

行政院國家科學委員會專題研究計畫 期中精簡報告

子計畫八：潛艦覆蓋材水中吸音特性之理論分析(1/3)

計畫類別：整合型計畫

計畫編號：NSC91-2611-E-002-018-

執行期間：91年08月01日至92年07月31日

執行單位：國立臺灣大學工程科學及海洋工程學系暨研究所

計畫主持人：王昭男

計畫參與人員：黃雪珠、曾一航

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 92 年 5 月 12 日

摘要

本文旨在探討多孔材在水中之吸音特性。首先依據 Biot 之理論求得在多孔材中存在之三種波，進而建立多孔材兩端應力與速度之矩陣轉換關係，同時也將流體-多孔材、多孔材-彈性固體、流體-彈性固體間之交界面條件以傳輸矩陣方式描述，透過矩陣之結合與串聯即可探討聲波入射多孔材之吸音性能。文中首先分析空氣中玻璃棉之音響阻抗以驗證理論之正確性，其次又分析不同聲波在海底沙質底層之衰減係數，並與其他文獻之實驗數據比較，更進一步驗證本文理論的正確性。

關鍵字：多孔材、吸音、傳輸矩陣

Abstract

The purpose of this study is to investigate the sound absorption characteristics of the porous material saturated with water. According to Biot's theory, there are three waves can exist when a sound wave incident on the porous material. Then the transfer matrix between the two ends of the porous layer has been derived. Further, the boundary conditions on the contact interfaces, such as fluid-porous material, porous material-elastic solid and fluid-elastic solid, are also expressed as the form of transfer matrix. The combination of these matrices can be used to analyze the sound absorption characteristics of the porous material backed with elastic solid. To verify the accuracy of the present study, the surface impedance of a glass wool in air is analyzed and compare to the result in literature. Further, the propagation constants and sound speeds in ocean sediment are also verified. The agreements are all pretty good. Finally the effects of the parameters are investigated.

Keyword: porous material, sound absorption, transfer matrix

一、前言

多孔材內部纖維之幾何結構十分複雜，聲音在多孔材中的波傳特性不易求得，Stinson [1] 提出黏性與熱效應之關係以估算多孔材中流體之有效密度與體積模數，Attenborough[2]亦對多孔材進行微觀的討論，確立了楊氏係數、蒲松比、體積密度、孔隙率、曲折度及流動阻抗等參數對聲波在多孔材中傳播之影響。但上述之研究皆假設材料之骨架為剛性結構體。Biot 在 1956 年提出充滿流體之多孔彈性體的波傳理論[3,4]，之後 Allard 等人則以彈性理論建立多孔材的轉換矩陣關係[5]。

除了將 Biot 理論用於空氣中聲波傳播之研究外，對於聲波在海底底層沉積物中之衰減與反射之探討亦相當重要，Stoll [6] 以 Biot 理論為基礎分析了聲波在

不同深度之沙與泥中的聲速，同時也探討剪力波與壓縮波之衰減係數，Yamamoto[7] 也探討多孔彈性底層下海中聲波之傳播，發現剪力模數與頻率-孔隙-黏性合成數為兩個最重要參數。其後，Stoll [8,9] 分析了水與沉積物介面之反射係數。

本研究將進行彈性多孔材聲波傳播之傳輸矩陣與不同物質間接觸面之轉換關係之推導，其後進行水中沙質多孔材之聲波衰減係數分析，並與文獻之結果比較，以驗證理論之可靠性，之後則進行不同參數對性能影響之探討。

二、彈性多孔材理論分析

依據 Biot 之推導，在多孔材中的應力與應變關係可表示為：

$$\text{結構體：} \quad s_{ij}^s = [(P - 2N)q^s + Qq^f]d_{ij} + 2N e_{ij}^s$$

$$\text{流體：} \quad s_{ij}^f = (-f p) = Qq^f + Rq^s$$

其中 N 為材料的剪力模數， P 、 Q 、 R 為彈性係數，可用體積模數表示為

$$P = \frac{(1-f)[1-f-\frac{K_b}{K_s}]K_s + f\frac{K_s}{K_f}K_b}{1-f-K_b/K_s + fK_s/K_f} + \frac{4}{3}N$$

$$Q = \frac{[1-f-K_b/K_s]fK_s}{1-f-K_b/K_s + fK_s/K_f}$$

$$R = \frac{f^2K_s}{1-f-K_b/K_s + fK_s/K_f}$$

此外 Biot 亦引入在流體與結構體相對運動所產生之慣性力，此慣性力與流體之黏性無關，再結合流體黏性生成作用力項，則可得到流體與結構體之運動方程式為

結構體：

$$\begin{aligned} & -W^2(\tilde{\gamma}_{11}\mathbf{u}^s + \tilde{\gamma}_{12}\mathbf{u}^f) \\ & = (P - N)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}^s + N\nabla^2\mathbf{u}^s + Q\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}^f \end{aligned}$$

