

教育部教學實踐研究計畫成果報告

Project Report for MOE Teaching Practice Research Program

計畫編號/Project Number：PMS1090149

學門專案分類/Division：數理

執行期間/Funding Period：2020-08-01-2021-07-31 展延至 2021-01-31

微積分模組化對數學學習的影響：以經濟系微積分課程為例

(配合課程名稱: 微積分 1，微積分 2，微積分 3，微積分 4-在經濟商管的應用)

計畫主持人(Principal Investigator)：陳榮凱

共同主持人(Co-Principal Investigator)：蔡雅如

執行機構及系所(Institution/Department/Program)：國立臺灣大學數學系

成果報告公開日期：

立即公開 延後公開(統一於 2023 年 9 月 30 日公開)

繳交報告日期(Report Submission Date)：2022/03/16

## 微積分模組化對數學學習的影響：以經濟系微積分課程為例

### 一. 研究動機與目的

在教學現場我們發現不少學生因為微積分沒修過而延畢。另外，台大有全年的「微積分甲」與「微積分乙」課程。雖然微甲和微乙有許多重疊的內容，但是必修「微積分甲」的科系不採認「微積分乙」；導致已修完微乙的學生若轉至必修微甲的系，必須重修整年的微甲；浪費教育資源。這都是微積分修課制度有待調整的地方。

再者，微積分課程常被質疑「過於理論、與生活或其他專業脫節」。面對各科系的學生，唯有加強微積分在各領域的應用，才能裝備學生未來在專業課程有更好的學習。我也相信，透過提供與學生切身相關的實例，能提升學習動機和課堂參與度。因此微積分課程需要與其他專業密切連結，以改善教學。

基於以上種種原因，本人在擔任台大數學系系主任時規劃把全年的「微積分甲」分為「微積分 1,2,3,4」四個為期半學期的模組課程。前三個模組講授各科系普遍需要的基本內容：「微積分 1」涵蓋單變函數的微分與其應用；「微積分 2」討論單變函數的積分與其應用；「微積分 3」談多變函數的微分與積分。「微積分 4」則靈活規劃；對理工學院教傳統的向量微積分(vector Calculus)；對其他學院則客製化探討微積分應用於各領域的特定主題。<sup>1</sup>

「微積分模組課程」在較小的範圍內檢測學生的學習成效，可減輕學生重修的負擔，

---

<sup>1</sup> 對於其他學院的「微積分 4」課名會加註應用的範疇，和理工學院的「微積分 4」區別。

也提供更彈性的修課選擇。而且客製化「微積分4」開啟了微積分與其他專業結合的機會。我們預期這個設計將在制度上與內容上一齊革新，改進微積分課程。

在籌備「微積分模組課程」時，數學系與許多系進行溝通，特別收到經濟系對於微積分課程的具體需求。所以在107學年小規模試辦模組化課程時，經濟系班成為加強微積分與專業結合的重要先例，經濟系王道一教授更與系上蔡雅如老師一起規劃、共授新課程「微積分4-在經濟商管的應用」。108學年管理學院加入「微積分模組課程」。109學年傳統理工學院的微積分課程全面模組化。110學年「微積分1,2,3」取代「微積分乙」；轉到理工學院的學生只需補上「微積分4」即可滿足修課要求。

從107學年數學系試辦「微積分模組課程」以來，台大教學發展中心也很關心這個基礎課程的改革。108學年教發中心與蔡雅如老師合作，在經濟系班與微乙班收集資料小範圍分析「微積分模組課程」的成效。109學年我申請本教學實踐研究計畫，希望能對「微積分課程模組化」這個制度與新課程「微積分4-在經濟商管的應用」進行系統性的評估，以確認「加強微積分與經濟學的應用」是否提升學生的學習動機，幫助學生把數學應用於他的專業，並釐清此客製化課程設計對於學生「學習數學」的甚麼面向帶來改變。另外，本研究計畫期待將經驗分享給其他老師。數學系更期待未來能以學院為群組進行客製化設計，繼續深化微積分與各個專業的關聯。

## 二、文獻探討(Literature Review)

### 1. 學習概念

學習概念(Conceptions of learning)是指學習者對於自己的學習經驗和偏好之學習方法

所持的個人想法(Liang & Tsai, 2010)。在教學上，為了能達到最佳教學成效，必須先對於學生怎麼看待或考慮什麼是學習有所瞭解(Benson & Lor, 1999)。

有關學習概念的最早研究來自於 Salijo (1979)，自此以後許多研究皆以此為基礎，探討不同學習者所持之學習概念(Krull, Koni, & Oras, 2013)。由於學生的學習概念會因為學習情境的不同而有所改變，許多學者著重在討論學生面對不同學科(管理、護理或物理)或學習情境(混成式學習、遊戲式學習或課堂討論)時所持之學習概念 (Ellis & Calvo, 2006; Olsson, 2011; Sung, Hwang, Lin, & Hong, 2017; Suprpto, Chang, & Ku, 2017)。Tsai (2004)在論文中將高中生學習科學時的學習概念分成了七項「科學學習概念」：「記憶」、「測驗」、「計算與練習」、「增進知識」、「理解」、「應用」，與「看到新觀點」。他並進一步把這七個概念從「低階學習概念」到「高階學習概念」分為七個層次。「記憶」、「測驗」、「計算與練習」屬於重述型學習策略，反映的是「低階學習概念」；而「增進知識」、「理解」、「應用」，與「看到新觀點」則代表創造型學習策略，所以是「高階學習概念」。Purdie 和 Hattie (2002)研究指出，高階學習概念通常與學生之學習表現呈正相關。

本計畫把 Tsai (2004)的研究應用於描述不同的「數學學習概念」，並參考林家儀(2016)的數學學習研究，把認為學數學主要是「背誦定義、定理、公式」、「應付考試」與「學習計算、熟練公式運算」分類為低階學習概念；高階學習概念則認為，學習數學包含「獲得新知識」、著重「理解內容」、期待學習數學能「建立邏輯性的思考模式、培養新觀點」、並且目的是要把數學「應用在生活上」。

## 2. 學習動機與方法

學習動機是指引起學生學習活動、維持學習活動，並導致該學習活動趨向教師所設定目標的內在心理歷程。若學習動機受外在因素影響而形成的，稱為外在(淺層)動機，像是「為了得到好成績」、「為了獲得師長父母的肯定」，或「為了找到好工作」；若學習動機是因「因為喜歡學習」、「因對學習有興趣」等內在學習需求而產生的，則稱之為內在(深層)動機(張春興，1994)。

文獻顯示，讓學生感受到課程內容、作業是對他個人有意義的，且與真實世界結合，即所謂「學術關聯性」(Academic relevancy)，對於學生的「學習動機」非常重要(Assor, Kaplan, & Roth, 2002)。Means、Jonassen 和 Dwyer (1997) 甚至認為，學習動機主要是被所學內容的關聯性(relevancy)所啟發的。Miller、DeBacker 和 Greene (1999) 的研究指出，當學生認知到課堂任務有助於達成未來重要目標(perceived instrumentality)時，學習動機將被增強。

學習方法(Approaches to learning) 是指學生處理學習任務採取的策略。學者們大致把學習科學的方法分類為表面和深入兩類(Lin & Tsai, 2012)。「表面的學習方法」是為了準備考試而抓重點、反覆練習，若覺得對考試已有充足的預備會停止學習。「深入的學習方法」以理解內容為主，並嘗試統整各個主題。

先前研究指出，學生的學習概念和學習方法間有所關連(Lin & Tsai, 2009)，林家儀(2016)的研究就指出學生的「數學學習概念」與「數學學習方法」有顯著的關係。另一方面，學生的學習方法會受學習動機而影響，若學生發現學習任務對他個人有意義

(學術關聯性)，他傾向採取深入的學習方法，而深入的學習法又常被認為與較佳的學習表現有關(Chin & Brown, 2000)。因此，探討學生對於特定學科或主題所持之學習概念、學習動機、和學習方法、學術關聯性，以及瞭解其間關係是很重要的。

### 3. 學習參與度

學習參與度 (Academic engagement) 泛指在各種具有目標導向的學習行為、觀念、或情緒狀態(Fredricks, Blumenfeld, & Paris, 2004)。花時間做作業、出席上課、作筆記、參與課堂討論、提問、與老師同學互動等學習活動投入的程度，都可以被認為是學習參與度的表現(Wu, 2019)。雖然對於學習參與度的定義在各研究可能有所不同，但研究者一般認為，學習參與度與學習動機代表了不一樣的面向。當學習動機被認為是學生在學習過程中的內在心理歷程，學習參與度就代表了其表現在外的學習活動體現(Skinner, Kindermann, Connell, & Wellborn, 2009)。

學生的學習參與度表現是多層次、多面向的(Wang & Degol, 2014)。第一層通常代表了學生對學習社群的投入程度，第二層著重在學生與學習內容或授課教師的互動，第三層則是指學生對課程內學習活動的參與表現(Skinner & Pitzer, 2012)。在面向上，學習參與度可以分為行為面(主動參與學習活動)和情緒面(對學習經驗的反饋)(Finn, 1989)；另一個常見的面向是認知面，代表的是學生的自我導向學習和面對挑戰的適應力(Wang, Willett, & Eccles, 2011)。當學生投入學習時，他們對學習任務的專注力會更高、面對困難時的可以堅持得更久、更容易和同儕建立支持關係、並與學校環境產生更多連結(Wang & Eccles, 2012a, 2012b)。

