

目錄

頁次

目錄	I
表目錄	III
圖目錄	IV
第一章 緒論	1
第二章 二維平面結構迴傳矩陣法之理論建立	6
2.1 二維平面結構之節點、桿件與符號定義	6
2.2 節點之力平衡方程式	8
2.3 節點之諧合方程式	13
2.4 節點之載重源向量與傳遞分配矩陣	14
2.4.1 自由節點	14
2.4.2 鉸支承	15
2.4.3 輻支承	18
2.5 轉列矩陣	21
2.6 結構之迴傳矩陣	25
第三章 三維結構迴傳矩陣法之理論建立	27
3.1 三維結構之總體座標和局部座標	27
3.2 節點平衡方程式	29
3.3 節點諧合方程式	36
3.4 節點載重源向量與傳遞分配矩陣	36

表目錄

表2-1 向量 \bar{a} 與向量 a 之表示式	60
表4-1 迴傳矩陣法所得之位移(m).....	61
表4-2 SAP2000分析所得之位移(m).....	61
表4-3 迴傳矩陣法所得之節點力(kN , $kN-m$).....	62
表4-4 SAP2000分析所得之節點力(kN , $kN-m$).....	62
表4-5 迴傳矩陣法所得之位移(m).....	63
表4-6 SAP2000分析所得之位移(m).....	63
表4-7 迴傳矩陣法所得之節點力(kN , $kN-m$).....	64
表4-8 SAP2000分析所得之節點力(kN , $kN-m$).....	64
表4-9 迴傳矩陣法所得之位移(m).....	65
表4-10 SAP2000分析所得之位移(m).....	65
表4-11 迴傳矩陣法所得之節點力(kN , $kN-m$).....	66
表4-12 SAP2000分析所得之節點力(kN , $kN-m$).....	67
表5-1 鋁材之材料性質.....	68
表5-2 靜力試驗結果與理論分析結果之比較(應變).....	69

圖目錄

圖2-1 結構模型與節點編號.....	7
圖2-2 對稱之 π 形構架	23
圖3-1(a) 總體座標系統.....	28
圖3-1(b) 局部座標系統.....	28
圖3-2(b) 對稱結構.....	49
圖4-1 非對稱構架	70
圖4-2 三維立體剛架結構	71
圖5-1(a) 鋁模型剛架(上視圖).....	72
圖5-1(b) 鋁模型剛架-側視圖(短向).....	73
圖5-1(c) 鋁模型剛架-側視圖(長向).....	74
圖5-2(a) 模型基礎型鋼(上視圖).....	75
圖5-2(b) 模型基礎型鋼(A-A斷面).....	76
圖5-2(c) 模型基礎型鋼(B-B斷面).....	77
圖5-2(d) 模型基礎型鋼(C-C斷面).....	78
照片5-1(a) 鋁模型剛架	79
照片5-1(b) 鋁模型剛架(短向).....	79
照片5-1(c) 鋁模型剛架(長向).....	80
照片5-2 掛鉤.....	80
照片5-3 滑輪支承柱.....	81
照片5-4 滑輪.....	81
照片5-5(a) 基座	82
照片5-5(b) 基座	82
照片5-5(c) 基座	82
照片5-6 柱基板.....	83
照片5-7(a) 施加靜力照片	83
照片5-7(b) 施加靜力照片	84

圖5-3 桿件7-8靜力加載與卸載之應變	85
圖5-4 桿件10-11靜力加載與卸載之應變	86
圖5-5 桿件8-9(前)靜力加載與卸載之應變	87
圖5-6 桿件8-9(後)靜力加載與卸載之應變	88
圖5-7 桿件8-11靜力加載與卸載之應變	89
圖5-8 桿件9-8靜力加載與卸載之應變	90

第一章 緒論

結構或彈性體之動態反應分析大致可分為振動模式分析與應力波分析兩種層次。早期為解決大型火車對於桁架鐵橋之衝擊，布氏(Boussinisque)曾以縱波運動理論研討軸向波(縱波)在桁架桿件中之傳播，但仍無具體結論[1]。此後遂多採用振動模式分析法。1940年代起，為因應新型航空結構之發展及地震區域高層建築之設計，結構動力學之研究極為活躍。至1960年代乃有專書多冊問世，一直沿用至今[2,3,4]。各書中均以振動模式分析法為主體。配合1950年代起所發展之有限元素法[5]與大型數位電腦之問世，而成為結構動力分析與設計之主要工具。然而波動分析法之研究仍緩慢在進行[6]。近年來亦有專書討論[7]。

振動模式分析法主要用於分析結構之穩態反應(steady-state response)，包括頻率與模態之分析與計算。理論上該法將無窮多項之振動模式依傅立葉轉換法組合可計算結構之瞬態反應(transient response)。實際上因模態及頻率之精確計算困難，因此僅能疊加少數項之反應，稱為瞬時振動之近似反應。若利用有限元素法計算其中之勁度矩陣(stiffness matrix)及質點矩陣(inertia matrix)或加入阻尼矩陣以降低數值計算的困難度，雖能增加若干高頻振動模式，然增加假設條件，計算的誤差也隨之增加[8]。上述之計算結果雖可反應出結構整體系統之一般特性，但仍無法掌握結構桿件之動應力與動應變，遑論動應力集中與局部破壞現象。若應於高速外力撞擊時，其初期瞬態反應含重大誤差。此外，就複雜結構如超高層大樓及長跨度橋梁對應力波傳播之效應亦無從探究。

應力波動法先分析結構中各桿件可能傳播之三種應力波，軸向壓

力波(axial wave)、扭曲剪力波(torsional wave)與撓曲波(flexural wave)。第一種波屬於縱波，第二種波為橫波，第三種波由彎矩及剪力產生。質點之運動兼有縱向與橫向，屬於散頻波(dispersive wave)。三種波之分析又可歸納為駐波法(standing wave)與行波法(progressive wave)，均早已分析完成[7]。各桿件經節點連接後，如用駐波法處理則需要應付繁雜眾多之邊界條件方能求解，迄今僅用於二維簡單結構之分析[2]。如採用行波法處理，則桿件中每一種波傳至節點時，因反射與折射而產生三種波傳至鄰近之所有桿件，通稱為節點散射(scattering at joints)。如此經過幾次散射後，各桿件中之三種行波疊加而顯示複雜之動力反應。在 1980 年代中期為了解決耐強震結構設計、太空船及太空站之結構振動控制、非破壞性檢測、結構系統識別與聲電及積體電路元件內電波與力波之耦合等問題，加速了應力波在網格型結構中傳播之研究。

本計劃主持人近年來致力於應力波動法之研究，於 1987 年與 1989 年間在美國康乃爾大學進行桁架與剛架中應力傳播之分析與實驗。首先以行波法建立穩態反應時軸向波波幅係數在各節點之散射矩陣，進而組成在桁架中經節點多次反射與折射之迴傳波射矩陣，再以傅立葉轉換法計算桿件中之瞬態波。另完成小型鋁製桁架之模型試驗，於節點上驟然加力(階梯時間函數)並以應變規量測各桿件之動力應變。因僅考慮軸向波故理論值與實驗值僅在反應最初時期吻合。若將先前之迴傳矩陣修改擴展為以分析壓力波與撓曲波共同存在於同一根桿件之散射，其結果之精度大為改善，與實驗的結果比較，至波峰底達時至反應最高時，兩者極為相近[10]。主持人亦研究三維剛架之動力反應[11]，同時考慮軸向波、撓曲波與扭曲波三種波於節點之散射，應用於兩層樓之梁、柱剛架結構驟加外力之波傳現象。三維剛架結構在節點受到外力作用時，交於相同節點之每一構件將產生軸向壓力波(縱波)、扭轉剪力波(橫波)與沿斷面兩主軸方向之撓曲波(縱向

兼橫向波)共四種。每一種波傳遞至另一節點時由於波的反射與折射作用，將同時產生四種波傳入鄰近之所有構件，稱為節點散射現象。軸向波與扭轉波均滿足波動方程式，兩軸之撓曲波則滿足 Timoshenko 梁之橫向運動方程式。各種波均可以入射波幅係數及離射波幅係數與波相函數之乘積表示，每一構件中各有十二個未知波幅係數。透過節點之平衡方程式與諧合條件組成散射矩陣，可計算接於同一節點之每一構件由於散射作用所產生之波幅係數。經過多數節點連續散射後，各種波將在整個結構中反覆來回傳播，發生迴傳(reverberation)現象。迴傳波幅之強度可由各節點所組成之迴傳波射矩陣計算之。波幅係數與波相函數之乘積構成結構之穩態波，再經由傅立葉轉換與逆傅立葉轉換的過程即完成結構中瞬態波之分析與計算。

這一系列的研究已初步證實此一新發展之分析方法可超越現存結構動力分析理論之範疇，甚具發展潛力。惟此研究領域在建立完整學說之前仍有一些課題亟待解決，包括：

- (1) 二維桁架理論與實驗之修正。平面桁架之實驗已初步完成[9,10]。雖然實驗結果與理論分析在最大反應以前有良好的相關性，但在此時以後兩者相去頗大，必須從理論或新實驗中找出原因。
- (2) 結構樓板自重之影響。先前之研究無論是二維桁架[10]或是三維剛架[11]均未包含桁架橋面或剛架樓板之自重。本計畫將於分析模式中加入樓板自重，使分析更為真實(realistic)。
- (3) 三維剛架之動力實驗。三維剛架之理論經考慮樓板自重後應屬完整。有關立體剛架之實驗則仍待進行，以確認相關理論之合理性。此一實驗難度極高，首先，衝擊力或是階梯形式重覆施力之相關設備不易設置。暫態波傳反應稍縱即逝(每秒約五公里)，各項記錄

儀器須能精確至一微秒(10^{-6} 秒)，儀器的頻寬在百萬赫以上(10^6 Hertz)。因此，試驗前需要嚴密的規劃與設計。

(4)地震波振動之影響。現有之理論與實驗均為在結構之節點上外加動力，若結構的基礎受地震波影響時，在理論與實驗兩方面均須重新考慮。

(5)通用分析程式之建立。對於各式結構之波動與振動分析，須發展一套簡易使用的程式，俾能推廣其應用。

本計劃擬以三年的時間，進行一系列有關迴傳波射矩陣法在三維空間剛構之結構動力分析與試驗等研究工作。第一年將進行三維空間剛架之理論分析(考慮構件與樓板自重)與程式發展，並設計製造剛架模型之靜力試驗。第二年將進行三維空間剛架結構模型之驟加力實驗，並與理論分析以及有限元素分析結果比較，必要時修正理論分析模式。第三年將進行三維空間剛架之地震波振動試驗，利用交通大學土木系自製完成之地震模擬振動台進行試驗，並與理論分析結果以及有限元素分析結果比較，必要時修正理論分析模式。

本計劃所發展之迴傳射線分析法如能完成，可根本解決在各型剛架結構中百年來懸而未決之應力波傳問題。揭示暫態波的傳播規律與特性，提供吾人分析結構波動特性與振動特性之基本工具。同時由波動的角度及振動的角度瞭解結構之瞬間動態反應。它超越現存結構動力學之理論範疇，開啟結構動力學之新頁。這項理論自成體系，其不僅可彌補有限元素法之不足，更可提供吾人研究波動控制和振動控制之基礎。對於我國在國際上學術地位之提升將有具體貢獻。此外，該方法可應用於飛機與火箭結構之精密設計、結構防震工程、結構破壞檢測等技術發展，將有助於國家之經濟建設及國防科技之發展。

本篇報告為三年計劃之第一年期末報告，第一年之研究重點為：兩層樓鋁管模型剛架之製作、波動量測儀器之採購與測試、靜力試驗及驟加外力設備之研製。目前已達成計劃之既定目標。本報告內容包括：第一章為緒論。第二章為二維平面結構迴傳矩陣法(Reverberation Matrix Method, RMM)之理論回顧，應用迴傳波射法之概念發展出迴傳矩陣法，可應用於結構之靜力分析。第三章則進一步推導三維結構之迴傳矩陣法，並將迴傳矩陣法與彎矩分配法[12,13,14,15]進行比較分析。第四章為實例分析，本研究以兩個不同之平面構架(包括對稱結構與非對稱結構)及一兩層樓空間構架為例，利用迴傳矩陣法進行理論分析，並將分析所得之結果與利用有限元素分析軟體 SAP2000 分析所得之結果進行比較，以驗證迴傳矩陣法之精確性，同時檢驗有限元素分析軟體之可靠性。第五章為三維鋁方管模型剛架之製作，詳述鋁模型剛架(含照片)之設計與組裝，隨後並進行靜力加載試驗。第六章為結論。

第二章 二維平面結構迴傳矩陣法之理論建立

在應力波動中，一般稱進入節點之應力波為入射波(Arrival wave)，遠離節點之應力波為離射波(Departure wave)。在靜力分析中，若結構桿件之兩個端點分別稱為近端與遠端，則近端位移與遠端位移之數學關係，與應力波動分析之入射波與離射波之關係相當。因此吾人可引用應力波動分析的概念發展一套截然不同的靜力分析模式，稱為迴傳矩陣法(Method of Reverberation Matrix)。此法可應用於二維、三維結構之靜力分析，本章將回顧二維平面結構之迴傳矩陣靜力分析[16]。

2.1 二維平面結構之節點、桿件與符號定義

假設有一平面結構由桿件(可為二力桿件或梁元素)相互交於節點所組成，如圖 2-1 所示。節點之編號以大寫英文字母(J, K, L, \dots)或數字表示($1, 2, 3, \dots$)表示，桿件之編號則以桿件兩端之節點編號表示，例如桿件 IJ, JK, \dots 或 $12, 24, \dots$ 等。圖 2-1 所示之結構係由 17 根桿件所組成，共有 10 個節點。本文將以 n 表示節點數， m 表示桿件數，而交於同一節點之桿件數目則以 $m^J (J=1, 2, \dots)$ 表示。此外，所有 $m^J (J=1, 2, \dots)$ 之和與桿件數目 m 具有以下之關係式：

$$\sum_{J=1}^n m^J = 2m \quad (2.1)$$

因為每根桿件必定與兩個節點相交。

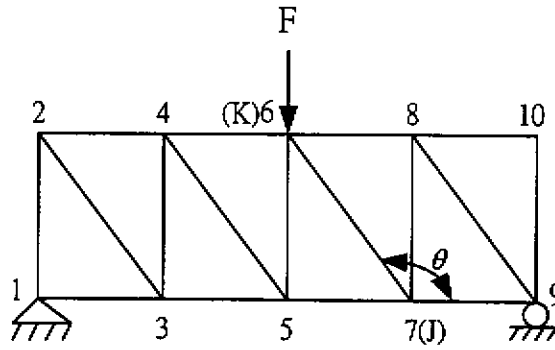


圖 2-1 結構模型與節點編號

首先定義二維結構之座標系統，位於平面上之節點均對應於同一個卡氏座標系統(Cartesian coordinate, X, Y)，稱為結構之總體座標(Global coordinate)；個別桿件 JK 之座標系統，則根據右手定則，分別引入 $(x, y)^{JK}$ 及 $(x, y)^{KJ}$ 兩組局部座標系統(Local coordinate)。 x^{JK} 表示原點在節點 J ，沿著桿件 JK 的中心線，以朝向節點 K 為正向的座標軸； x^{KJ} 表示原點在節點 K ，沿著桿件 KJ 的中心線，以朝向節點 J 為正向的座標軸。根據上述局部座標， x^{JK} 和 y^{JK} 的方向分別與 x^{KJ} 和 y^{KJ} 的方向相反。

若 $[v_x, v_y]^T$ 為局部座標向量， $[v_X, v_Y]^T$ 為整體座標向量，其關係為：

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xX} & T_{xY} \\ T_{yX} & T_{yY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

若以圖 2-1 之桿件 JK 為例，(2.2)式之轉換關係如下：

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

桿件位移若以局部座標表示，則位移場包括沿 x -軸方向之軸向變位 $u(x)$ ，沿 y -軸方向之側向變位 $v(x)$ 與沿 z -軸方向之旋轉角 $\psi(x)$ ，即桿件斷面繞 z -軸旋轉；其對應之桿件力分別為軸力 $F(x)$ 、剪力 $V(x)$ 及彎矩 $M(x)$ ，這些力均假設作用在桿件斷面之形心。當位移或旋轉的方向與座標軸正向一致時

為正，反之則為負；力的方向與受力面之法向量(outer normal vector)方向一致時為正，二者方向相反時為負。根據上述之符號定義，吾人可得：

$$\begin{aligned} u^{JK}(x) &= -u^{KJ}(l-x) \\ v^{JK}(x) &= -v^{KJ}(l-x) \\ \psi^{JK}(x) &= \psi^{KJ}(l-x) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} F^{JK}(x) &= F^{KJ}(l-x) \\ V^{JK}(x) &= V^{KJ}(l-x) \\ M^{JK}(x) &= -M^{KJ}(l-x) \end{aligned} \quad (2.5)$$

其中， $l = l^{JK} = l^{KJ}$ 為桿件 JK 或桿件 KJ 的長度； $x^{KJ} = l^{JK} - x^{JK}$ 。

2.2 節點平衡方程式

作用在桿件 JK 之節點 J 上的外力與交會於節點 J 之各桿件的內力須滿足力平衡方程式如下：

$$\sum_{K=1}^{n'} \mathbf{T}^{JK} \mathbf{F}^{JK} + \boldsymbol{\eta}^J = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad J=1,2,\dots,n \quad (2.6)$$

其中，

$$\mathbf{T}^{JK} = \begin{bmatrix} \cos\theta^{JK} & -\sin\theta^{JK} & 0 \\ \sin\theta^{JK} & \cos\theta^{JK} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 為 } 3 \times 3 \text{ 之轉換矩陣, } \theta^{JK} \text{ 為桿件之 } JK \text{ 局部座標與整體座標之夾角；}$$

$$\mathbf{F}^{JK} = \begin{bmatrix} F^{JK}(0) \\ V^{JK}(0) \\ M^{JK}(0) \end{bmatrix}$$
 為 3×1 之節點 J 處的內力，包括軸力、剪力及彎矩(局部座標)；

$$\boldsymbol{\eta}^J = \begin{bmatrix} \eta_x^J(0) \\ \eta_y^J(0) \\ \mu^J(0) \end{bmatrix}$$
 為 3×1 之作用於節點 J 上的外力，包括水平力、垂直力及彎矩(整體座標)；

m^J 表示交會於節點 J 之桿件總數。

桿件之端點內力可進一步以桿件之端點變位表示如下：

$$\mathbf{F}^{JK} = \mathbf{A}^{JK} \mathbf{a}^{JK} + \mathbf{D}^{JK} \mathbf{d}^{JK} + \tilde{\mathbf{f}}^{JK} \quad (2.7)$$

其中， $\tilde{\mathbf{f}}^{JK}$ 為 3×1 之向量代表桿件 JK 在 J 點的固端力； \mathbf{A}^{JK} 與 \mathbf{D}^{JK} 為 3×3 之矩陣，可由平面構架元素的勁度矩陣直接推得[17]。當桿件兩端皆為剛性自由節點(Rigid Joints)時，則：

$$\mathbf{A}^{JK} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{4EI}{l} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^{JK} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{2EI}{l} \end{bmatrix}, \quad E, A, I \text{ 及 } l \text{ 分別為桿件 } JK \text{ 之楊氏模數、斷面積、慣性矩及長度；}$$

此時固端力為：

$$\tilde{\mathbf{f}}^{JK} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_x(0) \\ \tilde{f}_y(0) \\ \tilde{\mu}(0) \end{bmatrix} \text{ 包括軸向力、橫向力和彎矩。}$$

若桿件兩端有鉸接節點(Hinge Joints)時，則可利用桿件釋放(Member

Release)[18]的方法修正勁度矩陣。例如，當桿件左端為鉸接點時，則：

$$\mathbf{A}^{JK} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^{JK} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此時固端力修正為：

$$\tilde{\mathbf{f}}^{JK} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_x(0) \\ \tilde{f}_y(0) - \frac{3}{2l}\tilde{\mu}(0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

當桿件右端為鉸接點時，則：

$$\mathbf{A}^{JK} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & -\frac{3EI}{l} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^{JK} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 \end{bmatrix}$$

此時固端力修正為：

$$\tilde{\mathbf{f}}^{JK} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_x(0) \\ \tilde{f}_y(0) - \frac{3}{2l}\tilde{\mu}(l) \\ \tilde{\mu}(0) - \frac{1}{2}\tilde{\mu}(l) \end{bmatrix}$$

當桿件兩端為鉸接點時，則：

$$\mathbf{A}^{JK} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^{JK} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此時固端力修正為：

$$\tilde{\mathbf{f}}^{JK} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_x(0) \\ \tilde{f}_y(0) - \frac{1}{l}[\tilde{\mu}(0) + \tilde{\mu}(l)] \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{a}^{JK} = \begin{bmatrix} u^{JK}(0) \\ v^{JK}(0) \\ \psi^{JK}(0) \end{bmatrix}$ 為 3×1 之桿件 JK 於節點 J 處(近端)之變位，包括軸向變位、側向變位及轉角(局部座標)；

$\mathbf{d}^{JK} = \begin{bmatrix} u^{JK}(l) \\ v^{JK}(l) \\ \psi^{JK}(l) \end{bmatrix}$ 為 3×1 之桿件 JK 於節點 K 處(遠端)之變位，包括軸向變位、側向變位及轉角(局部座標)。

將(2.7)式代入(2.6)式，吾人可得：

$$\sum_{K=1}^{m^J} \mathbf{T}^{JK} (\mathbf{A}^{JK} \mathbf{a}^{JK} + \mathbf{D}^{JK} \mathbf{d}^{JK} + \tilde{\mathbf{f}}^{JK}) + \boldsymbol{\eta}^J = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad J=1,2,\dots,n \quad (2.8)$$