流體：

$$\begin{aligned} & -W^2(\tilde{\gamma}_{22}\mathbf{u}^f + \tilde{\gamma}_{12}\mathbf{u}^s) \\ & = R\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}^f + Q\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}^s \end{aligned}$$

$$\text{其中} \quad \tilde{\gamma}_{11} = r_1 + r_a - j\frac{n}{k_s}f^2\frac{F(w)}{w}, \quad \tilde{\gamma}_{12} = -r_a + j\frac{n}{k_s}f^2\frac{F(w)}{w}$$

$$\tilde{\gamma}_{22} = fr_0 + r_a - j\frac{n}{k_s}f^2\frac{F(w)}{w}, \quad F(k) = \frac{1}{4} \frac{kT(k)}{1 - 2T(k)/ik}$$

$$T(k) = \frac{ber'(k) + ibei'(k)}{ber(k) + ibei(k)}, \quad k = a(w r_0 / n)^{1/2}, \quad r_a = f r_0 (a_\infty - 1)$$

$ber(k)$, $bei(k)$ 分別為 Kelvin 函數之實部與虛部， a 則為代表孔洞形狀與大小之參數， k_s 則為滲透率(permeability)。

假設結構體與流體之純量位移勢能為 j^s 與 j^f ，因此 $\mathbf{u}^s = \nabla j^s$ 且 $\mathbf{u}^f = \nabla j^f$ ，則運動方程式成為

$$\begin{aligned} -w^2(\tilde{\gamma}_{11}j^s + \tilde{\gamma}_{12}j^f) &= P\nabla^2 j^s + Q\nabla^2 j^f \\ -w^2(\tilde{\gamma}_{22}j^f + \tilde{\gamma}_{12}j^s) &= R\nabla^2 j^f + Q\nabla^2 j^s \end{aligned}$$

求解此聯立方程式可得兩特徵值(此即為兩壓縮波之複數波數的平方值)與兩特徵向量，進而可得到此兩壓縮波之特徵阻抗(characteristic impedance)。相同的若假設結構體與空氣之向量位移勢能為 $\mathbf{y}^s$ 與 $\mathbf{y}^f$ ，即 $\mathbf{u}^s = \nabla \times \mathbf{y}^s$ 且 $\mathbf{u}^f = \nabla \times \mathbf{y}^f$ ，則運動方程式成為

$$\begin{aligned} -w^2(\tilde{\gamma}_{11}\mathbf{y}^s + \tilde{\gamma}_{12}\mathbf{y}^f) &= M\nabla^2 \mathbf{y}^s \\ -w^2\tilde{\gamma}_{22}\mathbf{y}^f - w^2\tilde{\gamma}_{12}\mathbf{y}^s &= 0 \end{aligned}$$

合併整理得到

$$\nabla^2 \mathbf{y}^s + \frac{w^2}{N} \left(\frac{\tilde{\gamma}_{11}\tilde{\gamma}_{22} - \tilde{\gamma}_{12}^2}{\tilde{\gamma}_{22}} \right) \mathbf{y}^s = 0$$

利用此方程式亦可求得剪力波之特徵值。

由前述之推導可知聲音在多孔介質中傳播，可有三種波存在(兩個壓縮波及一個剪力波)，其中有一壓縮波衰減相當快。若吸音材為有限厚度，則有反射波形成，因此需選用六個獨立之物理量方足以描述聲波在有限厚度多孔吸音材兩邊之關係。

三、轉換矩陣求反射、穿透係數

轉換矩陣 (transfer matrix) 是為建立材料邊界與邊界間的應力、速度關係。有了此轉換矩陣，我們可以任意組合材料，求得聲音在此複合材質中的波傳特性，對於材料反射的估算，更是快速便捷許多。

