

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

部分剪力聯結之鋼和混凝土複合梁之有限元素線性及挫屈分析 Linear and Buckling Analyses of Steel-Concrete Composite Beams with Partial Shear Connection using the Finite Element Method

計畫編號: NSC 89-2211-E-002-124

執行期限: 89年8月1日至90年7月31日

主持人: 呂良正 國立台灣大學土木工程學系(E-mail: ljleu@ce.ntu.edu.tw)

一、中文摘要

本研究主要利用一維部分剪力聯結複合梁理論，推導部分剪力聯結複合梁元素之勁度矩陣與相關邊界條件。此種新元素僅具兩個節點（共六個自由度），且因其由微分方程式之正解位移場所推導，故較其他數值方法同時兼具效率性與精確度。並保有有限元素法的特色，能求解不同載重狀況及各種邊界條件下複合梁的反應。另一方面，利用能量法同理可推導出複合梁的幾何勁度矩陣，此可進行挫屈分析求得複合梁之挫屈軸力。不論是線性分析或是挫屈分析，數值例顯示本研究所推導出來勁度矩陣之正確性。

關鍵詞：線性分析、挫屈分析、複合梁、部分剪力聯結、有限元素法

Abstract

This study derives the stiffness matrices and corresponding boundary conditions for composite beams with partial shear connection on the basis of the one-dimensional partial composite beam theory. The new element is derived using the exact solution of governing differential equations and it has only two nodes (six degrees of freedom); therefore it is more efficient and accurate than other numerical methods. Furthermore, the element, with the characteristics of finite element method, can be used to solve the response of partial composite beams under different loading and

boundary conditions. In addition, the geometric stiffness matrix for partial composite beams is also derived from the energy method using the same shape functions. Buckling analysis is then carried out to calculate the buckling loads of partial composite beams. Numerical examples on both linear analysis and buckling analysis verify the accuracy of the derived stiffness matrices.

Keywords: linear analysis, buckling analysis, composite beam, partial shear connection, finite element method

二、緣由與目的

規範中容許複合梁被設計為僅具有部分剪力聯結，然而部分剪力聯結複合梁在混凝土版與鋼梁之間會產生相對滑動，此將造成較大的撓度。而在現行設計規範下，工作載重下之撓度使用性限制可能為設計之控制因素；是故如何準確計算部分剪力聯結複合梁之撓度是複合梁設計及分析中的最重要問題之一。

本研究目的在於利用已發展成熟的一維部分剪力聯結複合梁理論，推導部分剪力聯結複合梁元素之勁度矩陣。此種新元素僅具兩個節點（共六個自由度），且因其由正確位移場所推導，故較其他數值方法在模擬部分剪力聯結複合梁行為上更為精確及簡便。並進一步利用相同之形狀函數推導相關之幾何勁度矩陣，配合彈性勁度矩陣進行挫屈分析。

三、結果與討論

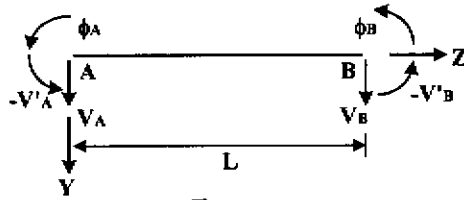
彈性勁度矩陣推導

一維部分剪力聯結複合梁理論之控制方程式形式如下 (Gjelsvik 1991)

$$\frac{(EI)_b(EI)_i}{kh^2} \phi'''' - [(EI)_b + (EI)_i] \phi'' = q(z)$$

$$V' = -\phi + \frac{(EI)_i}{kh^2} \phi''$$

上式中 V 為側向位移， ϕ 為鋼梁與混凝土版形心連線因界面滑動產生之轉角，兩形心之距離為 h ， k 為界面間之剪力勁度， q 為側向載重， $(EI)_b$ ， $(EI)_i$ 分別為對應直梁及桁架行為的抗彎勁度。要注意的是當 $k \rightarrow \infty$ ，即完全聯結，此時 $V + \phi = 0$ ，此與一般梁無異考慮。