因此，學生的學習參與度是其學習成就的關鍵因素之一，學生在行為、情緒、和認知層面上的參與度都與學習表現呈現正相關(Appleton, Christenson, & Furlong, 2008；Stewart, 2008)。Andriessen 等學者(2006)發現，當學校作業(任務)與學生的未來目標(職業、成就)相關時，能加強「學習參與度」，有效抑制低參與的學習表現。先前研究還提出所謂的「學習參與度與學習成就的中介模型」：「學術關聯性」激發「學習動機」，而「學習動機」又提升「學習參與度」與「學習成就」(Wu, 2019；Crumpton & Gregory, 2011)。

#### 4. 學術關聯性：微積分課程與其他科目的連結

在微積分課程與其他科目的連結上，先前研究大多是探討微積分與工程方面的應用。Froyd 和 Ohland (2005)指出，早在二十世紀末就有教學者開始設計工程類跨學門的整合型課程(integrated engineering curriculum)。Texas A&M 大學是這方面的先驅，他們調整微積分的授課內容順序，使它與物理、工程、化學課在進度上相仿，以凸顯數學在其他領域的應用，幫助學生統整地學習各個學科(Barrow & Fulling, 1998)。

Ooi (2007)以工程數學為主討論大學工程領域的數學課內容，除了推廣計算軟體在數學教學上的功能，他更強調要在課程大綱設計上加強數學與其它工程科目的連結，讓工程相關的學生學習未來在職場中需要用到的數學。同樣以工程領域為主，Härterich 等人(2012)的研究則希望透過「問題導向學習法」(Problem-Based Learning)挑戰大一新生解決實際工程問題，其核心想法也是要加強微積分課程與工程應用的結合。

相較於微積分與工程的連結，較少文獻在討論微積分課程與經濟學的關聯。雖有經濟

學者(Anderson et al., 2014) 以經濟學教育的觀點指出數學能力是學生學好經濟專業的重要指標，經濟學界也普遍認為學生的數學能力很重要，但目前尚無以改善「微積分教學」為目的而做的研究。

## 5. 小結

綜合以上的文獻回顧，學者已經發現學生的內在「學習概念」與「學習動機」影響了外在的「學習方法」與「學習參與度」，進而牽動「學習成就」。所以學生的學習信念、態度與動機是教學者應該關注的議題。值得注意的是，教師並非無法改變學生的內在心理歷程。老師若讓學生體會到課程內容、作業與他的生活經驗和未來目標息息相關(學術關聯性)，將能提升學生的學習動機。

已有教學者依循以上的理念，在微積分課程中強調工程方面的應用，並且開發各種教案或課程大綱。本計畫則嘗試結合「微積分」與「經濟學」，預期會加強學術關聯性，以致於激發學生的學習動機，促進學習參與度。

## 三、研究問題(Research Question)

許多數學學習相關的論文都指出「學生的數學學習概念(理解與信念)與他的學習方法、學習表現有顯著的關係」(林家儀，2016)；一般而言，高階的學習理念帶來深入的學習方法，也促進了學習表現。因此在衡量課程「成效」的諸多維度中，本研究著重在客製化模組課程這樣的課程設計是否能影響學生的內在「學習理念與態度」甚至改進學生的「學習方法」。也希望檢驗這門課是否達到數學系與經濟系當初設計客製化課程時所制定的教學目標：增加學生的數學學習概念、動機、方法與學習參與程

度，幫助學生將微積分學習內容與經濟學相連結。另外，我們也要比較「模組化微甲課程」與「傳統微甲課程」對學生數學學習的影響，以辨識模組化制度本身對學習帶來的改變。

因為客製化模組班是為經濟系學生開設，他們原來必修微積分乙；所以我們以微乙班學生做經濟系學生的對照組。具體來說，本研究要探討的問題包括：

1. 客製化模組課程是否對學生學習數學的「概念、動機、方法」有正面影響？
2. 客製化模組班學生的「學習參與度」是否高於傳統微積分乙班的學生？
3. 客製化模組班學生是否更能將微積分「與其他科目連結」？
4. 模組化微甲課程是否對學生學習數學的「概念、動機、方法」有正面影響？
5. 模組化微甲班學生的「學習參與度」是否高於傳統微甲班的學生？

總而言之，這個研究的目的是要探討在「微積分 1, 2, 3」課程大量提供在經濟學的應用，會對以上各個層面造成什麼變化；另一方面，本計畫也要檢測「微積分 4-在經濟商管的應用」這個客製化課程又為學生帶來甚麼影響。

#### **四、研究設計與方法(Research Methodology)**

本研究第一部分旨在探討模組化微甲班(即課程教授傳統微甲內容，僅縮短課程時間，每個模組為期半學期，讓學生更容易以取得部分學分方式完成微積分修課要求)，對學生以下各學習面向有何影響。

(1) 數學學習動機

(2) 數學學習概念

(3) 數學學習方法

(4) 學習參與度

(5) 停修率

本研究第二部分旨在探討，透過在經濟系微積分客製模組化課程中增加經濟學應用之內容，是否讓經濟系修課學生：

(1) 感受到授課內容對他更有意義

(2) 增強數學學習動機

(3) 改進學生的「數學學習概念」

(4) 促使學生升級「數學學習方法」

(5) 提升學習參與度

(6) 降低停修率

### 1. 研究對象與場域

實施第一部份研究之對象與場域為 109 學年度模組化微甲班之理工學院學生。因為申請教學研究計畫之後才確認 109 學年台大微甲班級全面模組化，所以我們於 108 學年下學期第一周、第二周對傳統微甲班同學施作問卷，以做為制度模組化後的對照組。108 學年完成問卷的微甲班同學有 592 人。109 學年填寫問卷前測的微甲同學有 534 人，作答後測的有 268 人。

研究第二、三部分則為 109 學年度實施微積分模組課程，且增加經濟學應用內容的台大經濟系與管理學院班級；有 213 人參與問卷前測，199 人完成問卷後測。因為台大經濟系和管理學院學生以往也是必修微積分乙，故將微積分乙統一教學班列為「對照

組」。微乙班群有 191 人填寫問卷前測，131 人參與問卷後測。

## 2. 研究方法與工具

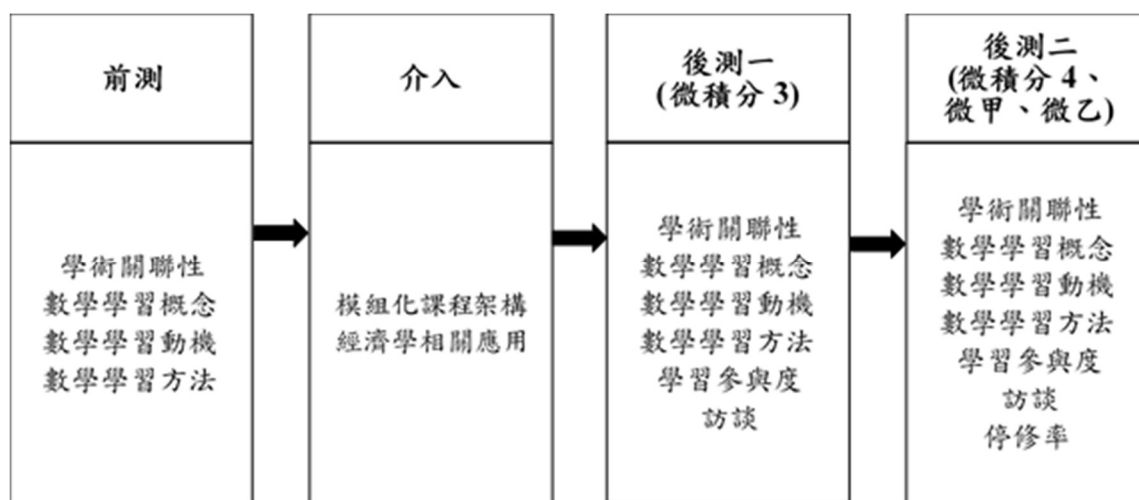
本研究將使用社會科學領域內常用的混合研究法(mixed method)來進行研究，同時或依序以量化和質化研究方法進行資料的收集與分析。並採三角校正法(Patton, 2002)來做研究方法、資料來源和資料分析的三角校正。研究方法的三角校正指的是收集不同種類的資料，本研究的資料類型將包括問卷調查結果、訪談結果、WeBWorK 作業平台學習資料等。資料來源的三角校正是指由不同資料管道、不同時間點、不同研究層面來檢驗發現的一致性，本研究將從問卷調查、訪談、WeBWorK 作業平台來收集資料，問卷也將在學期初和學期末分為前後測分別進行。資料分析的三角校正則是指由不同分析者來共同分析檢視結果，以提升研究準確性並修正研究設計，獲得客觀數據及結果。本研究主要使用的研究工具為：

- (1) **問卷調查**：問卷內容內容包含五部分，分別是改編自 Lee、Johanson 與 Tsai (2008)及林家儀(2016)的「數學學習概念問卷」。改編自 Shih、Liang、Huang、Lee 和 Lee (2017)的「數學學習動機和學習方法問卷」。由研究者自編的「對微積分與其他科目關聯性的認知」和「學習參與度」問卷題目(學習參與度只在後測時使用)。
- (2) **WeBWorK 統計資料**：WeBWorK 是線上繳交作業系統，學生輸入答案(數字、數學式)後，系統能做等值運算，立即回饋答案是否正確。學生可即時訂正錯誤、發現學習盲點，系統也能自動統計學生的作業完成度與嘗試次數。
- (3) **訪談**：針對經濟商管的學生，以半結構式訪談收集學生回饋和學習經驗等質性資料。訪談問題包括：「修課前後對數學的感受與學習方法」、「學習上是否