(1) 多孔材之轉換矩陣

由上節我們可知彈性多孔材內可有兩個壓縮波及一個剪力波，如圖 1 所示

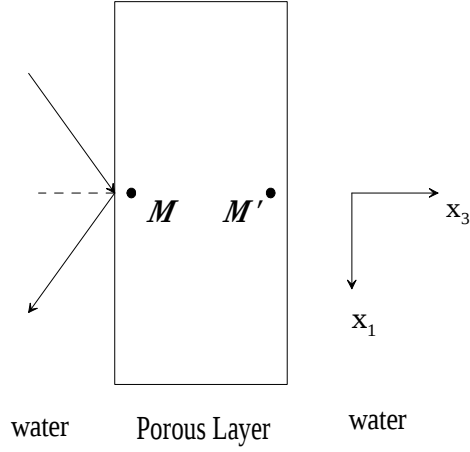


圖 1 多孔材兩端之應力與速度關係

在 M 點之特徵物理量可寫成一矩陣為

$$V_p(M) = [\nu_1^s \quad \nu_3^s \quad \nu_3^f \quad s_{33}^s \quad s_{13}^s \quad s_{33}^f]^T$$

而在另一端邊界則為 $V(M')$ ，兩者間之關係可用一轉換矩陣 $[T]$ 來表示，即為 $V_p(M) = [T] V_p(M')$ 。其中 $[T] = [\Gamma(0)][\Gamma(\ell)]^{-1}$ ，而 $\Gamma(x)$ 為 6×6 之矩陣，其表示式見附錄二。同理聲波彈性固體（鋁板、鐵板...）的轉換矩陣亦可如此推導

$$V_s(M) = [\Gamma_s(0)][\Gamma_s(\ell)]^{-1} V_s(\ell) = [T_s] V_s(M')$$

其中 $V_s(x) = [\nu_1^s \quad \nu_3^s \quad s_{33}^s \quad s_{13}^s]^T$ ，而 $[\Gamma_s(x)]$ 見附錄一。

(2) 材料界面之轉換矩陣

如圖 2，對於不同材料之間的組合，其交界面亦可利用速度與應力的連續條件建立一轉換矩陣。在彈性體與多孔材之交界面上需符合應力與速度連續之條件，即

$$[I_{s,p}] V_s(C) + [J_{s,p}] V_p(D) = 0$$

其中 $[I_{s,p}] = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $[J_{s,p}] = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

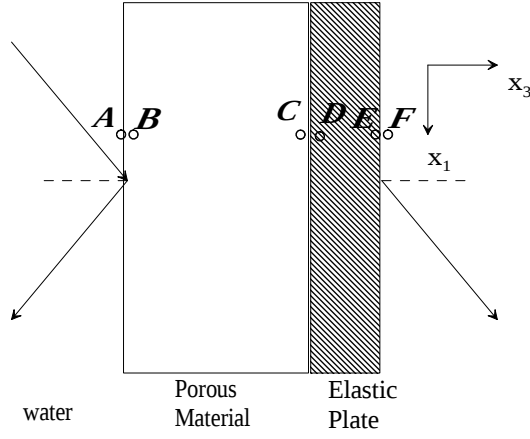


圖 2 不同材料之組合

流體與多孔材之交界面上之傳輸矩陣則為

$$[I_{f,p}]V_f(M_1) + [J_{f,p}]V_p(M_2) = 0$$

其中

$$[I_{f,p}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ f_2 & 0 \\ 1-f_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [J_{f,p}] = \begin{bmatrix} 0 & 1-f_2 & f_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

而流體與彈性固體之交界面上之傳輸矩陣則可表為

$$[I_{f,s}]V_f(M_1) + [J_{f,s}]V_s(M_2) = 0$$

其中

$$[I_{f,s}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [J_{f,s}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 吸音係數

假設在材料透射邊之流體(水)為半無窮，則表面 F 點之阻抗等於流體之阻抗，即 $Z_f = p(F)/v_3(F) = Z_c / \cos q$ 。而在材料之入射表面 A 點，其壓力與速度的關係可用一表面阻抗來表示 $p(A) - Z_a v_3(A) = 0$ 。最後將各材質與界面間所有的轉換矩陣與上列兩式整理成一組從 A 點到 F 點的矩陣方程，亦即

$$\begin{bmatrix} -1 & Z_a & 0 & \dots & 0 \\ & & [D] & & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & Z_b \end{bmatrix} V_D = 0$$