(2.8)式包括三條平衡方程式，其中之未知數包括近端位移 $3m^J$ 個及遠端位移 $3m^J$ 個，總數為 $6m^J$ 個。

對於所有交會於節點 J 之桿件，吾人可將各桿件近端位移向量 \mathbf{a}^{JK} ($K=1,2,\dots,m^J$) 組合成節點近端位移向量

$$\mathbf{a}^J = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^{J1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{JK} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{Jm'} \end{Bmatrix} \quad (2.9a)$$

其維度大小為 $3m^J \times 1$ 。

同理，吾人可將各桿件遠端位移向量 \mathbf{d}^{JK} ($K=1, 2, \dots, m^J$) 組合成節點遠端位移向量

$$\mathbf{d}^J = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{J1} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{JK} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{Jm'} \end{Bmatrix} \quad (2.9b)$$

其維度大小為 $3m^J \times 1$ 。

(2.8)式展開可得位於節點 J 處之力平衡關係式如下：

$$\mathbf{A}_1^J \mathbf{a}^J + \mathbf{D}_1^J \mathbf{d}^J + \mathbf{f}^J = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (2.10)$$

其中

$\mathbf{A}_1^J = [\mathbf{T}^{J1} \mathbf{A}^{J1} \quad \dots \quad \mathbf{T}^{JK} \mathbf{A}^{JK} \quad \dots \quad \mathbf{T}^{Jm'} \mathbf{A}^{Jm'}]$ 為 $3 \times 3m^J$ 之矩陣；

$\mathbf{D}_1^J = [\mathbf{T}^{J1} \mathbf{D}^{J1} \quad \dots \quad \mathbf{T}^{JK} \mathbf{D}^{JK} \quad \dots \quad \mathbf{T}^{Jm'} \mathbf{D}^{Jm'}]$ 為 $3 \times 3m^J$ 之矩陣。

$\mathbf{f}^J = \boldsymbol{\eta}^J + \sum_{K=1}^{m^J} \mathbf{T}^{JK} \tilde{\mathbf{f}}^{JK} = \boldsymbol{\eta}^J + \tilde{\mathbf{f}}^{JK}$ 包含節點 J 處的外力及連接於 J 點的所有桿件固端力之和。

2.3 節點諧合方程式

諧合條件要求各桿件端點之位移及轉角必須與節點之位移及轉角(整體座標)相同，因此吾人可得桿件 JK 於節點 J 之諧合方程式如下：

$$\mathbf{T}^{JK} \mathbf{a}^{JK} = \mathbf{Q}^J \quad (2.11)$$

其中 \mathbf{T}^{JK} 為桿件 JK 之轉換矩陣， \mathbf{a}^{JK} 為桿件 JK 於節點 J 處(近端)之變位(局部座標)，二者之定義如(2.6)式與(2.7)式所示；

$$\mathbf{Q}^J = \begin{bmatrix} U^J \\ V^J \\ \Psi^J \end{bmatrix} \text{ 為 } 3 \times 1 \text{ 之節點 } J \text{ 的水平位移、垂直位移及轉角(整體座標)。}$$

根據(2.11)式，交會於節點 J 之 m^J 根桿件的諧合方程式可表示如下：

$$\mathbf{A}_2^J \mathbf{a}^J = \mathbf{U}_2^J \mathbf{Q}^J \quad (2.12)$$

上式共包含 $3m^J$ 條諧合方程式，其中

$$\mathbf{A}_2^J = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{J1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^{J2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{T}^{Jm^J} \end{bmatrix} \text{ 為 } 3m^J \times 3m^J \text{ 之矩陣；}$$

$$\mathbf{U}_2^J = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \\ \vdots \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \text{ 為 } 3m^J \times 3 \text{ 之矩陣，其中 } \mathbf{I} \text{ 為 } 3 \times 3 \text{ 之單位矩陣。}$$

2.4 節點載重源向量(Source vector, s^J)與傳遞分配矩陣(Carry-over and distribution matrix, S^J)

2.4.1 自由節點

經由推導平衡方程式(2.10)及諧合方程式(2.12)的過程，吾人建立節點外力 f^J 、節點位移 Q^J 與桿件近端位移向量 a^J 及桿件遠端位移向量 d^J 的關係如下：

$$A_1^J a^J + D_1^J d^J + f^J = 0$$

$$A_2^J a^J = U_2^J Q^J$$

以上共包含3條平衡方程式及 $3m^J$ 條諧合方程式。然而，未知數的總數為 $6m^J + 3$ (包括桿件近端及遠端位移向量及節點位移向量 Q^J)，因此，仍需要額外提供 $3m^J$ 條方程式方能求解。

首先求出近端位移向量(局部座標)及節點位移向量(整體座標)與節點作用力(整體座標)的關係。假設 $d^J = 0$ ，則(2.10)式及(2.12)式可合併如下：

$$\begin{bmatrix} A_1^J & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ A_2^J & -U_2^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^J \\ Q^J \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f^J \\ \mathbf{0}_{3m^J \times 1} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

其中， $\begin{bmatrix} A_1^J & \mathbf{0} \\ A_2^J & -U_2^J \end{bmatrix}$ 的維度為 $(3m^J + 3) \times (3m^J + 3)$ ； $\begin{bmatrix} a^J \\ Q^J \end{bmatrix}$ 的維度為 $(3m^J + 3) \times 1$ 。

因此，桿件近端變位 a^J 與節點變位 Q^J 可解出如下：

$$\begin{bmatrix} a^J \\ Q^J \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A_1^J & \mathbf{0} \\ A_2^J & -U_2^J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f^J \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

欲求 \mathbf{a}^J ，則僅需(2.14)式等號右側行向量之 $3m^J$ 項分量，稱為剛性節點 J 之載重源向量 \mathbf{s}^J ，即

$$\mathbf{s}^J = - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3m^J \times 3m^J} & \mathbf{0}_{3m^J \times 3} \\ \mathbf{0}_{3m^J \times 3} & \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^J & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{U}_2^J \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f}^J \\ \mathbf{0}_{3m^J \times 1} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

載重源向量 \mathbf{s}^J 的維度為 $3m^J \times 1$ 。

若視遠端位移向量 \mathbf{d}^J 為已知，則桿件近端變位 \mathbf{a}^J 與節點變位 \mathbf{Q}^J 可由(2.10)式及(2.12)式求得。假設 $\mathbf{f}^J = \mathbf{0}$ ，則(2.10)式及(2.12)式可合併如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^J & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{U}_2^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^J \\ \mathbf{0}_{3m^J \times 3m^J} \end{bmatrix} \mathbf{d}^J \quad (2.16)$$

桿件近端變位 \mathbf{a}^J 與節點變位 \mathbf{Q}^J 可解得如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^J & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{U}_2^J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^J \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{d}^J \quad (2.17)$$

欲求 \mathbf{a}^J ，則僅需(2.17)式等號右側行向量之前 $3m^J$ 項分量，亦即

$$\mathbf{S}^J = - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3m^J \times 3m^J} & \mathbf{0}_{3m^J \times 3} \\ \mathbf{0}_{3m^J \times 3} & \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^J & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{U}_2^J \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^J \\ \mathbf{0}_{3m^J \times 3m^J} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

稱為剛性自由節點 J 之傳遞分配矩陣 \mathbf{S}^J ，其維度為 $3m^J \times 3m^J$ 。

2.4.2 鉸支承

若結構節點係置於鉸支承上，則該節點將不產生水平位移與垂直位移，但可轉動。此外，節點的水平支承反力、垂直支承反力與轉角均為未知。已

知條件包括節點之彎矩平衡方程式、水平位移與垂直位移為零，整理如下：

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J \mathbf{a}^J + \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1^J \mathbf{d}^J + \mathbf{L}_1 \mathbf{f}^J = \mathbf{L}_1 \mathbf{0}_{3 \times 3} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J \mathbf{a}^J = \mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \mathbf{Q}^J \quad (2.20)$$

其中

$$\mathbf{L}_1 = [0 \ 0 \ 1] \text{ 為作用彎矩之位置向量；} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{L}' & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}' & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{L}' \end{bmatrix} \text{ 為 } 2m^J \times 3m^J \text{ 之矩陣；} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{L}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ 為水平位移與垂直位移之位置矩陣；} \quad (2.23)$$

$$\bar{\mathbf{U}}_2^J = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ 為 } 3m^J \times 3 \text{ 之矩陣(與 } \mathbf{U}_2^J \text{ 的維度相同)，}$$

$$\text{其中 } \mathbf{0} \text{ 為 } 3 \times 3 \text{ 之零矩陣。} \quad (2.24)$$

將(2.10)式乘上 \mathbf{L}_1 所得之結果即為(2.19)式，稱為節點 J 之彎矩平衡方程式。

(2.20)式則表示交會於節點 J 之 m^J 根桿件的水平位移與垂直位移均為0。

首先求出近端位移向量(局部座標)及節點位移向量(整體座標)與節點作用力(整體座標)的關係。假設 $\mathbf{d}^J = \mathbf{0}$ ，則(2.19)式及(2.20)式可合併如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{f}^J \\ \mathbf{0}_{2m^J \times 1} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

其中， $\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}$ 的維度為 $(2m^J + 1) \times (3m^J + 3)$ ； $\begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix}$ 的維度為 $(3m^J + 3) \times 1$ 。

因此，桿件近端變位 \mathbf{a}^J 與節點變位 \mathbf{Q}^J 可解得如下：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix} &= - \left(\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{f}^J \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= -\tilde{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{f}^J \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.26)$$

其中， $\tilde{\mathbf{P}} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}^T$ 稱為 Pseudo-inverse，亦可以利用 Singular-Value-Decomposition(SVD)求得[19]。

欲求 \mathbf{a}^J ，則僅需(2.26)式等號右側行向量之前 $3m^J$ 項分量，稱為鉸支承 J 之載重源向量 \mathbf{s}^J ，即

$$\mathbf{s}^J = - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3m^J \times 3m^J} & \mathbf{0}_{3m^J \times 3} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{f}^J \\ \mathbf{0}_{2m^J \times 1} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

其維度為 $3m^J \times 1$ 。

若視遠端位移向量 \mathbf{d}^J 為已知，則桿件近端變位 \mathbf{a}^J 與節點變位 \mathbf{Q}^J 亦可由(2.19)式及(2.20)式求得。假設 $\mathbf{f}^J = \mathbf{0}$ ，則(2.19)式及(2.20)式可合併如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1^J \\ \mathbf{0}_{2m^J \times 3m^J} \end{bmatrix} \mathbf{d}^J \quad (2.28)$$

桿件近端變位 \mathbf{a}^J 與節點變位 \mathbf{Q}^J 可解得如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix} = -\tilde{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1^J \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{d}^J \quad (2.29)$$

欲求 \mathbf{a}^J ，則僅需(2.29)式等號右側行向之前 $3m^J$ 項分量，亦即

$$\mathbf{S}^J = -\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3m^J \times 3m^J} & \mathbf{0}_{3m^J \times 3} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1^J \\ \mathbf{0}_{2m^J \times 3m^J} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

稱為鉸支承 J 之傳遞分配矩陣 \mathbf{S}^J ，其維度為 $3m^J \times 3m^J$ 。

2.4.3 輓支承

若結構節點係置於輓支承上，則該節點將不產生垂直位移，但可產生水平位移與轉動。此外，節點的垂直支承反力、水平位移與轉角均為未知。已知條件則包括節點之水平力平衡方程式、彎矩平衡方程式與垂直位移為零，整理如下：

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J \mathbf{a}^J + \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1^J \mathbf{d}^J + \mathbf{L}_1 \mathbf{f}^J = \mathbf{L}_1 \mathbf{0}_{3 \times 3} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J \mathbf{a}^J = \mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \mathbf{Q}^J \quad (2.32)$$

其中

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 為水平作用力與作用彎矩之位置矩陣；} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{L}' & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}' & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{L}' \end{bmatrix} \text{ 為 } m^J \times 3m^J \text{ 之矩陣；} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{L}' = [0 \ 1 \ 0] \text{ 為垂直位移之位置向量。} \quad (2.35)$$

$$\bar{\mathbf{U}}_2^J = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ 為 } 3m^J \times 3 \text{ 之矩陣(與 } \mathbf{U}_2^J \text{ 的維度相同),}$$

其中 $\mathbf{0}$ 為 3×3 之零矩陣。 (2.36)

首先求出近端位移向量(局部座標)及節點位移向量(整體座標)與節點作用力(整體座標)的關係。假設 $\mathbf{d}^J = \mathbf{0}$ ，則(2.31)式及(2.32)式可合併如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{f}^J \\ \mathbf{0}_{m^J \times 1} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

其中， $\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}$ 的維度為 $(m^J + 2) \times (3m^J + 3)$ ； $\begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix}$ 的維度為 $(3m^J + 3) \times 1$ 。

因此，桿件近端變位 \mathbf{a}^J 與節點變位 \mathbf{Q}^J 可解得如下：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix} &= - \left(\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{f}^J \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= -\tilde{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{f}^J \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.38)$$

其中， $\tilde{\mathbf{P}} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}^T$ 稱為 Pseudo-inverse，亦可以利用 Singular-Value-Decomposition(SVD)求得。

欲求 \mathbf{a}^J ，則僅需(2.38)式等號右側行向量之前 $3m^J$ 項分量，稱為韌支承 J 之載重源向量 \mathbf{s}^J ，即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^J \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{S}^J & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{S}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^1 \\ \mathbf{d}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}^J \\ \vdots \\ \mathbf{d}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{s}^1 \\ \mathbf{s}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{s}^J \\ \vdots \\ \mathbf{s}^n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_{6m \times 1} = \mathbf{S}_{6m \times 6m} \mathbf{d}_{6m \times 1} + \mathbf{s}_{6m \times 1} \quad (2.43)$$

其中， \mathbf{S} 稱為結構之傳遞及分配矩陣， \mathbf{s} 稱為結構之載重源向量。

2.5 轉列矩陣(Permutation matrix)之建立

對於同一根桿件 JK 而言，節點 J 之遠端位移(\mathbf{d}^{JK})實際上即是節點 K 之近端位移(\mathbf{a}^{KJ})，但是由於符號上的定義，使得二者會有正、負號之差異。吾人可利用一相位矩陣(phase matrix) \mathbf{p} 將二者之關係表示如下：

$$\mathbf{d}^{JK} = \mathbf{p} \mathbf{a}^{KJ} \quad J=1,2,\dots,m^J ; K=1,2,\dots,n \quad (2.44)$$

其中

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 為 } 3 \times 3 \text{ 之相位矩陣。}$$

根據(2.9b)式吾人可將各節點之局部遠端位移向量 \mathbf{d}^J ($J=1,2,\dots,n$)組合成整體之遠端位移向量 \mathbf{d}

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}^1 \\ \mathbf{d}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}^n \end{bmatrix} \text{ 為 } 6m \times 1 \text{ 之整體遠端位移向量} \quad (2.45)$$

同理，吾人亦可將各桿件之“近端”位移向量 \mathbf{a}^{KJ} ($K=1,2,\dots,m^J$) 組合成局部之“近端”位移向量 $\tilde{\mathbf{a}}^J$ ($J=1,2,\dots,n$)，然後再進一步組合成整體之“近端”位移向量 $\tilde{\mathbf{a}}$

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}^1 \\ \tilde{\mathbf{a}}^2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}^n \end{bmatrix} \text{ 為 } 6m \times 1 \text{ 之整體“近端”位移向量} \quad (2.46)$$

根據(2.43)式之相位矩陣，吾人可建立向量 \mathbf{d} 與向量 $\tilde{\mathbf{a}}$ 之關係如下：

$$\mathbf{d} = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{a}} \quad (2.47)$$

其中

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{p} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{p} \end{bmatrix} \text{ 為 } 6m \times 6m \text{ 之整體相位矩陣。}$$

此外，先前所述之向量 $\tilde{\mathbf{a}}$ 與向量 \mathbf{a} 其組成的元素相同，因此，出現在向量 \mathbf{a} 中之元素 \mathbf{a}^{JK} 亦同樣出現在向量 $\tilde{\mathbf{a}}$ 中，其主要之差異為元素的排列次序不同。因此，吾人可利用轉列矩陣的技巧將位於不同向量內之相同元素的位置關係表示如下：

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{U}\mathbf{a} \quad (2.48)$$

其中

U 為 $6m \times 6m$ 之轉列矩陣。

轉列矩陣中的每一列及每一行均只有一個位置的元素值為 1，而其它位置的元素值均等於 0。轉列矩陣的型式與節點編號的順序及組成 \mathbf{a} 向量之 \mathbf{a}^j 的排列順序有關。例如： \mathbf{a}_{25} 與 \mathbf{a}_{52} 分別為 \mathbf{a} 向量之第 i 列與第 p 列元素，則位於轉列矩陣中之第 i 列、第 p 行位置之元素 U_{ip} 與位於轉列矩陣中之第 p 列、第 i 行位置之元素 U_{pi} 等於 1，而位於第 i 列、第 p 列與第 i 行、第 p 行之其它位置之元素值均為 0。上述之說明可以表示如下：

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{52} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{25} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdots & 2-th & \cdots & 5-th & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2-th & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5-th & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{25} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{52} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$6m \times 6m$

茲以 π -形構架為例，說明如何以程式建立轉列矩陣 U。各節點之編號如圖 2-2 所示，共有 6 個節點。

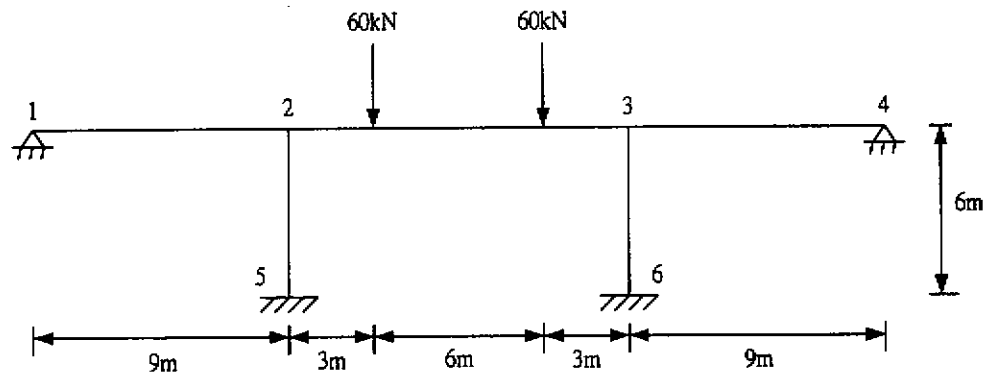


圖 2-2 對稱之 π -形構架

根據圖 2-2 之節點編號，向量 $\tilde{\mathbf{a}}$ 與向量 \mathbf{a} 可利用桿件兩端之節點編號表示如表 2-1 所示，總共有 10 列(即 $2m$ 列，其中 $m=5$ 為桿件的數目)。若吾人想得知位於向量 $\tilde{\mathbf{a}}$ 中之第 1 列的元素 \mathbf{a}^{21} 與位於向量 \mathbf{a} 中之相同元素 \mathbf{a}^{21} 的對應關

係，經由觀察表 2-1 可發現， a^{21} 位於向量 \mathbf{a} 之第 2 列($JK=21$)，且將向量 $\tilde{\mathbf{a}}$ 之第 2 列的 $KJ=12$ 值對調即為 $JK=21$ ，二者位置相同。若吾人想得知位於向量 $\tilde{\mathbf{a}}$ 中之第 4 列的元素 a^{52} 與位於向量 \mathbf{a} 中之元素 a^{52} 的對應關係，經由觀察表 2-1 可發現， a^{52} 位於 \mathbf{a} 之第 9 列($JK=52$)，且將向量 $\tilde{\mathbf{a}}$ 之第 9 列的 $KJ=25$ 值對調即為 $JK=52$ ，二者位置相同。因此，吾人僅需建立表 2-1 中之第 2 行資料，當吾人要找第 i 列元素 a^{KJ} ($KJ=KJ_i$) 之對應關係時，只要將全部列數之 KJ 值對調成為 JK_j ($j=1\sim 10$)，並分別與 KJ_i 進行比較，若 $JK_j=KJ_i$ ，則吾人可知 \mathbf{a} 向量之第 j 列與 $\tilde{\mathbf{a}}$ 向量之第 i 列具有相同的元素。程式撰寫過程如下：

1. 首先建立以桿件兩端之節點編號表示之向量 $\tilde{\mathbf{a}}$ ，如表 2-1 之第 2 行(KJ_i)，為 $2m \times 2$ 之矩陣。
2. 將 KJ_i 之編號對調求得 JK_j ($j=1\sim 2m$)。
3. JK_j (for $j=1\sim 2m$) 分別與第 i 列之 KJ_i 比較，可找到一組 $JK_j=KJ_i$ ，令轉列矩陣中之第 $(i-1) \times dof + 1$ 列至第 $i \times dof$ 列與第 $(j-1) \times dof + 1$ 行至第 $j \times dof$ 行之區塊內的值等於桿件之相位矩陣 \mathbf{P}^{JK} 。其中， dof 表示桿件端點之自由度數目，於平面構架問題中， $dof=3$ 。
4. 重複上述步驟 for $i=2m$ 。

例如，當 $i=1$ 時，吾人可得 $KJ_1=21$ 。將 JK_j ， $j=1\sim 10$ 分別與 $KJ_1=21$ 比較，當 $j=2$ 時， $JK_2=KJ_1=21$ 。因此，於轉列矩陣中之第 1 列至第 3 列與第 4 行至第 6

行的區塊內填入桿件之相位矩陣 $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。當 $i=4$ 時，吾人可得 KJ_4

$=52$ 。將 JK_j ， $j=1\sim 10$ 分別與 $KJ_4=52$ 比較，當 $j=9$ 時， $JK_9=KJ_4=52$ 。因此，於轉列矩陣中之第 10 列至第 12 列與第 25 行至第 27 行的區塊內填入桿件之相位

矩陣 $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。 π -型構架之轉列矩陣 \mathbf{U} 的維度為 $(2m \times dof) \times (2m \times dof) = 30 \times 30$ 。

