tendon

As a tendon is represented in the EKC transformation, the screw representation of the i -th tendon reference to a point P on the platform can be expressed as in equations (2) to (7) and shown as Figure 3, where $\hat{s}_{j,i}$ denotes the unit screw associated with the j -th joint of the i -th tendon [12,13].

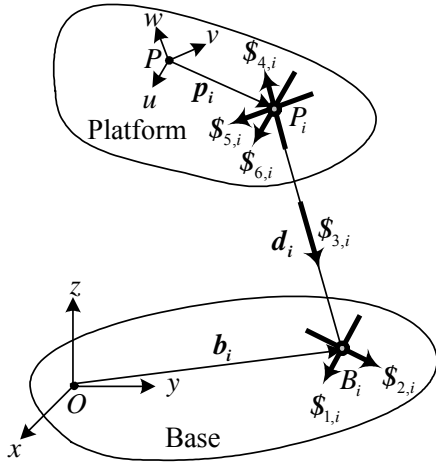


Figure 3 Screw axes of joints of the i -th tendons

$$\hat{s}_{1,i} = \begin{bmatrix} s_{1,i} \\ (\mathbf{p}_i + \mathbf{d}_i) \times s_{1,i} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\hat{s}_{2,i} = \begin{bmatrix} s_{2,i} \\ (\mathbf{p}_i + \mathbf{d}_i) \times s_{2,i} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\hat{s}_{3,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ s_{3,i} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\hat{s}_{4,i} = \begin{bmatrix} s_{4,i} \\ \mathbf{p}_i \times s_{4,i} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\hat{s}_{5,i} = \begin{bmatrix} s_{5,i} \\ \mathbf{p}_i \times s_{5,i} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\hat{s}_{6,i} = \begin{bmatrix} s_{6,i} \\ \mathbf{p}_i \times s_{6,i} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Neglect the passive joints and consider the

twist of the i -th tendon, the unit screw expression of the i -th tendon is:

$$\hat{s}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ s_i \end{bmatrix}. \quad (8)$$

2.3 Force expression of a tendon

From the theory of reciprocal screws [12,13] and equations (2)~(7), a screw that is reciprocal to all the unactuated joint screws of the i -th tendon reference to a point P can be expressed as:

$$\hat{s}_{r3,i} = \begin{bmatrix} s_{3,i} \\ \mathbf{p}_i \times s_{3,i} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Thus, the unit wrench of the i -th tendon reference to a point P can also be expressed as:

$$\hat{s}_{r,i} = \begin{bmatrix} s_i \\ \mathbf{p}_i \times s_i \end{bmatrix}. \quad (10)$$

3 Kinematic Analysis of the Platform

3.1 Position analysis

The i -th tendon connects between base and platform is shown in Figure 4. The closed loop of position vectors could express as:

$${}^B \mathbf{OP}_i = {}^B \mathbf{OP} + {}^B \mathbf{R}_P {}^P \mathbf{PP}_i, \quad (11)$$

and then reduced to:

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{b}_i - ({}^B \mathbf{OP} + {}^B \mathbf{R}_P {}^P \mathbf{PP}_i). \quad (12)$$

According to equation (12), the unit direction vector of a tendon could also be derived as:

$$s_i = \mathbf{d}_i \cdot (\mathbf{d}_i^T \cdot \mathbf{d}_i)^{-1/2}, \quad (13)$$

where

B_i : the i -th connect point on the base,

P_i : the i -th connect point on the platform,

${}^B \mathbf{x}$: a vector described in Base space,

${}^P \mathbf{x}$: a vector described in Platform space,

\mathbf{d}_i : line vector of the i -th tendon,

${}^B \mathbf{R}_P$: platform rotation matrix relative to

base.

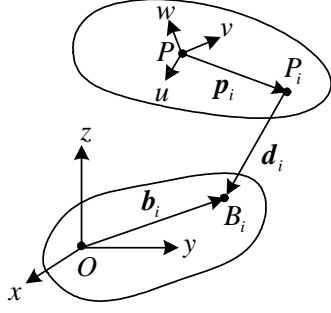


Figure 4 Position of base, platform and the i -th tendons

3.2 Velocity analysis

The instantaneous twist of the platform can be expressed via the joints screws of the i -th tendon as:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_p &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{V}_p \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^6 \mathcal{A}_{j,i} \mathcal{S}_{j,i} \\ &= \mathcal{A}_{1,i} \mathcal{S}_{1,i} + \mathcal{A}_{2,i} \mathcal{S}_{2,i} + \mathcal{A}_{3,i} \mathcal{S}_{3,i} + \mathcal{A}_{4,i} \mathcal{S}_{4,i} + \mathcal{A}_{5,i} \mathcal{S}_{5,i} + \mathcal{A}_{6,i} \mathcal{S}_{6,i} \end{aligned} \quad (14)$$

where $\mathcal{A}_{j,i}$ is the velocity variable of the j -th joint of the i -th tendon, such as $\mathcal{A}_{j,i}$ for revolute joint and $\mathcal{A}_{j,i}$ for prismatic joint.

The Jacobian of the i -th tendon, by applying the theory of reciprocal screws, could be shown as:

$$\mathbf{J}_{x,i} \mathcal{S}_p = \mathbf{J}_{q,i} \mathcal{A}_i \quad (15)$$

and derived to:

$$\mathcal{A}_{r3,i} \mathcal{S}_p = \mathcal{A}_i \quad (16)$$

When all tendons are considered, the final Jacobian is shown as:

$$\mathbf{J}_x \mathcal{A} = \mathbf{J}_q \mathcal{A} \quad (17)$$

where

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{r,1}^T \\ \mathcal{S}_{r,2}^T \\ \mathbf{M} \\ \mathcal{S}_{r,n}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{s}_1)^T & \mathbf{s}_1^T \\ (\mathbf{p}_2 \times \mathbf{s}_2)^T & \mathbf{s}_2^T \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ (\mathbf{p}_n \times \mathbf{s}_n)^T & \mathbf{s}_n^T \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_q = \mathbf{I} \quad (\mathbf{n} \times \mathbf{n} \text{ identity matrix}),$$

$$\mathcal{A} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z \quad v_{px} \quad v_{py} \quad v_{pz}]^T$$

the angular velocity and linear velocity of the platform, and

$$\mathcal{A} = [\mathcal{A}_1 \quad \mathcal{A}_2 \quad \dots \quad \mathcal{A}_n]^T$$

the linear velocity of tendons.

The relationship between base-platform space and actuator space can also be expressed as equation (18) by rearranging equation (17).

$$\mathbf{J}'_x \mathcal{A} = \mathbf{J}_q \mathcal{A} \quad (18)$$

where

$$\mathbf{J}'_x = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T & (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{s}_1)^T \\ \mathbf{s}_2^T & (\mathbf{p}_2 \times \mathbf{s}_2)^T \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \mathbf{s}_n^T & (\mathbf{p}_n \times \mathbf{s}_n)^T \end{bmatrix}, \text{ a } (\mathbf{n} \times 6) \text{ matrix,}$$

$$\mathcal{A} = [v_{px} \quad v_{py} \quad v_{pz} \quad \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T.$$

4 Force Analysis of the Platform

4.1 Dynamic equilibrium of the platform

In figure 5, a rigid body, the platform, is specified with its center of gravity, and exerted with n tensions, and gravity force. With respect to its C.G., these n tensions are transferred into a resultant external force and a resultant couple in space, and the dynamic equilibrium equation can be derived as:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i = \mathbf{M}\mathbf{a} - \mathbf{M}\mathbf{g} - \mathbf{F}_e \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \times \mathbf{f}_i = \mathbf{H}_g + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_g - \mathbf{C}_e - \mathbf{R}_g \times \mathbf{F}_e \end{cases}, \quad (19)$$

where:

\mathbf{C}_g : center of gravity of the platform,

\mathbf{g} : acceleration of gravity,

\mathbf{M} : mass of the platform,

\mathbf{a} : acceleration of the platform,

$\boldsymbol{\omega}$: angular velocity of the platform,

\mathbf{f}_i : tension force,

\mathbf{p}_i : distance from C.G. to the tension applying point,

\mathbf{F}_e : resultant external force,

\mathbf{R}_g : distance from C.G. to the resultant external force applying point,

\mathbf{C}_e : resultant couple,

\mathbf{H}_g : angular momentum about the C.G..