上列矩陣之行列式為零即可得到材料表面之音響阻抗 Z_a ，進而求得反射係數

$$R_a = (Z_a - Z_c / \cos q) / (Z_a + Z_c / \cos q)$$

吸音係數則為

$$a = 1 - |R_a|^2$$

四、結果與討論

實驗驗證

為驗證本文理論之正確性，文中選取文獻 10 所分析之多孔吸音材在空氣中進行聲波垂直入射吸音率之驗證(如圖 3 所示)，由圖形之比較可知本文之計算與實驗結果相近，同時與文獻 10 之分析亦相當吻合。其次，也進行了以水為介質之沙質多孔材分析，並與文獻[6]之結果作比較驗證。分析所需各參數如表一所示，圖 4 與 5 分別為多孔沙質在不同深度下之第一類壓縮波與剪力波之波速，第二類壓縮波因其衰減快速，文獻中並未列入討論，圖 6 則為壓縮波與剪力波之衰減係數之比較。由圖形之比較可知，本文所使用之理論應可信賴，雖然數值不完全一致，但仍屬可接受。此誤差之原因在於文獻中係給定參數之數值範圍，因此，以表一之數值進行模擬，可能與文獻中之分析並不相同所致。圖中亦顯現，在不同之頻率下，波速會產生變化即有頻散(dispersion)之現象產生，本文分析產生頻散之發生頻率與文獻[6]之結果相當近似，但波速之分析則略有差異。衰減係數之分析則相當符合。

五、結語

本文首先建立了彈性多孔材與彈性固體之傳輸矩陣，同時也將交界面上之邊界條件以矩陣方式描述，透過矩陣之串聯結合可以進行多孔材之吸音係數分析，文中比較了空氣中吸音材之音響阻抗，也分析了水中孔隙沙質材料之波傳速度與衰減係數，與文獻之分析比較亦相當吻合，說明本研究所建立理論之正確性。而本研究以傳輸矩陣方式建構，對於多層材質組合之分析相當便利。

在 Biot 彈性理論中之彈性係數 P 、 N 、 Q 、 R 的值因材料而異，通常要進行多個實驗之量測，在本文中採已發表之數值代入分析，但對不同材質如何給定理想之彈性係數則是一大問題。故對於材料特性的研究或實驗方法之建立，可為未來繼續努力的方向。

參考文獻

1. Stinson, M. R., The propagation of plane sound wave in narrow and wide circular tubes, and generalization to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape., J. Acoust. Soc. Amer., 89, 550-558 (1991).
2. Attenborough, K., Acoustical characteristics of porous materials., Physics Reports., 82, 179-227 (1982).
3. Biot, M. A., The theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range., J. Acoust. Soc. Amer., 28, 168-178 (1956).
4. Biot, M. A., The theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous

- solid. II. High frequency range., J. Acoust. Soc. Amer., 28, 179-191 (1956).
5. Allard, J. F., Champoux, Y. and Depollier, C., Modelization of layered sound absorbing materials with transfer matrices., J. Acoust. Soc. Amer., 82, 1792-1796 (1987).
 6. Stoll, R. D., Acoustic waves in ocean sediments, Geophysics, 42(4), 715-725, 1977.
 7. Yamamoto, T., Acoustic propagation in the ocean with a poro-elastic bottom, J. Acoust. Soc. Amer., 73(5), 1587-1596, 1983.
 8. Stoll, R. D., Experimental studies of attenuation in sediments, J. Acoust. Soc. Amer., 66(4), 1152-1160, 1979.
 9. Stoll, R. D. and Kan, T. K., Reflection of acoustic waves at a water-sediment interface, J. Acoust. Soc. Amer., 70(1), 149-156, 1981.
 10. Allard, J. F., Propagation of sound in porous media: Modeling sound absorbing materials, Elsevier Applied Science, London, 1993.
 11. Gary, D. E., American Institute of Physics Handbook, McGraw-Hill, New York (1981).