遇到困難，如何解決」、「對課程難易度的評價」、「對學習單的看法」、「對微積分課的總體印象」等。

- (4) **停修率統計資料**：使用課務統計資料計算模組班與傳統微積分甲班、乙班之停修比例。

### 3. 實施程序



- (1) **前測**：開學第一週，在模組化微積分甲班、經濟系客製化微積分模組班、微積分乙統一教學班施行問卷調查。
- (2) **介入**：學期中在經濟系模組班增加經濟學的應用內容，設計相關學習單讓學生進行進階的探索(細節請參考課程設計)。
- (3) **第一次後測**：下學期「微積分 3」模組課程結束時進行第一次後測。期中考後在經濟管院班為不繼續修「微積分 4-在經濟商管應用」的學生施行問卷調查，問卷中增加「學習參與度」的面向。
- (4) **第二次後測**：下學期末進行第二次後測。期末考後在模組化微積分甲班、經濟管院班、微積分乙班施行問卷調查，問卷中增加「學習參與度」的面向。
- (5) **訪談**：在暑假訪談只修完「微積分 1, 2, 3」與繼續選修「微積分 4-在經濟商管

的應用」的學生。

#### 4. 資料處理與分析

(1) 描述統計：以次數分配與百分比瞭解樣本性別、學系、模組課程參與情形；

再來透過同意百分比、平均數、標準差描述數學學習概念、數學學習動機、數學學習方法、學習參與度、與其他科目連結的集中和離散趨勢。

(2) 推論統計：獨立樣本 t 檢定：為瞭解參與模組班與否對數學學習概念、數學

學習動機、數學學習方法、學習參與度、與其他科目連結的影響。將使用獨立樣本 t 檢定檢視非客製化模組班學生、客製化模組班學生與微乙班學生在前述各面向的前測、後測、前後測分數變化上是否有顯著差異。

### 五、教學暨研究成果(Teaching and Research Outcomes)

#### 1. 教學過程與成果

以下簡述台大微積分課程模組化的進程。

107 學年數學系首度為物理系、土木系和經濟系開設「微積分模組課程」，其中物理系與土木系班僅做制度上的改變，直接將「微積分甲」拆成「微積分 1, 2, 3, 4」四個模組，由系上其他同仁負責。蔡雅如老師則與經濟系合作，將原本的「微積分乙」分為「微積分 1, 2, 3」三個模組，並開設新課程「微積分 4—在經濟商管的應用」，由經濟系王道一教授參與共授。這門新課程的主題是，多變函數在等式與不等式限制條件下求極值，並介紹 Lagrange multiplier 的意義(Shadow price)、The envelope theorem，和限制條件下的二次微分判別法。

經濟系王道一教授從「微積分 3」課程起便以觀課方式參與蔡老師的課堂教學，課後就教學內容給予建議，並補充經濟學相關應用。透過與王教授的討論，蔡老師在「微積分 1, 2, 3」設計客製化的學習單讓學生探討微積分在經濟學的應用，並在考試時增加與經濟相關的題目，引發同學的學習動機。107 學年即觀察到經濟系同學常找微積分老師討論學習單，甚至詢問經濟學原理、個體經濟學中的數學問題。第一屆模組課程，有 77 位同學選修「微積分 4-在經濟商管的應用」。

108 學年，管理學院的微積分課程都採用經濟系班這個模組。「微積分 4-在經濟商管的應用」增設為三班。工管系科管組把「微積分 4-在經濟商管的應用」列為必修，國際企業系訂「微積分 1, 2, 3, 4-在經濟商管的應用」四科皆要修，但是其中 2 學分計為一般選修學分。經濟系、工管系企管組、會計系指定微積分模組課程四科目中必修三科目。財務金融系指定「微積分 3」必修，其餘三門微積分模組課程必修二門。寒假中蔡雅如老師與另外兩位授課老師帶領助教們一起備課、證明課程中重要定理。蔡老師並以 107 年授課經驗為基礎，為「微積分 4-在經濟商管的應用」撰寫完整的線性代數預備知識講義。

因為蔡老師在「微積分 1, 2, 3」使用的學習單得到經濟系同學極佳的回饋，109 學年，所有管理學院模組班從「微積分 1, 2, 3」即開始使用相同的學習單。微積分 1 三份學習單內容分別是，Nash Equilibrium (The intermediate value theorem 的應用)，Derivatives in Economics (Marginal cost, marginal revenue and elasticity)，Optimizing cost and profit。微積分 2 三份學習單的主題是 Lorenz curves and Gini index，Surplus，Applications in Probability。微積分 3 的學習單個別為 Partial derivatives in Economics，Lagrange multiplier method in Economics，Applications in Probability (part 2)。學習單的目的是讓同學探索體會經濟學如何使用數學工具。藉著使用統一的學習單，管理學院所有微積分課程也能從微積分 1 起即增加「學術關聯性」。同時，109 學年「微積分甲上下」課程全面模組化，以「微積分 1, 2, 3, 4」取代之。

110 學年，台大「微積分乙上下」統一教學班級改為「微積分 1, 2, 3」。

在課程改革中，數學系首度與外系深度合作，客製化強調在經濟學應用的微積分課程。剛開始老師們也在摸索管理學院學生的數學程度，拿捏內容與考題的難易度。但在這三年的嘗試下，已能掌握學生屬性，用深入淺出的方式解釋複雜的最佳化問題。108 學年有 286 位學生選修「微積分 4-在經濟商管的應用」；109 學年有 288 位學生選修「微積分 4-在經濟商管的應用」。顯示新課程不只符合管理學院老師們的期待與理想，也讓學生可以接受。從管理學院各系對微積分修課規定的多元性（例如，財務金融系指定必修微積分 3；工管系對於企管組、科管組制定不同的要求...等），也可以看出模組化後，各系能更靈活的使用微積分課程，依照其需求強調不同的數學工具。

教學成果方面，我們就(1)停修率、(2)問卷結果分析、(3) WeBWorK 答對率和(4)個別訪談結果來分析。

### (1) 停修率

停修率以數學系可以看到的微積分各班修課人數粗估，公式是

$$(\text{第五週選課人數} - \text{學期末學校統計的修課人數}) / (\text{第五週選課人數})。$$

因為 108 學年只有下載到第六週人數，所以 108 學年停修率用第六週人數計算。另外，我們沒有統計到「退選」學生的人數，所以「停修率」無法完全顯示「該學年放棄微積分課程」的同學比例。

首先比較「微甲課程」制度改為模組化後停修率的變化。108 學年微甲統一教學班共 10 班。109 學年微甲模組化，加上 107 學年即已模組化的物理系班和土木系班，共 12 班。

	108 學年 (微甲上下)	109 學年 (微積分 1, 2, 3, 4)
上學期	4.24% = (1015-972)/1015	微積分 1, 2.28% = (1226-1198)/1226 微積分 2, 2.49% = (1246-1215)/1246
下學期	3.24% = (1017-984)/1017	微積分 3, 1.26% = (1269-1253)/1269 微積分 4, 1.59% = (1258-1238)/1258

雖然，109 學年上學期微積分 1, 2 的總停修人次  $((1226-1198) + (1246-1215) = 59)$  約占總修課人數的 4.7%，與 108 學年上學期的停修率相近。但是微積分 1, 微積分 2 分別的停修率 (2.28%, 2.49%) 皆低於 108 學年上學期的停修率。108、109 學年下學期也有類似的現象；微積分 3, 4 各自的停修率都小於傳統微積分下的停修率，合併起來微積分 3, 4 的總停修率約為 2.9%，很接近但略小於 108 學年下學期的停修率。由這些數據我們推測，落後的同學在傳統微甲只能放棄整學期的微積分課程。但是課程模組化後，學習成效低的學生可以選擇在某個較小範圍裡堅持到底，最後只需要停修一個模組。

因為本計畫展延至 2022 年 1 月，所以我們也觀察到 109 學年至 110 學年上學期，「微積分乙」制度上模組化後，停修率也明顯降低了。

	109 學年 (微乙上下)	110 學年 (微積分 1, 2, 3)
上學期	7.45% = $(416-385)/416$	微積分 1, 0% = $(401-401)/401$ 微積分 2, 1.25% = $(401-396)/401$
下學期	6.15% = $(358-336)/358$	微積分 3, 還未有資料

接著，我們想了解在經濟管院微積分班實施模組化後對停修率的影響。107 學年以前管理學院的微積分課程並非統一教學，所以數學系沒有這些班級的修課人數紀錄。因此我們僅將經濟管院班和屬性較像的微積分乙班比較 (在模組化以前經濟系和管理學院學生都必修微積分乙)。在以下表格，我們依然可以看出模組化課程各自的停修率遠低於傳統微乙的停修率。

	微積分乙上下	經濟管院班 微積分 1, 2, 3
108 上學期	12.15% = $(428-376)/428$	微積分 1, 2.44% = $(656-640)/656$ 微積分 2, 3.22% = $(652-631)/652$
108 下學期	3.74% = $(374-360)/374$	微積分 3, 2.27% = $(617-603)/617$
109 上學期	7.45% = $(416-385)/416$	微積分 1, 3.05% = $(689-668)/689$ 微積分 2, 4.61% = $(694-662)/694$

109 下學期	$6.15\% = (358-336)/358$	微積分 3， $2.56\% = (624-608)/624$
---------	--------------------------	---------------------------------

最後，列出「微積分 4-在經濟商管的應用」這門課的停修率。

微積分 4-在經濟商管的應用	108 學年下學期	109 學年下學期
停修率	$15.88\% = (340-286)/340$	$11.93\% = (327-288)/327$