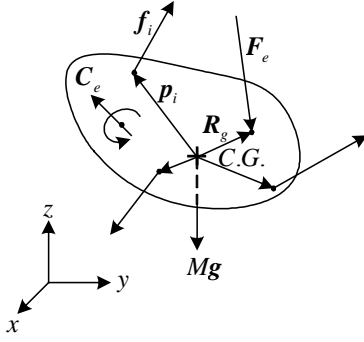


Figure 5 Forces and couple on the platform

Equation (19) could then be expressed in a matrix form as:

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ p_1 \times s_1 & p_2 \times s_2 & \dots & p_n \times s_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Ma - Mg - F_e \\ \mathbf{H}_g^* + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_g - C_e - R_g \times F_e \end{bmatrix}, \quad (20)$$

and presented in terms of tendon screws as:

$$\begin{bmatrix} \$_{r,1} & \$_{r,2} & \dots & \$_{r,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Ma - Mg - F_e \\ \mathbf{H}_g^* + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_g - C_e - R_g \times F_e \end{bmatrix}. \quad (21)$$

4.2 Static equilibrium of the platform

From equation (20), as the dynamic terms are zero, the static equilibrium of the platform can be shown as:

$$\begin{bmatrix} \$_{r,1} & \$_{r,2} & \dots & \$_{r,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -Mg \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Both equation (20) and (21) can be expressed as:

$$[S_T]_{6 \times n} \{\boldsymbol{\tau}\}_{n \times 1} = \{\mathbf{F}\}_{6 \times 1} \quad (23)$$

where $\boldsymbol{\tau}$ is the tendon force vector.

4.3 Necessary condition of a full controlled TDP

The solution of tendon force, $\boldsymbol{\tau}$, in equation (22) can be solved via pseudo inverse [14]:

$$\boldsymbol{\tau} = S_T^+ \mathbf{F} + (\mathbf{I} - S_T^+ S_T) \mathbf{K}_\tau, \quad (24)$$

$$S_T^+ = S_T^T (S_T S_T^T)^{-1}, \quad (25)$$

where the $(\mathbf{I} - S_T^+ S_T) \mathbf{K}_\tau$ term is the null space of tendon forces, $\boldsymbol{\tau}$.

Because the tensions of tendons are required to be maintained positive at all time in order to hold the position and orientation of the platform. The solutions of $\boldsymbol{\tau}$ in equation (24) should be all greater than zero. Thus, the components in the $(\mathbf{I} - S_T^+ S_T) \mathbf{K}_\tau$ term in equation (24) must be all greater than zero in order to achieve the tendon positive tension condition. It is necessary to have an all-positive null vector combination, in the case, $n > 6$. For this reason, a TDP is said to be fully controlled only if the number of tendons is greater than the mobility of the platform, which means: $n > 6$ in equation (23). In the case of $n \leq 6$, the motion of platform is not fully controlled, yet still partially workable in some area and some direction.

Under the fully controlled condition, the solution of platform kinematics, \mathbf{x} , in equation (17) could also be solved via pseudo inverse:

$$\mathbf{x} = J_x^+ \dot{\boldsymbol{\phi}} + (\mathbf{I} - J_x^+ J_x) \mathbf{K}_x, \quad (26)$$

$$J_x^+ = (J_x^T J_x)^{-1} J_x. \quad (27)$$

where the $(\mathbf{I} - J_x^+ J_x) \mathbf{K}_x$ term is the null space of tendon velocities, \mathbf{x} . The solution yields infinite solutions of \mathbf{x} yet the null space is not necessarily all-positive.

5 Singularity Analysis

In some particular positions and orientations of a platform, the Jacobian matrix may lose its full rank and results in the singular conditions. Under these conditions, the platform may gain one or more degree of freedom within its workspace, and therefore loses its stiffness completely, which means the platform is uncontrollable. Another critical factor is that the tensions of the tendons also affect the stiffness and configuration of the platform. Therefore, the

kinematic singularity, kinetic singularity and tension condition should be discussed in details in order to determine the controllable workspace of the TDPs.

5.1 Kinematic singularity analysis

The platform can possess infinitesimal motion in some direction while all the tendon displacements are completely unchanged when the direct kinematic singularity occurs. Under this condition, the platform may gain one or more degree of freedom, but cannot resist forces or moments in certain directions. It happens when the Jacobian matrix loses its rank.

For a full controlled TDP, the matrix J_x is a $n \times 6$ matrix in equation (17), and $n > 6$; therefore, the maximum rank of J_x is 6. In the case that $\text{rank}[J_x] < 6$, it is said J_x loses its rank and results in a kinematic singularity.

5.2 Kinetic singularity analysis

All the tensions of the tendons are undetermined and the platform is uncontrollable when the kinematic singularity occurs. It happens when the matrix S_T in equation (23) loses its rank.

For a full controlled TDP, the matrix S_T is a $6 \times n$ matrix, and the maximum rank of S_T is 6 since $n > 6$. In the case that $\text{rank}[S_T] < 6$, it is said that S_T loses its rank and results in a kinetic singularity.

Comparing equations (18) and (23), the relationship between J'_x and S_T is:

$$J'_x = S_T^T. \quad (28)$$

It is clear that the kinematic singularity and kinetic singular will happen at the same time. Thus, only one of the rank of matrix J'_x or S_T is needed to be check to determine the singularity.

Another important issue in the force analysis is that the null space of τ in equation (24) should be positive all time to consist with the tension condition of tendons. If some components in τ are negative, it means the forces on the tendons are not tensile force and these tendons are loosed. The platform will be not fully controlled even the rank of S_T is still 6.

5.3 TDP controllable workspace

The controllable workspace of TDP can be defined as the set of postures where forces and torques on the platform can be controlled under the following conditions:

- (i) all tendon forces must be positive;
- (ii) the platform must not run into singularities.

Therefore, the controllable workspace of TDP can be determined by checking:

- (i) $\text{rank}[S_T] = 6$ (or $\text{rank}[J_x] = 6$);
- (ii) $(I - S_T^+ S_T)K > 0$.

These matrices are all established based on screw axes and consistent with kinematic and force analysis.

6 Example

Referring to figure 1, it's a spatial eight-tendon platform, and used as an example to illustrate the method. In the analysis, the first step of this unified approach is to establish the screw representations of tendons via inverse position analysis to get s_i and p_i which are expressed in base space. In this procedure, we needs to know the position of the center of gravity of the platform, p_o , and the rotation matrix of platform relative to the base, ${}^B R_p$.

After the inverse position analysis, the Jacobian of the platform can be derived directly and shown as in equation (29):

$$J_x = \begin{bmatrix} \hat{\$}_{r,1}^T \\ \hat{\$}_{r,2}^T \\ M \\ \hat{\$}_{r,8}^T \end{bmatrix}, \quad (29)$$

where

$$\hat{\$}_{r,i}^T = \left[(p_i \times s_i)^T \quad s_i^T \right]. \quad (30)$$

And the kinematic relationship of tendons and platform can established easily as in equations (31) and (32):

$$\dot{\phi} = J_x \dot{x}. \quad (31)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = J_x^+ \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{I} - J_x^+ J_x) \mathbf{K}_x, \quad (32)$$

When the platform is under the static equilibrium condition, there is no dynamic term, and the force relationship among tendons and platform can be derived as:

$$[S_T] \{\boldsymbol{\tau}\} = \begin{bmatrix} -M\mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \{\mathbf{F}_s\}, \quad (33)$$

If the dynamic terms are considered, the dynamic equilibrium can be shown as:

$$[S_T] \{\boldsymbol{\tau}\} = \begin{bmatrix} M\mathbf{a} - M\mathbf{g} - \mathbf{F}_e \\ \mathbf{I}\dot{\mathbf{H}}_g + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_g - \mathbf{C}_e - \mathbf{R}_g \times \mathbf{F}_e \end{bmatrix} = \{\mathbf{F}_D\}, \quad (34)$$

and brief expressed as:

$$[S_T] \{\boldsymbol{\tau}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (35)$$

where

$$[S_T] = [\mathcal{S}_{r,1} \quad \mathcal{S}_{r,2} \quad \text{L} \quad \mathcal{S}_{r,8}], \quad (36)$$

$$\mathcal{S}_{r,i} = \begin{bmatrix} s_i \\ \mathbf{p}_i \times \mathbf{s}_i \end{bmatrix}, \quad (37)$$

$$\{\boldsymbol{\tau}\} = \{f_1 \quad f_2 \quad \text{L} \quad f_8\}^T. \quad (38)$$

Thus, the kinetic relationship of tendons and platform can be established rapidly as in equations (39) and (40):

$$\mathbf{F} = S_T \boldsymbol{\tau} \quad (39)$$

$$\boldsymbol{\tau} = S_T^+ \mathbf{F} + (\mathbf{I} - S_T^+ S_T) \mathbf{K}_\tau \quad (40)$$

Because the platform is actuated by all eight tendons, the platform can be a fully controlled TDP. This platform can perform six degree-of-freedom motions and resist external forces and couples, or be maintained in static equilibrium under the following conditions:

(i) matrix S_T is full rank (or matrix J_x is full rank);

(ii) $f_i > 0$ in $\{\boldsymbol{\tau}\}$.

From the example via the unified approach, the kinematic and force analysis, and the controllable workspace determination, therefore, are indeed more efficient and simplified.

7 Conclusions

In this study, the tension and the posture of the tendons can be expressed in the form of screw axes to represent the corresponding wrenches and twists directly and properly.

And then, the kinematic and force analysis model of tendons and platforms can be established intuitively. Through the example, it is believed that the unified approach based on the screw theory is indeed straightforward and efficient.