圖一

考慮圖一之自由度，上述之控制方程式可配合邊界條件求得部分剪力聯結複合梁之位移場形狀函數正解。方式如下：

- 令第一式中 $q(z) = 0$ ；
- 積分第一式五次得 $\phi(z)$ ；
- 將上步驟所得之 $\phi(z)$ 代入第二式求 $V(z)$ 。注意得是 $\phi(z)$ 中含有五個積分常數， $c_1 \sim c_5$ ；而 $V(z)$ 中含有六個積分常數， $c_1 \sim c_6$ ；
- 利用 $V(0) = V_A$ ， $-V'(0) = -V'_A$ ， $\phi(0) = \phi_A$ ， $V(L) = V_B$ ， $-V'(L) = -V'_B$ ， $\phi(L) = \phi_B$ 等六個條件可將 $c_1 \sim c_6$ 解為自由度（見圖一）之函數。
- 將(d)解得之 $c_1 \sim c_6$ 代入(c)步驟所得之 $V(z)$ ，經整理可得 $V(z) = N_v \Delta$ ；其中 $\Delta = \langle V_A, -V'_A, \phi_A, V_B, -V'_B, \phi_B \rangle$ ，此即為 $V(z)$ 之形狀函數正解。

另一方面，部分剪力聯結複合梁之應變能可利用部分積分技巧推導：

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (EI)_i \phi'^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^L (EI)_b V''^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^L kh^2 (\phi + V')^2 dz$$

再將先前求得以形狀函數正解表示之 V 及 ϕ 代入應變能中，可得複合梁之彈性勁度矩陣之正解 (Leu and Huang, 2001)。

$$k_1 = (EI)_i \int_0^L N_\phi'^T N_\phi' dz$$

$$k_2 = (EI)_b \int_0^L N_V''^T N_V'' dz$$

$$k_3 = Kh^2 \int_0^L [N_\phi^T N_\phi + N_\phi^T N_V + N_V^T N_\phi + N_V^T N_V] dz$$

$$k_E = k_1 + k_2 + k_3$$

其中 N_V 與 N_ϕ 分別代表位移場 V 及 ϕ 之形狀函數。由於形狀函數正解中含有超越函數，因此推導勁度矩陣時可利用 MATHEMATICA；所得之矩陣將為顯示形式 (explicit form)，以方便使用。

等值固端力推導

元素間有加載時，其等值固端力可利用虛功法配合前述之形狀函數正解推導如下 (McGuire et al. 2000)：

$$(f_{eq})_i = \int_0^L N_{vi}(z) q(z) dz$$

幾何勁度矩陣推導

幾何勁度矩陣之推導乃根據推導彈性勁度矩陣時之同一組形狀函數，其方式類同於一般梁柱元素之幾何勁度矩陣推導，要強調的是所推導之幾何勁度矩陣其自由度個數仍為 6 (同於彈性勁度矩陣)。

文獻上已有考慮軸力效應之部分剪力聯結複合梁之控制方程式 (Girhammar and Gopu 1993)。可利用該控制方程式推導得到對應於該軸力之荷載勢能 (load potential) 為：

$$V_p = -\frac{1}{2} P \int_0^L V'^2 dz$$

上式中 P 為軸壓力，假設作用於複合梁轉換斷面之形心（使之不產生彎矩）。將以形狀函數正解表示之 V 代入上式之荷載勢能中，可推得幾何勁度矩陣之切線勁度矩陣。在此仍是利用 MATHEMATICA

推導幾何勁度矩陣之顯示形式 (explicit form)，以方便使用。

近似之勁度矩陣推導

前述部分剪力聯結複合梁之位移場形狀函數正解因含有超越函數，其數學型式相當複雜，使用上較不方便。故本研究進一步以古典梁理論之形狀函數 (Hermitian polynomials) 作為側向位移 V 之近似形狀函數，而轉角 ϕ 之近似形狀函數則以桁架之線性形狀函數取代如下：

$$\mathbf{N}_{va} = \left\langle \left(\frac{2z^3}{L^3} - \frac{3z^2}{L^2} + 1 \right), \left(\frac{-z^3}{L^2} + \frac{2z^2}{L} - z \right), 0, \right. \\ \left. \left(\frac{-2z^3}{L^3} + \frac{3z^2}{L^2} \right), \left(\frac{-z^3}{L^2} + \frac{z^2}{L} \right), 0 \right\rangle$$

$$\mathbf{N}_{\phi} = \left\langle 0, 0, 1 - \frac{z}{L}, 0, 0, \frac{z}{L} \right\rangle$$