計劃成果自評

本研究內容與原申請計劃本年度工作相符程度約可達到九成以上，與原先之預期目標相去不遠，理論之推導已完成，且經過空氣與水兩種介質之驗證，其中最主要之困難點是各種材料係數之獲得，雖然在本研究中收集到若干材料之性質，但仍嫌不足，對不同多孔材之分析仍有其困難，下年度將持續努力，以使理論之應用能更趨完善。

表 一 材料性質

參數	10 m	100 m
Bulk modulus of frame K_s	$3.6 \times 10^{10} \text{ pa} / \text{m}^2$	$3.6 \times 10^{10} \text{ pa} / \text{m}^2$
Bulk modulus of fluid K_f	$2 \times 10^9 \text{ pa} / \text{m}^2$	$2 \times 10^9 \text{ pa} / \text{m}^2$
Mass density of frame	$2650 \text{ kg} / \text{m}^3$	$2650 \text{ kg} / \text{m}^3$
Mass density of fluid ρ_0	$1000 \text{ kg} / \text{m}^3$	$1000 \text{ kg} / \text{m}^3$
Viscosity of fluid η	$1.0 \times 10^{-3} \text{ N} - \text{sec} / \text{m}^2$	$1.0 \times 10^{-3} \text{ N} - \text{sec} / \text{m}^2$
Coefficient of permeability	$1.0 \times 10^{-10} \text{ m}^2$	$1.0 \times 10^{-10} \text{ m}^2$
Porosity	0.47	0.47
Structure factor	1.25	1.25
Bulk modulus of frame K_b	$(4.3 + i0.0049) \times 10^9 \text{ pa} / \text{m}^2$	$(4.7 + i0.0049) \times 10^9 \text{ pa} / \text{m}^2$
Shear modulus	$(1.3 + i0.02) \times 10^8 \text{ pa} / \text{m}^2$	$(4.2 + i0.0154) \times 10^8 \text{ pa} / \text{m}^2$
Pore size parameter	$1.2 \times 10^{-5} \text{ m}$	$1.2 \times 10^{-5} \text{ m}$

附 錄 一

$\mathbf{V}_s$	$[\Gamma_s(x)]$ first two columns	
ν_1^s	$wk_t \cos k_{13}x$	$-jwk_t \sin k_{13}x$
ν_3^s	$-jwk_{13} \sin k_{13}x$	$wk_{13} \cos k_{13}x$
s_{33}^s	$[-P(k_t^2 + k_{13}^2) + 2Nk_t^2] \cos k_{13}x$	$\mathcal{J}[P(k_t^2 + k_{13}^2) - 2Nk_t^2] \sin k_{13}x$
s_{13}^s	$2jNk_t k_{13} \sin k_{13}x$	$-2Nk_t k_{13} \cos k_{13}x$
$\mathbf{V}_s$	$[\Gamma_s(x)]$ last two columns	
ν_1^s	$jwk_{33} \sin k_{33}x$	$-wk_{33} \cos k_{33}x$
ν_3^s	$wk_t \cos k_{33}x$	$-jwk_t \sin k_{33}x$

S_{33}^s	$2jNk_t k_{33} \sin k_{33}x$	$-2Nk_t k_{33} \cos k_{33}x$
S_{13}^s	$N(k_{33}^2 - k_t^2) \cos k_{33}x$	$-jN(k_{33}^2 - k_t^2) \sin k_{33}x$

