

自我迴歸脈衝響應函數法系統鑑定之研究 及其在修正不確定性分析模型之應用

計劃編號：NSC 89-2611-E-002-007

執行期限：八十八年八月一日至八十九年七月三十一日

計劃主持人：洪振發 計劃參與人員：柯文俊、戴志豪、彭彥惇

國立台灣大學造船暨海洋工程學研究所

一、中文摘要

本計畫共分為兩大部份。第一部份為整合自我迴歸外變數 (AutoRegressive with eXogeneous variable, ARX) 模型與特徵系統識別運算 (Eigensystem Realization Algorithm, ERA) 而完成一套修正型 ARX/ERA 方法。此法可以由結構振動系統所量得的輸入外力與輸出動態響應資料, 建立 ARX 模型, 以求出離散馬可夫參數 (Markov parameters, MP), 再經由 ERA 法根據此參數鑑定出系統的狀態方程式。ARX 模搭配 ERA 後, 可藉由奇值分解將雜訊去除, 而將系統降階。此一優點可以藉由 ARX 模式直接由量測資料取得馬可夫參數, 藉由 ERA 免去一般由 ARX 模型識別模態參數需要降階的困擾。第二部份承第一部份之結果所鑑定出之模態參數, 使用特徵靈敏度反式法 (Inverse Eigensensitivity Method, IEM) 進一步應用至分析模型之更新修正。本研究以一六自由度質量塊系統來說明其應用過程。

關鍵詞：系統鑑定、自我迴歸外變數模型、特徵系統識別運算、特徵靈敏度反式, 模型更新

Abstract

This project contains two parts. In first part, we integrated the AutoRegressive with eXogeneous (ARX) model and the Eigensystem Realization Algorithm (ERA), and have developed an ARX/ ERA method to identify the coefficient matrices of state equation of motion for structures from measured I/O data.

An ARX model is established from the measured I/O data to obtain the Markov parameters, which is used for identification of coefficient matrices of state equation of motion by ERA.

In the second part, the inverse eigensensitivity method is employed to update the finite element model based on the identified modal parameters. A six degrees of freedom lumped mass system is employed to illustrate the proposed procedure for application in finite element model update.

Keywords: system identification, Auto-regressive with Exogeneous (ARX) Model, Eigen-system Realization Algorithm, inverse eigensensitivity method, model

updating

二、緣由與目的

在結構系統鑑定之領域中, 依訊號處理之域別可區分為時域與頻域, 依待處理之試驗資料又可區分為(甲)時域之自由響應資料(乙)時域之一般性輸入資料(丙)頻域之頻率響應函數資料(丁)時域之脈衝響應函數(IRF)資料或又稱為馬可夫參數。計畫主持人所領導之研究小組在前數年之研究工作中已陸續完成處理甲、乙及丙類資料之探討, 本計畫則針對丁類之 IRF 資料之結構系統鑑定作較深入研究。FEM 在工程上雖已普遍應用, 但仍含帶相當程度的未確定因素, 有需藉由試驗結果來修正, 以使結構分析更精緻。本計畫以結構動態量測識別的模態參數為參考基礎發展特徵靈敏度反式法之 FEM 結構修正方法。

三、結構之狀態運動方程式

一個 p 自由度系統之運動方程式可以下列之二階微分矩陣方程式表為：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{E}\dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{w}(t) = \mathbf{u}(t) \quad (1)$$

其中, $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{E}$ 與 $\mathbf{K}$ 分別為 $p \times p$ 之質量、阻尼與勁度矩陣, $\mathbf{u}(t)$ 與 $\mathbf{w}(t)$ 為 $p \times 1$ 之外力與位移向量。令狀態向量為：

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \dot{\mathbf{w}}(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

則式(1)之二階矩陣微分運動方程式可改寫為下列之一階矩陣狀態運動方程式：

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \quad (3)$$

並定義輸出方程式為：

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{z}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \quad (4)$$