如此仍保有元素僅具六個自由度之優點其中，且兼具簡潔之數學型式優點。將此近似之形狀函數代入線性勁度矩陣和幾何勁度矩陣之方程式中，可得近似之元素勁度矩陣。同樣地，我們亦可推導相對應之近似元素固端力 (Leu and Huang, 2000)。

複合梁挫屈分析

有了元素之勁度矩陣與幾何勁度矩陣，接下來可利用其進行挫屈分析，甚或幾何非線性分析。本研究以挫屈分析為主。挫屈分析實際上即為一個廣義特徵值問題，可表為：

$$(\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g) \mathbf{U} = 0$$

上式中 \mathbf{K}_e 與 \mathbf{K}_g 分別為元素勁度矩陣及幾何勁度矩陣之組合，而上式之特徵值 λ 可由諸多方法得到，例如次空間迭代法 (Bathe 1996)。假設計算元素幾何勁度矩陣 \mathbf{k}_g 相應之軸壓力為 P ，則挫屈軸壓力 $P_{cr} = \lambda_1 P$ ，其中 λ_1 = 最小之特徵值。利用上述方法可輕易計算單跨或多跨連續梁於不同邊界條件下之挫屈軸壓力。

二階近似分析

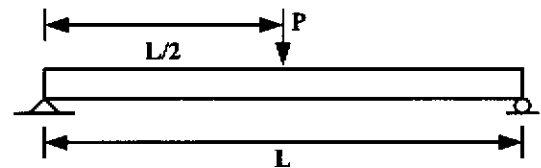
利用前述分析所得之挫屈軸壓力，可利用下式估算二階效應：

$$Q_{second} = Q_{first} \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}$$

上式中 Q_{first} = 線性 (一階) 分析所得之物理量 (如彎矩、位移等)， Q_{second} = 二階分析所得之物理量 (如彎矩、位移等)。如此可省略二階分析時所須之複雜計算。

實例分析結果

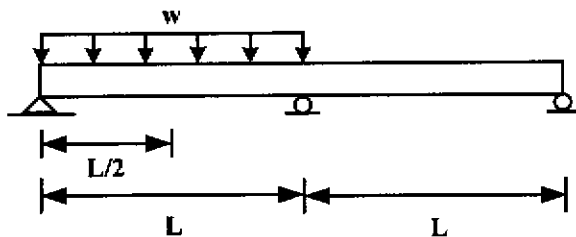
1. 考慮圖二所示之部分剪力聯結複合梁中點承受一集中載重 $P=500$ KN，其斷面特性與材料性質分別為跨長 $L=10$ m， $E_c=1335$ kN/cm²， $A_c=2700$ cm²， $I_c=50625$ cm⁴， $E_s=20000$ kN/cm²， $A_s=85.3$ cm²， $I_s=23800$ cm⁴， $K=160$ kN/cm²， $h=28.1$ cm。利用前述推導之勁度矩陣正解與近似解兩種不同元素來進行模擬，前者將結構劃分為兩個元素，後者則劃分為四個元素，分別可到此簡支梁中點變位為 7.494 cm 與 7.213 cm，而此例題之正確解析解 (Jasim and Ali 1997) 為 7.494 cm。若將此集中載重 P 改為一均勻分佈載重 $q=0.5$ KN/cm，分別利用四個正解元素與近似解元素進行模擬，同時將此均佈載重轉為等值節點力 (此處僅利用近似形狀函數所求之等值節點力)，可得到梁中點變位分別為 4.650 cm 與 4.502 cm，而此例題之正確解析解為 4.656 cm。