8 Reference

1. W.B. Garrett, "Suspension System for Supporting and Conveying Equipment, such as a Camera", United States Patent, No. 4625938, 1986.
2. Roger Bostelman, James Albus, Nicholas Dagalakis, Adam Jacoff, "Application of The NIST ROBOCRANE," Robotics and Manufacturing, Vol. 5, 1994.
3. P. D. Campbell, P. L. Swaim, and C. J. Thompson, "Charlotte Robot Technology for Space and Terrestrial Applications," SAE Technical Series paper 951520, 1993.
4. Duan, B. Y., "A new design project of the line feed structure for large spherical radio telescope and its nonlinear dynamic analysis", Mechanism 1, 1999.
5. Y. X. Su, B. Y. Duan, R. D. Nan, B. Peng, "Development of a large parallel-cable manipulator for the feed-supporting system of a next-generation large radio telescope", Journal of Robotic System 18(11), 2001.
6. Robert L. Williams II, "Cable-Suspended Haptic Interface", International Journal of Virtual Reality 1, Vol. 3, No. 3, pp. 13-21, 1998
7. S. Kawamura, W. Choe, S. Tanaka, S. R. Pandian, "Development of an Ultrahigh Speed Robot FALCON using Wire Driven System," IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1995.
8. Tetsuya Morizono, Kazuhiro Kurahashi, Sadao Kawamura, "Realization of a Virtual Sports Training System with Parallel Wire Mechanism", Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Albuquerque, New Mexico, April 1997.
9. Aiguo Ming, Toshiro Higuchi, "Study on Multiple Degree-of-Freedom Positioning

- Mechanism Using Wires (Part 1),” Int. J. Japan Soc. Prec. Eng., Vol. 28, No. 2 (June 1994).
10. Aiguo Ming, Toshiro Higuchi, “Study on Multiple Degree-of-Freedom Positioning Mechanism Using Wires (Part 2),” Int. J. Japan Soc. Prec. Eng., Vol. 28, No. 3 (June 1994).
 11. Aiguo Ming, Makoto Kajitani, Toshiro Higuchi, “On the Design of Wire Parallel Mechanism,” Int. J. Japan Soc. Prec. Eng., Vol. 29, No.4 (June 1995).
 12. Lung-Wen Tsai, ”Robot Analysis---- the Mechanics of Serial and Parallel Manipulators”, John Wiley and Sons, Inc., 1999.
 13. Yuan, M. S. C., Freudenstein, F., and Woo, L. S., “Kinematic Analysis of Spatial Mechanisms by Means of Screw Coordinates, Part 1: Screw Coordinates,” ASME J. Eng. Ind., Vol. 93, Ser. B, No. 1, pp. 61-66, 1971.
 14. Edward M. Landesman, Magnus R. Hestenes,” Linear Algebra for Mathematics, Science, and Engineering”, Prentice Hall, 1992.

四、PART II 軌跡規劃與策略

此部分研究提出腱驅動平台之軌跡規劃策略，發展腱驅動平台沿特定軌跡運動之計算邏輯與方法，並以各腱速度平方和為目標函數對軌跡規劃進行最佳化。首先針對腱驅動平台之逆向運動學與速度分析做探討；其次將平台運動軌跡分為路徑與速度規劃，討論直線、圓弧和三次曲線段合成路徑，同時提出修正梯形速度曲線改善梯形速度曲線加速度不連續之缺點；接下來發展出腱驅動平台的軌跡規劃策略，並藉由數值模擬探討及驗證策略之可行性；最後利用平台方位角的變化對軌跡規劃進行最佳化，並且利用數值範例驗證最佳化之成效。此部分研究結果可提供腱驅動平台運動命令產生所需原理、方法和步驟之參考。

1 背景與緣由

並聯式機構在定位平台與工具機已有廣泛之應用，與串聯式機器人相較，並聯式驅動機器人具有簡單的逆向運動學、較高剛性、較高負載能力以及高速運動等優點[1]。此部分研究所討論之腱驅動平台(Tendon-Driven Platform, TDP)即是以腱做為傳動線的並聯式機構，藉由調整腱的長度進行對工作平台之操控，於平面具有三個自由度，空間中具有六個自由度，其中腱泛指僅能負載拉力而無法承受壓力及力矩的物體，如：線(wire)、細繩(string)、纜線(cable)等；由於此限制使得 n 條腱並無法操控平台 n 個自由度，Kawamura [2]說明了至少需要 $n+1$ 條腱才能操控 n 個自由度，因此腱驅動平台所需的最少腱數，在平面需四條腱，空間中則需七條腱。腱驅動平台除了有並聯式機構的優點之外，與傳統並聯式機構相較下還有架設容易、機構整體質量小的優點；同時腱驅動平台具有撓性元件本身之優點：長距離的能量傳遞、質量輕、簡單的機械設計等。

腱驅動平台的運動可分為平台的運動和腱的運動，平台的運動軌跡常是平台所必須執行的任務，腱的運動軌跡則是實際控制的部分，所以腱的運動軌跡必須符合物理上的限制或是其他的要求，這使得軌跡規劃(trjectory planning)成為在操作平台之前的重要工作。

目前對於腱驅動平台的研究包括有原型機的試驗、運動學、靜力學、各腱張力的計算、線型態配置、奇異點、靜態與動態工作空間、腱張力的調配和多餘度的討論等，關於腱驅動平台軌跡規劃則少有完整討論，僅有Ming和Higuchi[3]提出的直線軌跡規劃法，以及邱[4]所提出的腱驅動平台在直線路徑下的速度最佳化之運動軌跡規劃，可作為此部分研究運動規劃之參考。關於並聯式平台軌跡規劃相關文獻則有Nguyen等人[5]發展之以Stewart平台機構為操作器(manipulator)的軌跡規劃法，使操作器遵循一直線運動；Huynh和Arai [6]提出並聯式操作器在工作空間中極限速度分析的圖解法及運算法則，使得並聯式操作器的設計者可以迅速地了解操作器的極限速度，同時提出操作器的速度允許區域

的大小可作為在運動學下性能測量的標準；Huynh等人[7]則以並聯式操作器極限速度理論為基礎，提出固定式線性驅動並聯式操作器的直線軌跡最佳速度控制。除了簡單的直線運動之外，為了使平台能夠平滑地經過某些特定點，需要平滑曲線將這些點連接。平滑曲線的產生方式在電腦輔助繪圖已有許多的研究成果，如三次曲線(cubic splines)、Bézier曲線、B-spline曲線[8]等。由於三次曲線為保證各曲線段在連接點處達到二階導函數連續的最低次數曲線，為了簡化分析此部分研究將以三次曲線作為主要討論的運動路徑。由前人研究可知，目前未有針對腱驅動平台軌跡規劃做統整性的分析與討論，雖然已有許多控制系統提出[9][10][11]，但多為即時搖桿控制或是點到點控制，對於運動命令的產生卻少有討論，因此此部分研究將針對腱驅動平台的軌跡規劃進行探討，藉由直接對平台進行軌跡規劃，產生符合物理限制的各腱運動軌跡，以作為腱驅動平台運動控制系統的參考輸入，並提出腱驅動平台之軌跡規劃策略。除了做為實際操作時的參考命令之外，還可以於平台運動之前，先行了解各驅動器之運動，更加充分掌握整個系統的特性。此外提出以各腱速度平方和為目標函數，對於軌跡規劃進行最佳化之方法，並以數值模擬驗證最佳化之成效。

2 運動學與力學分析

首先對腱驅動平台的逆向運動學和Jacobian矩陣進行推導與分析，得到平台位置姿態與腱長之間的關係，以及平台速度與各腱速度之關係，並說明腱驅動平台順向奇異點發生之時機；接下來討論腱驅動平台在運動學和力學上的限制：由腱速度之限制推得平台速度的限制範圍，由腱張力須為正的限制來定義腱驅動平台的可工作點。

2-1. 逆向運動學分析

如圖1所示為一空間八腱平台示意圖。平台坐標系統P與基座坐標系統B之間的轉換，可以由平台坐標原點 P_0 於基座坐標之位置向量與旋轉矩陣 ${}^B R_P$ 來描述，使用Roll-Pitch-Yaw的角度表示法來描述平台

相對基座坐標的姿態(orientation)：若平台坐標原點與基座坐標原點重合，平台坐標對基座坐標的x軸旋轉 ψ ，再對y軸旋轉 θ ，最後對z軸旋轉 ϕ 角度，這些角度稱為方位角，三個對於基座坐標連續的旋轉可得旋轉矩陣 ${}^B R_P$ 。 n 條腱的基座接點於基座坐標的位置向量為 B_i ($i=1,2,K,n$)，平台接點於平台坐標的位置向量為 P_i ($i=1,2,K,n$)，則 P_i 於基座坐標的位置向量 ${}^B P_i$ 為 P_i 前乘 ${}^B R_P$ 。腱驅動平台的逆向運動學為給定平台坐標原點的位置向量 ${}^B P_0$ 和平台坐標相對基座坐標的旋轉矩陣 ${}^B R_P$ 後，得到對應之各腱腱長。