2.6 結構之迴傳矩陣(Reverberation Matrix)

根據(2.47)式與(2.48)式，吾人可得整體遠端位移向量與整體近端位移向量之另一個關係式如下：

$$\mathbf{d} = \mathbf{P}\mathbf{U}\mathbf{a} \quad (2.50)$$

將(2.50)式再代入(2.43)式，吾人可得：

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}\mathbf{P}\mathbf{U}\mathbf{a} + \mathbf{s} \quad (2.51)$$

(2.51)式可簡化為：

$$\mathbf{a} = [\mathbf{I} - \mathbf{R}]^{-1} \mathbf{s} \quad (2.52)$$

其中， $\mathbf{R}_{6m \times 6m} = \mathbf{S}\mathbf{P}\mathbf{U}$ 稱為結構之迴傳矩陣。(2.52)式之 $[\mathbf{I} - \mathbf{R}]^{-1}$ 可以進一步展開成諾曼(Newmann)級數：

$$[\mathbf{I} - \mathbf{R}]^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 + \cdots + \mathbf{R}^N) + \mathbf{Q}_N \quad (2.53)$$

其中餘項 $\mathbf{Q}_N = [\mathbf{I} - \mathbf{R}]^{-1} \mathbf{R}^{N+1}$ 。

若餘項 \mathbf{Q}_N 很小，則(2.52)式之整體近端位移向量可以計算如下：

$$\mathbf{a} = (\mathbf{I} + \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 + \cdots + \mathbf{R}^N) \mathbf{s} \quad (2.54)$$

整體之遠端位移向量可根據(2.50)式計算。桿件之節點力可將(2.50)式與(2.54)式代入(2.7)式求得。

第三章 三維結構迴傳矩陣法之理論建立

三維結構迴傳矩陣法之分析步驟與二維平面結構之分析步驟類似，僅需將平面分析之三個自由度(軸力、剪力、彎矩)修改為三維分析之六個自由度(軸力、兩方向之剪力、扭矩及兩方向之彎矩)，惟須注意座標系統之選擇。由於在三度空間的局部座標之下，當確定 x 軸後， yz 平面可以 x 軸為法線來旋轉，故 y 軸、 z 軸有無限多組選擇，所以吾人必須規定 y 軸、 z 軸的方向。3.1 節將討論吾人所選用之座標系統。此外，吾人發現，著名之彎矩分配法即為迴傳矩陣靜力分析法忽略軸向與橫向自由度時之特例，於本章末有詳細之說明。

3.1 三維結構之總體座標和局部座標

如圖 3.1(a)所示，對於結構之總體座標系統吾人採用右手螺旋關係， X 軸向右為正， Y 軸向上為正， Z 軸則為 X 軸對 Y 軸採用右手螺旋時之方向為正。

如圖 3.1(b)所示，對於每一根桿件 JK 之軸向力(F)、剪力(V 、 W)、扭矩(T)、彎矩(M 、 N)、位移(u 、 v 、 w)及轉角(θ 、 ϕ 、 ψ)，吾人引入兩組局部座標系統 $(x, y, z)^{JK}$ 和 $(x, y, z)^{KJ}$ ，其原點分別位於 J 點和 K 點，軸 x^{JK} 表示原點在節點 J ，沿著桿件 JK 之中心線，以朝向節點 K 之方向為正軸。而 y^{JK} 、 z^{JK} 為桿件 JK 橫斷面之兩個主軸。在另一原點 K 上，軸 x^{KJ} 表示原點在節點 K ，沿著桿件 KJ 之中心線，以朝向節點 J 之方向為正軸。因此， y^{JK} 和 y^{KJ} 之方向相反， z^{JK} 和 z^{KJ} 之方向相反。根據上述之符號定義，吾人可得：

$$\begin{aligned}
u^{JK}(x) &= -u^{KJ}(l-x) & F^{JK}(x) &= F^{KJ}(l-x) \\
v^{JK}(x) &= -v^{KJ}(l-x) & V^{JK}(x) &= V^{KJ}(l-x) \\
w^{JK}(x) &= w^{KJ}(l-x) & W^{JK}(x) &= -W^{KJ}(l-x) \\
\theta^{JK}(x) &= -\theta^{KJ}(l-x) & T^{JK}(x) &= T^{KJ}(l-x) \\
\phi^{JK}(x) &= -\phi^{KJ}(l-x) & M^{JK}(x) &= M^{KJ}(l-x) \\
\psi^{JK}(x) &= \psi^{KJ}(l-x) & N^{JK}(x) &= -N^{KJ}(l-x)
\end{aligned}
\tag{3.1}$$

其中，由於內力必成對，故其正、負號之關係與位移的情況相反。

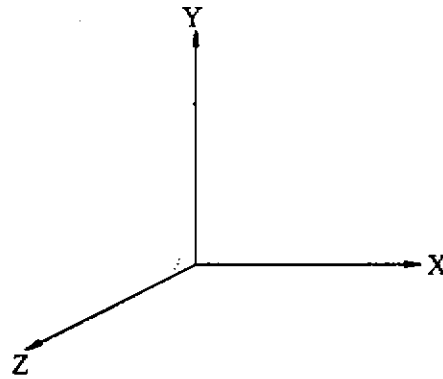


圖 3.1(a) 總體座標系統

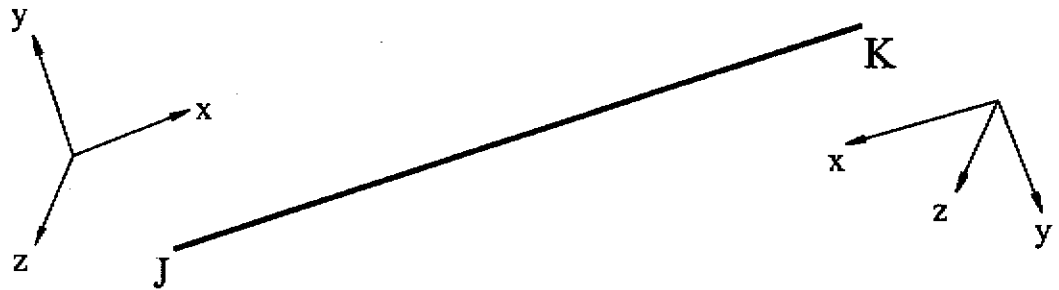


圖 3.1(b) 局部座標系統

之後，吾人需找出局部座標和總體座標之間的關係，以建立座標轉換矩陣 T^{JK} 。吾人首先選訂局部座標下之 y 軸、 z 軸的方向。考慮一根桿件在總體座標下之位置，根據前述之定義，我們以通過桿件的中心，進入桿件的方向為局部座標下的正 x 軸。將 x 軸對總體座標之 Y 軸取外積，所得到的向量訂為局部座

標下的 z 軸。將 z 軸對 x 軸取外積即為局部座標下的 y 軸。以數學關係表示如下：

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \mathbf{i}_x \times \mathbf{I}_y \\ \mathbf{i}_z &= \frac{\bar{z}}{|\bar{z}|} \\ \mathbf{i}_y &= \mathbf{i}_z \times \mathbf{i}_x\end{aligned}\quad (3.2)$$

其中， \mathbf{i}_x 、 \mathbf{i}_y 、 \mathbf{i}_z 代表局部座標下 x 軸、y 軸、z 軸的單位向量， \mathbf{I}_y 代表總體座標下 Y 軸的單位向量。此外，若局部座標下的 x 軸與總體座標的 Y 軸平行，則 $\mathbf{i}_x \times \mathbf{I}_y = 0$ ，我們將無法訂出 z 軸的方向。故對此情形我們改取總體座標的 Z 軸對局部座標下的 x 軸取外積，所得到的向量訂為局部座標下的 y 軸，再將 x 軸對 y 軸取外積即可得到局部座標下的 z 軸。其數學關係表示如下：

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \mathbf{I}_z \times \mathbf{i}_x \\ \mathbf{i}_y &= \frac{\bar{y}}{|\bar{y}|} \\ \mathbf{i}_z &= \mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_y\end{aligned}\quad (3.3)$$

當局部座標確定之後，根據幾何的關係[18]，可建立座標轉換矩陣 \mathbf{T}^{JK} 如下：

$$\mathbf{T}^{JK} = \begin{bmatrix} r_{xX} & r_{xY} & r_{xZ} & 0 & 0 & 0 \\ r_{yX} & r_{yY} & r_{yZ} & 0 & 0 & 0 \\ r_{zX} & r_{zY} & r_{zZ} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{xX} & r_{xY} & r_{xZ} \\ 0 & 0 & 0 & r_{yX} & r_{yY} & r_{yZ} \\ 0 & 0 & 0 & r_{zX} & r_{zY} & r_{zZ} \end{bmatrix}^{-1}\quad (3.4)$$

其中， $r_{iJ} = \cos\theta_{iJ}$ ($i = x, y, z$ $J = X, Y, Z$)， θ 代表局部座標軸和總體座標軸的夾

角。 r_{iJ} 可利用向量之內積求得 ($r_{iJ} = \cos\theta_{iJ} = \frac{\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{I}_J}{|\mathbf{i}_i| |\mathbf{I}_J|}$)。

3.2 節點平衡方程式

當座標建確立後，如二維結構分析的情形，我們可經由節點之力平衡關係及節點之諧合條件來建立方程式。

作用在桿件 JK 之節點 J 上的外力與交會於節點 J 之各桿件的內力須滿足力平衡方程式如下：

$$\sum_{k=1}^{m^J} \mathbf{T}^{JK} \mathbf{F}^{JK} + \boldsymbol{\eta}^J = \mathbf{0}_{6 \times 1} \quad (3.5)$$

其中， \mathbf{T}^{JK} 如(3.4)式所示，為一 6×6 之轉換矩陣。

$$\mathbf{F}^{JK} = \begin{bmatrix} F^{JK}(0) \\ V^{JK}(0) \\ W^{JK}(0) \\ T^{JK}(0) \\ M^{JK}(0) \\ N^{JK}(0) \end{bmatrix} \text{ 為 } 6 \times 1 \text{ 之節點 } J \text{ 處的內力，包括軸力、剪力、彎矩及扭矩(局}$$

部座標)；

$$\boldsymbol{\eta}^J = \begin{bmatrix} \eta_X^J(0) \\ \eta_Y^J(0) \\ \eta_Z^J(0) \\ m_X^J(0) \\ m_Y^J(0) \\ m_Z^J(0) \end{bmatrix} \text{ 為 } 6 \times 1 \text{ 之作用於節點 } J \text{ 處的外力，包括水平力、兩方向垂直}$$

力、彎矩及扭矩(整體座標)。

桿件之端點內力可進一步以桿件之端點變位表示如下：

$$\mathbf{F}^{JK} = \mathbf{A}^{JK} \mathbf{a}^{JK} + \mathbf{D}^{JK} \mathbf{d}^{JK} + \tilde{\mathbf{f}}^{JK} \quad (3.6)$$

其中， $\tilde{\mathbf{f}}^{JK}$ 為 6×1 之向量，代表桿件 JK 在 J 點的固端力； \mathbf{A}^{JK} 與 \mathbf{D}^{JK} 為 6×6 之矩陣，可由空間構架元素的勁度矩陣直接推得[18]。例如，當桿件兩端皆為剛性自由節點(Rigid Joints)時，則：

$$\mathbf{A}^{JK} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & -\frac{4EI_y}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^{JK} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & -\frac{2EI_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2EI_z}{l} \end{bmatrix}$$

, E 、 A 、 I 及 l 分別

為桿件 JK 之楊氏模數、斷面積、慣性矩及長度；

此時，固端力為：

$$\tilde{\mathbf{f}}^{JK} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_z(0) \\ \tilde{f}_y(0) \\ \tilde{f}_x(0) \\ \tilde{m}_x(0) \\ \tilde{m}_y(0) \\ \tilde{m}_z(0) \end{bmatrix}$$

若桿件兩端有絞接節點，吾人可採用桿件釋放[18]的方法修正勁度矩陣。例如，

當桿件左端為絞接節點時，則：

$$\mathbf{A}^{JK} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3EI_y}{l^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^{JK} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{3EI_y}{l^3} & 0 & \frac{3EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此時，固端力為：

$$\tilde{\mathbf{f}}^{JK} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_x(0) \\ \tilde{f}_y(0) - \frac{3}{2l}\tilde{m}_z(0) \\ \tilde{f}_z(0) + \frac{3}{2l}\tilde{m}_y(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

當桿件右端為鉸接節點時，則：

$$\mathbf{A}^{JK} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & -\frac{3EI_y}{l^3} & 0 & \frac{3EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3EI_y}{l^2} & 0 & -\frac{3EI_y}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EI_z}{l} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^{JK} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3EI_y}{l^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此時，固端力為：

$$\tilde{\mathbf{f}}^{JK} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_x(0) \\ \tilde{f}_y(0) - \frac{3}{2l}\tilde{m}_z(l) \\ \tilde{f}_z(0) + \frac{3}{2l}\tilde{m}_y(l) \\ \tilde{m}_x(0) + \tilde{m}_x(l) \\ \tilde{m}_y(0) - \frac{1}{2}\tilde{m}_y(l) \\ \tilde{m}_z(0) - \frac{1}{2}\tilde{m}_z(l) \end{bmatrix}$$

當桿件兩端皆為鉸接節點時，則：

$$\mathbf{A}^{JK} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^{JK} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此時，固端力為：

$$\tilde{\mathbf{f}}^{JK} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_x(0) \\ \tilde{f}_y(0) - \frac{1}{l}[\tilde{m}_z(0) + \tilde{m}_z(l)] \\ \tilde{f}_z(0) + \frac{1}{l}[\tilde{m}_y(0) + \tilde{m}_y(l)] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}^{JK} = \begin{bmatrix} u^{JK}(0) \\ v^{JK}(0) \\ w^{JK}(0) \\ \theta^{JK}(0) \\ \phi^{JK}(0) \\ \psi^{JK}(0) \end{bmatrix} \text{ 為 } 6 \times 1 \text{ 之桿件 } JK \text{ 於節點 } J \text{ 處(近端)之變位，包括軸向變}$$

位、側向變位及轉角(局部座標)；

$$\mathbf{d}^{JK} = \begin{bmatrix} u^{JK}(l) \\ v^{JK}(l) \\ w^{JK}(l) \\ \theta^{JK}(l) \\ \phi^{JK}(l) \\ \psi^{JK}(l) \end{bmatrix} \text{ 為 } 6 \times 1 \text{ 之桿件 } JK \text{ 於節點 } J \text{ 處(近端)之變位，包括軸向變位、}$$

側向變位及轉角(局部座標)。

將(3.6)式代入(3.5)式，吾人可得：

$$\sum_{K=1}^{m'} \mathbf{T}^{JK} (\mathbf{A}^{JK} \mathbf{a}^{JK} + \mathbf{D}^{JK} \mathbf{d}^{JK} + \tilde{\mathbf{f}}^{JK}) + \boldsymbol{\eta}^J = \mathbf{0}_{6 \times 1} \quad J = 1, 2, \dots, n \quad (3.7)$$

(3.7)式包括六條平衡方程式，其中之未知數包括近端位移 $6m'$ 個及遠端位移 $6m'$ 個，總數為 $12m'$ 個。

對於所有交會於節點 J 之桿件，吾人可將各桿件近端位移向量 \mathbf{a}^{JK} ($K=1,2,\dots,m^J$)組合成節點近端位移向量

$$\mathbf{a}^J = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^{J1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{JK} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{Jm'} \end{Bmatrix} \quad (3.8a)$$

其維度大小為 $6m^J \times 1$ 。

同理，吾人可將各桿件遠端位移向量 \mathbf{d}^{JK} ($K=1,2,\dots,m^J$)組合成節點遠端位移向量

$$\mathbf{d}^J = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{J1} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{JK} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{Jm'} \end{Bmatrix} \quad (3.8b)$$

其維度大小為 $6m^J \times 1$ 。

(3.8)式展開可得位於節點 J 處之力平衡關係式如下：

$$\mathbf{A}_1^J \mathbf{a}^J + \mathbf{D}_1^J \mathbf{d}^J + \mathbf{f}^J = \mathbf{0}_{6 \times 1} \quad (3.9)$$

其中，

$\mathbf{A}_1^J = [\mathbf{T}^{J1} \mathbf{A}^{J1} \quad \dots \quad \mathbf{T}^{JK} \mathbf{A}^{JK} \quad \dots \quad \mathbf{T}^{Jm'} \mathbf{A}^{Jm'}]$ 為 $6 \times 6m^J$ 之矩陣；

$\mathbf{D}_1^J = [\mathbf{T}^{J1} \mathbf{D}^{J1} \quad \dots \quad \mathbf{T}^{JK} \mathbf{D}^{JK} \quad \dots \quad \mathbf{T}^{Jm'} \mathbf{D}^{Jm'}]$ 為 $6 \times 6m^J$ 之矩陣。

$\mathbf{f}^J = \boldsymbol{\eta}^J + \sum_{K=1}^{m^J} \mathbf{T}^{JK} \tilde{\mathbf{f}}^{JK} = \boldsymbol{\eta}^J + \tilde{\mathbf{f}}^J$ 包含節點 J 處的外力及連接於 J 點的所有

桿件固端力之和。

3.3 節點諧合方程式

諧合條件要求各桿件端點之位移及轉角必須與節點之位移及轉角(整體座標)相同，因此吾人可得桿件 JK 於節點 J 之諧合方程式如下：

$$\mathbf{T}^{JK} \mathbf{a}^{JK} = \mathbf{Q}^J \quad (3.10)$$

其中 \mathbf{T}^{JK} 為桿件 JK 之轉換矩陣， \mathbf{a}^{JK} 為桿件 JK 於節點 J 處(近端)之變位(局部座標)，二者之定義如(3.4)式與(3.6)式所示；

$$\mathbf{Q}^J = \begin{bmatrix} U_X^J \\ U_Y^J \\ U_Z^J \\ \Theta_X^J \\ \Theta_Y^J \\ \Theta_Z^J \end{bmatrix} \text{ 為 } 6 \times 1 \text{ 之節點 } J \text{ 的水平位移及轉角(整體座標)。}$$

根據(3.10)式，交會於節點 J 之 m^J 根桿件的諧合方程式可表示如下：

$$\mathbf{A}_2^J \mathbf{a}^J = \mathbf{U}_2^J \mathbf{Q}^J \quad (3.11)$$

上式共包含 $6m^J$ 條諧合方程式，其中

$$\mathbf{A}_2^J = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{J1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^{J2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{T}^{Jm^J} \end{bmatrix} \text{ 為 } 6m^J \times 6m^J \text{ 之矩陣；}$$

$$\mathbf{U}_2^J = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \\ \vdots \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \text{ 為 } 6m^J \times 6 \text{ 之矩陣，其中 } \mathbf{I} \text{ 為 } 6 \times 6 \text{ 之單位矩陣。}$$

3.4 節點載重源向量與傳遞分配矩陣

3.4.1 剛性自由節點

經由推導平衡方程式(3.9)及諧合方程式(3.11)的過程，吾人建立節點外力 \mathbf{f}^J 、節點位移 \mathbf{Q}^J 與桿件近端位移向量 \mathbf{a}^J 及桿件遠端位移向量 \mathbf{d}^J 的關係如下：

$$\mathbf{A}_1^J \mathbf{a}^J + \mathbf{D}_1^J \mathbf{d}^J + \mathbf{f}^J = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}_2^J \mathbf{a}^J = \mathbf{U}_2^J \mathbf{Q}^J$$

以上共包含 6 條平衡方程式及 $6m^J$ 條諧合方程式。然而，未知數的總數為 $12m^J + 6$ (包括桿件近端及遠端位移向量及節點位移向量 \mathbf{Q}^J)，因此，仍需要額外提供 $6m^J$ 條方程式方能求解。

首先求出近端位移向量(局部座標)及節點位移向量(整體座標)與節點作用力(整體座標)的關係。假設 $\mathbf{d}^J = \mathbf{0}$ ，則(3.9)式及(3.11)式可合併如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^J & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{U}_2^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{f}^J \\ \mathbf{0}_{6m^J \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

其中， $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^J & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{U}_2^J \end{bmatrix}$ 的維度為 $(6m^J + 6) \times (6m^J + 6)$ ； $\begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix}$ 的維度為 $(6m^J + 6) \times 1$ 。

因此，桿件近端變位 \mathbf{a}^J 與節點變位 \mathbf{Q}^J 可解出如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^J & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{U}_2^J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f}^J \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

欲求 \mathbf{a}^J ，則僅需(3.13)式等號右側行向量之 $6m^J$ 項分量，稱為剛性自由節點 J 之載重源向量 \mathbf{s}^J ，即

$$\mathbf{s}^J = - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6m^J \times 6m^J} & \mathbf{0}_{6m^J \times 6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^J & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{U}_2^J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f}^J \\ \mathbf{0}_{6m^J \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

載重源向量 \mathbf{s}^J 的維度為 $6m^J \times 1$ 。

若視遠端位移向量 \mathbf{d}^J 為已知，則桿件近端變位 \mathbf{a}^J 與節點變位 \mathbf{Q}^J 可由(3.10)式及(3.12)式求得。假設 $\mathbf{f}^J = \mathbf{0}$ ，則(3.9)式及(3.11)式可合併如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^J & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{U}_2^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^J \\ \mathbf{0}_{6m^J \times 6m^J} \end{bmatrix} \mathbf{d}^J \quad (3.15)$$

桿件近端變位 \mathbf{a}^J 與節點變位 \mathbf{Q}^J 可解得如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^J & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{U}_2^J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^J \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{d}^J \quad (3.16)$$

欲求 \mathbf{a}^J ，則僅需(3.16)式等號右側行向量之前 $6m^J$ 項分量，亦即

$$\mathbf{S}^J = - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6m^J \times 6m^J} & \mathbf{0}_{6m^J \times 6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^J & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{U}_2^J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^J \\ \mathbf{0}_{6m^J \times 6m^J} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