這門課對大部分管院科系只是選修，所以停修率比其他微積分課程高很多。108 學年，本課程第一次對管理學院開放，不少同學有興趣，但是因為缺乏過去的評價，對難易度不太了解，所以停修率高達 15.88%。109 學年，學生得到學長姐的經驗分享，更清楚課程要求，授課老師也試著調整內容深度，所以停修率下降到 11.93%。未來將繼續觀察「微積分 4-在經濟商管的應用」的修課狀況，期待它成為穩定常態的課程，嘉惠更多學生。

## (2) 問卷結果分析

在 108 學年，我們確認台大微積分甲課程將在 109 學年全面模組化。為了能留下資料與模組化後的課程比較，我們於下學期 2 月最後一周至 3 月第一周在傳統微積分甲班級施作「數學學習問卷」，共回收有效問卷 592 份。

在 109 學年 9 月，我們邀請各微積分班群的學生填寫「數學學習問卷」，共收回問卷 938 份，分布在各班群的情況為：微甲 534 份，經濟管院 213 份，微乙 191 份。

109 學年下學期，微積分 3 結束後，4/16 - 5/2 邀請經濟管院班不再選修「微積分 4-在經濟商管的應用」的同學完成後測。109 學年 5 月中起，因為新冠疫情蔓延，學校取消實體上課，所以 6 月學期結束時無法請助教到各個習題班施作第二次問卷後測。我們改於 6/24-7/16 間發電子信件，邀請學生線上填答問卷。這兩次後測共回收問卷 644 份，分布在各班群的情況為：微甲 268 份，經濟管院 199 份，微乙 131 份，另有 46 份未確定班群。

109 學年前後測皆有填寫者 436 人，分布在各班群的情況為：微甲 221 份，經濟管院

123 份，微乙 92 份。

這份問卷參考問卷內容內容包含五部分，分別是

- a. 改編自 Lee、Johanson 與 Tsai (2008)及林家儀(2016)的「數學學習概念問卷」；
- b. 改編自 Shih、Liang、Huang、Lee 和 Lee (2017)的「數學學習動機和學習方法問卷」；
- c. 由研究者自編的「對微積分與其他科目關聯性的認知」和「學習參與度」問卷題目(學習參與度只在後測時使用)。

每題學生給 1-5 分，表示自己對題目敘述從「非常不同意」到「非常同意」的看法。

為了檢視模組化課程的影響，我們比較「模組化微甲班」、「經濟管院班」、「微乙班」學生的前後測問卷各題平均值。以 Two Sample t-Test 找出組間平均差異為統計上顯著( $p < 0.01$ )之題目。

在模組化微甲班，前後測平均差異達統計上顯著( $p < 0.01$ )的題目如下：

題目歸類	題目敘述	微甲(後測 - 前測)
數學學習概念： 記憶	我認為學習數學是將課本中的定義、符號、 公式與定理背起來	0.276
數學學習方法： 深層動機	當我學習數學時，我會覺得非常快樂與滿足	-0.267
數學學習方法： 深層動機	當我學習數學時，我對內容很感興趣	-0.276
數學學習方法： 淺層動機	我會擔心在數學課堂上的表現不符合老師的 期待	-0.5
數學學習方法： 淺層動機	我認真學數學，因為我相信這能幫助我在未 來找到理想的工作	-0.259
數學學習方法：	只要我覺得自己的準備足夠應付考試，我就	0.335

淺層策略	不會再多花時間去學習數學	
數學學習方法： 淺層策略	數學課程涵蓋的單元太多了，因此我不必對每單元的內容太熟悉，深入瞭解是沒有效率的	0.367
微積分與其他學科關聯性的認知	我能清楚說出微積分在其他科目的應用	0.45

在經濟管院班，前後測平均差異統計上顯著的題目如下，

題目歸類	題目敘述	經濟管院(後測 - 前測)
數學學習方法： 淺層動機	我會擔心在數學課堂上的表現不符合老師的期待	-0.602
數學學習方法： 淺層動機	我認真學數學，因為我相信這能幫助我在未來找到理想的工作	-0.366
數學學習方法： 淺層策略	數學課程涵蓋的單元太多了，因此我不必對每單元的內容太熟悉，深入瞭解是沒有效率的	0.350
微積分與其他學科關聯性的認知	我能清楚說出微積分在其他科目的應用	0.455

在微乙班，前後測平均差異統計上顯著的題目如下，

題目歸類	題目敘述	微乙(後測 - 前測)
數學學習方法： 淺層動機	我會擔心在數學課堂上的表現不符合老師的期待	-0.424

從上面三個表格，我們可以看到 109 學年微積分課程前後學生在「數學學習概念、方法」等的改變。但是我們需要進一步確認哪一些是「模組化制度」造成的影響。於是我們把 108 學年傳統微甲班的問卷結果，當作 109 學年模組化微甲後測的對照組。結果 108 學年傳統微甲班和 109 學年模組化微甲班後測問卷結果，兩者沒有一題的差異達到統計上顯著。因此我們大膽推測「模組化制度」對於學生的數學學習影響不

大。

再仔一一細看微甲班群前後測差異的題目。所有班群對於「擔心課堂表現不符老師期待」的平均值皆明顯下降，即使是尚未模組化的微乙班群也看到類似現象。猜想是因為大學老師不像高中老師這麼緊迫盯人；學生上大學後，不會再為老師而讀書。因此我們更有把握這一面向應該不是模組化本身造成的影響。此外，兩個模組化班群學生修課後「比較不會為了找到更好的工作而讀數學」。可能學生對未來工作有較務實的看法，所以讀書少了些功利目的。因此，這兩題淺層動機的下降究竟屬於正面或負面的影響並不明確。倒是微積分甲模組班群，學生的「深層動機」有兩題顯著下降，學習策略的「淺層策略」有兩題顯著增加。但是這些負面的變化與 108 學年傳統微甲班的問卷結果相似；因此我們推論，微甲班群這些「數學學習概念」的退步，可能是源自於相同的困難課程內容、緊迫的教學進度(108, 109 學年皆受到新冠肺炎影響，減少授課週數或改線上教學)，而非「模組化制度」造成的。最後，兩個模組化班群前後測比較下正面的改變是，學生更能「清楚說出微積分在其他科目的應用」。這對經濟管院班是有意義的進步，因為這個班群本來是修習微乙，而微乙班群此題在後測也比前測進步但未達統計上顯著。

為了討論「客製化模組課程內容」帶來的影響。我們以 109 學年的微乙班當作 109 學年經濟管院班的對照組(因為兩組學生原來都是必修微乙)。以下檢視 109 學年「經濟管院班」和「微乙班」問卷平均值差異在統計上達顯著( $p < 0.01$ )的題目。

題目歸類	題目敘述	前測 (經濟管院-微乙)	後測 (經濟管院-微乙)
數學學習概念：記憶	我會擔心漏抄數學課的上課內容而忘記解題方法	無顯著	-0.427
數學學習概念：計算與練習	我認為學習數學需要不斷的練習計算與解題	無顯著	-0.374
數學學習概念：計算與練習	我認為學習數學與熟練計算和反覆練習有很大的關聯	無顯著	-0.306
數學學習概念：	我覺得學習數學相關課程能拓	無顯著	0.342

看見新觀點	展、提升我的視野		
數學學習概念： 看見新觀點	我覺得學習數學讓我以新的眼光看待生活中的現象與事物	無顯著	0.361
數學學習概念： 看見新觀點	我覺得學習數學能提供多元的思考面向	無顯著	0.309
數學學習方法： 深層策略	當我學習數學時，我會自行整理歸納零散的內容	無顯著	0.340
數學學習方法： 深層策略	當我學習數學時，我會試著找出所學內容之間的相關性	0.238	0.288
數學學習方法： 淺層策略	我認為學習數學需要反覆練習與考試相關的例題，直到自己將內容熟記為止	無顯著	-0.316
微積分與其他學 科關聯性	我認為我的學系應該減少「微積分」的必修學分	-0.346	無顯著

從以上前測資料，我們歸納出經濟管院班群和微乙班群同學修課前對數學的概念和學習策略相差不多，只有兩題差異達統計上顯著(經濟管院學生較會偏重理解，並且認為自己科系需要微積分)。但是課程結束後，這兩個班群學生對數學學習的看法產生了不小的差異。微乙同學學習較著重記憶、計算和反覆練習；但是經濟管院學生較以統整內容、尋求理解的方式來學習，並且體會到數學帶來新的觀點和思考面向。台大的微乙班群裡確實有固定的考題類型，也偏重計算；因此學生的學習策略可能是熟練考古題，較少領會數學的內涵和精神。其實在還未模組化前，不少數學系同仁也認為管理學院同學不容易教，因為他們缺乏學習微積分的動機。但是模組化後，課程內容強調數學的應用，連期考考題也會參雜經濟學或日常生活中的問題。從問卷結果推測，學生看到數學如何解釋「經濟學原理」中的理論，會覺得增加新的眼界和多元觀點，也開始嘗試連結分散在不同科目的相關內容。因此，我們肯定經濟管院班課程客製化後對學生的數學學習帶來正面的影響。

因為經濟管院班還有新的課程「微積分 4-在經濟商管的應用」，我們也想檢視這門課

對學生帶來甚麼影響。以下列舉經濟管院班中「只修到微積分3」和「全修四個模組」的學生問卷結果差異在統計上顯著的題目。(「只修到微積分3」前後測皆有填答者共30人,「全修四個模組」前後測皆有填答者共93人。)