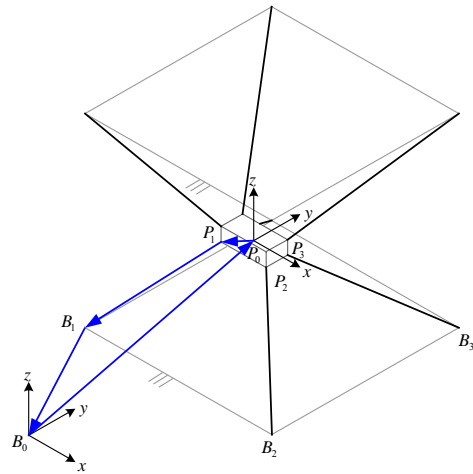


圖1 腱驅動平台示意圖

由圖2-1知關於第一條腱的向量迴路方程式可寫成為式(1)，將式(1)以基座坐標位置向量通式改寫，得到第 i 條腱的向量迴路方程式如式(2)所示，其中 ${}^B L_i$ 為腱向量 $\overrightarrow{P_i B_i}$ 方向由平台接點指向基座接點。

$$P_1 B_1 + B_1 B_0 + B_0 P_0 + P_0 P_1 = 0 \quad (1)$$

$${}^B L_i - B_i + {}^B P_0 + {}^B P_i = 0 \quad (2)$$

將式(2)移項可得腱向量 ${}^B L_i$ ，所以第 i 條腱長度 L_i 的平方值可以由該腱之腱向量與自己本身內積而得。因此給定平台位置姿態後，第 i 條腱長度可寫成

$$L_i = ((B_i - {}^B P_0 - {}^B P_i)^T [B_i - {}^B P_0 - {}^B P_i])^{1/2} \quad (3)$$

又將式(3)改寫成式(4)，其中 L 為各腱長所組成之腱長向量， $\Phi = [\psi \ \theta \ \phi]^T$ 為平台方位角向量，式(4)表示各腱長為平台位置姿態之函數，即是腱驅動平台位置控制的主要方程式。

$$L = f({}^B P_0, \Phi) \quad (4)$$

2-2. Jacobian矩陣分析

對腿驅動平台而言，Jacobian矩陣表示出平台速度到腿速度的對應，當平台的位置與姿態改變時，Jacobian矩陣中的各元素也隨之改變。Jacobian矩陣可利用各腿平台接點向量 ${}^B\mathbf{P}_0 + {}^B\mathbf{P}_i$ 對時間微分推得。微分後可得平台接點 P_i 於基座坐標的速度 \mathbf{V}_{P_i}

$$\mathbf{V}_{P_i} = \mathbf{V}_{P_0} + \boldsymbol{\Omega}_{P_0} \times {}^B\mathbf{P}_i \quad (5)$$

其中 $\mathbf{V}_{P_0} = [v_{P_{0x}} \ v_{P_{0y}} \ v_{P_{0z}}]^T$ 為平台坐標原點於基座坐標的線速度， $\boldsymbol{\Omega}_{P_0} = [\omega_{P_{0x}} \ \omega_{P_{0y}} \ \omega_{P_{0z}}]^T$ 為平台坐標於基座坐標的角速度。第 i 條腿之速度 V_{L_i} 為式(5)中平台接點速度 \mathbf{V}_{P_i} 在第 i 條腿單位向量 \mathbf{l}_i 上投影即

$$V_{L_i} = \mathbf{V}_{P_i} \cdot \mathbf{l}_i \quad (\mathbf{l}_i = \frac{{}^B\mathbf{L}_i}{\|{}^B\mathbf{L}_i\|}) \quad (6)$$

式(5)代入式(6)得到式(7)，再將式(7)寫成矩陣形式，對於 n 條腿速度向量 $\mathbf{V}_L = [V_{L_1} \ V_{L_2} \ \dots \ V_{L_n}]^T$ 可寫為式(8)，其中 \mathbf{J} 為腿驅動平台Jacobian矩陣。

$$\begin{aligned} V_{L_i} &= (\mathbf{V}_{P_0} + \boldsymbol{\Omega}_{P_0} \times {}^B\mathbf{P}_i) \cdot \mathbf{l}_i \\ &= \mathbf{V}_{P_0} \cdot \mathbf{l}_i + (\boldsymbol{\Omega}_{P_0} \times {}^B\mathbf{P}_i) \cdot \mathbf{l}_i \\ &= \mathbf{l}_i \cdot \mathbf{V}_{P_0} + ({}^B\mathbf{P}_i \times \mathbf{l}_i) \cdot \boldsymbol{\Omega}_{P_0} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\mathbf{V}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1^T & ({}^B\mathbf{P}_1 \times \mathbf{l}_1)^T \\ \mathbf{l}_2^T & ({}^B\mathbf{P}_2 \times \mathbf{l}_2)^T \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \mathbf{l}_n^T & ({}^B\mathbf{P}_n \times \mathbf{l}_n)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{P_0} \\ \boldsymbol{\Omega}_{P_0} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{P_0} \\ \boldsymbol{\Omega}_{P_0} \end{bmatrix} \quad (8)$$

對於平面腿驅動平台，若 R^m 為 m 維實數空間，則 $\mathbf{l}_i \in R^3$ ， $\mathbf{V}_{P_0} \in R^2$ ， $\boldsymbol{\Omega}_{P_0} \in R^1$ ，故 $\mathbf{J} \in R^{n \times 3}$ ；對於空間平台， $\mathbf{l}_i \in R^6$ ， $\mathbf{V}_{P_0} \in R^3$ ， $\boldsymbol{\Omega}_{P_0} \in R^3$ ，故 $\mathbf{J} \in R^{n \times 6}$ 。因此Jacobian矩陣在平面時為滿秩數(rank)為3，在空間中滿秩數為6。以向量 $\mathbf{x} = [{}^B\mathbf{P}_0 \ \boldsymbol{\Phi}]^T$ 表示平台的位置與姿態， \mathbf{L} 為各腿長度所組成之腿長向量，式(8)可以改寫為式(9)，其中「 \cdot 」代表對時間的一次微分，式(9)為腿驅動平台速度控制主要方程式。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{x}} \quad (9)$$

當Jacobian矩陣失去秩數的時候，平台此時的位置與姿態即是腿驅動平台之順向運動學奇異點(direct kinematic singular

point)[12]，由式(9)可知，若腿速度 $\dot{\mathbf{x}}$ 為0時，由於Jacobian矩陣失去秩數，平台速度 $\dot{\mathbf{x}}$ 會有0以外的解，也就是腿長不產生變化，平台仍能產生某自由度的運動。腿驅動平台常見的順向奇異點位置會發生在，各腿於基座坐標接點所形成之多邊形與對應之平台接點所形成多邊形相似時，平台應避免選擇上述之線型態，否則平台可能因無法承受某些方向之作用力或作用力矩，使得平台失去控制。

2-3. 平台極限速度

當並聯式平台在運動時，由於各驅動器的速度受到限制，平台的速度也受到了限制，這個限制在平台的速度控制或是軌跡的產生扮演相當重要的角色，藉由了解此限制關係，可使得平台在執行任務時可以盡量發揮驅動器的性能[6]。對於腿驅動平台而言，腿的極限速度 V_{lim} 是決定平台極限速度的主要因素，腿的極限速度則是由驅動馬達的極限速度和捲線軸的直徑尺寸所決定，用式(10)表示腿極限速度與腿速度的關係，由式(9)可以得到腿速度與平台速度的線性關係，所以當給定了平台的位置及姿態，平台的速度必須符合式(11)的限制，式中 $[\mathbf{J}_i]$ 代表Jacobian矩陣的第 i 列。

$$|V_{L_i}| \leq V_{lim} \quad (i=1,2,K,n) \quad (10)$$

$$-V_{lim} \leq [\mathbf{J}_i] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{P_0} \\ \boldsymbol{\Omega}_{P_0} \end{bmatrix}^T \leq V_{lim} \quad (i=1,2,K,n) \quad (11)$$

式(11)中的平台速度 $[\mathbf{V}_{P_0} \ \boldsymbol{\Omega}_{P_0}]^T$ 形成一向量空間(vector space)，而 $[\mathbf{J}_i] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{P_0} \\ \boldsymbol{\Omega}_{P_0} \end{bmatrix}^T = \pm V_{lim}$ 則形成 $2n$ 個超平面(hyper-plane)，每個超平面將平台速度向量空間分割成等於零、大於零以及小於零三個區間，每個限制不等式決定一個超平面的區間，而所有的超平面區間的交集就是平台速度允許區域，區域的邊界即是平台的極限速度。以平面四腿腿驅動平台為例，給定平台位置姿態 $\mathbf{x} = [x \ y \ \phi]^T$ ，若平台姿態維持不變時，即 $\omega_{P_{0z}} = 0$ ，則平台速度為 $\dot{\mathbf{x}} = [v_{P_{0x}} \ v_{P_{0y}} \ 0]^T$ ，可得到八組限制不等式，如式(12)所示，此八組限制不等式在以 $v_{P_{0x}}$ 為橫軸、 $v_{P_{0y}}$ 為縱軸的二維平面上交集出平台速度允許區域。

$$-V_{lim} \leq J_{i1} \cdot v_{P_{0x}} + J_{i2} \cdot v_{P_{0y}} \leq V_{lim} \quad (i=1,2,3,4) \quad (12)$$