其中： $\mathbf{z}(t)$ 為 $2p \times 1$ 之狀態向量, $\mathbf{u}(t)$ 為 $n_i \times 1$ 之輸入向量, n_i 為力輸入數, $\mathbf{y}(t)$ 為 $n_o \times 1$ 之輸出向量, n_o 為響應輸出數, $\mathbf{A}_c$ 為 $2p \times 2p$ 之狀態矩陣, $\mathbf{B}_c$ 為 $2p \times n_i$ 之輸入影響矩陣, $\mathbf{C}$ 為 $n_o \times 2p$ 之輸出影響

矩陣， $\mathbf{D}$ 為 $n_o \times n_i$ 之直接傳輸矩陣。令 $\mathbf{A}_c$ 、 $\mathbf{B}_c$ 之下標之 c 表示該矩陣為連續時間，而 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{D}$ 在連續及離散時間系統中完全相同，故不另外表示。 $\mathbf{A}_c$ 、 $\mathbf{B}_c$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{D}$ 定義如下[1]：

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (5.a)$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.b)$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{C}_d - \mathbf{C}_a\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \quad \mathbf{C}_v - \mathbf{C}_a\mathbf{M}^{-1}\mathbf{E}] \quad (5.c)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}_a\mathbf{M}^{-1} \quad (5.d)$$

$\mathbf{C}_d$ 、 $\mathbf{C}_v$ 、 $\mathbf{C}_a$ 為 $p \times p$ 之對角線矩陣，對角線之值為 0 或 1，其不為 0 的位置分別表示位移、速度、加速度量測所在之自由度。若取 Δt 為量測採樣週期，則連續時間狀態運動方程式與輸出方程式可被轉換成下列的離散時間狀態方程式：

$$\begin{cases} \mathbf{z}_{t+1} = \mathbf{A}_d\mathbf{z}_t + \mathbf{B}_d\mathbf{u}_t \\ \mathbf{y}_t = \mathbf{C}\mathbf{z}_t + \mathbf{D}\mathbf{u}_t \end{cases} \quad (6)$$

其中離散時間狀態方程式的狀態矩陣 $\mathbf{A}_d$ 與輸入影響矩陣 $\mathbf{B}_d$ 使用零階保持方法轉換時分別為：

$$\mathbf{A}_d = \exp(\mathbf{A}_c\Delta t) \quad (8.a)$$

$$\mathbf{B}_d = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_c\tau} d\tau \mathbf{B}_c = [\mathbf{A}_d - \mathbf{I}]\mathbf{A}_c^{-1}\mathbf{B}_c \quad (8.b)$$

式(7)沿著 $t = 0, 1, 2, \dots, k$ 依序展開可得：

$$\begin{cases} \mathbf{z}_0 = \mathbf{0} \\ \mathbf{y}_0 = \mathbf{D}\mathbf{u}_0 \\ \mathbf{z}_1 = \mathbf{B}_d\mathbf{u}_0 \\ \mathbf{y}_1 = \mathbf{C}\mathbf{B}_d\mathbf{u}_0 + \mathbf{D}\mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_k = \sum_{t=1}^k \mathbf{A}_d^{t-1}\mathbf{B}_d\mathbf{u}_{k-t} \\ \mathbf{y}_k = \sum_{t=1}^k \mathbf{C}\mathbf{A}_d^{t-1}\mathbf{B}_d\mathbf{u}_{k-t} + \mathbf{D}\mathbf{u}_k = \sum_{t=0}^k \mathbf{Y}_k\mathbf{u}_{k-t} \end{cases} \quad (9)$$

令：

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{D}, \quad \mathbf{Y}_k = \mathbf{C}\mathbf{A}_d^{k-1}\mathbf{B}_d \quad (10)$$

式(9)中之最後一行利用 $\mathbf{Y}_k$ 矩陣表示輸出向量 $\mathbf{y}_k$ 和輸入向量 $\mathbf{u}_k$ 之間的關係，即為單位瞬時外力引起之動態反應，稱為衝擊響應函數 (pulse response function)，即 $\mathbf{u}_k$ 向量可經由 $\mathbf{Y}_k$ 矩陣的轉換得到 $\mathbf{y}_k$ 向量。矩陣 $\mathbf{Y}_k$ 內包含運動系統的動態特性參數，稱為系統馬可夫參數或簡稱為 MP，具備有其值不會