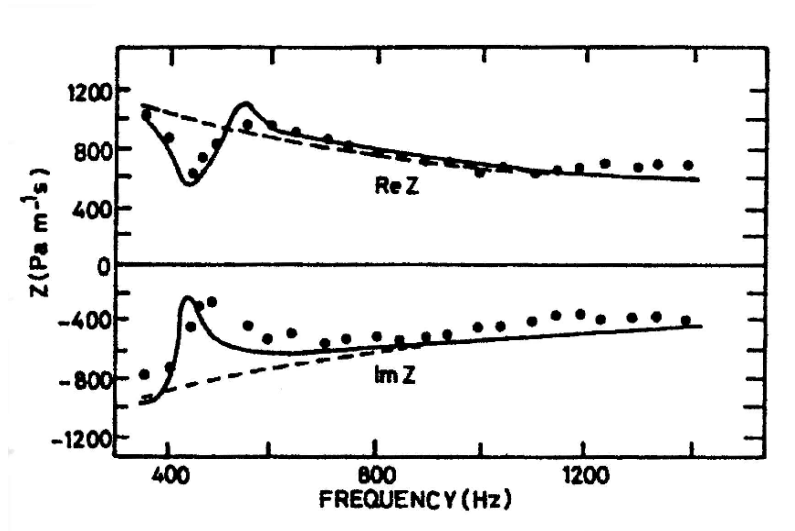
附 錄 二

V_p	$[\Gamma_p(x)]$ first three columns		
V_1^s	$wk_t \cos k_{13}x$	$-jwk_t \sin k_{13}x$	$wk_t \cos k_{23}x$
V_3^s	$-jwk_{13} \sin k_{13}x$	$wk_{13} \cos k_{13}x$	$-jwk_{23} \sin k_{23}x$
V_3^f	$-jwk_{13}m_1 \sin k_{13}x$	$wk_{13}m_1 \cos k_{13}x$	$-jwk_{23}m_2 \sin k_{23}x$
S_{33}^s	$-D_1 \cos k_{13}x$	$jD_1 \sin k_{13}x$	$-D_2 \cos k_{23}x$
S_{13}^s	$2jNk_t k_{13} \sin k_{13}x$	$-2Nk_t k_{13} \cos k_{13}x$	$2jNk_t k_{23} \sin k_{23}x$
S_{33}^f	$-E_1 \cos k_{13}x$	$jE_1 \sin k_{13}x$	$-E_2 \cos k_{23}x$
V_p	$[\Gamma_p(x_3)]$ last three columns		
V_1^s	$-jwk_t \sin k_{23}x$	$jwk_{33} \sin k_{33}x$	$-wk_{33} \cos k_{33}x$
V_3^s	$wk_{13} \cos k_{23}x$	$wk_t \cos k_{33}x$	$-jwk_t \sin k_{33}x$
V_3^f	$wk_{23}m_1 \cos k_{23}x$	$wk_t m_3 \cos k_{33}x$	$-jwk_t m_3 \sin k_{33}x$
S_{33}^s	$jD_2 \sin k_{23}x$	$2jNk_t k_{33} \sin k_{33}x$	$-2Nk_t k_{33} \cos k_{33}x$
S_{13}^s	$-2Nk_t k_{23} \cos k_{23}x$	$N(k_{33}^2 - k_t^2) \cos k_{33}x$	$-jN(k_{33}^2 - k_t^2) \sin k_{33}x$
S_{33}^f	$jE_2 \sin k_{23}x$	0	0

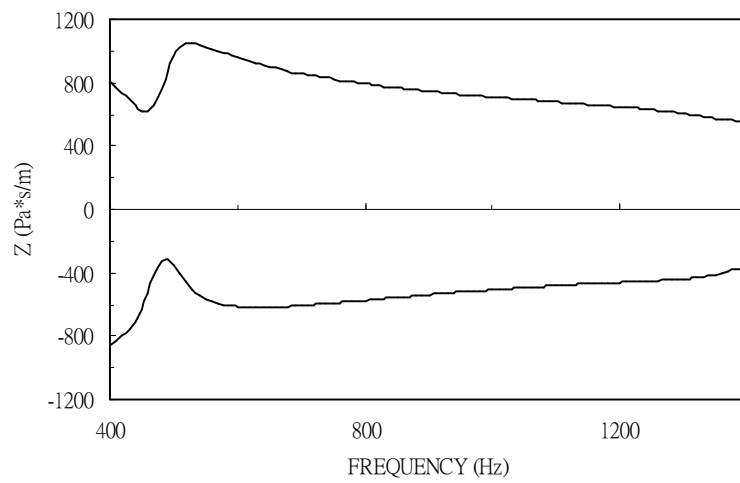
$$k_t = \frac{W}{C_0} \sin \epsilon_i = k \sin \epsilon_i, \quad k_{j3} = (d_j^2 - k_t^2)^{1/2} \quad j=1,2,3$$