2-4. 可工作點

由於撓性元件只能傳遞拉力，無法承受壓力，亦無法承受彎曲力矩，所以進行腱驅動平台的控制時，首先必須檢驗腱元件是否仍是緊繃的狀態。腱驅動平台所需的最少腱數，在平面中需四條腱，空間中需七條腱，平面可提供三個力學平衡方程式，空間則可提供六個方程式，腱張力未知數較可提供的方程式為多，所以是靜不定系統，具有無限多組解，但只有大於零之解，才符合撓性元件的限制。以下藉由腱驅動平台力學方程式的推導，來說明腱驅動平台可工作點之定義。首先說明楊[13]所進行的腱驅動平台力學方程式推導：由虛功原理得到式(13)，其中 τ 為各腱張力所構成之向量， F 為平台於平台坐標原點之輸出力與輸出力矩構成之向量， δx 為平台位置姿態變化量， δL 為腱長度變化量。由式(9)可知，腱長度變化量與平台位置姿態變化量具有式(14)的關係，將式(14)代入式(13)，並將等號兩邊的 δx 消去且轉置後，可得式(15)的關係式。

$$F^T \delta x = \tau^T \delta L \quad (13)$$

$$\delta L = J \delta x \quad (14)$$

$$F = J^T \tau \quad (15)$$

式(15)表示腱張力與輸出力、輸出力矩的關係，其中 J^T 為轉置Jacobian矩陣，平面時 $J^T \in R^{3 \times n}$ 空間時 $J^T \in R^{6 \times n}$ ， n 表腱數。由於 J^T 非方陣，需使用文獻[14]所提之pseudoinverse，得到腱張力 τ 通解

$$\tau = A^{\#} F + (I - A^{\#} A) z \quad (16)$$

其中 $A = J^T$ ， $A^{\#}$ 為 A 的pseudoinverse，在平面時 $A^{\#} \in R^{n \times 3}$ ，空間中 $A^{\#} \in R^{n \times 6}$ ， $z \in R^n$ 為 n 維的任意向量，當 J^T 未失去秩數時， $A^{\#} = A^T (A A^T)^{-1}$ 。式(16)可進一步表示成式(17)，其中右式的第一項為式(15)的特解，第二項 h 則為式(15)的齊性解，即 J^T 的零空間(null space)，是 $n - \text{rank}(J^T)$ 個零向量(null vector)的線性組合，所以對於平面四腱腱驅動平台且 J^T 未失去秩數時， h 由一個零向量組成，對於平面五腱平台且 J^T 未失去秩數時， h 由兩個零向量線性組合。若為平面四腱腱驅動平台時，腱張力為 $\tau = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3 \ \tau_4]^T$ ，式(17)可寫成式(18)，其中 $[a \ b \ c \ 1]^T$ 為零向量， c_1 為任意實數。

$$\tau = A^{\#} F + h \quad (17)$$

$$[\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3 \ \tau_4]^T = A^{\#} F + c_1 [a \ b \ c \ 1]^T \quad (18)$$

當輸出力及力矩 F 為0時，式(17)簡化成靜力平衡方程式，腱張力 τ 等於零空間 h ，故零空間 h 各元素值必須皆大於零才能符合腱張力的限制。又當平台靜止時受到外力或外力矩作用於其上，各腱所傳遞的拉力必須能輸出等量且反向之力或力矩，以抵抗外力或外力矩在此位置達成靜力平衡，此時式(17)中 $A^{\#} F$ 為一特定值，若零空間 h 中的各零向量藉由調配能夠使得零空間 h 各元素值皆大於零，表示不論 F 為何值各腱張力 τ 皆能夠維持正值。若當平台在運動時，是受到腱張力作用其上而產生運動，因此各腱也需輸出力或力矩以提供平台運動所需，和靜止時受外力或外力矩作用的情況相同。因此在此部分研究中將 J^T 未失去秩數且能保證其零空間 h 中的各元素值皆大於零，此時平台的位置與姿態定義為可工作點。平台的運動軌跡都必須符合可工作點的定義，才是安全的運動軌跡。

3 平台之運動軌跡

腱驅動平台運動時受到各腱並聯連接的限制，各腱之驅動器無法獨立運動，彼此之間為相依關係，因此較適合於任務空間進行軌跡規劃，平台的運動軌跡即是指平台在任務空間的運動軌跡，此軌跡為決定平台位置與姿態的時間函數 $x(t)$ ，使得平台在特定時間條件下，沿著特定路徑由起點運動至終點。軌跡可區分為幾何路徑和速度規則兩部分，若將路徑函數以路徑長為參數表示時，速度規則即是規劃此參數隨時間的變化。在空間中起點為 P_b 終點為 P_e 的一直線，其參數表示法如式(19)所示， $s=0$ 時代表起點 P_b ， $s=\|P_e - P_b\|$ 時則代表終點 P_e 。

$$P(s) = P_b + \frac{s}{\|P_e - P_b\|} (P_e - P_b) \quad (19)$$

定義圓路徑時，需給定垂直於圓平面之圓心軸單位向量 Γ ，圓心的位置向量 c ，以及圓的起點的位置向量 P_b ，圓半徑為 $\rho = \|P_b - c\|$ 。在圓上定義一新坐標系統 C ，其原點與圓心重合，其 x 軸由圓心指向起點 P_b ， z 軸沿著圓心軸 Γ ， y 軸則由右手定則所決定，此時圓上各點在坐標系統 C 可以容

易地以參數 s 表示，如式(20)所示。圖上的點在基座坐標的參數表示法可藉由坐標轉換得到，如式(21)所示，其中 ${}^B\mathbf{R}_C$ 為坐標C相對於基座坐標B的旋轉矩陣，由坐標C的 x, y, z 軸的單位向量所組成[15]。

$${}^C\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} \rho \cos(s/\rho) \\ \rho \sin(s/\rho) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{P}(s) = \mathbf{c} + {}^B\mathbf{R}_C {}^C\mathbf{P}(s) \quad (21)$$

平台的運動除了基本的直線路徑或圓弧路徑或兩者的複合路徑外，常常需要通過有限個已知的特定點，為了能夠平滑的通過各點，此部分研究以三次曲線段將各點連接，首先將三次曲線段以 u 為參數來表示如式(22)所示，其中 $\mathbf{P}(u) = [x(u) \ y(u) \ z(u)]$ 為三次曲線段上任一點的位置向量，四個係數向量 \mathbf{C}_i ($i=1,2,3,4$) 必須要由四個邊界條件來求得， u_1 和 u_2 為三次曲線段兩端點的參數值， u_1 和 u_2 的選擇會影響曲線的平滑度，為了簡化計算並且維持曲線平滑度，令 u_1 為0， u_2 為 $\|\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1\|$ 。

$$\mathbf{P}(u) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{C}_i u^{i-1} \quad u_1 \leq u \leq u_2 \quad (22)$$

可推得第 k 個曲線段的各項係數如式(23)所示，其中 \mathbf{C}_{1k} 代表第 k 個曲線段的 \mathbf{C}_1 係數

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1k} \\ \mathbf{C}_{2k} \\ \mathbf{C}_{3k} \\ \mathbf{C}_{4k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{u_{k+1}^2} & -\frac{2}{u_{k+1}} & \frac{3}{u_{k+1}^2} & -\frac{1}{u_{k+1}} \\ \frac{2}{u_{k+1}^3} & \frac{1}{u_{k+1}^2} & -\frac{2}{u_{k+1}^3} & \frac{1}{u_{k+1}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_k \\ \mathbf{P}'_k \\ \mathbf{P}_{k+1} \\ \mathbf{P}'_{k+1} \end{bmatrix} \quad (23)$$

若將三次曲線段以邊界條件來表示，可推得第 k 個三次曲線段上的各點成為以 λ 為參數之函數，即 $\mathbf{P}_k(\lambda) = [x(\lambda) \ y(\lambda) \ z(\lambda)]$ ，如式(24)所示， λ 代表權重介於0與1之間，較參數 u 更能夠直觀地了解各點於三次曲線段上所在之位置。

$$\mathbf{P}_k(\lambda) = [F_{1k}(\lambda) \ F_{2k}(\lambda) \ F_{3k}(\lambda) \ F_{4k}(\lambda)] \begin{bmatrix} \mathbf{P}_k \\ \mathbf{P}'_k \\ \mathbf{P}_{k+1} \\ \mathbf{P}'_{k+1} \end{bmatrix} \quad (24)$$

上式中

$$\lambda = \frac{u}{u_{k+1}}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$F_{1k}(\lambda) = 2\lambda^3 - 3\lambda^2 + 1$$

$$F_{2k}(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1)u_{k+1}$$

$$F_{3k}(\lambda) = -2\lambda^3 + 3\lambda^2$$

$$F_{4k}(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - \lambda)u_{k+1}$$