稱為剛性自由節點 J 之傳遞分配矩陣 \mathbf{S}^J ，其維度為 $6m^J \times 6m^J$ 。

3.4.2 鉸支承

若結構節點係置於鉸支承上，則該節點將不產生水平位移與垂直位移，但可轉動。此外，節點的水平支承反力、垂直支承反力與轉角均為未知。已知條件包括節點之彎矩平衡方程式、水平位移與垂直位移為零，整理如下：

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J \mathbf{a}^J + \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1^J \mathbf{d}^J + \mathbf{L}_1 \mathbf{f}^J = \mathbf{L}_1 \mathbf{0}_{6 \times 6} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J \mathbf{a}^J = \mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \mathbf{Q}^J \quad (3.19)$$

其中

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{為作用彎矩之位置向量；} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{L}' & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}' & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{L}' \end{bmatrix} \text{為 } 3m^J \times 6m^J \text{ 之矩陣；} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{L}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{水平位移與垂直位移之位置矩陣；} \quad (3.22)$$

$$\bar{\mathbf{U}}_2^J = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{為 } 6m^J \times 6 \text{ 之矩陣(與 } \mathbf{U}_2^J \text{ 的維度相同),}$$

其中 $\mathbf{0}$ 為 6×6 之零矩陣。 (3.23)

將(3.9)式乘上 \mathbf{L}_1 所得之結果即為(3.18)式，稱為節點 J 之彎矩平衡方程式。(3.19)

式則表示交會於節點 J 之 m^J 根桿件的水平位移與垂直位移均為 0。

首先求出近端位移向量(局部座標)及節點位移向量(整體座標)與節點作用力(整體座標)的關係。假設 $\mathbf{d}^J = \mathbf{0}$ ，則(3.18)式及(3.19)式可合併如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{f}^J \\ \mathbf{0}_{3m^J \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

其中， $\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}$ 的維度為 $(3m^J + 3) \times (6m^J + 6)$ ； $\begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix}$ 的維度為 $(6m^J + 6) \times 1$ 。

因此，桿件近端變位 \mathbf{a}^J 與節點變位 \mathbf{Q}^J 可解得如下：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix} &= - \left(\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{f}^J \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= -\tilde{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{f}^J \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.25)$$

其中， $\tilde{\mathbf{P}} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}^T$ 稱為 Pseudo-inverse，亦可以利用 Singular-Value-Decomposition(SVD)求得。

欲求 \mathbf{a}^J ，則僅需(3.25)式等號右側行向量之前 $6m^J$ 項分量，稱為鉸支承 J 之載重源向量 \mathbf{s}^J ，即

$$\mathbf{s}^J = - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6m^J \times 6m^J} & \mathbf{0}_{6m^J \times 6} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{f}^J \\ \mathbf{0}_{3m^J \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

其維度為 $6m^J \times 1$ 。

若視遠端位移向量 \mathbf{d}^J 為已知，則桿件近端變位 \mathbf{a}^J 與節點變位 \mathbf{Q}^J 亦可由(3.18)式及(3.19)式求得。假設 $\mathbf{f}^J = \mathbf{0}$ ，則(3.18)式及(3.19)式可合併如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1^J \\ \mathbf{0}_{3m^J \times 1} \end{bmatrix} \mathbf{d}^J \quad (3.27)$$

桿件近端變位 \mathbf{a}^J 與節點變位 \mathbf{Q}^J 可解得如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix} = -\tilde{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1^J \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{d}^J \quad (3.28)$$

欲求 \mathbf{a}^J ，則僅需(3.28)式等號右側行向之前 $6m^J$ 項分量，亦即

$$\mathbf{S}^J = - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6m^J \times 6m^J} & \mathbf{0}_{6m^J \times 6} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1^J \\ \mathbf{0}_{3m^J \times 6m^J} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

稱為鉸支承 J 之傳遞分配矩陣 \mathbf{S}^J ，其維度為 $6m^J \times 6m^J$ 。

3.4.3 輓支承

如同二維結構的情形，已知條件除了兩方向的水平力平衡方程式、兩方向的彎矩平衡方程式、扭矩平衡方程式，還有垂直向位移為零，整理如下：

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J \mathbf{a}^J + \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1^J \mathbf{d}^J + \mathbf{L}_1 \mathbf{f}^J = \mathbf{L}_1 \mathbf{0}_{6 \times 6} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J \mathbf{a}^J = \mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \mathbf{Q}^J \quad (3.31)$$

其中

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 為水平作用力與作用彎矩之位置矩陣；} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{L}' & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}' & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{L}' \end{bmatrix} \text{ 為 } m^J \times 6m^J \text{ 之矩陣；} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{L}' = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \text{ 為垂直位移之位置向量。} \quad (3.34)$$

$$\bar{\mathbf{U}}_2^J = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ 為 } 6m^J \times 6 \text{ 之矩陣(與 } \mathbf{U}_2^J \text{ 的維度相同),$$

其中 $\mathbf{0}$ 為 6×6 之零矩陣。 (3.35)

首先求出近端位移向量(局部座標)及節點位移向量(整體座標)與節點作用力(整體座標)的關係。假設 $\mathbf{d}^J = \mathbf{0}$ ，則(3.30)式及(3.31)式可合併如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{f}^J \\ \mathbf{0}_{m^J \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

其中， $\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}$ 的維度為 $(m^J + 5) \times (6m^J + 6)$ ； $\begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix}$ 的維度為

$(6m^J + 6) \times 1$ 。

因此，桿件近端變位 \mathbf{a}^J 與節點變位 \mathbf{Q}^J 可解得如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix} = - \left(\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{f}^J \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$= -\tilde{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{f}^J \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

其中， $\tilde{\mathbf{P}} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{U}}_2^J \end{bmatrix}^T$ 稱為

Pseudo-inverse，亦可以利用 Singular-Value-Decomposition(SVD)求得。

欲求 \mathbf{a}^J ，則僅需(3.37)式等號右側行向量之前 $6m^J$ 項分量，稱為韌支承 J 之載重源向量 \mathbf{s}^J ，即

$$\mathbf{s}^J = - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6m^J \times 6m^J} & \mathbf{0}_{6m^J \times 6} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{f}^J \\ \mathbf{0}_{m^J \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

其維度為 $6m^J \times 1$ 。

若視遠端位移向量 \mathbf{d}^J 為已知，則桿件近端變位 \mathbf{a}^J 與節點變位 \mathbf{Q}^J 亦可由

(3.30)式及(3.31)式求得。假設 $f^J = \mathbf{0}$ ，則(2.30)式及(3.31)式可合併如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^J & \mathbf{L}_1 \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^J & -\mathbf{L}_2 \mathbf{U}_2^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1^J \\ \mathbf{0}_{m^J \times 6m^J} \end{bmatrix} \mathbf{d}^J \quad (3.39)$$

桿件近端變位 \mathbf{a}^J 與節點變位 \mathbf{Q}^J 可解得如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}^J \\ \mathbf{Q}^J \end{bmatrix} = -\tilde{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1^J \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{d}^J \quad (3.40)$$

欲求 \mathbf{a}^J ，則僅需(3.41)式等號右側行向量之前 $6m^J$ 項分量，亦即

$$\mathbf{S}^J = - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6m^J \times 6m^J} & \mathbf{0}_{6m^J \times 6} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1^J \\ \mathbf{0}_{m^J \times 6m^J} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

稱為韌支承 J 之傳遞分配矩陣 \mathbf{S}^J ，其維度為 $3m^J \times 3m^J$ 。

若將所有節點之近端位移向量 \mathbf{a}^J 組合成一整體向量 \mathbf{a} ，所有節點之遠端位移向量 \mathbf{d}^J 組成一整體向量 \mathbf{d} ，吾人可得結構之近端位移、遠端位移、波源向量與傳遞及分配矩陣之關係如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^J \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & \ddots \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{S}^J & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{S}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^1 \\ \mathbf{d}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}^J \\ \vdots \\ \mathbf{d}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{s}^1 \\ \mathbf{s}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{s}^J \\ \vdots \\ \mathbf{s}^n \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{a}_{12m \times 1} = \mathbf{S}_{12m \times 12m} \mathbf{d}_{12m \times 1} + \mathbf{s}_{12m \times 1}$$

其中， \mathbf{S} 稱為結構之傳遞及分配矩陣， \mathbf{s} 稱為結構之載重源向量。

3.5 轉列矩陣之建立

如同二維結構的情形，吾人可利用一相位矩陣(phase matrix) \mathbf{p} 將節點之遠端位移(\mathbf{d}^{JK})及近端位移(\mathbf{a}^{KJ})之關係表示如下：

$$\mathbf{d}^{JK} = \mathbf{p}\mathbf{a}^{KJ} \quad (3.43)$$

其中

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

根據(3.8b)式吾人可將各節點之局部遠端位移向量 \mathbf{d}^J ($J=1,2,\dots,n$)組合成整體之遠端位移向量 \mathbf{d}

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}^1 \\ \mathbf{d}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}^n \end{bmatrix} \text{ 為 } 12m \times 1 \text{ 之整體"遠端"位移向量} \quad (3.44)$$

同理，吾人亦可將各桿件之"近端"位移向量 \mathbf{a}^{KJ} ($K=1,2,\dots,m^J$)組合成局部之"近端"位移向量 $\tilde{\mathbf{a}}^J$ ($J=1,2,\dots,n$)，然後再進一步組合成整體之"近端"位移向量 $\tilde{\mathbf{a}}$

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}^1 \\ \tilde{\mathbf{a}}^2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}^n \end{bmatrix} \text{ 為 } 12m \times 1 \text{ 之整體"近端"位移向量} \quad (3.45)$$

根據(3.42)式之相位矩陣，吾人可建立向量 \mathbf{d} 與向量 $\tilde{\mathbf{a}}$ 之關係如下：

$$\mathbf{d} = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{a}} \quad (3.46)$$

其中

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{p} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{p} \end{bmatrix} \text{ 為 } 12m \times 12m \text{ 之整體相位矩陣。}$$

此外，先前所述之向量 $\tilde{\mathbf{a}}$ 與向量 \mathbf{a} 其組成的元素相同，因此，出現在向量 \mathbf{a} 中之元素 \mathbf{a}^{JK} 亦同樣出現在向量 $\tilde{\mathbf{a}}$ 中，其主要之差異為元素的排列次序不同。因此，吾人可利用轉列矩陣的技巧將位於不同向量內之相同元素的位置關係表示如下：

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{U}\mathbf{a} \quad (3.48)$$

其中， \mathbf{U} 為 $12m \times 12m$ 之轉列矩陣，其建立過程和 2.5 節二維節構的轉列矩陣情形相同，只需將三個自由度改為六個自由度，故在此不再詳述。

3.6 結構之迴傳矩陣

根據(3.46)式與(3.47)式，吾人可得整體遠端位移向量與整體近端位移向量之另一個關係式如下：

$$\mathbf{d} = \mathbf{P}\mathbf{U}\mathbf{a} \quad (3.48)$$

將(3.48)式再代入(3.42)式，吾人可得：

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}\mathbf{P}\mathbf{U}\mathbf{a} + \mathbf{s} \quad (3.49)$$

(3.49)式可簡化為：

$$\mathbf{a} = [\mathbf{I} - \mathbf{R}]^{-1}\mathbf{s} \quad (3.50)$$

其中， $\mathbf{R}_{12m \times 12m} = \mathbf{S}\mathbf{P}\mathbf{U}$ 稱為結構之迴傳矩陣。(3.50)式之 $[\mathbf{I} - \mathbf{R}]^{-1}$ 可以進一步展開成諾曼(Newmann)級數：

$$[\mathbf{I} - \mathbf{R}]^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 + \cdots + \mathbf{R}^N) + \mathbf{Q}_N \quad (3.51)$$

其中餘項 $\mathbf{Q}_N = [\mathbf{I} - \mathbf{R}]^{-1}\mathbf{R}^{N+1}$ 。

若餘項 \mathbf{Q}_N 很小，則(3.50)式之整體近端位移向量可以計算如下：

$$\mathbf{a} = (\mathbf{I} + \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 + \cdots + \mathbf{R}^N)\mathbf{s} \quad (3.52)$$

整體之遠端位移向量可根據(3.48)式計算。桿件之節點力可將(3.48)式與(3.52)式代入(3.6)式求得。此外，將所有桿件之端點力 \mathbf{F}^{jk} 組合成整體之端點力 \mathbf{F} ，將所有桿件之固端力 $\tilde{\mathbf{f}}^{jk}$ 組合成整體之固端力 $\tilde{\mathbf{f}}$ ，則(3.6)式可整理為：

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{D}\mathbf{d} + \tilde{\mathbf{f}} \quad (3.53)$$

將(3.48)、(3.50)及(3.52)式代入(3.53)式整理後可得：

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= (\mathbf{A} + \mathbf{DPU})(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{s} + \tilde{\mathbf{f}} \\
&= (\mathbf{A} + \mathbf{DPU})(\mathbf{I} + \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 + \cdots + \mathbf{R}^N) \mathbf{s} + \tilde{\mathbf{f}}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

3.7 迴傳矩陣法與彎矩分配法之比較

前述之迴傳矩陣法分析桿端力時，同時考慮了六個自由度。然而，彎矩分配法在力的傳遞分配上僅考慮彎矩自由度。為了比較兩種分析方法，我們可將前述之迴傳矩陣法的六個自由度分析改採為一個自由度(z 軸向的彎矩和撓角)分析，則(3.6)式中的 \mathbf{A}^{JK} 、 \mathbf{D}^{JK} 可簡化為：

$$\mathbf{A}^{JK} = -\frac{4EI_z}{l} \qquad \mathbf{D}^{JK} = -\frac{2EI_z}{l}$$

整體相位矩陣 $\mathbf{P} = \mathbf{I}_{m \times m}$ 為 $m \times m$ 之單位矩陣。(3.4)式則可改寫為 $\mathbf{T}^{JK} = 1$ ，代入(3.6)、(3.14)、(3.17)式可推得節點 J 的載重源向量為：

$$\mathbf{s}^J = \frac{1}{\sum_{K=1}^{m'} \left(\frac{4EI_z}{l}\right)^{JK}} \mathbf{f}^J \tag{3.55}$$

可推得節點 J 的傳遞分配矩陣為：

$$\mathbf{S}^J = \frac{1}{\sum_{K=1}^{m'} \left(\frac{4EI_z}{l}\right)^{JK}} \begin{bmatrix} \left(\frac{2EI_z}{l}\right)^{J1} & \left(\frac{2EI_z}{l}\right)^{J2} & \cdots & \left(\frac{2EI_z}{l}\right)^{Jm'} \\ \left(\frac{2EI_z}{l}\right)^{J1} & \left(\frac{2EI_z}{l}\right)^{J2} & \cdots & \left(\frac{2EI_z}{l}\right)^{Jm'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{2EI_z}{l}\right)^{J1} & \left(\frac{2EI_z}{l}\right)^{J2} & \cdots & \left(\frac{2EI_z}{l}\right)^{Jm'} \end{bmatrix}_{m' \times m'} \tag{3.56}$$

根據彎矩分配法的矩陣式[20]，我們可將彎矩分配法傳遞分配的過程以下列矩陣運算式示：

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= (\mathbf{I} + \mathbf{C})(\mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \cdots + \mathbf{Q}^N) \mathbf{Bf} + \tilde{\mathbf{f}} \\
&= (\mathbf{I} + \mathbf{C})(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Bf} + \tilde{\mathbf{f}}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

其中， $\tilde{\mathbf{f}}$ 為結構整體之固端彎矩向量， $\mathbf{f} = \boldsymbol{\eta} + \tilde{\mathbf{f}}$ 包含固端彎矩及非固端之外力矩，其中 $\boldsymbol{\eta}$ 為結構整體之非固端之外力矩。 \mathbf{B} 為分配因子所組成之分配矩陣， $\mathbf{Q} = \mathbf{BC}$ ， \mathbf{C} 為傳遞因子所組成之傳遞矩陣。

為了比較(3.57)式與(3.54)式，我們以一實例說明之。考慮一對稱結構之受力情形如圖 3.2，依據固端彎矩的傳遞分配路徑，我們可建立分配矩陣 \mathbf{B} 與傳遞矩陣 \mathbf{C} ，並求得矩陣 \mathbf{Q} 為：

$$\mathbf{Q} = \mathbf{BC} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

利用(3.56)式可計算出結構之傳遞分配矩陣，進而可求得結構之迴傳矩陣為：

$$\mathbf{R} = \mathbf{SPU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

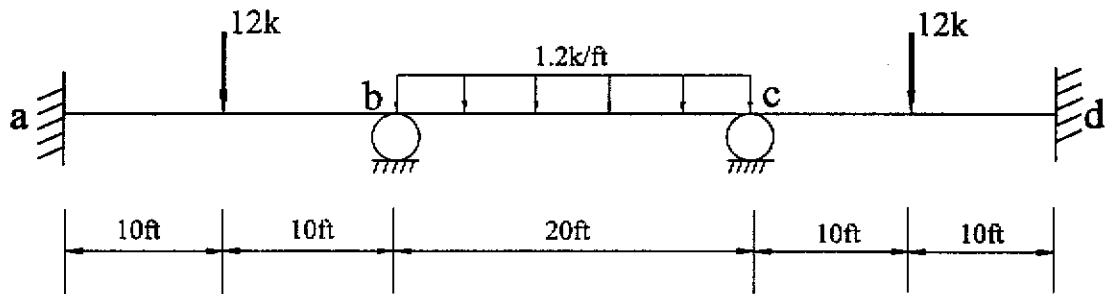


圖 3.2 對稱結構

由以上結果顯示 $\mathbf{Q} = \mathbf{R}$ 。故吾人可推論，迴傳矩陣的意義即為傳遞矩陣和分配矩陣運算一次的結果；當迴傳矩陣運算 N 次，就相當於彎矩分配法傳遞分配 N 次的結果。當我們僅考慮彎矩為自由度時，迴傳矩陣法的數學運算過程與彎矩分配法的運算過程相同。然而，彎矩分配法忽略軸向及橫向自由度的影響，造成運算的結果不精確。本文所提出之迴傳矩陣法正可補其不足，並且依照需求，可考慮任意多個自由度。例如，當我們考慮二維平面桁架結構時，僅需採用兩個自由度(軸力、剪力)的傳遞分配。此外，由(3.57)式可知，彎矩分配法是以力矩來做傳遞分配，計算結果只能得知端點力矩，無法直接得知節點位移或轉角。且當結構為非對稱(有側移)時，必須先假設側移量所引起的等效彎矩

[12]，經傳遞分配後再以平衡方程式解出側移未知數，過程相當繁瑣，亦不適合應用計算機程式加以運算。由(3.52)式可知，本研究出之迴傳矩陣法，可以端點位移作傳遞分配，故計算結果可直接得到節點的位移、轉角等物理量，也可由(3.54)式直接求得端點力，並且可以直接分析非對稱結構，不須另外考慮側移的問題，計算過程直觀、簡易且較為一般化，適合運用計算機程式加以運算。本文並且提供彎矩分配法一個較為完整之數學運算模型，(3.57)式中的分配矩陣 **B**、傳遞矩陣 **C** 會因結構的幾何形狀不同而有不同的排置方式，因此建立過程需要人為的判斷，然而迴傳矩陣法可藉由建立位相矩陣 **P** 和轉列矩陣 **U** 簡化其分析過程。

第四章 實例分析

4.1 π -型對稱構架之實例分析

為了驗證本文提出之迴傳矩陣法之精確性，吾人將分析所得之結果與利用有限元素分析軟體 SAP2000 分析所得之結果進行比較。圖 2-1 為一對稱之 π -形構架，中間跨度受到一組 60kN 向下的垂直力作用。構架之所有節點均為剛接，其中，節點 1 與節點 4 位於鉸支承上，節點 5 與節點 6 則位於固定支承上。桿件的長度分別為 6 公尺、9 公尺與 12 公尺，每根桿件之斷面性質均相同，斷面積為 $A=3.6\times 10^{-3}m^2$ ，慣性矩 $I=1.28\times 10^{-3}m^4$ ，楊氏模數 $E=210\times 10^9Pa$ 。

表 4-1 與表 4-2 分別為迴傳矩陣法與 SAP2000 分析所得之位移。由表可知，迴傳矩陣法所得之結果與利用有限元素分析軟體所得之結果相當一致。

表 4-3 與表 4-4 分別為迴傳矩陣法與 SAP2000 分析所得之節點力，其中，節點力可由(2.7)式求得。由於桿件 23 有集中載重作用於梁跨度上，因此，吾人須先求出假設節點 2 與節點 3 固定時之固端彎矩與固端垂直反力，將求得之固端彎矩與固端垂直反力反方向施加於節點 2 與節點 3 再進行分析。桿件 23 利用迴傳矩陣法所得之結果須加上固端彎矩與固端垂直反力方可得表 4-3 之結果。桿件 23 之固端彎矩可由以下之計算求得：

$$M_{FEM}^{23} = -\frac{(60)(3)(9^2)}{12^2} - \frac{(60)(9)(3^2)}{12^2} = -135(kN-m)$$

$$M_{FEM}^{32} = \frac{(60)(3^2)(9)}{12^2} + \frac{(60)(9^2)(3)}{12^2} = 135(kN-m)$$

$$V_{FEM}^{23} = V_{FEM}^{32} = \frac{1}{2}(60) \times 2 = 60(kN)$$

由表可知，迴傳矩陣法所得之結果與利用有限元素分析軟體所得之結果相當一致。

4.2 非對稱構架之實例分析

經由分析對稱之 π -形構架所得之比較結果，吾人印證本文提出之迴傳矩陣法可精確求得結構的節點位移與節點力。然而，迴傳矩陣法應用於非對稱結構之精確性仍有必要再進一步驗證。因此，吾人選擇一非對稱結構(圖 4-1)再進行比較分析。構架之所有節點均為剛接(rigid joints)，其中，節點 1 與節點 2 位於固定支承上，節點 3 與節點 5 分別受到 80kN 與 40kN 之水平力的作用，斜桿 45 則受到均佈力 12kN/m 之作用。每根桿件之斷面性質均相同，斷面積為 $A=0.075m^2$ ，慣性矩 $I=4.8 \times 10^{-4} m^4$ ，楊氏模數 $E=210 \times 10^9 Pa$ 。