題目歸類	題目敘述	前測 (全修- 只修到微3)	後測 (全修- 只修到微3)
數學學習概念： 增進知識	我覺得學習數學是為了獲得許多 與數學相關的事實	0.704	0.571
數學學習概念： 思考模式	我覺得學習數學能培養思考、判 斷、解決問題的能力	0.702	0.555
數學學習概念： 思考模式	我覺得學數學能幫助我更有邏輯 的推理並解決問題	無顯著	0.825
數學學習概念： 應用	我覺得學習數學是為了解決或解 釋以前不理解的問題與現象	無顯著	0.635
數學學習概念： 看見新觀點	我覺得學習數學相關課程能拓 展、提升我的視野	無顯著	0.752
數學學習概念： 看見新觀點	我覺得學習數學讓我以新的眼光 看待生活中的現象與事物	無顯著	0.69
數學學習概念： 看見新觀點	我覺得學習數學能提供多元的思 考面向	無顯著	0.746
數學學習概念： 測驗	我認為學習數學是為了在考試中 能正確的作答	無顯著	-0.617
數學學習方法： 深層動機	當我學習數學時，我會覺得非常 快樂與滿足	無顯著	0.759
數學學習方法： 深層動機	當我學習數學時，我對內容很感 興趣	無顯著	0.658
數學學習方法： 深層策略	當我閱讀數學課本時，我會試著 理解這些內容的意義	無顯著	0.727
微積分與其他學	我認為我的學系應該減少「微積	-0.735	-0.861

科關聯性	分」的必修學分		
微積分與其他學 科關聯性	我認為「微積分」是大學許多課程的預備知識	無顯著	0.524

前測結果顯示願意修「微積分 4-在經濟商管的應用」的同學和只修「微積分 1, 2, 3」的同學在本質上稍有不同；在兩項「數學學習概念」上，全修同學持更正面的看法，並且他們也認為自己的學系不應該減少微積分的必修學分。但是上完「微積分 4-在經濟商管的應用」後，這兩組學生在學習概念、方法上有顯著差異的面向變多了。全修生更多體會到數學能訓練邏輯推理能力，提供不同思考方向，開啟他們的新視野；他們為了應用的目的(解決問題)而學數學，並採用深層策略(理解內容)，在學習時對內容感興趣，而且覺得快樂滿足！由問卷結果看來「微積分 4-在經濟商管的應用」的課程設計很成功。雖然它的內容加深，又有抽象的線性代數概論，但是修課同學不但可以接受挑戰，還能調整學習策略，課程中他們覺得視野展開，對主題感興趣，學得很愉快。這對數學系是很大的鼓勵！

### (3) WeBWorK 填答率

我們想觀察各班群學生在微積分課程的「學習參與度」。除了問卷後測有一部分請學生自評是否「不輕易缺課」、「課堂中作筆記，並試著參與討論」、「認真完成作業」、「課後常問老師、助教，或同學討論問題」、「會搜尋利用課外的學習資源」等。除此之外，我們也統計各個班群的 WeBWorK 填答率，作為「學習參與度」的一個參考指標(學生是否認真寫功課)。

WeBWorK 是被台大微積分班普遍採用的一個線上作業系統。微甲與經濟管院各班老師自訂 WeBWorK 作業分數佔學期總成績的比重，大約在 8-15% 之間。微乙班則統一 WeBWorK 分數佔學期總成績 10%。

微甲班群 108、109 學年 WeBWorK 填答率比較:

	108 學年 (微甲上下)	109 學年 (微積分 1, 2, 3, 4)
上學期	74.66% (std = 26.72)	微積分 1, 77.03% (std = 23.29) 微積分 2, 74.63% (std = 23.05)
下學期	73.28% (std = 29.29)	微積分 3, 83.92% (std = 26.35) 微積分 4, 84.46% (std = 27.29)

微乙班群與經濟管院班 109 學年 WeBWorK 填答率比較:

	109 學年 (微乙上下)	109 學年經濟管院 (微積分 1, 2, 3)
上學期	76.44% (std = 30.22)	微積分 1, 76.59% (std = 26.46) 微積分 2, 85.50% (std = 22.70)
下學期	73.93% (std = 30.86)	微積分 3, 89.92% (std = 23.62)

微甲班群模組化後，在 109 學年下學期的 WeBWorK 作答率明顯高於 108 學年與 109 學年上學期的填答率。制度模組化後，成績計算方式也隨之改變，WeBWorK 作業成績比重可能在微甲班群有提升，所以學生更有動機努力完成這些作業。

若比較 109 學年經濟管院班和傳統微乙班，WeBWorK 作業比重各是 8-15%和 10%，似乎分數帶來的動機相差不多；但是經濟管院班的完成率仍高於微乙班。

結論是，在模組化班級 WeBWorK 作業填答率比較高，表示模組班同學較認真完成這個作業。但是這僅是學習參與度的一個指標，在問卷中我們沒有看到模組化與非模組化班群間的「學習參與度」題目平均值有統計上顯著的差異。

#### (4) 個別訪談

在 109 學年結束後的暑假，我們以電子郵件邀請蔡雅如老師教的經濟系微積分班同學進行線上訪談。邀請訪談對象別分為只修到微積分 3，與有繼續修「微積分 4-在經濟商管的應用」者。為了降低學期成績對總體訪問內容的影響，我們對「微積分 4-在經濟商管的應用」之修課學生依照其學期成績分布分為三組，並從每組各邀請約 1/2 的人受訪。因為暑假中學生回信的比例不高，我們做了兩次邀請。最後訪談到 24

位；他們的分布如下：

組別	成績範圍	邀請受訪人數	實際受訪人數
只修到微積分 3		6	3
微積分 4-1	等第成績 F-C	6	3
微積分 4-2	等第成績 B	7	1
微積分 4-3	等第成績 A-A+	30	17

受訪者中生理男 14 人，生理女 10 人；有 11 人高中就讀文組(第一類組)，12 人高中就讀理組(第二、三類組)，1 人無法回答高中組別。

本次訪談之目的為調查同學在微積分模組課程裡的學習經驗。受訪者事先並不會得知訪綱內容。訪談時先詢問受訪者過去學習數學之經驗，以及其帶給受訪者之感受，並與修習完模組化微積分後之差異。接著詢問其學習狀況、是否能與其他專業聯結。因為學習單為經濟管院班群特有之學習制度，因此於訪談中也針對學習單之難度、幫助程度與發現應用等面向提問。最後請受訪者分享對課程之印象、自我學習評價，並對課程給予建議。

訪談結果摘要如下：

首先，在修課是否引起學習方式改變上，約四分之一的受訪者回答沒有。而對於學習方法有改變的受訪者，他們多數回答會開始理解原理、觀念、公式背後的含義，而非僅著重解題。修課對原先便「喜歡」數學(持正面看法)的受訪者不會造成感受上的改變；但是原先回答「不喜歡」數學(有負面感受)的受訪者則有些變得喜歡數學(4 人)，覺得數學變有趣(1 人)，覺得有成就感(1 人)。有人提到更加了解數學的應用(3 人)，加深對數學的工具導向認知(2 人)。也有人從喜歡數學轉變到覺得困難、痛苦。綜合而言，修習微積分後對於數學感受的改變不如學習方式的改變來的大，尤其是原先便喜歡數學的受訪者。

其次，受訪者回答在每週於微積分上花費的時間由 2 小時到 15 小時以上不等，中位數為 4.5 小時，平均數為 5.95 小時。受訪者對微積分 1, 2, 3 的難度評價大致落在

「普通」，以「普通」與「簡單」為主，也有受訪者回答難度漸進(2人)與「困難」(3人)。微積分 4 的評價則普遍落在「困難」，僅有一位受訪者表示「簡單」。也有受訪者指出是線性代數的推導過程(3人)、抽象概念等課程內容(2人)困難，題目與考試難度則普通。受訪者普遍在學習微積分上皆有遇到困難，其中以計算(8人)與觀念(10人)為大宗；部分受訪者提到心理上面臨到的困難，例如：不知道自己的程度在哪裡(2人)、不踏實感(1人)或是因為高中就讀文組，一開始接觸有點難以適應(1人)等。

關於計算與觀念等學習上之困難，多數受訪者皆表示有找到解決的方法，例如：問同儕、老師，或是使用網路上的資源如：積分計算器、3Blue1Brown 的線性代數教學影片等等。總體而言，計算與觀念上的問題多數能得到解決。但是心理上的困難，受訪者多沒有找到合適的解決方法，僅有一位表示找到方法適應。

第三，受訪者多數都表示微積分課程與其專業科目有關聯，並能給出實際例子。僅 3 位受訪者表示與其科系專業課程(會計學、管理學部分)無關，但與經濟學便有相關。受訪者舉出的微積分應用如下：統計學(2人)、包絡曲線與生產函數(3人)、最佳化問題(3人)、無異曲線(1人)、邊際(2人)、彈性(1人)、剩餘(2人)、機率(1人)、均衡策略(1人)等。

第四，在詢問到哪個課堂/課後活動對於學習微積分最有幫助，有 12 位受訪者提到作業/WeBWorK 對於學習微積分最有幫助，受訪者的回答以文字雲表示如下：





問題一：客製化模組課程是否對學生學習數學的「概念、動機、方法」有正面影響？

問題二：客製化模組班學生是否更能將微積分「與其他科目連結」？

問題三：模組化微甲課程是否對學生學習數學的「概念、動機、方法」有正面影響？

關於問題一，客製化模組課程學生問卷前後測比較，看不出他們數學概念、動機、方法在課程前後有顯著差別。但是若和微乙班的前後測相比，可以看到課程後，經濟管院模組班同學的數學概念比微乙班正面。微乙班同學認為學習數學主要是記憶、多計算、熟練考試題型，而經濟管院班比較認同數學能為他們帶來新觀點，多元的思考方式，並且傾向使用理解觀念、統整的策略來學習。我們進一步比較經濟管院班中「只修完前三模組」與「四模組全修」的學生，雖然他們在前測結果有些微的差異，但是修完「微積分 4-在經濟商管的應用」的同學在後測裡的數學學習態度、動機、方法皆明顯優於只修完前三模組的同學。另外，由個別訪談中(3人只修到微積分 3，21人修完四個模組課)，我們觀察到學生在微積分課後數學學習方法有些正面改變。從對課程的總體印象看來，受訪同學大部分覺得微積分(應是指「微積分 4-在經濟商管的應用」)「有趣」、「扎實」、「有挑戰性」、「實用」、「新鮮」。