為了保證在各接點處之二次微分值連續，邊界條件會有所限制，由此限制可推得接點處的切線向量必須符合式(25)之關係。所以當給定端點之切線向量後便可求得所有接點切線向量，進而求得所有點。接下來將 $\mathbf{P}(\lambda)$ 改以路徑長為參數表示，由於 $\mathbf{P}_k(\lambda)$ 為三次多項函數，所以其一次微分於區間 $[0,1]$ 為連續，第 k 個三次曲線段的曲線長 $s_k(\lambda)$ 可由式(26)求得，由式(26)可知路徑長 s 與 λ 之關係為非線性方程式，當已知 s 時，需藉由數值方法(如牛頓法)求解對應之 λ 值後，再代入式(24)得到平台所在之位置向量，如此可將路徑長 s 對應至參數 λ 。

$$\begin{aligned} & u_{k+2}\mathbf{P}'_k + 2(u_{k+1} + u_{k+2})\mathbf{P}'_{k+1} + u_{k+1}\mathbf{P}'_{k+2} \\ &= \frac{3}{u_{k+1}u_{k+2}} [u_{k+1}^2(\mathbf{P}_{k+2} - \mathbf{P}_{k+1}) + u_{k+2}^2(\mathbf{P}_{k+1} - \mathbf{P}_k)] \quad (25) \\ & 1 \leq k \leq n-2 \end{aligned}$$

$$s_k(\lambda) = \int_0^\lambda \sqrt{(x'(\xi))^2 + (y'(\xi))^2 + (z'(\xi))^2} d\xi \quad (26)$$

欲得各路徑上某點 \mathbf{P} 之速度和加速度時，可將各路徑函數 $\mathbf{P}(s)$ 對時間做一次微分和二次微分得到。

接著規劃路徑長隨時間的變化，即平台特定點之線速度規劃，一般平台的運動通常在起點和終點是靜止的，而且希望能以較短時間運動，所以需要由靜止加速至最高速度，維持最高速度一段時間，再經過減速達到靜止，在符合前述的要求下，最常被使用到的是梯形曲線，但有速度變化不平滑的缺點，因此此部分研究提出一修正梯形曲線，在與梯形曲線相同的輸入條件下，改善梯形曲線不平滑的缺點。利用路徑長為擺線曲線(cycloid curve)時，其加速度曲線為一連續函數的特性，將梯形速度曲線作一修正，如圖2所示，當給定和梯形速度曲線相同的初始條件：加速時間 $t_a - t_i$ 、等速度 v_d 和行進的路徑長 $s_f - s_i$ 時，可以得到修正梯形速度曲線所需要的各項

參數值，如式(27)所示，其中 R, φ_a, φ_d 為擺線曲線所必須使用到的參數。

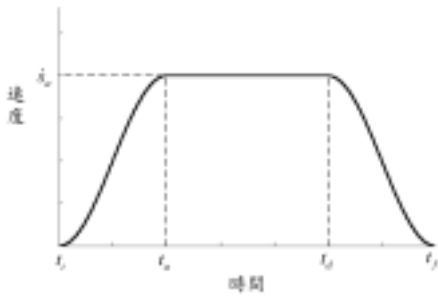


圖2 修正梯形速度曲線

$$t_d = \frac{s_f}{\dot{\phi}_a} + t_i, \quad t_f = t_d + t_a - t_i, \quad R = \frac{t_a - t_i}{2\pi} \dot{\phi}_a^2$$

$$\varphi_a = \frac{\pi}{t_a - t_i} (t - t_i), \quad \varphi_d = \frac{\pi}{t_a - t_i} (t - 2t_d + t_f) \quad (27)$$

$$\dot{\phi}_a = \dot{\phi}_d = \frac{\pi}{t_a - t_i}, \quad s_a = s_i + \frac{t_a - t_i}{2} \dot{\phi}_a^2$$

於是可以得到修正梯形速度曲線的路徑長對時間的函數、速度函數以及加速度的函數，如式(28)、式(29)和式(30)所示。

$$s(t) = \begin{cases} s_i + R(\varphi_a - \sin \varphi_a) & t_i \leq t \leq t_a \\ s_a + \dot{\phi}_a(t - t_a) & t_a < t \leq t_d \\ s_i + \dot{\phi}_a(t_d - t_a) + R(\varphi_d - \sin \varphi_d) & t_d < t \leq t_f \end{cases} \quad (28)$$

$$\dot{\phi}(t) = \begin{cases} R(1 - \cos \varphi_a) \dot{\phi}_a & t_i \leq t \leq t_a \\ \dot{\phi}_a & t_a < t \leq t_d \\ R(1 - \cos \varphi_d) \dot{\phi}_a & t_d < t \leq t_f \end{cases} \quad (29)$$

$$\ddot{\phi}(t) = \begin{cases} R(\sin \varphi_a) \dot{\phi}_a^2 & t_i \leq t \leq t_a \\ 0 & t_a < t \leq t_d \\ R(\sin \varphi_d) \dot{\phi}_a^2 & t_d < t \leq t_f \end{cases} \quad (30)$$

平台運動時除了位置的改變外，還會有姿態的改變，平台姿態的變換即是平台坐標系統相對於基座坐標原點發生轉動，平台姿態由對基座三個坐標軸的方位角 $\Phi = [\psi \ \theta \ \phi]^T$ 所描述，藉由規劃 $\Phi(t)$ 的軌跡即可對平台姿態作規劃，可利用前述位置軌跡規劃之方法進行規劃。平台角速度即是 $\Phi(t)$ 對時間的微分，如式(31)所示。

$$\Omega_{p_0} = [\omega_{p_{0x}} \ \omega_{p_{0y}} \ \omega_{p_{0z}}]^T = \begin{bmatrix} \frac{d\psi}{dt} & \frac{d\theta}{dt} & \frac{d\phi}{dt} \end{bmatrix}^T \quad (31)$$

得到平台位置軌跡和姿態軌跡後，即完成對於平台運動軌跡的完整描述，這些資訊是在進行腿驅動平台軌跡規劃時所必須使用到的，不完整的平台運動軌跡描述，無法得到正確的各腿運動軌跡。

4 軌跡規劃策略

根據腿驅動平台位置控制和速度控制方程式，以及平台極限速度和可工作點的限制，配合平台運動軌跡之產生，進行腿驅動平台之軌跡規劃。以下將對腿驅動平台軌跡規劃之流程作詳細說明。

為了描述平台的運動，通常會指定一特定點，把平台運動簡化為該特定點的運動，此特定點常是執行任務的點，首先假設平台特定點的位置路徑是任務的主要要求，平台姿態則無要求，平台坐標原點設定於平台特定點，基座坐標原點設定於某一腿於基座之接點，基座坐標 x 軸平行於基座坐標原點與鄰近一基座接點的連線，當平台坐標 x 軸對於基座坐標各軸之方位角皆為 0 時，稱平台姿態沒有改變。接著是平台特定點運動路徑的產生，在此時平台沒有改變姿態，將路徑以路徑長為參數表示，得到位置路徑後，檢驗是否有奇異點存在於路徑上，即檢查 Jacobian 矩陣是否失去秩數，若有奇異點存在則需重新設定各接點位置，如果沒有則進行可工作點檢查，檢驗轉置 Jacobian 矩陣的零空間中各元素是否皆大於零，路徑若通過不可工作點，同樣必須修正接點位置（調整接點位置即是改變基座與平台的幾何形狀及尺寸），使得路徑上皆無不可工作點。符合奇異點與可工作點的檢查之後，接下來進行平台極限速度分析，了解平台於該運動路徑上所能到達的極限速度，做為規劃位置速度曲線之參考，以梯形速度曲線為例即是決定其等速度值的參考。在決定位置速度曲線之後即完成對位置軌跡的規劃。若平台在軌跡上有姿態的要求，則必須進行平台姿態軌跡規劃，首先是姿態路徑的產生，配合位置路徑，檢查路徑上是否有奇異點或不可工作點，若有則需產生一新姿態路徑，接著在已知線速度與平台姿態下，根據平台極速分析，求得在此姿態路徑與位置軌跡下平台的極限角速度，在此角速度的限制之下，規劃姿態速度曲線。得到位置軌跡及姿態軌跡後，即完成對平台運動的描述。此時已知平台位置姿態，藉由逆向運動學可得各腿腿長隨時間變化的曲線；已知平台線速度與角速度，透過 Jacobian 矩陣可得各腿的速度曲線，這兩個