圖二：複合梁中點承受一集中載重

2. 考慮圖二所示之連續複合梁，第一跨承受一均勻分佈載重 $w=0.5$ KN/cm，其斷面特性與材料性質與上題相同。分別利用四個正解元素與近似解元素進行模擬，同時將此均佈載重轉為等值節點力 (此處僅利用近似形狀函數所求之等值節點力)，可得到梁中點變位分別為 3.315 cm 與 3.163 cm，而此例題之正確解析解為 3.319 cm (Jasim 1997)。由此二

例題，可充分證明本研究所發展之元素在複合梁線性分析上的正確性與簡潔性。



圖三：有分佈力之兩跨複合梁

3. 考慮圖二之簡支複合梁，跨長 L 為 4m，其斷面特性與材料性質 $E_c=1200\text{kN/cm}^2$ ， $A_c=150\text{cm}^2$ ， $I_c=312.5\text{cm}^4$ ， $E_s=800\text{kN/cm}^2$ ， $A_s=75\text{cm}^2$ ， $I_s=1406.25\text{cm}^4$ ， $K_s=5\text{ kN/cm}^2$ ， $h=10\text{ cm}$ 。此梁承受軸壓力 $P_N = 50\text{kN}$ 與一均勻分佈載重 $q = 1\text{kN/m}$ 。分別利用四個正解元素與近似解元素進行模擬，針對不同邊界條件下所得之挫屈值如下表所示（單位：kN）：

表一 挫屈值比較

邊界條件	解析解	正確元素	近似元素
懸臂梁	84.43	84.08	84.78
簡支梁	271.02	271.39	277.17
固端-鉸接	444.24	446.14	457.84
固端-自由	714.86	724.12	740.03

從表一之數值結果顯示本研究所推導之新元素在複合梁挫屈分析方面與解析解相當吻合，再次證明本元素之優越性。而此時梁中點在承受側向均佈載重與軸壓力下之變位，可利用二階近似分析推估其值分別為 0.925cm(正確元素)與 0.919cm(近似元素)，而二階效應之解析解為 0.928cm(Girhammar and Gopu 1993)。亦可證明本研究之近似二階分析相當準確。

結論

由數值結果顯示出本研究所推導之部分剪力聯結複合梁元素，不管是利用正確形狀函數或近似形狀函數所得之結果，在

線性分析及挫屈分析，甚至二階近似分析上均具有正確性與簡潔性。

四、計畫成果自評

本計畫已按原計畫內容執行，研究成果目前已發表了兩篇會議論文 (Leu and Huang 2000; Leu and Huang 2001)，而期刊論文目前正進行中。

五、參考文獻

- Bathe, K. J. (1996), *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Girhammar, U. A. and Gopu, V. K. A. (1993), "Composite beam-columns with interlayer slip-exact analysis," *J. Struct. Engrg., ASCE*, Vol. 119, No.4, pp. 1265-1282.
- Jasim, N. A. (1997), "Computation of deflections for continuous composite beams with partial interaction," *Proc. Inst. of Civ. Engrs., Structs & Bldgs*, Vol. 122, pp.347-354.
- Jasim, N. A. and M. Ali, A. A. (1997), "Deflections of composite beams with partial shear connection," *The Structural Engineer*, Vol. 75, No. 4, pp.58-61.
- Leu, L.-J. and Huang, C.-W. (2000), "Stiffness matrices for buckling analysis of composite beams with partial shear connection," *Proceedings of the First International Conference on Structural Stability and Dynamics (ICSSD)*, pp. 285-290, ed. Yang, Y.-B. et al., Taipei, Taiwan, December 7-9.
- Leu, L.-J. and Huang, C.-W. (2001), "Exact stiffness matrix for linear analysis of composite beams with partial shear connection," *Proceedings of the Eighth East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering & Construction (EASEC-8)*, Singapore, Singapore, December 5-7, (to be published).
- McGuire, W., Gallagher, R.H. and Ziemian, R.D. (2000), *Matrix Structural Analysis*, 2nd Ed., John Wiley & Sons, New York, N.Y..