表 4-5 與表 4-6 分別為迴傳矩陣法與 SAP2000 分析所得之位移。由表可知，非對稱結構利用迴傳矩陣法所得之結果與利用有限元素分析軟體所得之結果仍相當一致。

表 4-7 與表 4-8 分別為迴傳矩陣分析法與 SAP2000 分析所得之節點力，其中，節點力可由(2.7)式求得。由於斜桿 45 有均佈力作用，因此，吾人須先求出假設節點 4 與節點 5 固定時之固端彎矩與固端垂直反力，將求得之固端彎矩與固端垂直反力反方向施加於節點 4 與節點 5 再進行分析。斜桿 45 利用迴傳矩陣法所得之結果須加上固端彎矩與固端垂直反力方可得表 4-7 之結果。斜桿件 45 之固端彎矩與固端垂直反力可分別計算如下：

$$M_{FEM}^{54} = -\frac{1}{12} \times 12 \times (\sqrt{6^2 + 9^2})^2 = -117(kN - m)$$

$$M_{FEM}^{45} = \frac{1}{12} \times 12 \times (\sqrt{6^2 + 9^2})^2 = 117(kN - m)$$

$$V_{FEM}^{54} = V_{FEM}^{45} = \frac{1}{2} \times 12 \times (\sqrt{6^2 + 9^2}) = 64.902(kN)$$

由表可知，非對稱結構利用迴傳矩陣法所得之結果與利用有限元素分析軟體所得之結果仍相當一致。

4.3 三維空間構架結構之實例分析

根據第三章所討論的三維結構迴傳矩陣分析，我們以 MATLAB 撰寫程式(附錄)來計算一三維結構，並與 SAP2000 分析的結果做比較，以確立其理論的正確性及精確度。圖 4.2 為本計劃實驗所採用的兩層樓鋁製剛架模型，每根桿件之斷面性質均相同，鋁的楊氏模數 $E = 70 \times 10^9 Pa$ ，慣性矩 $I_y = I_z = 1.635 \times 10^{-8} m^4$ ，截面 $A = 1.84 \times 10^{-4} m^2$ ，剪力模數 $G = 26 \times 10^9 Pa$ ，極慣性矩 $J = 2.433 \times 10^{-8} m^4$ 。x 向長度 $0.8m$ ，y 向長度 $0.5m$ ，每層樓高 $0.9m$ 。節點 3 受到一 y 向水平力 $0.245 kN$ ($25 kg$)。

表 4.9 為迴傳矩陣法分析所得之位移結果，與利用 SAP2000 分析所得之結果(表 4.10)十分接近；迴傳矩陣分析所得之節點內力亦有相同的情形(表 4.11 及表 4.12)，說明本文所提之迴傳矩陣法可應用於三維結構之靜力分析。

綜上所述，吾人印證迴傳矩陣法可應用於結構(二維及三維)之靜力分析，不論對稱結構或非對稱結構，理論分析所得之結果與有限元素分析軟體所得之結果均十分契合。

第五章 試驗環境之建構與靜力試驗結果

5.1 模型剛架之設計與組裝

為進行三維剛架結構之靜力與動力波傳試驗，本研究中設計一棟二層樓之鋁方管立體模型剛架。該剛架係由八根橫梁與八根柱子所構成，試驗時模型將固定於型鋼製之基礎上，如照片 5-1 所示。鋁模型剛架之尺寸詳圖 5-1，其平面尺寸為 $50\text{ cm} \times 80\text{ cm}$ ，樓層高度為 90 cm ，總樓高為 180 cm ，模型重約為 6.09 kg 。四根柱腳分別焊在鋁板上(長、寬與厚度為 $13\text{ cm} \times 13\text{ cm} \times 1\text{ cm}$)，俾便將鋁模型剛架固定於基礎上。梁、柱構件均使用相同斷面之鋁方管，其斷面尺寸為 $25\text{ mm} \times 25\text{ mm} \times 2\text{ mm}$ (長 \times 寬 \times 厚度)。鋁之材料性質與梁、柱之斷面性質如表 5-1 所示。梁、柱接頭採氬焊方式接合，以模擬剛接的情況。氬焊全名為氬氣鎢極電焊，係運用電流正負極交會時產生熱的特性來焊接，焊槍前端的鎢棒可在焊接點上引弧，另一端則接正極電流到鋁方管之其它位置，同時利用氬氣(惰性氣體不會燃燒)保護焊接部位使其不產生氧化現象。

為便於靜力或驟加衝擊力之加載，遂於二樓一隅之梁、柱接頭處加裝掛鉤，如照片 5-2 所示，同時設計一滑輪支承柱(照片 5-3)，使得施力於掛鉤上之繩索可跨置於滑輪(照片 5-4)上。

模型基礎是由兩根型鋼所構成，其尺寸詳圖 5-2。型鋼之斷面尺寸均為 $H400 \times 400 \times 16 \times 21$ (mm)，長度分別為 140 cm 與 165 cm 。每根型鋼各鑽兩個直徑為 5 cm 之圓孔，圓孔間距 1 m 以便配合強力地板(strong floor)的孔位固定，如照片 5-5 所示。基礎型鋼鎖定後，再將鋁模型剛架安置其上，以螺栓將柱基板固定在基礎之上翼板，模擬固定支承之條件(照片 5-6)。

5.2 加載機構

照片 5-7 為吾人模擬施加靜力於鋁模型構架的情形。將繩索一端固定於結構之掛鉤上，然後攀跨過滑輪，另一端則懸吊一質塊以模擬施加於結構之水平力。當進行驟加衝擊力試驗時，擬利用打火機將尼龍繩燒斷(約需 30×10^{-6} 秒)，以模擬階梯荷載(step loading)。

5.3 三維鋁模型構架之靜力試驗

吾人於三維鋁模型構架組裝完成後隨即進行水平力加載之靜力分析試驗，將釣魚線一端固定於節點 9(圖 4-2)之掛勾，然後攀跨過滑輪，另一端則吊掛一質塊(鐵製，重約 8.5070kg)以模擬施加於結構之水平靜力。此外，吾人於桿件 7-8、桿件 10-11、桿件 8-9(前、後)、桿件 8-11 及桿件 9-8 距離節點約 10cm 處各黏貼一枚應變計(共 6 枚，方向與桿件之軸向平行)，俾便將試驗之應變結果與理論分析所得之應變結果進行比較分析。靜力加載試驗完成後，吾人將質塊移除，同時記錄卸載後各測點之應變值。

進行靜力試驗所使用之儀器設備包括：

(一)資料擷取系統：IMC(SPARTAN-L)

主要功能為資料擷取、資料分析及資料儲存，共有 16 個差動型(differential)類比輸入通道(channel)，總取樣率(sum sampling rate)為 20kHz，單一通道之最大取樣率可達 10kHz。類比/數位(A/D)轉換之解析度為 16-bit。

(二)應變計訊號調節放大器：Measurements Group(2100 System)

含一組 2110A 電源供應器(power supply)，可供應直流電源 0.5~12V；四組 2120 訊號調節模組(conditioner module)，增益(gain)放大倍率介於 1~2100，共有 8 個類比輸入通道，每個通道之最大取樣率為 5kHz。訊號輸入線之接頭為軍用接頭，吾人根據使用手

冊之說明，將訊號線焊接於軍用接頭之特定接腳可分別得到 1/4 電橋(應變計之電阻值為 120Ω 、 350Ω 及 1000Ω 時使用)、半橋及全橋(quarter、half and full-bridge)的輸入型式，視感應器的種類、特性選擇適當的型式。

(三)應變計：Measurements Group(EA-06250-BF-350)

應變計(strain gage)的長度約為 2.5cm，分類號為 R-A44AD01，電阻值為 $350.0 \pm 0.15\%$ (24°C)，應變計係數 (gage factor) 為 $2.015 \pm 0.5\%$ (24°C)，最大可量測應變約為 0.05。應變計訊號線接至 2100 訊號調節放大器後之應變量與電壓值之關係為 $1000 \mu\text{V}$ 。

本次試驗之取樣週期設定為 0.01 秒(取樣頻率 100Hz)，總取樣時間為 3 分鐘。啟動資料擷取系統約 1 分鐘後，將質塊吊掛至釣魚線上進行加載，由於力量加載過程難免產生動力擾動，因此，吾人取應變歷時達到平穩後之平均值作為試驗之結果。

圖 5-3~圖 5-8 為靜力試驗之應變歷時。由圖可知，除了應變計 6(黏貼於桿件 9-8)之訊號較為異常外(可能的原因為應變計黏貼過程有缺陷)，試驗所得之結果與理論分析所得之結果相當接近，驗證迴傳矩陣法之精確性。試驗所得之應變值歸納於表 5-2。

第六章 結論

本計劃分三年進行，規劃之研究項目包括：靜力載重試驗、衝擊載重(階梯式驟加外力)試驗與地震模擬振動台試驗等。第一年工作內容包括迴傳波射理論之回顧與程式撰寫、模型剛架之製作、波動量測儀器之採購與測試、靜力試驗等。本報告為計劃第一年之期末報告，目前已完成之工作項目包括：

- (1) 完成三維迴傳矩陣法之程式撰寫(詳附錄)，並應用在二維平面構架及三維空間構架之靜力分析。實例分析結果顯示，以迴傳矩陣法分析所得之結果與有限元素軟體 SAP2000 分析所得之結果相當一致，印證迴傳矩陣法於結構靜力分析之精確性。
- (2) 完成兩層樓三維模型剛架與基礎之設計及組裝(詳照片)並進行靜力試驗。試驗結果顯示，試驗之應變值與理論之應變值二者契合的程度相當高，印證以迴傳矩陣法分析靜力結構之精確性，可作為往後吾人進行迴傳波射動力分析之良好基礎。
- (3) 完成試驗設備之採購作業，包括高頻示波器及壓電式動態應變規。
- (4) 二維波傳分析之程式撰寫及衝擊力載重試驗之細部規劃工作亦正在進行中。

參考文獻

- (1) J. Boussinesq, *Compte rendu*, p.154, 1883.
- (2) Pestal, E.C., and Leckie, F. A. (1963), *Matrix Method in Elastomechanics*, McGraw-Hill, New York, Chap. 4.
- (3) Clough, R. W. and Penzin, J. (1993), *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, New York.
- (4) Chopra, A. K. (1995), *Dynamics of Structures-Theory and Application to Earthquake Engineering*, Prentice-Hall, Inc.
- (5) O. C. Zienkiewicz and K. J. Taylor (1989), *The Finite Element Method*, 4th ed., McGraw-Hill, New York.
- (6) Boley, B. A. and Chao, C. C. (1957), "Impact on Pin-Jointed Trusses," *American Society of Civil Engineers Transactions*, Vol. 122, No. 1, pp. 39-63.
- (7) Doyle, J. F. and Kamle, S. (1989), *Wave Propagation in Structures*, Springer-Verlag, New York, Chap. 5.
- (8) Nagem, R. J. and Williams, J. H. (1989), "Dynamic Analysis of Large Space Structure Using Transfer Matrices and Joint Coupling Matrices." *Mechanical Structure and Machine*, Vol. 17, No. 3, pp. 349-371.
- (9) Howard, S. M. and Y. H. Pao (1998), "Analysis and Experiments on Stress Waves in Planar Trusses," *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 124, No. 8, pp. 884-891.
- (10) Pao, Y. H., Keh, D. C. and Howard, S. M. (1999), "Dynamic Response and Wave Propagation in Plane Trusses and Frames," *AIAA Journal*, Vol. 37, pp. 594-603.
- (11) D. C. Keh, Y. H. Pao and T. H. Hwu, "Dynamic Response and Wave Propagation in a Three-dimensional Frame Structure," *Journal of Sound and Vibration* (submitted in 1998, under revision)
- (12) 虞兆中 (1956), 「剛架有側傾之彎矩分配法」, 國立台灣大學工程學刊第一期, 第 26-40 頁。
- (13) 虞兆中 (1957), 「綜合分配法」, 國立台灣大學工程學刊第二期, 第 14-38 頁。
- (14) 虞兆中 (1959), 「有側傾之彎矩分配法解析邊桿傾斜之單間剛

- 架」，國立台灣大學工程學刊第四期，第 16-36 頁。
- (15) 虞兆中 (1968)，「桁架之分段解析法」，國立台灣大學工程學刊第十二期，第 1-4 頁。
- (16) Y. H. Pao and D. C. Keh (1996), "Moment-Distribution Method and Re-Distribution Matrix Analysis of Frame Structures," *The Chinese Journal of Mechanics*, Vol. 12, No. 1, pp. 157-165.
- (17) Wait, R., *Finite element analysis and applications*, Chichester, J. Wiley.(1985)
- (18) Aslam Kassimali (1998), *Matrix Analysis of Structures*, Books/Cole Publishing Company. Chap.7.,Chap.8.
- (19) Brose, G. J. (1997), *Numerical Methods with MATLAB-A Resource for Scientists and Engineers*, PWS Company, Boston. Chap. 3.
- (20) 謝元裕(譯著曹瑞祺)，「初等結構學」，第三板，科技圖書股份有限公司，民國 82 年，台北市。

表 2-1 向量 $\tilde{\mathbf{a}}$ 與向量 \mathbf{a} 之表示式

Vector	$\tilde{\mathbf{a}}$	\mathbf{a}
Joint	KJ	JK
1	21	12
2	12	21
	32	23
	52	25
3	23	32
	43	34
	63	36
4	34	43
5	25	52
6	36	63

表 4-1 迴傳矩陣法所得之位移(m)

Joint	u	v	ψ
1	0	0	0.162309
2	0.000117	-0.00025	-0.324702
3	-0.000120	-0.00025	0.324702
4	0	0	-0.162310
5	0	0	0
6	0	0	0

表 4-2 SAP2000 分析所得之位移(m)

Joint	u	v	ψ
1	0	0	0.16232
2	0.000117	-0.00025	-0.324746
3	-0.000120	-0.00025	0.32475
4	0	0	-0.162318
5	0	0	0
6	0	0	0

表 4-3 迴傳矩陣法所得之節點力(kN, kN - m)

I	J	F	V	M
1	2	9.817802	2.727261	0
2	1	-9.817802	-2.727261	24.54535
2	3	-14.72670	60	122.72628
2	5	24.54450	62.727261	98.18093
3	2	14.72669	60	-122.72628
3	4	9.817802	-2.727261	-24.54540
3	6	-24.54450	62.727261	-98.18093
4	3	-9.817802	2.727261	0
5	2	-24.54450	-62.72730	49.08605
6	3	24.54450	-62.72730	-49.08605

表 4-4 SAP2000 分析所得之節點力(kN, kN - m)

I	J	F	V	M
1	2	9.81678	2.72756	0
2	1	-9.816775	-2.727559	24.54803
2	3	-14.72516	60	122.725
2	5	24.5419	62.7276	98.17659
3	2	14.7252	60	-122.7246
3	4	9.81678	-2.727559	-24.548
3	6	-24.54194	62.7276	-98.1809
4	3	-9.816775	2.72756	0
5	2	-24.54194	-62.72756	49.07504
6	3	24.5419	-62.7276	-49.075

表 4-5 迴傳矩陣法所得之位移(m)

Joint	u	v	ψ
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0.185424	0.000419	-0.017620
4	0.185521	-0.000131	-0.026028
5	0.186623	0.000714	0.017891

表 4-6 SAP2000 分析所得之位移(m)

Joint	u	v	ψ
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0.186262	0.000419	-0.017649
4	0.186360	-0.000131	-0.026088
5	0.187462	0.000714	0.017915

表 4-7 迴傳矩陣法所得之節點力($kN, kN - m$)

I	J	F	V	M
1	3	106.051226	157.02711	-360.44138
2	4	85.94877	-49.02711	-320.31467
3	1	-106.051226	-157.02711	-275.86598
3	4	24.44029	46.4280	195.47222
3	5	1.61094	110.59911	80.39375
4	2	-85.94877	49.02711	-195.3780
4	3	-24.44029	-46.4280	222.37976
4	5	-110.3891	2.5991	-27.0018
5	3	-1.61094	-110.59911	-90.05939
5	4	38.3891	110.5991	90.0594

表 4-8 SAP2000 分析所得之節點力($kN, kN - m$)

I	J	F	V	M
1	3	106.02819	157.01184	-360.41223
2	4	85.97181	-49.01183	-320.48122
3	1	-106.02819	-157.01184	-275.75689
3	4	24.43956	46.38271	195.23010
3	5	1.58873	110.62913	80.52679
4	2	-85.97181	49.01184	-195.34965
4	3	-24.43946	-46.38271	222.21425
4	5	-110.41127	2.62913	-26.86460
5	3	-1.58873	-110.62913	-90.05917
5	4	38.41127	110.62913	90.05917

表 4-9 迴傳矩陣法所得之位移(m)

Joint	u	v	w	θ	ϕ	ψ
1	0	0	0	0	0	0
2	-0.0017	0.0077	0	-0.0056	-0.0013	-0.0069
3	-0.0035	0.017	0	-0.0035	-0.0007	-0.0144
4	0	0	0	0	0	0
5	0.0017	0.0077	0	-0.0056	0.0013	-0.0069
6	0.0035	0.017	0	-0.0035	0.0007	-0.0144
7	0	0	0	0	0	0
8	-0.0017	0.0021	0	-0.0017	-0.0013	-0.0069
9	-0.0035	0.0046	0	-0.001	-0.0007	-0.0144
10	0	0	0	0	0	0
11	0.0017	0.0021	0	-0.0017	0.0013	-0.0069
12	0.0035	0.0046	0	-0.001	0.0007	-0.0144

表 4-10 SAP2000 分析所得之位移(m)

Joint	u	v	w	θ	ϕ	ψ
1	0	0	0	0	0	0
2	-0.0017	0.0078	0	-0.0057	-0.0013	-0.007
3	-0.0036	0.0172	0	-0.0035	-0.0007	-0.0145
4	0	0	0	0	0	0
5	0.0017	0.0078	0	-0.0057	0.0013	-0.007
6	0.0036	0.0172	0	-0.0035	0.0007	-0.0145
7	0	0	0	0	0	0
8	-0.0017	0.0021	0	-0.0017	-0.0013	-0.007
9	-0.0036	0.0047	0	-0.0011	-0.0007	-0.0145
10	0	0	0	0	0	0
11	0.0017	0.0021	0	-0.0017	0.0013	-0.007
12	0.0036	0.0047	0	-0.0011	0.0007	-0.0145

表 4-11 迴傳矩陣法所得之節點力($kN, kN - m$)

I	J	F	V	W	T	N	M
1	2	-0.0211	0.0973	0.4375	-0.0509	-0.0112	-0.0049
2	1	0.0211	-0.0973	-0.4375	-0.0367	-0.0078	0.0049
2	3	-0.017	0.0989	0.1648	-0.0418	-0.0069	-0.0053
2	5	-0.0041	0	0.3012	0.0753	0.0033	0.001
2	8	0	-0.0015	-0.0286	0.0031	0.0114	-0.0006
3	2	0.017	-0.0989	-0.1648	-0.0472	-0.0084	0.0053
3	6	-0.017	-0.1226	0.1811	0.0453	0.0018	0.0043
3	9	0	-0.0238	-0.0163	0.0019	0.0065	-0.0095
4	5	0.0211	0.0973	-0.4375	-0.0509	0.0112	-0.0049
5	2	0.0041	0	-0.3012	0.0753	-0.0033	0.001
5	4	-0.0211	-0.0973	0.4375	-0.0367	0.0078	0.0049
5	6	0.017	0.0988	-0.1648	-0.0417	0.0069	-0.0053
5	11	0	-0.0015	0.0286	0.0031	-0.0114	-0.0006
6	3	0.017	0.1226	-0.1811	0.0453	-0.0018	0.0042
6	5	-0.017	-0.0988	0.1648	-0.0472	0.0084	0.0053
6	12	0	-0.0238	0.0163	0.0019	-0.0065	-0.0095
7	8	-0.0211	0.0253	0.1877	-0.0135	-0.0112	-0.0049
8	2	0	0.0015	0.0286	-0.0031	0.0114	-0.0006
8	7	0.0211	-0.0253	-0.1877	-0.0093	-0.0078	0.0049
8	9	-0.017	0.0238	0.07	-0.0099	-0.0069	-0.0053
8	11	-0.0041	0	0.0891	0.0223	0.0033	0.001
9	3	0	0.0238	0.0163	-0.0019	0.0065	-0.0095
9	8	0.017	-0.0238	-0.07	-0.0115	-0.0084	0.0053
9	12	-0.017	0	0.0536	0.0134	0.0018	0.0043
10	11	0.0211	0.0253	-0.1877	-0.0135	0.0112	-0.0049
11	5	0	0.0015	-0.0286	-0.0031	-0.0114	-0.0006
11	8	0.0041	0	-0.0891	0.0223	-0.0033	0.001
11	10	-0.0211	-0.0253	0.1877	-0.0093	0.0078	0.0049
11	12	0.017	0.0238	-0.07	-0.0099	0.0069	-0.0053
12	6	0	0.0238	-0.0163	-0.0019	-0.0065	-0.0095
12	9	0.017	0	-0.0536	0.0134	-0.0018	0.0042
12	11	-0.017	-0.0238	0.07	-0.0115	0.0084	0.0053

表 4-12 SAP2000 分析所得之節點力(kN, kN-m)