因此我們的結論是：**客製化模組課程，特別是較深入的「微積分 4-在經濟商管的應用」課程，對學生學習數學的「概念、動機、方法」有一些正面影響。**

關於問題二，在問卷中，可以看到微甲與經濟管院兩個模組班學生在課程後皆更能「清楚說出微積分在其他科目的應用」；而微乙班群在這部分的前後測結果沒有顯著差異。把微乙班群和經濟商管班群比較；前測時，經濟商管學生比較不認同自己的學系應該減少微積分的必修學分(達統計上顯著)；後測時，經濟管院學生普遍在「微積分與其他學科關聯性」的回答優於微乙學生，但是沒有一題達統計上顯著。另外，在個人訪談中，經濟管院同學可以具體說出微積分在經濟學的應用。

總結以上資訊，**客製化模組課程的學生在課程後更能清楚說出微積分與其他科目的連結。**但是在非客製化模組課程也觀察到學生的進步(雖然未達顯著)。若和非模組班後測結果相較，雖然模組班比較好，但是未達統計上顯著。因此從主觀的問卷填答結

果，我們無法確認，是否為客製化模組課程幫助學生將微積分「與其他科目連結」。但至少在個人訪談中，客製化模組課程的同學可以舉出微積分應用於經濟學的實例。

關於問題三，109 學年微甲同學的後測結果與 108 學年的問卷結果沒有統計上顯著差異的題目，所以我們看不出制度上模組化對學生數學學習的「概念、動機、方法」有正面影響。但是以停修率、WebWork 作答率來看，修課制度模組化後學生可能較容易修完微積分課程，並且較有動機(可能因為是分數計算方式的改變)完成作業。

## 2. 教師教學反思

### (1) 跨系合作能更有效的解決教學問題

以往管理學院微積分班沒有統一進度，某些系同學對微積分的學習動機不高，任課老師只能各自努力。相反的，經濟系則有一群對數學很有興趣的學生，願意學更深入的理論，但卻找不到合適的課程。這次數學系和經濟系合作，開發新的課程「微積分 4-在經濟商管的應用」，而且因著兩系老師間的交流，甚至基礎的微積分課程中也增加了經濟學的應用。這個模組不但為經濟系客製化所需的數學課，也在管理學院的微積分 1, 2, 3 課程中引起改革，讓微積分老師嘗試連結其他學科，使用管院同學關心的例子。數學系很珍惜這個跨領域對話的經驗，它同時助益、刺激雙方的成長。教授經濟系班的數學系蔡雅如老師覺得，學習經濟學如何使用微積分非常令人興奮，在課堂中使用這些實例更活化了他的教學。與蔡雅如老師共授的經濟系王道一老師則發現，跨域教學可以讓分工專業化，在自己的領域做好的「生產者」，而在其他領域做好的「消費者」。他看到數學系老師能腳踏實一步步帶領學生推導數學理論，實在比一般經濟系老師以投影片快速帶過公式，來得紮實許多；所以需要數學系協助訓練學生的數學基礎。但在應用上，經濟系老師能協助數學系老師針對不同的數學工具設計學習單，對學生預告微積分會如何出現在各種進階的經濟學課程，讓他們在未來數年的學習歷程更有連貫性。

### (2) 數學課程可以增加較具啟發性的作業

其實微積分的 9 份學習單並不簡單，和考試(成績)也沒有很大關係，但是同學在助教、老師引導下完成學習單，會感受到成就感，並對微積分有較深刻的體會和欣賞。在暑假訪談中同學還能具體說出學習單裡的經濟學應用，可見得思考、討論、完成學習單的過程帶給他們深刻的印象。再者，從 109 學年的問卷看來，經濟管院學生已和傳統微乙學生稍有不同，他們對數學學習的看法，不只是「要多練習考古題，熟悉各種題型」，他們也會好奇、發現、讚賞數學如何出現在他們的專業裡。這令人反思，傳統數學課程的活動大部分以準備「考試」為目的；也許像學習單這種佔分不高，卻有啟發性的作業，可以些微矯正學生為考試而讀的心態。

### (3) 考試難易度、作業分量要適中

課程模組化後，有管院同學抱怨「微積分變難了(學長姐的微積分課好輕鬆，為什麼我們要學這麼難?)」，或反應說「微積分作業太多」。我們也適當的回應，逐年修改作業份量，調整考題難度。客觀上經濟管院模組班的停修率不高，各班學期成績 A 或 A+ 的比例甚至比一些微甲班級高。曾聽經濟系同學笑稱「微積分課是扎實甜」：學得很扎實，有些辛苦，但是成績回報也不錯。我們學到微積分課可以加深內涵、加廣應用，但是考試題目不必艱深、太過技巧性(當然題目決不會過於簡單)；這對同學的學習態度有正面的影響。

### (4) 台大學生可以接受較抽象深入的數學課

從訪談結果和問卷分析我們發現，修完「微積分 4-在經濟商管的應用」的同學比只修前三模組的學生對數學學習的態度、方法更正面。這對我們是極大的鼓勵！剛開始數學系並不清楚經濟管院學生對這門課的接受程度。但是 108、109 學年修課學生都穩定在 280 位以上。雖然課程內容較理論性(有線性代數簡介與深入的最佳化問題)，同學們對課程的總體印象還是以「有趣」、「扎實」、「應用」、「有挑戰性」、「新鮮」等為主。我們發現台大學生是可以接受挑戰的；只要課程設計得宜，較深的內容也可以引起他們的興趣，讓他們學習得很扎實、感受到成就感。

## 3. 學生學習回饋

以下列舉 109 學年「微積分 4-在經濟商管的應用」課程評鑑裡的學生文字意見：

- (1) 「我覺得微積分 4 是個很難的章節，但是教授十分細心且有耐心地教導我們，無論是公式、理論的證明推導都講解的非常完善，教授也會舉例試題來讓我們更加瞭解內容，因此我十分喜歡這堂充實的課程。」
- (2) 「微 4 的線代其實蠻有趣的哈哈，作業可以儘量讓我們練習證明，因為系上有些同學會想去修數學系的課，如果微 4 能夠變成銜接之後數學課程的橋樑，感覺還挺不錯。不過我的想法有點不切實際，畢竟這門課的目的還是在學最佳化啦。」
- (3) 「希望老師明年微 4 可以講到對偶性」
- (4) 「老師把上課內容講的很細緻，同學不太能馬上接受的部分，老師都會再講一遍，而且同學們有問題，老師都是有問必答，讚讚」
- (5) 「微積分四的內容前半部分關於線性代數的部分，許多地方的證明相當繁瑣。如果該部分能更著重對線性代數的直觀理解(例如幾何意義)，可能讓學生收穫較大。另外後半部分極值問題，雖然課程安排井然有序，但練習內容主要還是一些代數運算，真正算是應用的部分只有效用函數的效用最大化，感覺跟課名裡的「商管」有落差。上面只是一些感想，我還是從這門課獲益良多，謝謝老師!」
- (6) 「首先謝謝老師很用心地規劃課程，完全聚焦在經濟學的部分。不過微 4 的課程和前面相較起來真的難很多><特別是證明嗚嗚 我覺得有平板開 youtube 直播的效果很好！謝謝 老師的用心～」
- (7) 「我已經努力學了，但還是有點聽不太懂 QQ，不過還是很感謝老師這一年從微積分 1 到微積分 4 的教導！讓我對微積分有更深一步的了解。」

## 六、建議與省思(Recommendations and Reflections)

### 1. 省思：數據收集過程出現許多狀況，樣本可能不具代表性

因為 109 學年微甲即全面模組化，所以我們緊急於 108 學年下學期對「傳統微甲班」

施作問卷，因此沒有觀察到傳統微甲班前後測的差異，實屬可惜。另外，109 學年問卷後測施作時期遇到新冠肺炎疫情，沒有實體上課，不容易聯絡到學生；所以學生是在暑假中近一個月期間內陸續線上填寫問卷。最後，暑假中的個別訪談應該更多邀請「只修完前三模組的學生」，甚至是「停修、退選微積分 4-在經濟商管的應用的學生」，才可以了解不同屬性、背景的學生反饋。往後在收集資料前要有更周詳的規劃。

## 2. 建議微積分課程應該在制度上模組化

**第一、模組化修課對學生而言較友善。**雖然台大微甲課程模組化前後，學生的數學學習沒有顯著的變化；但是停修率降低了，學生修過一個模組比修過整學期的微積分課更容易。再者，必修微積分乙的同學雙主修或轉到必修微甲的科系，只需補修半學期的「微積分 4」，不必重修一整年的微甲。

**第二、模組化課程讓外系能更彈性安排。**微積分課程模組化後，管理學院即依照各系的需求訂定修課規定，例如：財金系指定「微積分 3」必修，工管系科管組必修「微積分 4-在經濟商管的應用」...等。可見課程模組化後，外系對微積分課程的運用也更加靈活。