$$D_j = (P + Qm_j)(k_t^2 + k_{j3}^2) - 2Nk_t^2 \quad j=1,2$$

$$E_j = (Q + Rm_j)(k_t^2 + k_{j3}^2) \quad j=1,2$$



(a) Ref. [10]之 實驗數據●，彈性理論計算—，剛性結構體理論計算---



(b) 本文之理論分析

圖 3. 材料表面音響阻抗之比較

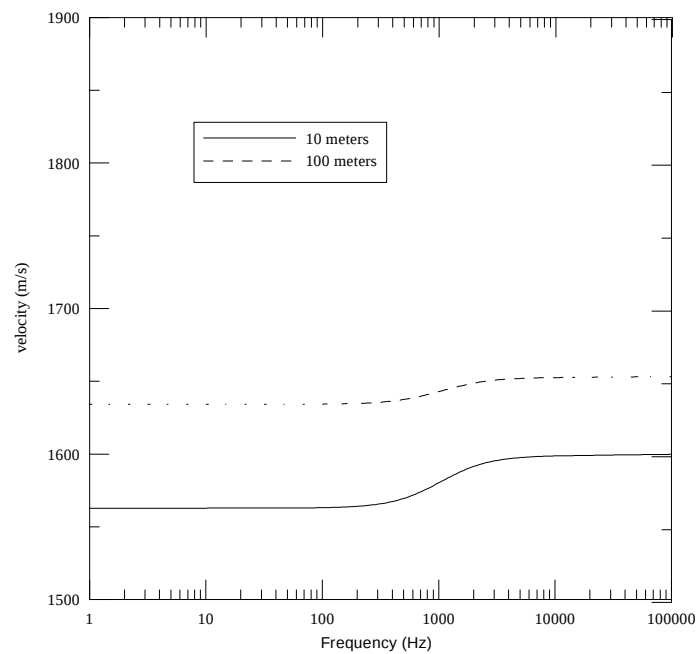
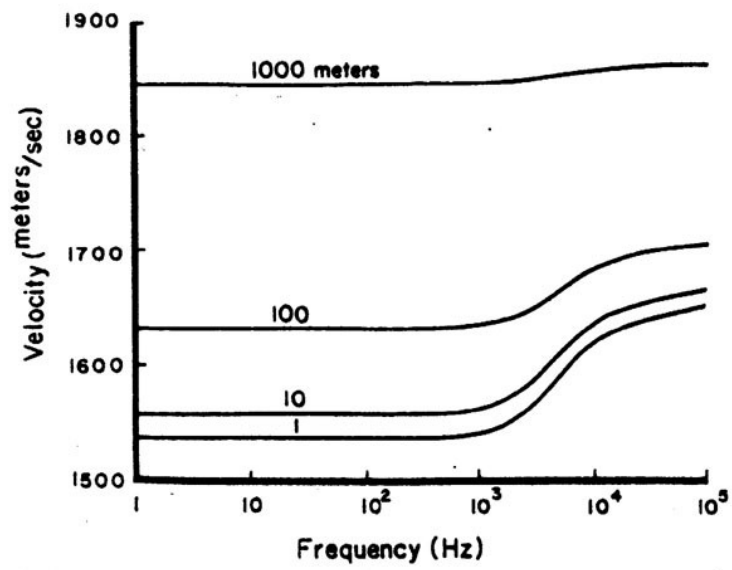


圖 4. 沙質底層之第一類壓縮波波速
上:文獻[6]之結果，下:本文之分析

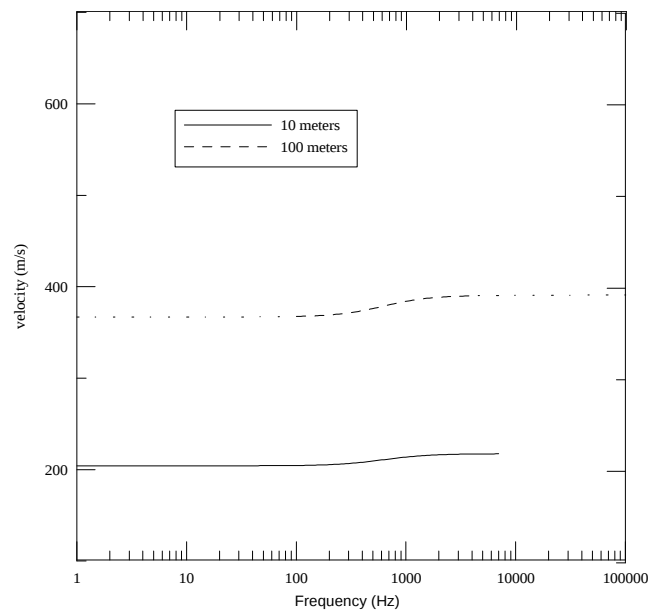
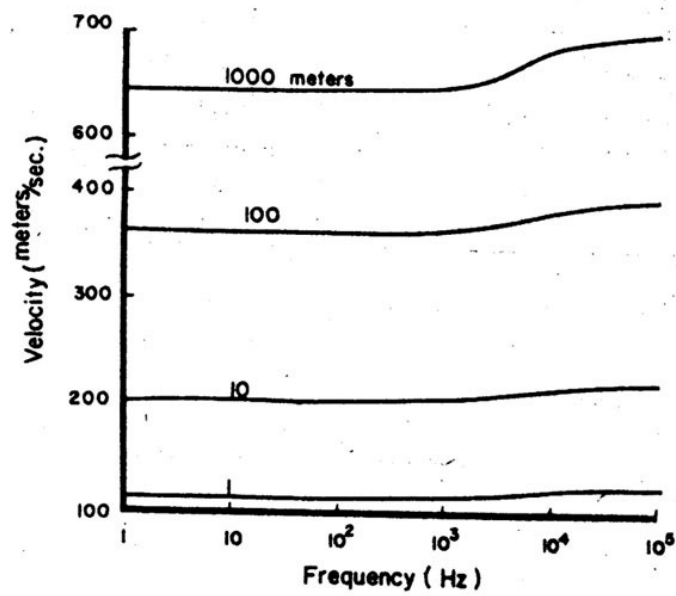