I	J	F	V	W	T	N	M
1	2	0.021101	-0.097092	-0.435755	0.050933	0.01117	0.004885
2	1	-0.021101	0.097092	0.435755	0.03645	0.007821	-0.004885
2	3	0.016972	-0.098643	-0.16449	0.041636	0.006899	0.00531
2	5	0.004129	3.22E-05	-0.299745	-0.074941	-0.003328	-0.001033
2	8	2.41E-15	0.001519	0.02848	-0.003145	-0.011392	0.000608
3	2	-0.016972	0.098643	0.16449	0.047142	0.008376	-0.00531
3	6	0.016972	0.122454	-0.180782	-0.045203	-0.00186	-0.004251
3	9	-1.64E-14	0.023903	0.016292	-0.001939	-0.006517	0.009561
4	5	-0.021101	-0.097109	0.435755	0.050938	-0.01117	0.004885
5	2	-0.004129	-3.22E-05	0.299745	-0.074932	0.003328	-0.001032
5	4	0.021101	0.097109	-0.435755	0.03646	-0.007821	-0.004885
5	6	-0.016972	-0.098599	0.16449	0.041615	-0.006899	0.005307
5	11	4.91E-15	0.001523	-0.02848	-0.003144	0.011392	0.000609
6	3	-0.016972	-0.122454	0.180782	-0.045188	0.00186	-0.004235
6	5	0.016972	0.098599	-0.16449	0.047124	-0.008376	-0.005307
6	12	8.57E-15	0.023855	-0.016292	-0.001936	0.006517	0.009542
7	8	0.021101	-0.0254	-0.188072	0.013608	0.01117	0.004885
8	2	-2.41E-15	-0.001519	-0.02848	0.003145	-0.011392	0.000608
8	7	-0.021101	0.0254	0.188072	0.009251	0.007821	-0.004885
8	9	0.016972	-0.023878	-0.070267	0.009934	0.006899	0.00531
8	11	0.004129	-2.89E-06	-0.089325	-0.022331	-0.003328	-0.001033
9	3	1.64E-14	-0.023903	-0.016292	0.001939	-0.006517	0.009561
9	8	-0.016972	0.023878	0.070267	0.011556	0.008376	-0.00531
9	12	0.016972	2.54E-05	-0.053975	-0.013494	-0.00186	-0.004251
10	11	-0.021101	-0.0254	0.188072	0.013608	-0.01117	0.004885
11	5	-4.91E-15	-0.001523	0.02848	0.003144	0.011392	0.000609
11	8	-0.004129	2.89E-06	0.089325	-0.022331	0.003328	-0.001032
11	10	0.021101	0.0254	-0.188072	0.009252	-0.007821	-0.004885
11	12	-0.016972	-0.02388	0.070267	0.009935	-0.006899	0.005307
12	6	-8.57E-15	-0.023855	0.016292	0.001936	0.006517	0.009542
12	9	-0.016972	-2.54E-05	0.053975	-0.013493	0.00186	-0.004235
12	11	0.016972	0.02388	-0.070267	0.011557	-0.008376	-0.005307

表 5-1 鋁材之材料性質

物 理 量	大 小
楊氏模數	70 GPa
剪力模數	26 GPa
密 度	2700 kg/m ³
斷面尺寸	2.5cm × 2.5cm × 0.2cm
斷 面 積	1.840 cm ²
慣 性 矩	1.635 cm ⁴
極慣性矩	3.270 cm ²
剪力係數κ	π ² /12
卜桑比ν	0.348

表 5-2 靜力試驗結果與理論分析結果之比較(應變)

應變規 編號	桿件編號 (J-K)	位置(局部座標)			理論值 (10^{-6})	實驗值(10^{-6})	
		x(cm)	y(cm)	z(cm)		加載	卸載
1	7-8	10	-1.25	0	-164.61	-157.967	-155.340
2	10-11	10	-1.25	0	-141.50	-134.175	-132.171
3	8-9	10	-1.25	0	-122.83	-121.905	-120.683
4	8-9	10	1.25	0	114.12	112.980	111.367
5	8-11	10	0	-1.25	-175.43	-171.471	-167.133
6	9-8	10	-1.25	0	143.05	144.339	139.530

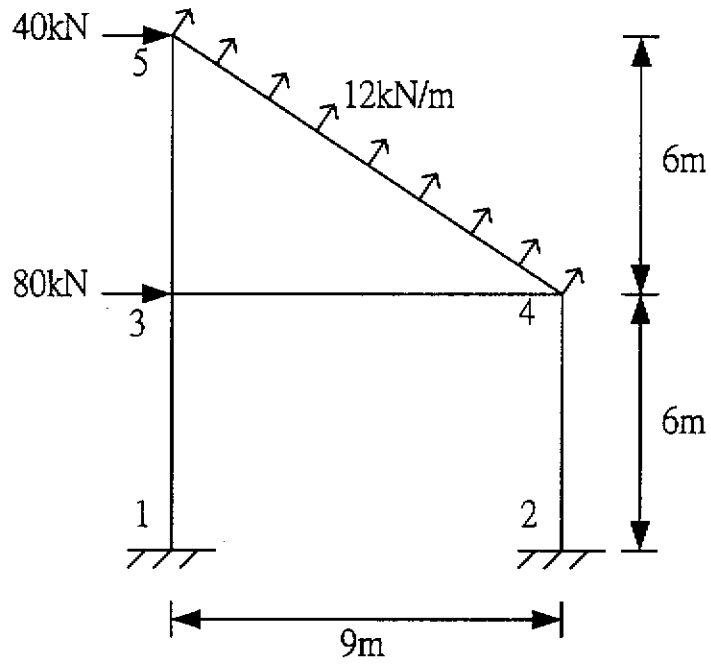


圖 4-1 非對稱構架

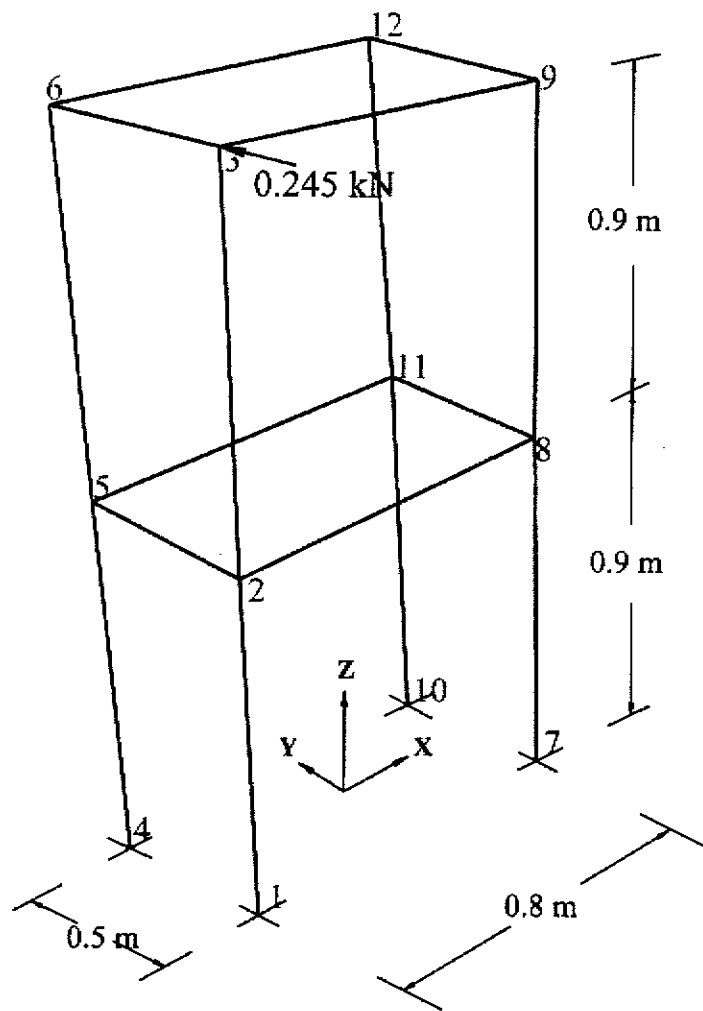


圖 4-2 三維立體剛架結構

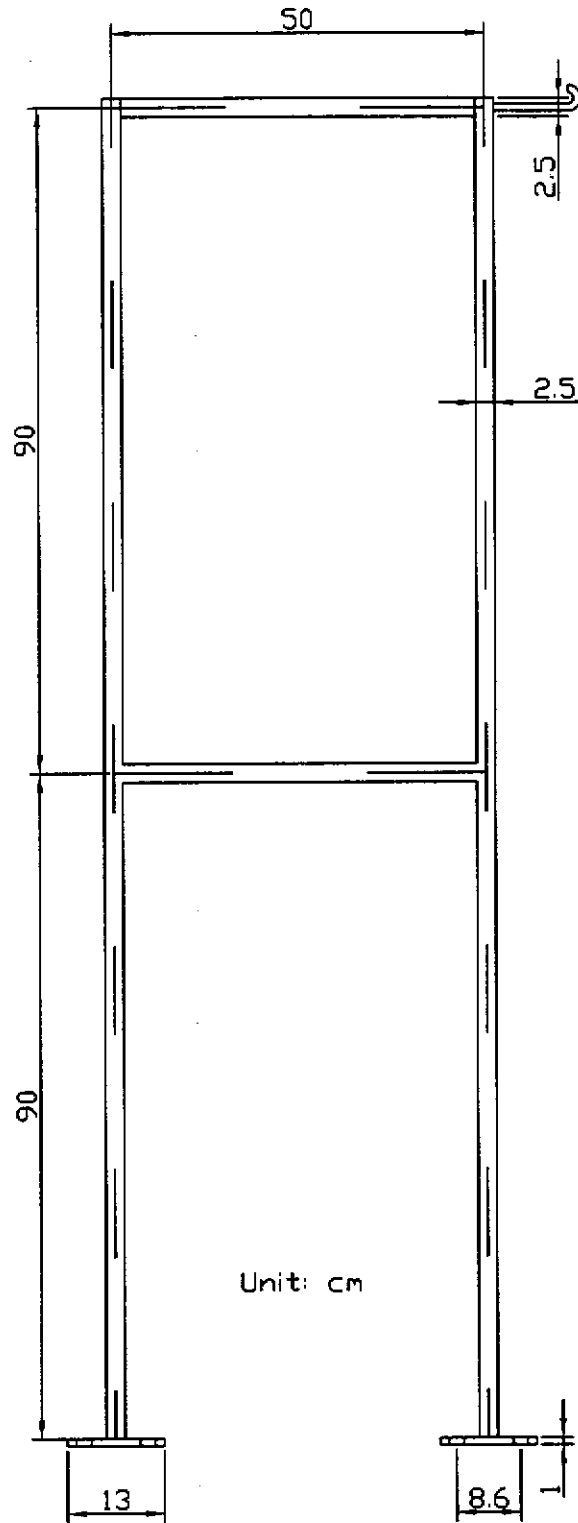


圖 5-1(b) 鋁模型剛架-側視圖(短向)

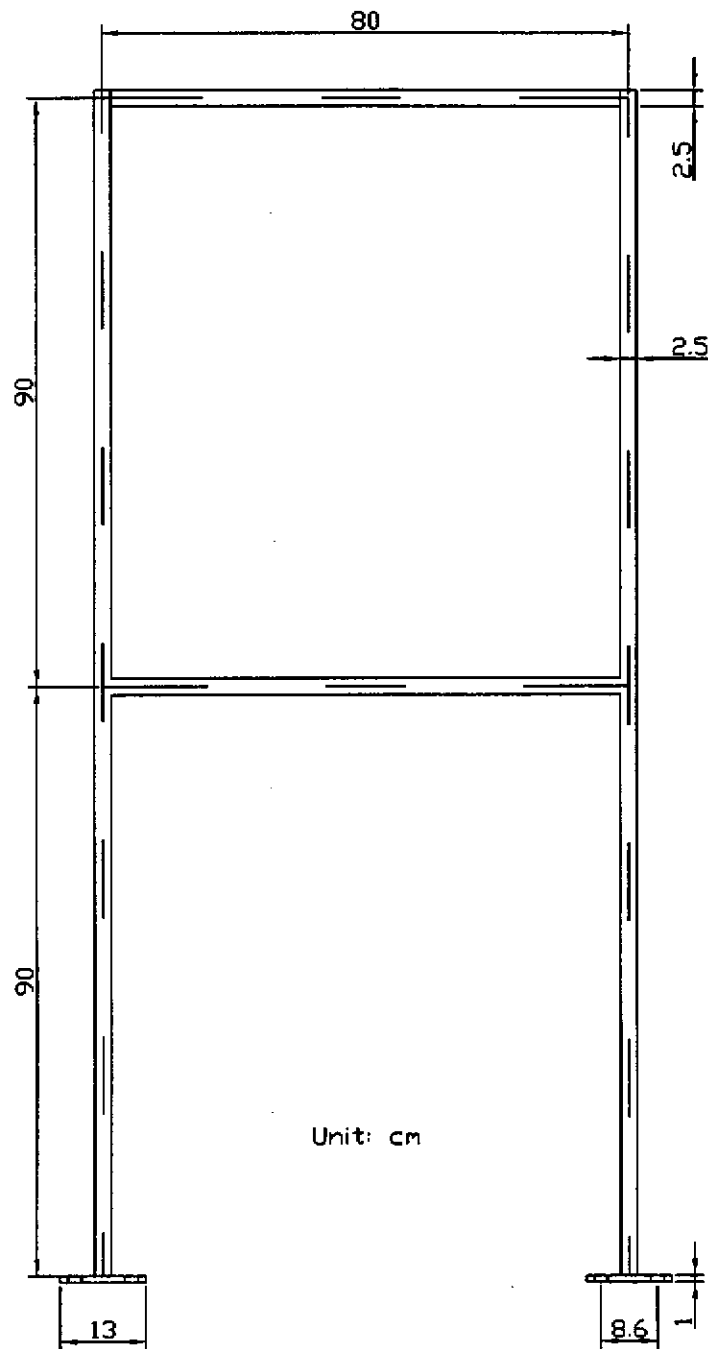
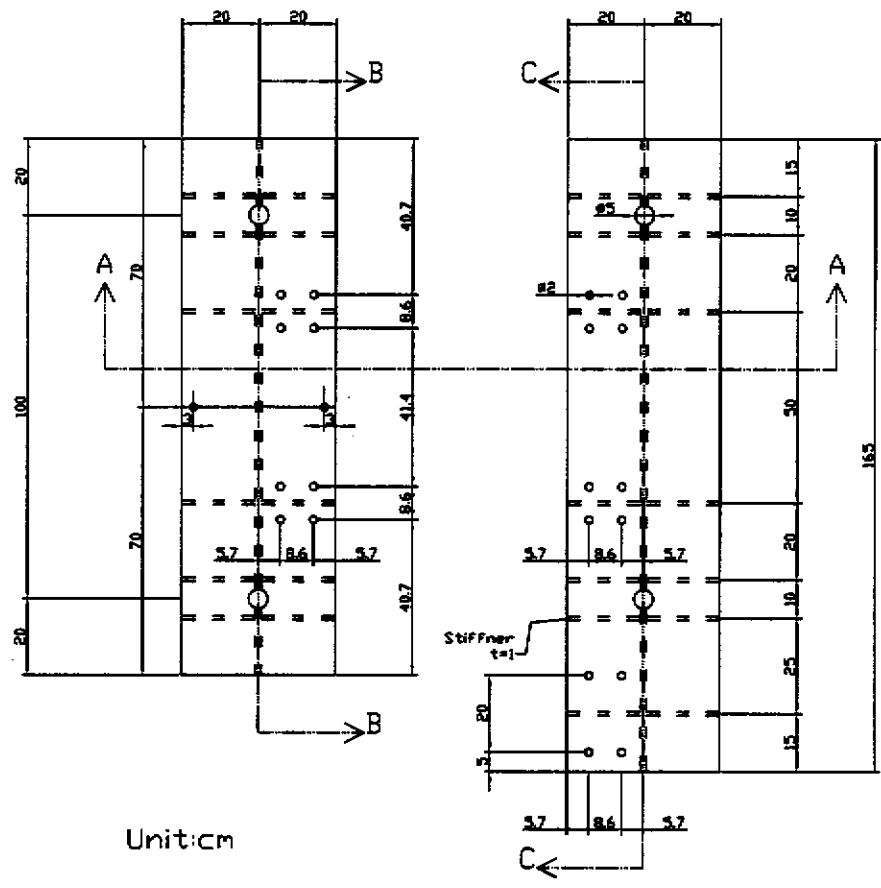
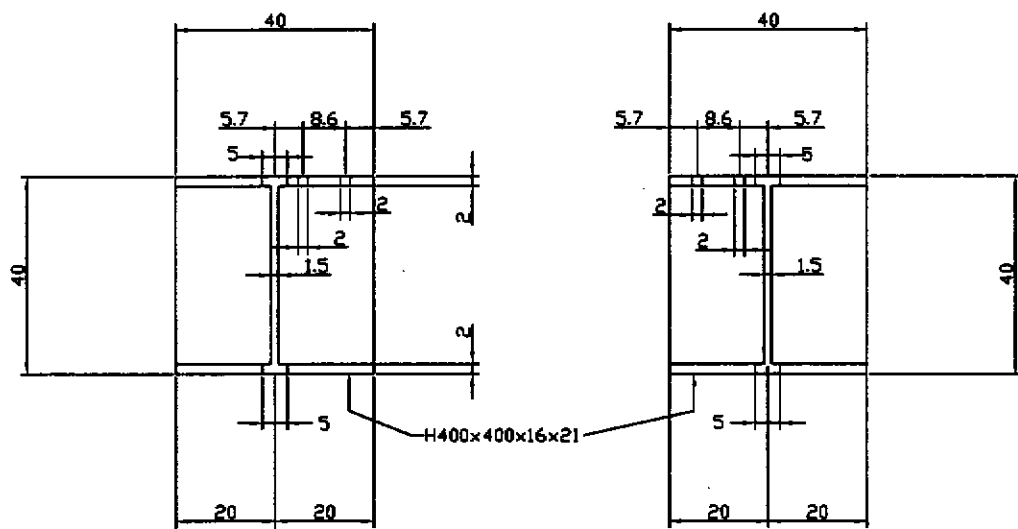


圖 5-1(c) 鋁模型剛架-側視圖(長向)



Unit:cm

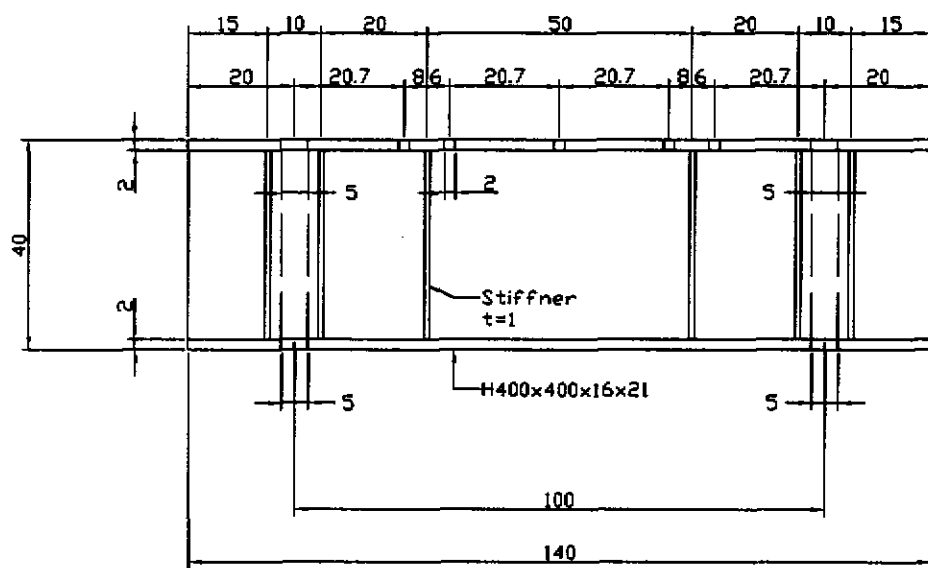
圖 5-2(a) 模型基礎型鋼(上視圖)



Unit:cm

A-A

圖 5-2(b) 模型基礎型鋼(A-A 斷面)



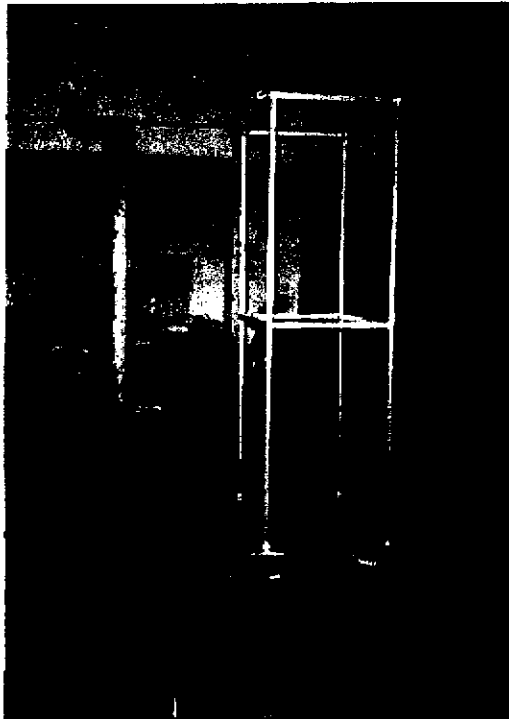
Unit:cm

B-B

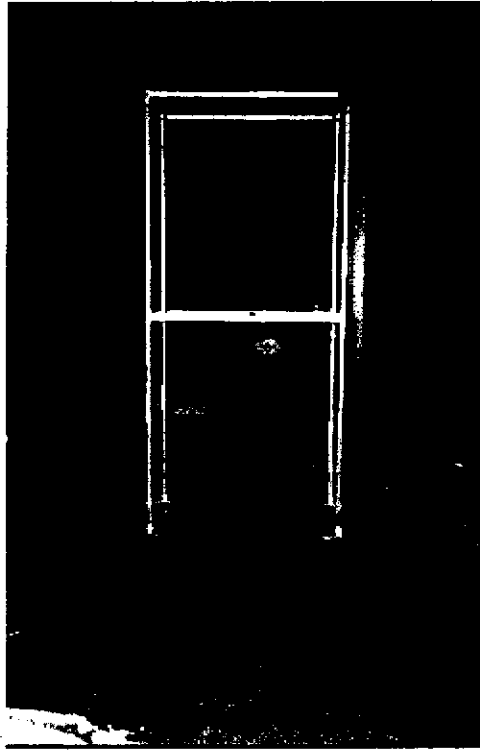
圖 5-2(c) 模型基礎型鋼(B-B 斷面)