當然，微積分課模組化後，對數學系和微積分老師、助教而言，增加了一些行政工作(每學期要結算二次成績...)。而且這是台大第一個大規模的模組課程，需要和教務處溝通選課制度(系統)如何調整，和各系說明模組化課程內容，溝通選課規定的修改，剛開始的確面對許多挑戰。但是在學校、教學發展中心、相關各系和系上同仁的支持下，台大微積分課程已在 110 學年全面模組化了；並且這幾年實施的經驗顯示，模組化課程在一般的學期制度下是可行的。

## 3. 建議微積分課程應該增加其他專業的應用

微積分是許多學科必備的數學工具，但是微積分老師可能不了解學生的科系如何應用微積分；單純介紹數學工具，無法提起同學的學習興趣，使得微積分教學成效低落。

從更宏觀的觀點來看，大學生的基礎訓練被分割成不同的獨立領域，微積分、普物、普化、經濟學原理...等，各領域缺乏對話交流，以致學生的學習也是片段的。學生缺乏統整的訓練，不了解各領域間的關聯性，就難以達到觸類旁通的更有效的學習層次。在本計畫中，我們看到經濟管院模組班學生的數學學習態度優於傳統微乙的同學，他們感受到學習數學開拓他們的眼光，帶來新觀點。並且修完「微積分4-在經濟商管的應用」的同學對數學的感受、看法更加正面。這說明微積分內容加入經濟學的應用，教導更深、更廣的數學內涵(不僅是使用公式、練習計算)，對學生有正向的影響。

經濟管院模組課程能被設計出來是因為經濟系老師願意和數學系老師共授一門新課程，而且經濟系老師在共授前便在微積分課裡觀課。數學系很珍惜這次合作的機會。在推動微積分模組化的過程，數學系主動和外系說明模組化的用意與配套措施，我們同時也發出邀請，期待和各系交流，了解他們對微積分課程的期待。希望未來有更多跨系合作機會，創造下一個客製化微積分課程。

### 參考文獻(References)

林家儀(2016)。探究國中生數學學習概念、數學學習堅韌性與數學學習成效之關聯性(未出版碩士論文)。國立臺灣科技大學，台北市。

陳珈惠(2013)。開放式課程之再利用及模組化—以微積分課程為例。國立交通大學應用數學研究所碩士論文，頁 47, 54-56。

張春興(1994)。現代心理學。臺北：東華。臺北：東華。

Anderson, D., Benjamin, D. & Fuss, M. A. (1994). The Determinants of Success in University Introductory Economics Courses. *The Journal of Economic Education*, 25:2, 99-119.

Assor, A., Kaplan, H., & Roth, G. (2002). Choice is good, but relevance is excellent: Autonomy-enhancing and suppressing teacher behaviours predicting students' engagement in schoolwork. *British journal of educational psychology*, 72(2), 261-278.

Barrow, D.L. & Fulling, S.A. (1998). Using an Integrated Engineering Curriculum to Improve Freshman Calculus. *Proceedings of the 1998 ASEE Conference*, Seattle, WA.

Benson, P., & Lor, W. (1999). Conceptions of language and language learning. *System*, 27, 459-472.

- Chin, C. & Brown, D.E. (2000). Learning in science: A comparison of deep and surface approaches. *Journal of Research in Science Teaching*, 37(2), 109-138.
- Crumpton, H. E., & Gregory, A. (2011). "I'm not learning": The role of academic relevancy for low-achieving students. *The Journal of Educational Research*, 104(1), 42-53.
- Fredricks, J. A., Blumenfeld, P. C., & Paris, A. H. (2004). School engagement: Potential of the concept, state of the evidence. *Review of educational research*, 74(1), 59-109.
- Finn, J. D. (1989). Withdrawing from school. *Review of educational research*, 59(2), 117-142.
- Froyd, J. E. & Ohland, M. W. (2005) Integrated Engineering Curricula. *Journal of Engineering Education*, 94(1), 147-164.
- Härterich, J., Kiss, C., Rooch, A., Mönnigmann, M., Schulze Darup, M., & Span, R. (2012). MathePraxis—connecting first-year mathematics with engineering applications. *European Journal of Engineering Education*, 37(3), 255-266.
- Krull, E., Koni, I., & Oras, K. (2013). Impact on student teachers' conception of learning and teaching from studying a course in educational psychology. *Asia-Pacific Journal of Teacher Education*, 41(2), 218-231.
- Lee, M.H., Johanson, R.E. & Tsai, C.C. (2008). Exploring Taiwanese high school students' conceptions of and approaches to learning science through a structural equation modeling analysis, *Science Education*, 92(2), 191-220.
- Lin, T. J., & Tsai, C. C. (2013). A multi-dimensional instrument for evaluating Taiwanese high school students' science learning self-efficacy in relation to their approaches to learning science. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11(6), 1275-1301.
- Means, T. B., Jonassen, D. H., & Dwyer, F. M. (1997). Enhancing relevance: Embedded ARCS strategies vs. purpose. *Educational Technology Research and Development*, 45(1), 5-17.
- Olsson, U. (2011, November). Lecturers' Conception of Learning and Use of Methods in Blended Learning Courses at Three Swedish Universities. In *Seminar. net* (Vol. 7, No. 1).
- Ooi, A. (2007). An analysis of the teaching of mathematics in undergraduate engineering courses. In *Proceedings of the 2007 AaeE Conference, Melbourne*.
- Miller, R.B., DeBacker, T. K., & Greene, B. A.(1999). Perceived instrumentality and academics: The link to task valuing. *Journal of Instructional Psychology*, 26(4), 250.
- Shih, M., Huang, Y.-N., Liang, J.-C., Lee, M.-H., & Lee, S. W.-Y. (2017). *The Relationships of Taiwanese College Students' Conceptions, Approaches, and Self-efficacy to Learning Civil*

*Engineering in a Flipped Classroom*. The 25th International Conference on Computers in Education (ICCE), Christchurch, New Zealand.

Skinner, E. A., Kindermann, T. A., Connell, J. P., & Wellborn, J. G. (2009). Engagement and disaffection as organizational constructs in the dynamics of motivational development. *Handbook of motivation at school*, 223-245.

Skinner, E. A., & Pitzer, J. R. (2012). Developmental dynamics of student engagement, coping, and everyday resilience. In *Handbook of research on student engagement* (pp. 21-44). Springer, Boston, MA.

Stewart, E. B. (2008). School structural characteristics, student effort, peer associations, and parental involvement: The influence of school-and individual-level factors on academic achievement. *Education and urban society*, 40(2), 179-204.

Sung, H. Y., Hwang, G. J., Lin, C. J., & Hong, T. W. (2017). Experiencing the Analects of Confucius: An experiential game-based learning approach to promoting students' motivation and conception of learning. *Computers & Education*, 110, 143-153.

Suprpto, N., Chang, T. S., & Ku, C. H. (2017). Conception of learning physics and self-efficacy among Indonesian university students. *Journal of Baltic Science Education*, 16(1), 7-19.

Tsai, C.C. (2004), Conceptions of learning science among high school students in Taiwan: A phenomenographic analysis, *International Journal of Science Education*, 26(14), 1733-1750.

Wang, M. T., & Degol, J. (2014). Staying engaged: Knowledge and research needs in student engagement. *Child development perspectives*, 8(3), 137-143.

Wang, M. T., Willett, J. B., & Eccles, J. S. (2011). The assessment of school engagement: Examining dimensionality and measurement invariance by gender and race/ethnicity. *Journal of School Psychology*, 49(4), 465-480.

Wu, Z. (2019). Academic motivation, engagement, and achievement among college students. *College Student Journal*, 53(1), 99-112.

Zebing Wu (2019) "Academic Motivation, Engagement, and Achievement Among College Students" *College Student Journal*, Volume 53, Number 1, March 2019, pp. 99-112(14).