曲線即是控制平台運動的參考命令，根據這些資料來驅動各腿之馬達。軌跡規劃的流程圖如圖3所示。

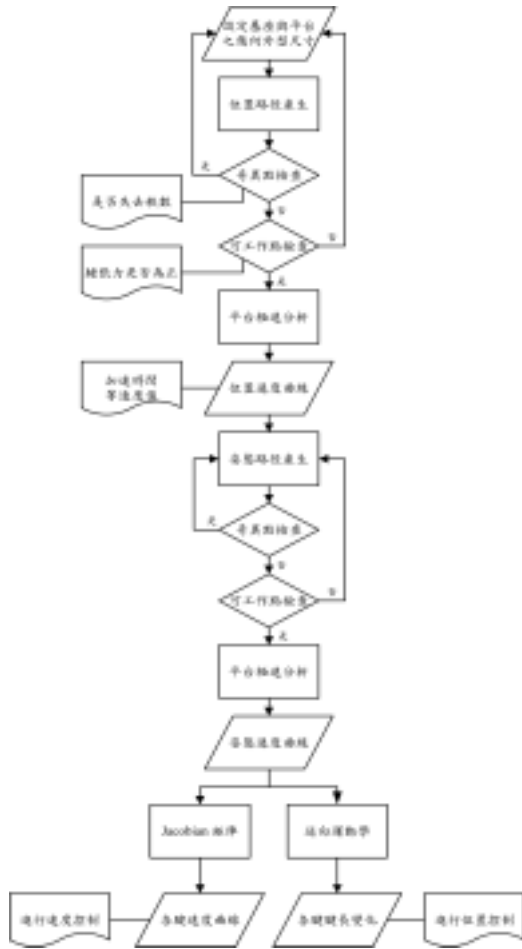


圖3 軌跡規劃策略流程圖

5 軌跡規劃之最佳化

腿驅動平台在平面擁有3個自由度，在空間中有6個自由度，當平台沿著特定位置軌跡運動時，可以利用一個方位角的變化，對於平台運動軌跡進行最佳化，使得各腿有較佳的表現，如降低各腿速度值等。以平面腿驅動平台為例，在給定平台的位置軌跡下，藉由平台對z軸旋轉自由度的變化所求得之最佳平台角度軌跡，使得各腿速度平方和最小，也就是平台在相同的路徑與線速度下，藉由改變平台的姿態，使腿長隨時間變化的曲線更為平滑，降低各腿速度值，達到減少馬達轉動動能的目的。

5-1. 設計變數與目標函數

此部分研究所討論的最佳化問題為：在給定平台的位置軌跡和起點終點姿態之

下，利用平台一個方位角的變化，求得最佳平台角度軌跡，使各腿速度平方和最小。由於各腿速度是由平台位置軌跡和姿態軌跡所決定，姿態軌跡目前還未知，為了得到姿態軌跡，此部分研究採用的方法為：在已知的平台位置軌跡的起點與終點之間等分成 $m+1$ 段，得到 m 個節點 P_j ($j=1,2,K,m$)，平台於這 $m+2$ 個點 (m 個節點、起點 P_0 和終點 P_{m+1}) 的方位角配合該點的時間敘述，以三次曲線段連接之後可以得到連續的角度曲線和角速度曲線即平台的姿態軌跡。在已知位置軌跡下，由於腿速度 V_{L_i} 為平台方位角 ϕ 和角速度 $\dot{\phi}$ 的函數，不同的方位角會得到不同的姿態軌跡，配合位置軌跡，可得不同的腿速度曲線，因此設計變數就是平台於各節點的方位角 ϕ_j ，目標函數設定為平台於各相鄰兩節點之中間點的腿速度平方和，對於 m 個節點則會有 $m+1$ 個中間點，假設腿驅動平台有 n 條腿，平台於第 k 個中間點時第 i 條腿速度以 $V_{L_i(k)}$ 表示 ($k=1,2,K,m+1$)，目標函數可寫成為式(32)。利用最佳化方法尋找出平台在這有限個節點之方位角，使得目標函數有最小值。

$$f(\Phi) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m+1} (V_{L_i(k)})^2, \quad \Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_m]^T \quad (32)$$

由於腿張力須大於零的限制，設計變數 ϕ_j 亦受到限制， $\phi_{j\min}$ 和 $\phi_{j\max}$ 為第 j 節點旋轉角度的最小值和最大值，是由可工作點定義所決定，即為設計變數 ϕ_j 的限制邊界，發生在無法維持轉置 Jacobian 矩陣的零空間中所有元素皆大於零的時候。將此最佳化問題以數學模型表示，如式(33)所示，為 m 個變數受限制之最佳化問題。利用 MATLAB 提供的函式 `fmincon` 求解，此函式是用來求解受限制非線性多變數函數之最小值，使用的是連續二次規劃法 (Sequential Quadratic Programming (SQP) method)。

$$\begin{aligned} & \underset{\Phi \in \mathbb{R}^m}{\text{minimize}} \quad f(\Phi) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m+1} (V_{L_i(k)})^2 \\ & \text{where,} \quad \Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_m]^T \\ & \text{subject to:} \\ & g_k(\Phi) = \phi_{j\min} - \phi_j \leq 0 \quad \text{for } j=1,2,K,m \text{ and } k=j \\ & g_k(\Phi) = \phi_j - \phi_{j\max} \leq 0 \quad \text{for } j=1,2,K,m \text{ and } k=j+m \end{aligned} \quad (33)$$

5-2. 最佳化進行步驟

由於是以三次曲線段將各節點角度連接，當節點的最佳角度值靠近限制邊界或是在限制邊界上時，連接兩相鄰節點的三次曲線段會有超出非節點路徑點的限制邊界之危險，為了使最佳角度軌跡皆能在整條路徑的限制邊界之內，因此須調整超出邊界附近之節點邊界值，每次降低1%，再重新進行最佳化，重複進行後，直到最佳角度軌跡在邊界之內為止。為了使角度最佳化能自動地進行，於是將調整邊界加入最佳化步驟之中，使之能夠自動地迴避不可行的解。

最佳角度軌跡進行步驟為：

1. 給定平台位置軌跡和平台於起點與終點姿態
2. 在軌跡起點與終點間等分 $m + 1$ 段得到 m 個節點 P_j
3. 計算 m 個節點之可旋轉角度邊界
4. 設定 m 個節點最佳化搜尋之起始點
5. 由最佳化方法得到平台最佳角度軌跡
6. 檢查最佳角度軌跡是否超出邊界，若是則降低超出邊界附近之節點邊界值1%，重複步驟5，若否即為所求。

最佳角度軌跡進行流程如圖5-1所示。



圖4 最佳角度軌跡進行步驟流程圖

6 數值模擬結果

以平面四實體腿腿驅動平台為例，進行三次曲線之軌跡規劃以及直線軌跡規劃之

最佳化的實例說明，其線型態如圖5所示，基座尺寸為 10×10 平方單位，平台尺寸為 $\sqrt{3} \times 1$ 平方單位，基座坐標原點位於 B_2 ，平台坐標原點則位於平台的形心 P_0 。

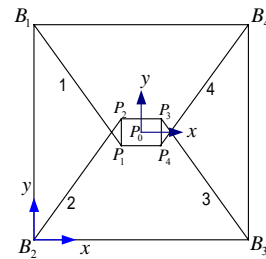


圖5 平面四腿腿驅動平台線型態與坐標示意圖

6-1. 固定姿態過四點三次曲線軌跡

設定平台必須通過的特定點為：起點 $P_b(1,5)$ 、中間點 $(3,7)$ 和 $(6,4)$ 以及終點 $P_e(8,5)$ ，起點與終點的切線向量均為 $(1,1)$ ，以三次曲線段將此四點連接而成的路徑如圖6所示，平台姿態於整段三次曲線路徑皆維持0度。由平台極速分析可得三次曲線路徑上的極限速度，以路徑長 s 為橫坐標作圖，如圖7。

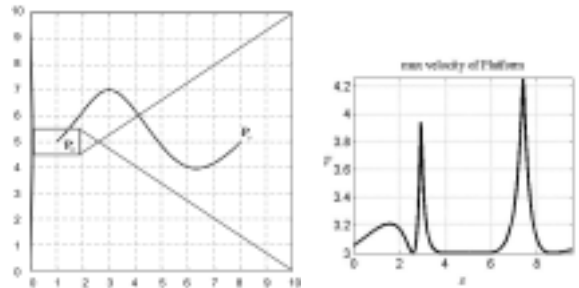


圖6 三次曲線路徑 圖7 平台極限速度

取其最小值為3單位/單位時間，以此速度為修正梯形速度曲線中等速度段的速度值，設定加速時間為2單位時間，根據速度曲線計算得到完成此三次曲線軌跡花費總時間為5.18單位時間，平台速度如圖8所示。