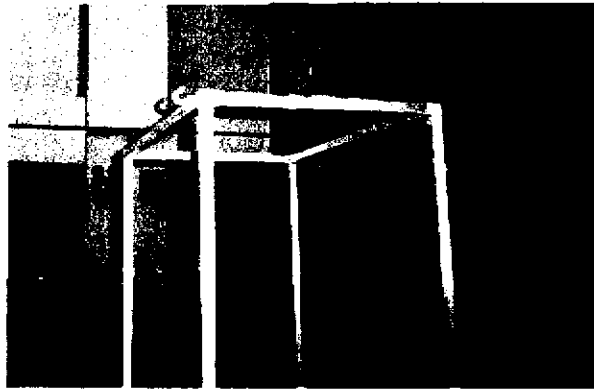
照片 5-1(a) 鋁模型剛架



照片 5-1(b) 鋁模型剛架(短向)



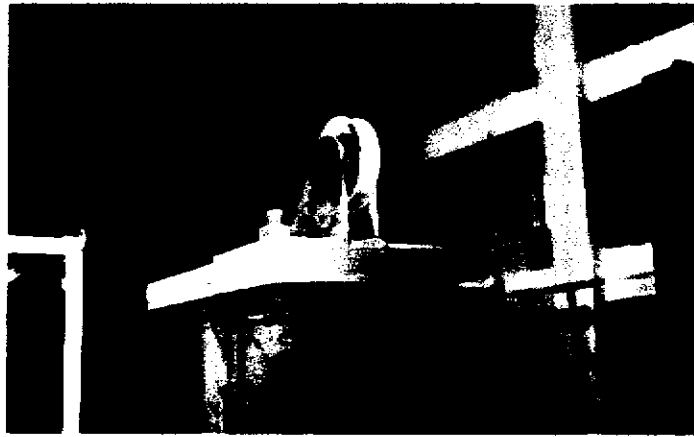
照片 5-1(c) 鋁模型剛架(長向)



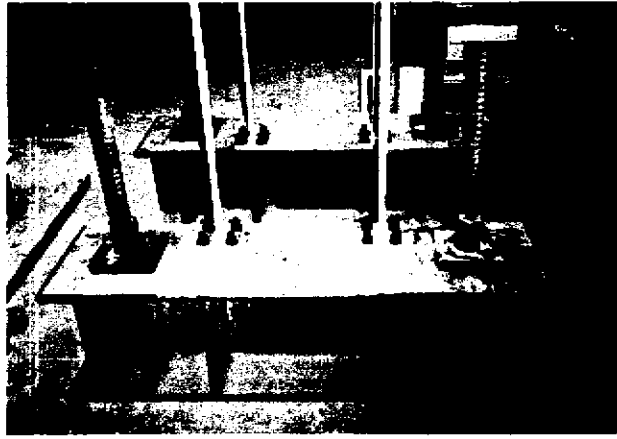
照片 5-2 掛鈎



照片 5-3 滑轮支承柱



照片 5-4 滑轮



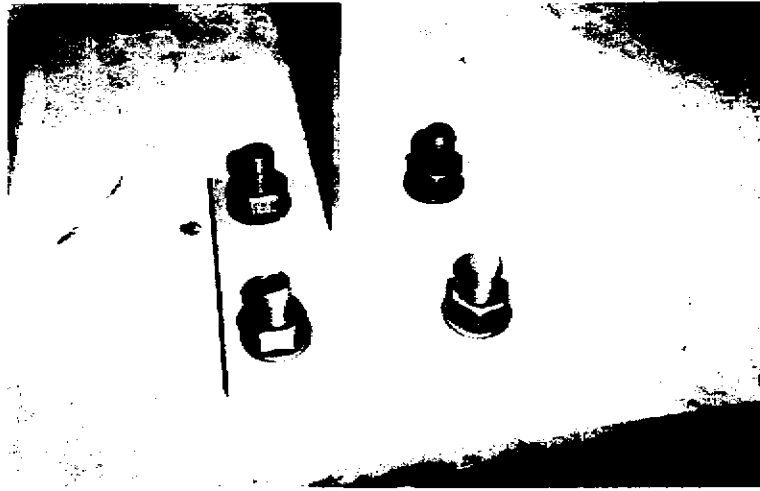
照片 5-5(a) 基座



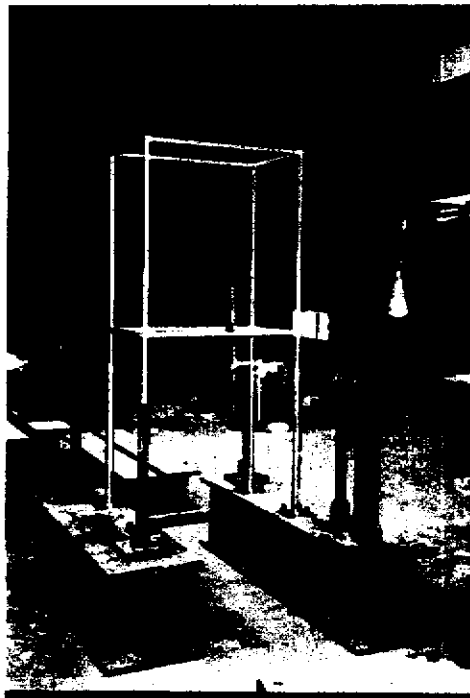
照片 5-5(b) 基座



照片 5-5(c) 基座



照片 5-6 柱基板



照片 5-7(a) 施加静力照片



照片 5-7(b) 施加静力照片

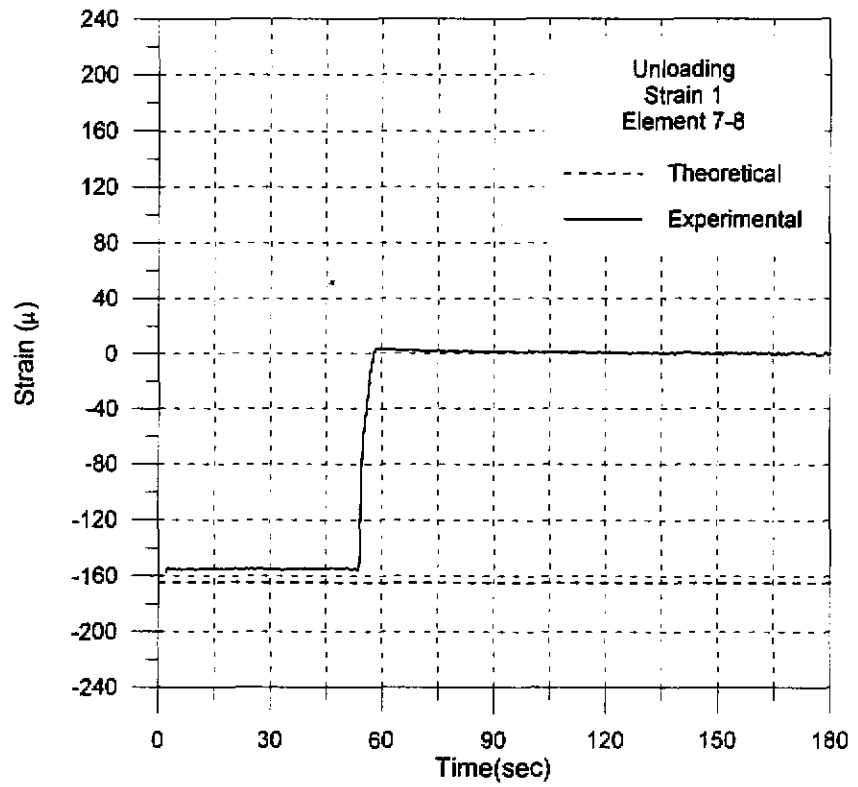
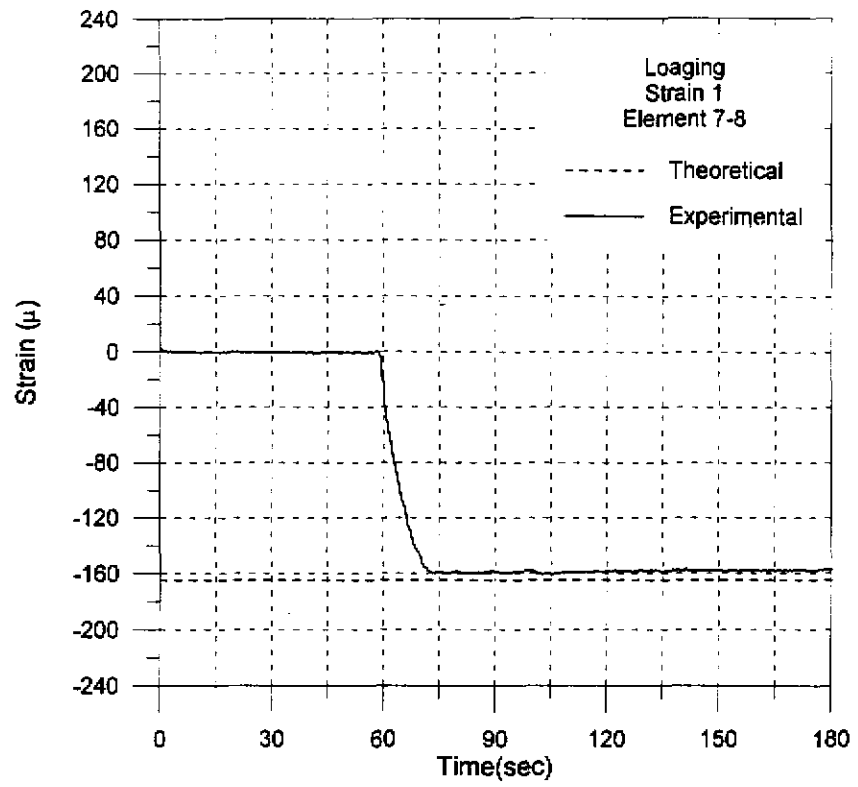


圖 5-3 桿件 7-8 靜力加載與卸載之應變

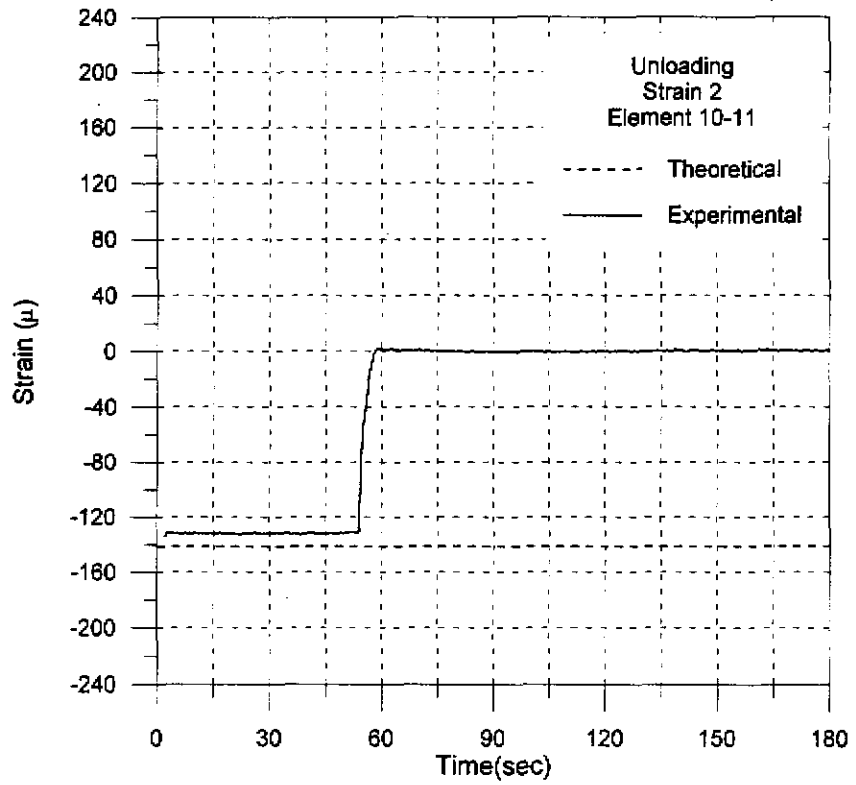
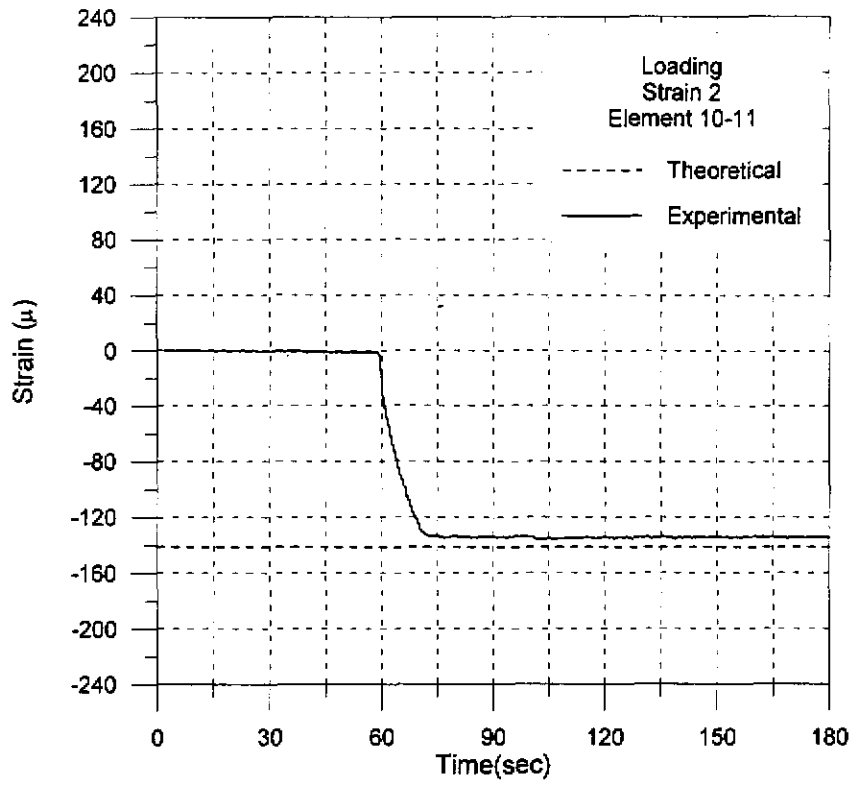


圖 5-4 桿件 10-11 靜力加載與卸載之應變

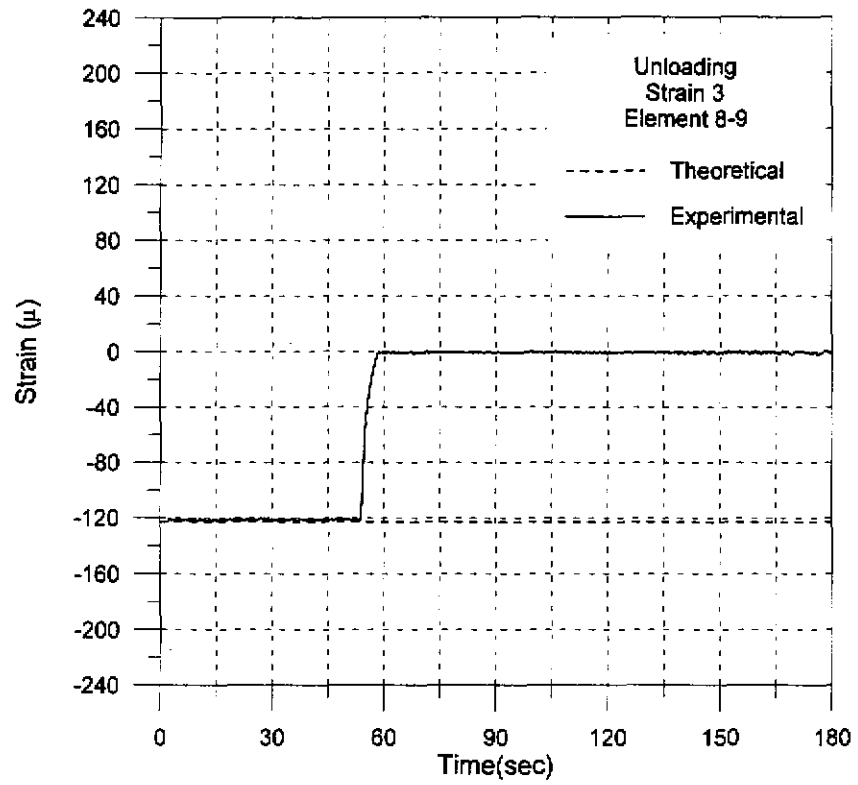
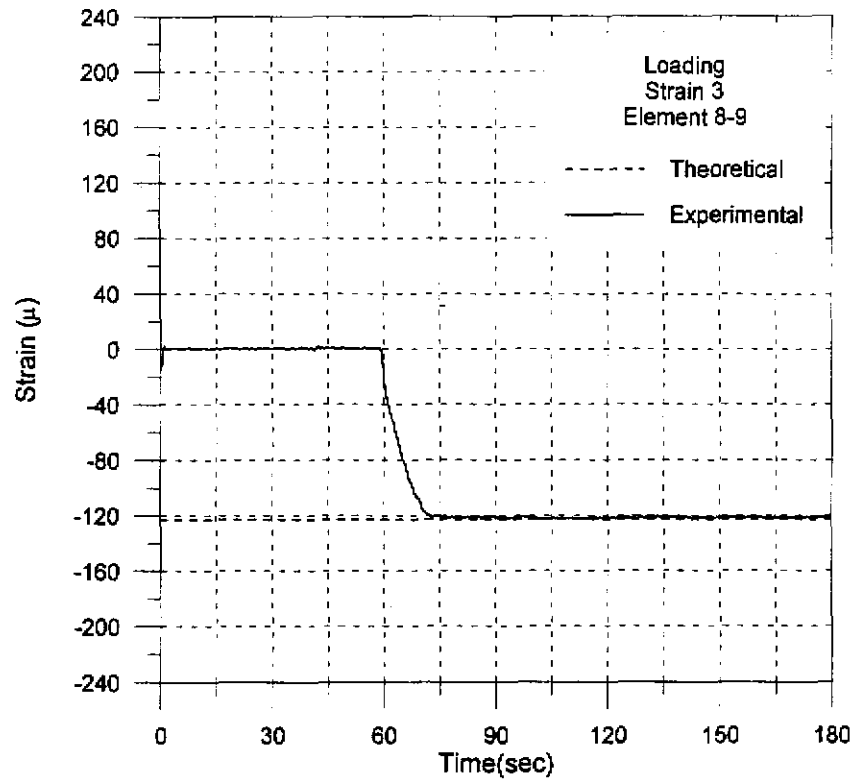


圖 5-5 桿件 8-9(前)靜力加載與卸載之應變

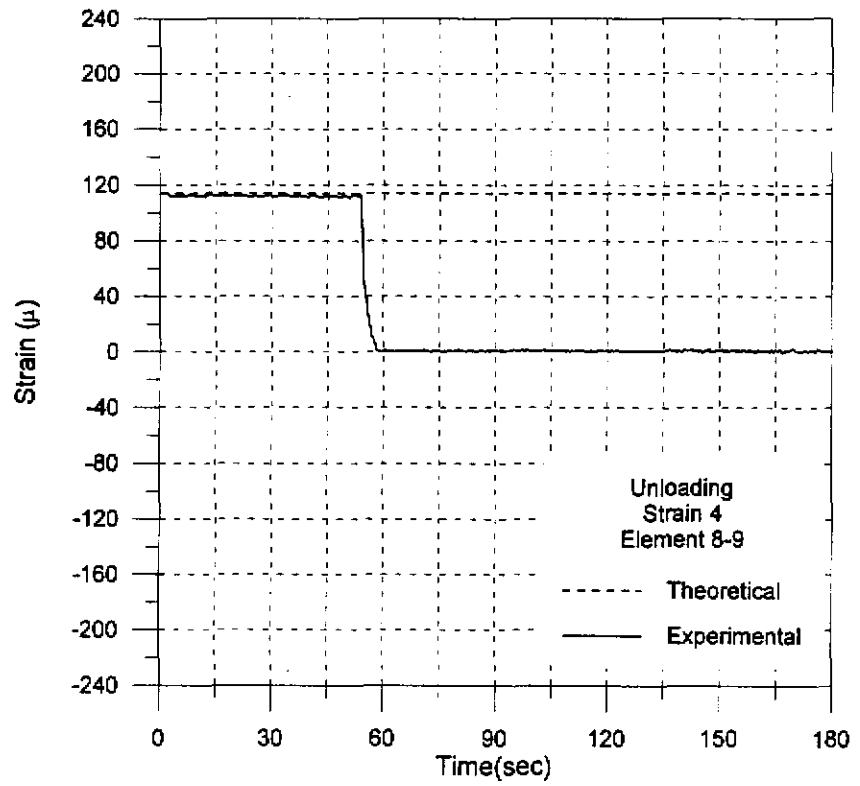
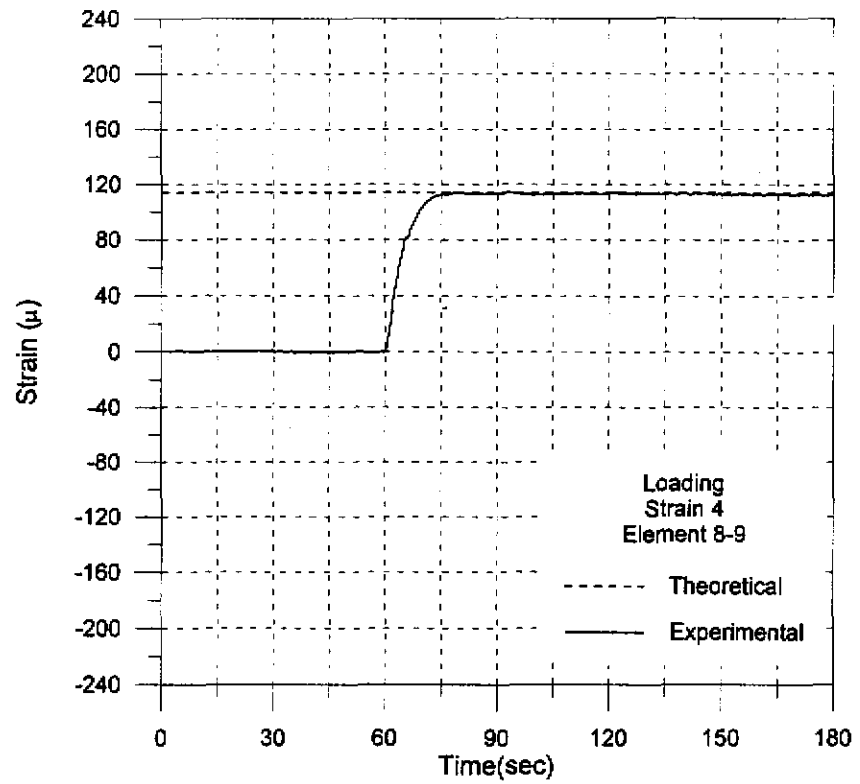