#### **附件(Appendix)列表：**

1. 數學學習問卷
2. 訪談逐字稿
3. 「微積分 4-在經濟商管的應用」課程大綱
4. 學習單範例

## 附件：數學學習問卷

所屬構念	題目
身份	學號
	學系
	年級
	有修微積分4
班級基本資料	班群分類
	授課教師
	填答秒數
數學學習概念：記憶	我認為學習數學是將課本中的定義、符號、公式與定理背起來
	我認為學習數學需要記憶複雜的計算過程
	我會擔心漏抄數學課的上課內容而忘記解題方法
數學學習概念：測驗	我認為學習數學是為了在考試中能正確的作答
	我認為學習數學是為了熟悉考試可能出現的題型
	認為學習數學和預備考試有很大的關聯
數學學習概念：計算與練習	我認為學習數學需要不斷的練習計算與解題
	我認為學習數學與熟練計算和反覆練習有很大的關聯
	我認為對計算不夠熟練就不能學好數學
數學學習概念：增進知識	我認為吸收以前不知道的數學知識，就是在學習數學
	我覺得學習數學是為了獲得許多與數學相關的事實
	我覺得學習數學主要是以舊經驗為基礎，經學習而獲得新的數學知識
數學學習概念：應用	我覺得學習數學是為了獲得知識或技能，以幫助我解決生活中的問題
	我覺得學習數學是為了將數學工具應用在其他學科
	我覺得學習數學是為了解決或解釋以前不理解的問題與現象
數學學習概念：理解	我認為理解數學觀念之間的聯繫是學習數學的重要部分
	我認為理解定理與公式是學習數學的重要部分
	我認為若不能理解數學相關知識就無法學好數學
數學學習概念：思考方式	我覺得學習數學是為了訓練邏輯思考的方式
	我覺得學習數學能培養思考、判斷、解決問題的能力
	我覺得學數學能幫助我更有邏輯的推理並解決問題
數學學習概念：看見新觀點	我覺得學習數學相關課程能拓展、提升我的視野
	我覺得學習數學讓我以新的眼光看待生活中的現象與事物
	我覺得學習數學能提供多元的思考面向
數學學習方法：深層動機	當我學習數學時，我會覺得非常快樂與滿足
	當我學習數學時，我對內容很感興趣
	我非常期待上數學課
	即使不在數學課堂上，我的腦中還會繼續思考相關內容
數學學習方法：深層策略	當我學習數學時，我會嘗試將所學到的內容連結到另外一單元或科目
	當我學習數學時，我會自行整理歸納零散的內容
	當我學習數學時，我會試著找出所學內容之間的相關性
	當我閱讀數學課本時，我會試著理解這些內容的意義
數學學習方法：淺層動機	我很在意數學成績會不會拉低我的學業平均成績
	我花時間學數學，因為我希望有好的考試成績
	我會擔心在數學課堂上的表現不符合老師的期待
	我認真學數學，因為我相信這能幫助我在未來找到理想的工作
數學學習方法：淺層策略	我想在數學課有好的表現，好讓家人及老師感到高興
	只要我覺得自己的準備足夠應付考試，我就不會再多花時間去學習數學
	數學課程涵蓋的單元太多了，因此我不必對每單元的內容太熟悉，深入瞭解是沒有效率的
	在學習數學時，我會希望老師把考試重點給我們，以方便我們準備考試
微積分課堂參與度	我認為學習數學需要反覆練習與考試相關的例題，直到自己將內容熟記為止
	我不輕易缺席微積分課
	在微積分課中，我會做筆記並試著參與課堂討論
	我會認真完成微積分作業
	在課後我常和同學討論微積分問題
	我常在課後問微積分老師或助教問題
微積分與其他學科關聯性	我會搜尋並利用課程以外的微積分學習資源
	我認為「微積分」是大學學業中獨立的一部分，和其他課程沒有很大的關聯
	我認為我的學系應該減少「微積分」的必修學分
	我認為「微積分」是大學許多課程的預備知識
	我能清楚說出「微積分」在其他科目的應用

## 附件：訪談逐字稿

XX，你好！謝謝你願意接受訪談。這個訪談是台大數學系執行的教育部教學實踐研究計畫的一部份。此計畫的聯絡人是蔡雅如老師。以下的訪談內容僅會用於學術研究與改善微積分教學。你的資料將被妥善保管，未來發表研究結果時，你的身分將被去識別化，充分保密。你可以隨時終止訪談，或是在訪談後要求退出研究。

請您在知情同意書上簽名。另外，為了感謝你接受訪問，研究團隊將致贈您超商禮券。但是數學系需要造冊報帳，需要您填寫領據。「知情同意書」和「領據」可以影印出來填寫、簽名，再拍照。或是存成 pdf 檔簽名。這兩份資料的電子檔請寄給數學系趙怡茹助理，他會妥善保存您的資料並和您聯繫怎麼領取禮券。

為了保護您的權利，訪談中將會錄影/錄音。如果您有需要，可以於訪談後和我們索取錄影/錄音檔。如果您對於以上說明沒有問題，我們就開始錄影/錄音，進行訪談。

(開始錄影/錄音)

謝謝 XX 接受訪談，您已知道這次訪談的目的，訪談結果僅供教學實踐研究計畫「微積分模組化對數學學習的影響」使用。接下來我們將全程錄影/錄音。您可以隨時中斷以下的訪問。

0. 首先，想確認您在這學年共修了「微積分 1, 2, 3」(「微積分 1, 2, 3」和「微積分 4-在經濟商管的應用」)。
1. A. 請問你在這學年之前學習數學的經驗，例如你高中是讀社會組或自然組？曾經修過微積分嗎？ B. 你之前是怎麼學數學，如何預備數學考試的？ C. 在修這堂課之前數學帶給你甚麼感受？喜歡數學嗎？ D. 修「微積分」時你的學習方法有改變嗎？你對數學的感受有變化嗎？
2. 請問你學期中平均每周花多少時間寫微積分作業和複習？你覺得「微積分 1, 2, 3」整體難易度如何？你覺得「微積分 4-在經濟商管的應用」整體難易度如何？在學習上曾遇到困難嗎？如何解決困難呢？(難易度以量表 1-5 回答)

3. 你認為「微積分」課程內容和你的專業科目有關連嗎? 如果你覺得有相關, 可以舉一些例子嗎? (大概是哪一個模組課的內容?)
4. 你認為哪些課堂活動或課後活動對於學習「微積分」最有幫助?
5. 你覺得「學習單」的難易度如何? 「學習單」對你學習微積分有助益嗎? 「學習單」能幫助你發現微積分在經濟學的應用嗎? (難易度以量表 1-5 回答)
6. 如果選擇 3-5 個詞描述你對「微積分課」的總體印象, 你的答案是?
7. 你對於自己在微積分課的學習表現滿不滿意? 覺得自己有什麼可以做的不一樣的地方? (滿意度以量表 1-5 回答)
8. 整體而言, 請問你對微積分課有甚麼建議? (如果沒有想法, 再問細項, 如習題課、評量方式、內容)

再一次感謝你接受訪問! 如果我們在整理訪談資料時發現有不清楚的地方, 可能會再和您聯絡。謝謝!!

(停止錄影/錄音)

微積分 ： 在經濟商管的應用	第九週		Vector Spaces (Linear Independence, Basis, Dimension)
	4/15(五) 微積分 4 退選截止		Matrix (Row/Column Space, Rank, Determinant)
	第十週		Eigenvalues and Eigenvectors
			Symmetric Matrices
	第十一週		Definiteness of Quadratic Forms
	4/29(五) 微積分 4 停修截止	4/28(四) 17:30-18:20 Quiz 1(範圍：線性代數)	
	第十二週	18.1	Constrained Optimization: Examples
		18.2	Constrained Optimization: Equality Constraints
		18.3	Constrained Optimization: Inequality Constraints
	第十三週	18.4	Constrained Optimization: Mixed Constraints
		18.5	Constrained Minimization Problems
		18.6	Kuhn-Tucker Formulation
		5/12(四) 17:30-18:20 Quiz 2(範圍：18.1-18.4)	
	第十四週	19.1	The Meaning of the Multiplier
		19.2	Envelope Theorems
	第十五週	19.3	Constrained Optimization: Second Order Conditions
19.5		Constraint Qualifications (*)	
5/26(四) 17:30-18:20 Quiz 3(範圍：18.5, 18.6, 19.1-19.2)			
第十六週	19.6	Proofs of First order conditions (*)	
期考 6/4(六) 14:00~16:30 (英文命題)			

Name:

ID:

Department:

**Introduction.**

Suppose there are two firms A and B producing a certain commodity.

- If A produces  $x$  units of commodity, the best response of B is to produce  $y = f(x)$  units in order to maximize its profits. Whereas B produces  $y$  units of commodity, the best response of A is to produce  $x = g(y)$  units to maximize its profits. In this context, the functions  $f(x)$  and  $g(y)$  are called the *best response functions* and are assumed to be *continuous*.
- A *Nash equilibrium*  $(\bar{x}, \bar{y})$  is a pair of values that satisfies  $\bar{y} = f(\bar{x})$  **and**  $\bar{x} = g(\bar{y})$ , or in other words, both A and B are best responding to the other's strategy.

In this worksheet, we will use the Intermediate Value Theorem to imply the existence of a Nash equilibrium.

**Question 1.**

Suppose that two oligopolists A and B produce  $x$  and  $y$  units of a commodity respectively. It is given that :

- The price of the commodity is  $P(x, y) = 80 - 0.25(x + y)$ .
- The cost function for firm A is  $C_1(x) = 4x + 100$ .
- The cost function for firm B is  $C_2(y) = 3y + 125$ .
- The revenue of firm A is  $P(x, y) \cdot x$ .
- The revenue of firm B is  $P(x, y) \cdot y$ .
- The profit of a firm is given by its revenue minus its cost.

(a) Write down the profit (functions) for A and B.

(b) To find the best response function of A, we regard  $y$  as a constant and view the profit of A as a polynomial in  $x$  of degree 2. By completing the square, find  $x_{\max}$  that maximizes the profit.

Here  $x_{\max}$ , which depends on  $y$ , is the best response function of A. In the sequel, we will denote it as  $g(y)$ .

(c) Similarly, find the best response function  $y_{\max} = f(x)$  of B.

(d) Suppose A and B can produce at most 160 units of the commodities. Find the Nash equilibrium  $(\bar{x}, \bar{y})$  for which  $0 \leq \bar{x}, \bar{y} \leq 160$ .

**Question 2.**

More generally, suppose we are given the best response functions  $f(x)$  and  $g(y)$  that are continuous. Furthermore, suppose there is an interval  $[\alpha, \beta]$  such that

$$\alpha \leq f(x) \leq \beta \text{ and } \alpha \leq g(y) \leq \beta \text{ for all } x, y \in [\alpha, \beta].$$

Deduce that in this case a Nash equilibrium  $(\bar{x}, \bar{y})$  exists and satisfies  $\alpha \leq \bar{x}, \bar{y} \leq \beta$ .

(Hint. Consider the function  $g \circ f$ . Use the Intermediate Value Theorem to show that it has a *fixed point*  $x_0 \in [\alpha, \beta]$ , i.e.  $g(f(x_0)) = x_0$ . Then  $(\bar{x}, \bar{y}) = (x_0, f(x_0))$  is a Nash equilibrium.)