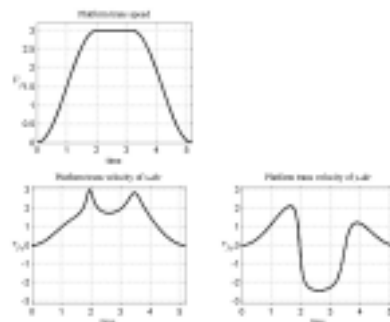


圖8 三次曲線軌跡平台速度與 x, y 方向速度曲線

根據逆向運動學及Jacobian矩陣可得三次曲線軌跡運動對應之各腿長度及速度，如圖9和圖10。由各腿速度可得各腿加速度和急跳度，如圖11所示。

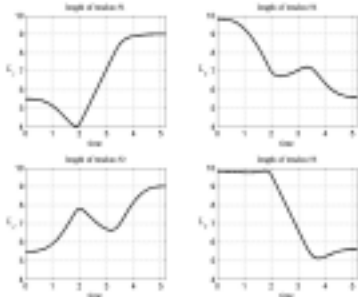


圖9 三次曲線軌跡對應各腿長度

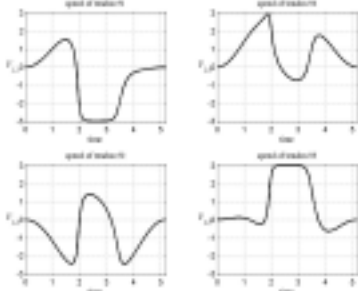


圖10 三次曲線軌跡對應各腿速度

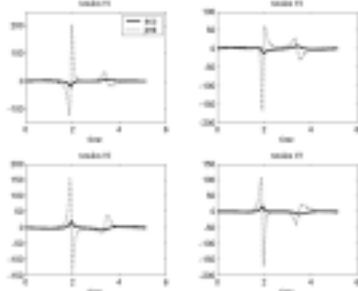


圖11 三次曲線軌跡對應各腿加速度與急跳度

由圖9和圖10可得在所規劃的三次曲線軌跡下各腿的表現，以作為控制指令之參考值。由圖10知，各腿速度都未超過所設定極限速度3單位/單位時間。由圖11可知各腿加速度為連續變化，於起點和終點加速度值皆為0，在時間為2的附近，急跳度有較大的變化，此時平台運動至中間點(3,7)，表示軌跡在此處有較高的曲度，當平台運動接近點(6,4)時也有相同的情況發生，但急跳度皆為有限值。

6-2. 直線軌跡之最佳化

設定直線路徑的起點為(5,5)，終點為(9,8)，路徑長為5單位，在平台旋轉角度為0度時進行奇異點和可工作點的檢查，皆無奇異點及不可工作點存在。以1單位/單位時間等速運動，需花費的時間為5單位時

間。設定平台於路徑的起點及終點的旋轉角度皆為0度，將路徑10等份得到9個節點，進行軌跡規劃之最佳化。接下來尋找直線路徑上各點的可旋轉角度正邊界和負邊界，正邊界由平台0度開始每次增加0.1度搜尋，負邊界則由0度開始每次減少0.1度搜尋，根據前述之最佳化步驟，可得到直線軌跡之最佳角度軌跡，如圖12所示，圖中實線部分為可旋轉角度邊界，虛線部分則為最佳角度軌跡。於個人電腦(CPU為800MHz)執行最佳化運算的時間為155.55秒。對應之各腿長度與各腿速度隨時間變化曲線，如圖12、13、14所示，其中實線表示平台旋轉角度皆保持為0度的情形，虛線則表平台以最佳角度軌跡運動的情形。

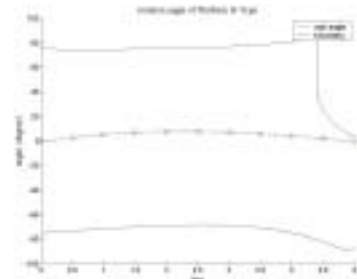


圖12 直線軌跡最佳角度軌跡

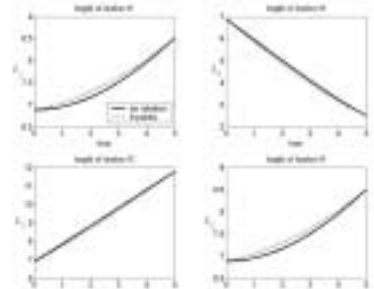


圖13 直線軌跡之各腿腿長曲線

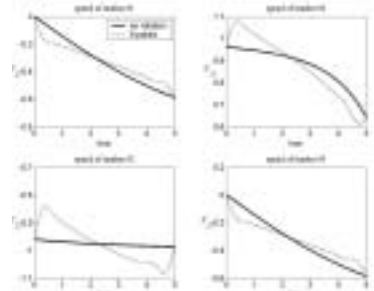


圖14 直線軌跡之各腿速度曲線

由圖12可知，最佳角度軌跡皆可位於旋轉角度邊界之內；由圖13和圖14知，第1和第3腿腿長變得更接近直線，即腿速率趨於定值，同時減少腿長變化量，為了更具體將最佳化之結果量化，將平台於整條直線軌跡未旋轉時的在取樣時間各腿速度平

方和，與最佳軌跡曲線的各腿速度平方和進行比較，計算結果各為1000.9357與993.5280，減少0.74%。

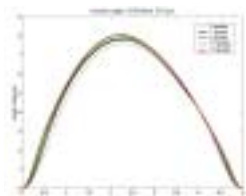


圖15 直線軌跡不同節點數最佳角度軌跡

接下來就不同的節點數的最佳化結果作一探討，取節點數為5, 7, 9, 11, 13進行直線軌跡最佳化，所得之最佳角度軌跡如圖15所示，不同節點數所得到的最佳角度軌跡大致相同。最佳化花費的時間，以及腿速度平方和較平台未旋轉時減少的百分比，如表1所示，當節點數增加時，對於腿速度平方和減少百分比也隨之些微增加，但計算時間卻大幅增加。

表5-7 直線軌跡B-Type不同節點數各項數據

節點數	最佳化後初始次數	花費的時間(秒)	最佳角度軌跡腿速度平方和	減少百分比(%)
5	1	65.03	984.0473	0.685
7	1	702.82	983.7124	0.722
9	1	158.55	983.5358	0.740
11	1	244.31	983.3878	0.752
13	1	292.37	983.3874	0.752

7 小結

此部分研究對於平台運動時所受到的限制，和平台運動軌跡的描述做了完整的討論，發展出腿驅動平台軌跡規劃策略，並進一步對於軌跡規劃進行最佳化，以腿速度平方和作為目標函數，利用平台方位角的變化對運動軌跡進行最佳化。結果歸納如下：

1. 由數值模擬結果可知，在所提出腿驅動平台軌跡規劃策略之下，可得符合速度限制並且保證張力為正的各腿運動軌跡。

2. 以三次曲線段連接離散點，可得到一平滑曲線，並且利用此部分研究提出之方法可成功對此三次曲線路徑進行速度規劃。

3. 以修正梯形曲線作為平台速度曲線規劃，可得各腿加速度皆為連續變化，於起點和終點加速度值皆為0，各腿急跳度都不會發生無窮大的情況。

4. 利用平台方位角的變化對平台運動軌跡進行最佳化，可以有效地使得腿速度平方和減小。此外節點數的增加對於最佳化之結果並無顯著的影響。

8 參考文獻

1. Satoshi Tadokoro, "Control of Parallel Mechanisms," *Advanced Robotics*, Vol.8, No.6, pp.559-571, 1994.
2. Kawamura, S. and Ito K., "A new type of measure robot for teleoperation using a radial wire drive system," *Proceedings of the 1993 IEIIEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Vol.1, pp. 55-60, 1993.
3. Ming, A. and Higuchi, T., "Study on multiple degree-of-freedom positioning mechanism using wires (Part 2)," *Int. J. Japan Soc. Prec. Eng.*, Vol. 28, No. 3, 1994.
4. 邱志強，腿驅動平台機構之運動規劃，台灣大學機械工程學研究所碩士論文，台北市，2000。
5. Nguyen, C.C., Antrazi, S.S., Zhou, Z.-L., and Campbell, C.E., Jr., "Experiment study of motion control and trajectory planning for a stewart platform robot manipulator," *Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 2, pp. 1873-1878, 1991.
6. Huynh, P. and Arai, T., "Maximum velocity analysis of parallel manipulators," *Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 4, pp. 3268-3273, 1997.
7. Huynh, P., Arai, T., Koyachi, N., and Sendai, T., "Optimal velocity based control of a parallel manipulator with fixed linear actuators," *Proceedings of the 1997 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Vol. 2, pp. 1125-1130, 1997.
8. David F. Rogers and J. Alan Adams, *Mathematical elements for computer graphics*, New York: McGraw-Hill, 1990.
9. Albus, J.S., Bostelman, R.V., and Dagalakis, N., "The NIST ROBOCRANE," *Journal of Robotic Systems*, Vol. 10, No. 5, pp. 709-724, 1993.

10. Kawamura, S., Choe, W., Tanaka, S., and Pandian, S.R., "Development of an ultrahigh speed robot FALCON using wire driven system," IEEE International Conference on Robotics and Automation, Vol. 1, pp. 215-220, 1995.
11. Bostelman, R.V. and Albus, J.S., "Stability of an underwater work platform suspended from an unstable reference," Proceedings of the Oceans '93 Conference, Victoria, British Columbia, Canada, October 20, 1993.
12. Tsai, L.W., Robot Analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators, John Wiley and Sons, Inc., 1999.
13. 楊文珍, 腿驅動平台機構之線型態設計, 台灣大學機械工程學研究所碩士論文, 台北市, 2001。
14. Nakamura, Y., Advanced Robotics-Redundancy and Optimization, Addison-Wesley Publishing Company, 1991.
15. Sciavicco L. and Siciliano B., Modeling and Control of Robot Manipulators, New York: McGraw-Hill Companies, Inc., 1996.