圖 5-6 桿件 8-9(後)靜力加載與卸載之應變

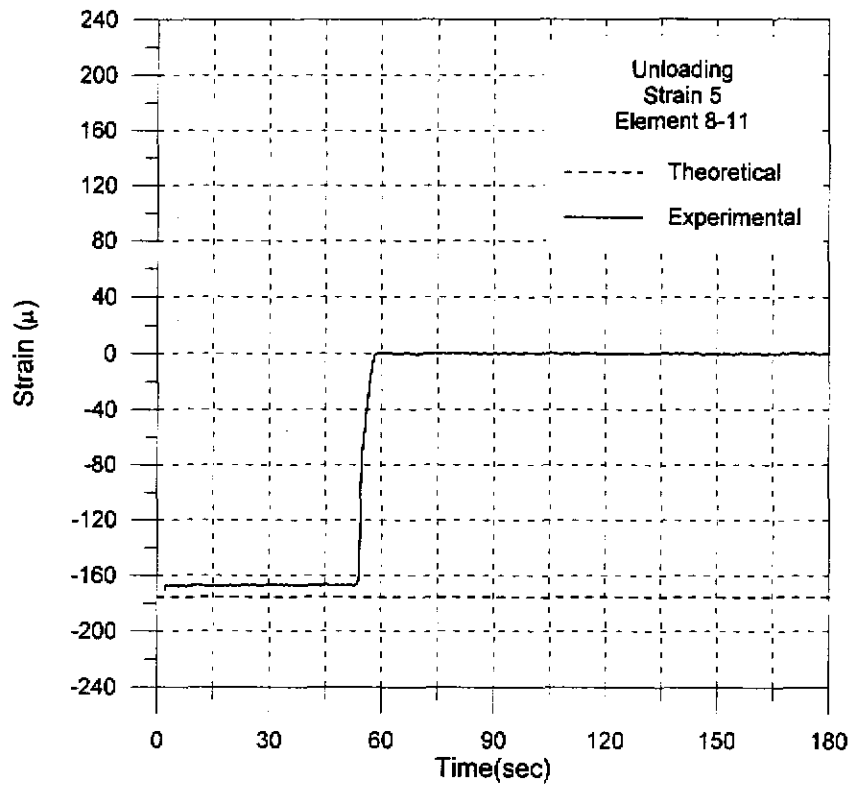
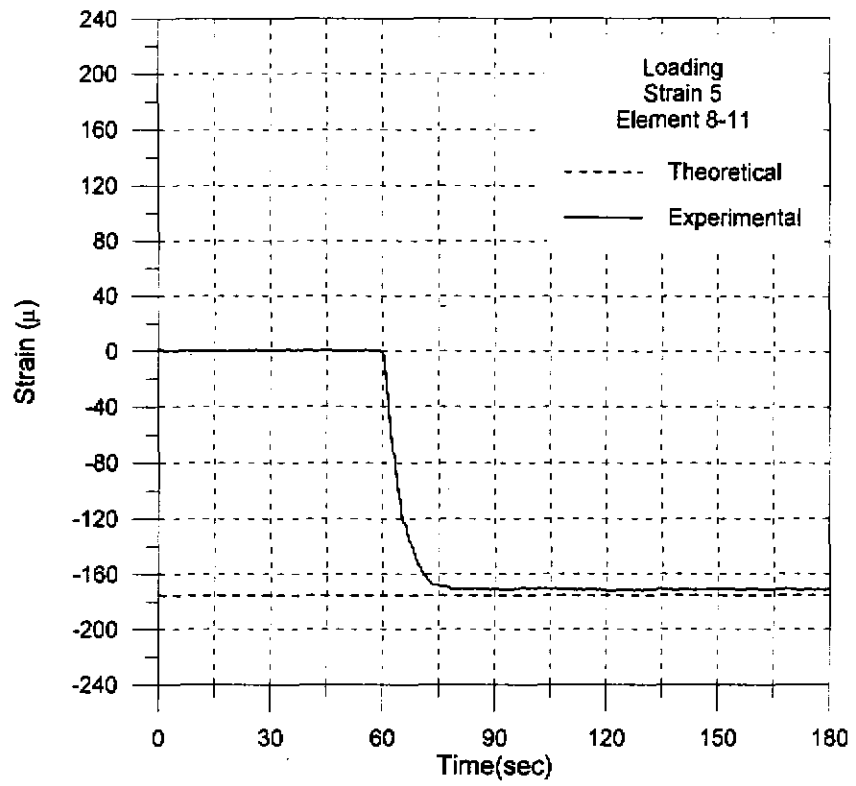


圖 5-7 桿件 8-11 靜力加載與卸載之應變

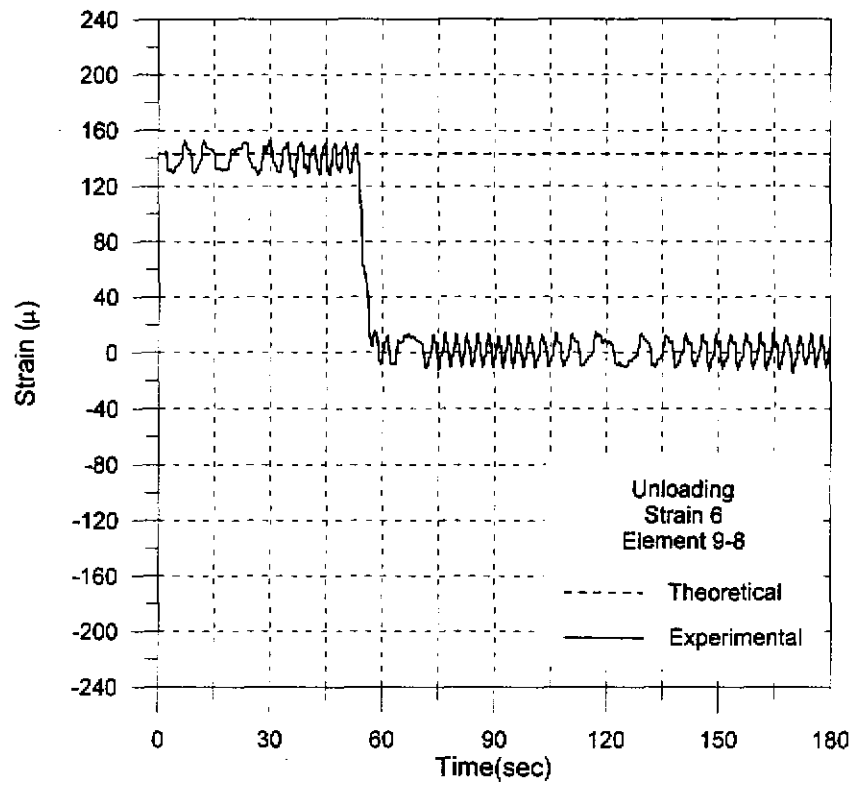
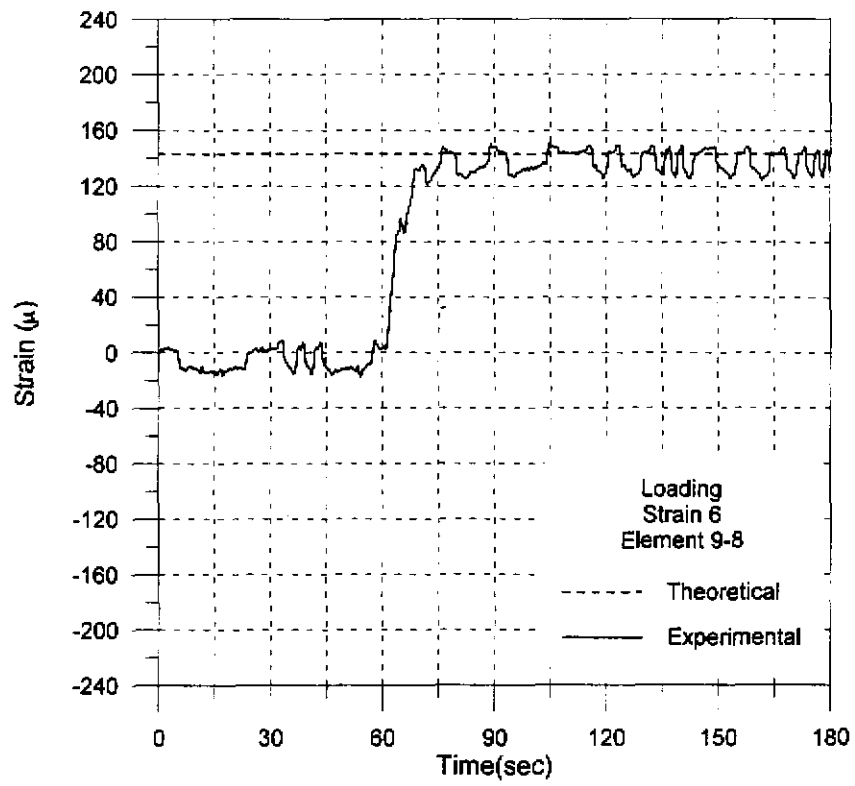


圖 5-8 桿件 9-8 靜力加載與卸載之應變

附錄 兩層樓空間構架 分析程式(MATLAB M-file)
 %%%The Program of RMM in three dimension

```

clear;
E=70e6; %KN/m^2
Iy=1.635e-8; %m^4
Iz=1.635e-8; %m^4
A=1.84e-4; %m^2
G=2.596e7; %KN/m^2
J=2.433e-8; %m^4
aa=[1 2 E A Iy Iz G J
    2 3 E A Iy Iz G J
    2 5 E A Iy Iz G J
    2 8 E A Iy Iz G J
    3 6 E A Iy Iz G J
    3 9 E A Iy Iz G J
    4 5 E A Iy Iz G J
    5 6 E A Iy Iz G J
    5 11 E A Iy Iz G J
    6 12 E A Iy Iz G J
    7 8 E A Iy Iz G J
    8 9 E A Iy Iz G J
    8 11 E A Iy Iz G J
    9 12 E A Iy Iz G J
    10 11 E A Iy Iz G J
    11 12 E A Iy Iz G J];
Coord=[1 -0.4 -0.25 0 3
    2 -0.4 -0.25 0.9 0
    3 -0.4 -0.25 1.8 0
    4 -0.4 0.25 0 3
    5 -0.4 0.25 0.9 0
    6 -0.4 0.25 1.8 0
    7 0.4 -0.25 0 3
    8 0.4 -0.25 0.9 0
    9 0.4 -0.25 1.8 0
    10 0.4 0.25 0 3
    11 0.4 0.25 0.9 0
    12 0.4 0.25 1.8 0];

dof=6;
%%input the force in the nodes
f=zeros(length(Coord)*dof,1);
f(8*6+2,1)=-8.507*9.81/1000;
%%the number of nodes
n=length(Coord(:,1));
c=[aa;fliplr(aa(:,1:2)) aa(:,3:8)];
%%the number of members
m=length(aa(:,1));
%%the state vector
L1=[0 0 0 1 0 0
    0 0 0 0 1 0
    0 0 0 0 0 1];
L3=[1 0 0 0 0 0
    0 1 0 0 0 0
    0 0 0 1 0 0
    0 0 0 0 1 0
    0 0 0 0 0 1];
L=[1 0 0 0 0 0
    0 1 0 0 0 0
    0 0 1 0 0 0];
LL=[0 0 1 0 0 0];
    
```

```

n0=1;
nn0=1;
for j=1:n
    posi=find(c(:,1)==j);
    mJ=length(posi);          %%the number of members in each nodes
    n1=n0+mJ-1;
    data=[j*ones(mJ,1) sort(c(posi,2))];
    JK(n0:n1,:)=data;
    k=sort(c(posi,2));
    A1J=zeros(dof,dof*mJ);
    D1J=zeros(dof,dof*mJ);
    A2J=zeros(dof*mJ,dof*mJ);
    U2J=zeros(dof*mJ,dof);
    L2=zeros(3*mJ,dof*mJ);
    L4=zeros(1*mJ,dof*mJ);
    Ub2J=zeros(dof*mJ,dof);
    for i=1:mJ
        %%rij=cosij is the cosine between local axis abd global axis
        lx=[Coord(k(i),2)-Coord(j,2) Coord(k(i),3)-Coord(j,3)
Coord(k(i),4)-Coord(j,4)]/norm(Coord(k(i),2:4)-Coord(j,2:4));
        IX=[1 0 0];
        IY=[0 1 0];
        IZ=[0 0 1];
        if lx==IY|lx==IY
            ly=cross(lz,lx)/norm(cross(lz,lx));
            lz=cross(lx,ly)/norm(cross(lx,ly));
        else
            if j<k(i)
                lz=cross(lx,IY)/norm(cross(lx,IY));
                ly=cross(lz,lx)/norm(cross(lz,lx));
            else
                lz=-cross(lx,IY)/norm(cross(lx,IY));
                ly=cross(lz,lx)/norm(cross(lz,lx));
            end
        end
        rxX=sum(lx.*IX)/(norm(lx)*norm(IX));
        rxY=sum(lx.*IY)/(norm(lx)*norm(IY));
        rxZ=sum(lx.*IZ)/(norm(lx)*norm(IZ));
        ryX=sum(ly.*IX)/(norm(ly)*norm(IX));
        ryY=sum(ly.*IY)/(norm(ly)*norm(IY));
        ryZ=sum(ly.*IZ)/(norm(ly)*norm(IZ));
        rzX=sum(lz.*IX)/(norm(lz)*norm(IX));
        rzY=sum(lz.*IY)/(norm(lz)*norm(IY));
        rzZ=sum(lz.*IZ)/(norm(lz)*norm(IZ));

        %%construt the transform matrix of each member
        Tt=[rxX rxY rxZ 0 0 0
            ryX ryY ryZ 0 0 0
            rzX rzY rzZ 0 0 0
            0 0 0 rxX rxY rxZ
            0 0 0 ryX ryY ryZ
            0 0 0 rzX rzY rzZ];
        TJmJ=inv(Tt);
        l=norm(Coord(k(i),2:4)-Coord(j,2:4));
        for q=1:2*m
            if [j k(i)]==c(q,1:2)
                E=c(q,3);
                A=c(q,4);
                Iy=c(q,5);
            end
        end
    end
end

```

```

        Iz=c(q,6);
        G=c(q,7);
        J=c(q,8),break
    end
end
AJmJ=[-A*E/l 0 0 0 0
       0 -12*E*Iz/l^3 0 0 0 -6*E*Iz/l^2
       0 0 -12*E*Iy/l^3 0 6*E*Iy/l^2 0
       0 0 0 -G*J/l 0 0
       0 0 6*E*Iy/l^2 0 -4*E*Iy/l 0
       0 -6*E*Iz/l^2 0 0 0 -4*E*Iz/l];
DJmJ=[A*E/l 0 0 0 0
       0 12*E*Iz/l^3 0 0 0 -6*E*Iz/l^2
       0 0 12*E*Iy/l^3 0 6*E*Iy/l^2 0
       0 0 0 G*J/l 0 0
       0 0 -6*E*Iy/l^2 0 -2*E*Iy/l 0
       0 6*E*Iz/l^2 0 0 0 -2*E*Iz/l];
A1J(:,(i-1)*dof+1:i*dof)=TJmJ*AJmJ;
D1J(:,(i-1)*dof+1:i*dof)=TJmJ*DJmJ;
AJ((n0+i-2)*dof+1:(n0+i-1)*dof,(n0+i-2)*dof+1:(n0+i-1)*dof)=AJmJ;
DJ((n0+i-2)*dof+1:(n0+i-1)*dof,(n0+i-2)*dof+1:(n0+i-1)*dof)=DJmJ;
T((n0+i-2)*dof+1:(n0+i-1)*dof,(n0+i-2)*dof+1:(n0+i-1)*dof)=TJmJ;
A2J((i-1)*dof+1:i*dof,(i-1)*dof+1:i*dof)=TJmJ;
U2J((i-1)*dof+1:i*dof,:)=eye(dof);
L2((i-1)*3+1:i*3,(i-1)*dof+1:i*dof)=L;
L4((i-1)*1+1:i*1,(i-1)*dof+1:i*dof)=LL;
end
fJ=f((j-1)*dof+1:j*dof,1);
nn1=nn0+dof*mJ-1;
%%construct the source vector and carryover matrix
if Coord(j,5)==0
    sys=[A1J zeros(dof);A2J -U2J];
    sJ(nn0:nn1,1)=-[eye(dof*mJ) zeros(dof*mJ,dof)]*pinv(sys)*[fJ;zeros(dof*mJ,1)];
    SJ(nn0:nn1,nn0:nn1)=-[eye(dof*mJ) zeros(dof*mJ,dof)]*pinv(sys)*[D1J;zeros(dof*mJ)];
elseif Coord(j,5)==1
    sys=[L1*A1J L1*zeros(dof);L2*A2J -L2*Ub2J];
    sJ(nn0:nn1,1)=-[eye(dof*mJ) zeros(dof*mJ,dof)]*pinv(sys)*[L1*fJ;zeros(3*mJ,1)];
    SJ(nn0:nn1,nn0:nn1)=-[eye(dof*mJ)
zeros(dof*mJ,dof)]*pinv(sys)*[L1*D1J;zeros(3*mJ,dof*mJ)];
elseif Coord(j,5)==2
    sys=[L3*A1J L3*zeros(dof);L4*A2J -L4*Ub2J];
    sJ(nn0:nn1,1)=-[eye(dof*mJ) zeros(dof*mJ,dof)]*pinv(sys)*[L3*fJ;zeros(1*mJ,1)];
    SJ(nn0:nn1,nn0:nn1)=-[eye(dof*mJ)
zeros(dof*mJ,dof)]*pinv(sys)*[L3*D1J;zeros(1*mJ,dof*mJ)];
else
    sys=[A2J Ub2J];
    sJ(nn0:nn1,1)=zeros(dof*mJ,1);
    SJ(nn0:nn1,nn0:nn1)=-[eye(dof*mJ,dof*mJ+dof)]*pinv(sys)*zeros(dof*mJ);
end
n0=n1+1;
nn0=nn1+1;
end
%%Construct the Phase Matrix and Permutation Matrix
PJK=[-1 0 0 0 0
      0 -1 0 0 0
      0 0 1 0 0
      0 0 0 -1 0
      0 0 0 0 -1
      0 0 0 0 0 1];

```

```

P=zeros(2*m*dof);
U=zeros(2*m*dof);
for i=1:2*m
    AA=JK(i,:);
    for j=1:2*m
        BB=[JK(j,2) JK(j,1)];
        if AA==BB
            U((i-1)*dof+1:i*dof,(j-1)*dof+1:j*dof)=eye(dof);
        end
    end
    P((i-1)*dof+1:i*dof,(i-1)*dof+1:i*dof)=PJK;
end
%%The Re-Distribution Matrix
R=SJ*P*U;
%%The Near-Field Vector
a=inv(eye(size(R))-R)*sJ;
%%The Far-Field Vector
d=P*U*a;
%%The Internal Force of Each Element
FJK=AJ*a+DJ*d;
%%Construct the Local Displacement and Local Force
CC=[1:dof:size(FJK,1)-dof+1];
DD=[2:dof:size(FJK,1)-dof+2];
EE=[3:dof:size(FJK,1)-dof+3];
FF=[4:dof:size(FJK,1)-dof+4];
GG=[5:dof:size(FJK,1)-dof+5];
HH=[6:dof:size(FJK,1)-dof+6];
LOCALDISP=[JK a(CC) a(DD) a(EE) a(FF) a(GG) a(HH)];
LOCALFORC=[JK FJK(CC) FJK(DD) FJK(EE) FJK(FF) FJK(GG) FJK(HH)];
%%Construct the Global Displacement and Global Force
Gd=T*a;
Gf=T*FJK;
for i=1:n
    po=find(i==JK(:,1));
    GD((i-1)*dof+1:i*dof,:)=Gd((po(1)-1)*dof+1:po(1)*dof,:);
end
GLOBALDISP=[Coord(:,1) GD(CC(1:n)) GD(DD(1:n)) GD(EE(1:n)) GD(FF(1:n)) GD(GG(1:n))
GD(HH(1:n))]
GLOBALFORC=[JK Gf(CC) Gf(DD) Gf(EE) Gf(FF) Gf(GG) Gf(HH)]

```