圖 5. 沙質底層之剪力波波速
上:文獻[6]之結果，下:本文之分析

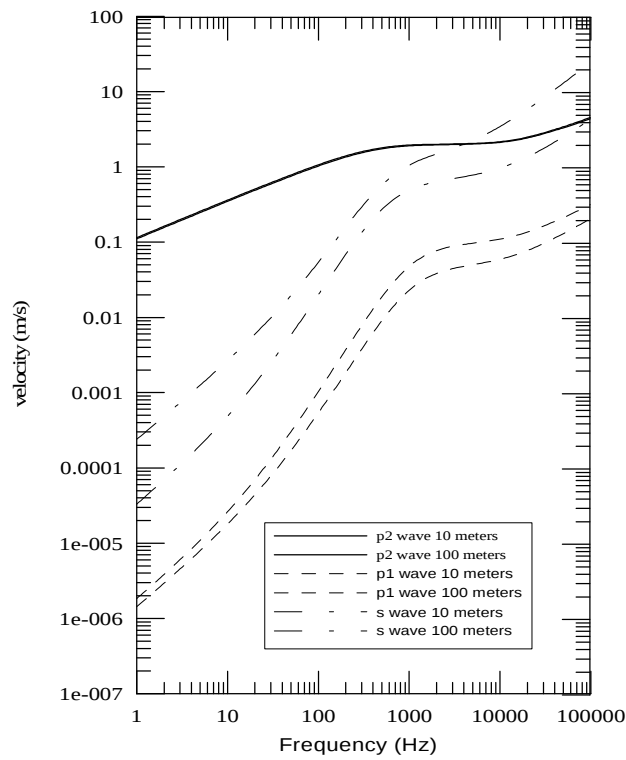
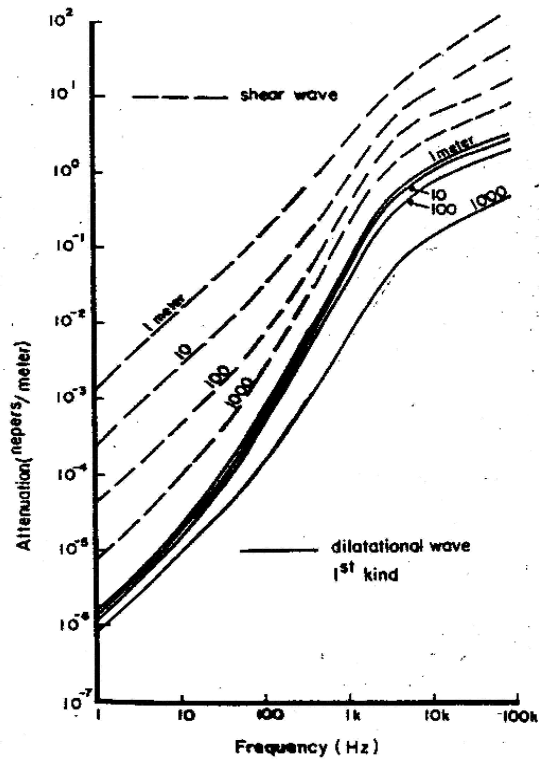


圖 6. 沙質底層之剪力波與兩類壓縮波之衰減係數
上:文獻[6]之結果，下:本文之分析