因狀態座標轉換而改變的特性。意即，只要結構系統確定， $\mathbf{Y}_k$ 應為固定值。

四、自我迴歸外變數模型

在時間序列模型中，將量測之輸入/輸出資料依時間先後發生次序以迴歸方法所建立之參數化線性組合的模型，稱為 ARX 模型。利用此模型可求出自我迴歸(AR)參數矩陣及外變數(X)參數矩陣，再利用此二參數矩陣求解 MP 參數。對於一 n_i 組輸入與 n_o 組輸出之動態系統而言， q 階 ARX 模型可將輸出與輸入關係表為[2]：

$$\mathbf{y}_t = -\sum_{i=1}^q \mathbf{f}_i\mathbf{y}_{t-i} + \sum_{j=0}^q \mathbf{q}_j\mathbf{u}_{t-j} + \mathbf{a}_t \quad (11)$$

式中：下標 t 為離散時間指標， $\mathbf{y}_t$ 為 n_o 組輸出反應， $\mathbf{u}_t$ 為 n_i 組輸入外力； $\mathbf{a}_t$ 為雜訊向量，模擬此動態系統之量測誤差，假設其為平均值等於零之白色雜訊； $\mathbf{f}_i$ 為第 i 個 AR 參數矩陣， $\mathbf{q}_j$ 為第 j 個 X 參數矩陣。上式為 n_o 組響應輸出 n_i 組力輸入之 q 階 ARX 模型，簡稱為 ARX(q, n_o, n_i)模型。將上式之時間指標自 $t = q$ 展開至資料點數 N 後，合併 $\mathbf{f}_i$ 與 $\mathbf{q}_j$ 成為參數矩陣 $\mathbf{P}$ 後再整理可得下列之線性矩陣方程式。

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{P} + \mathbf{a} \quad (12)$$

式中： $\mathbf{y}$ 為 $n_o \times (N-q)$ 之輸出資料矩陣， $\mathbf{P}$ 為 $n_o \times ((n_o + n_i)q + n_i)$ 之系統參數矩陣， $\mathbf{W}$ 為因次為 $((n_o + n_i)q + n_i) \times (N-q)$ 之系統輸出入資料矩陣， $\mathbf{a}$ 為 $n_o \times (N-q)$ 之輸出資料矩陣，這些矩陣之格式分別表為：

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}_{q+1} \quad \mathbf{y}_{q+2} \quad \Lambda \quad \mathbf{y}_N] \quad (13.a)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_q & \Lambda & \mathbf{y}_{N-1} \\ \mathbf{y}_{q-1} & \Lambda & \mathbf{y}_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{y}_1 & \Lambda & \mathbf{y}_{N-q} \\ \mathbf{u}_{q+1} & \Lambda & \mathbf{u}_N \\ \mathbf{u}_q & \Lambda & \mathbf{u}_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{u}_1 & \Lambda & \mathbf{u}_{N-q} \end{bmatrix} \quad (13.b)$$

$$\mathbf{P} = [-\mathbf{f}_1 \quad \Lambda \quad -\mathbf{f}_q \quad \mathbf{q}_0 \quad \Lambda \quad \mathbf{q}_q] \quad (13.c)$$

$$\mathbf{a} = [\mathbf{a}_{q+1} \quad \mathbf{a}_{q+2} \quad \Lambda \quad \mathbf{a}_N] \quad (13.d)$$

ARX 系統參數矩陣 $\mathbf{P}$ 可由最小平方方法估算：

$$\mathbf{P} = \mathbf{W}^+\mathbf{y} \quad (14)$$

其中， $\mathbf{W}^+$ 代表 $\mathbf{W}$ 的擬反式(pseudo inverse)。

整理式(9)與式(11)可以得到 MP 參數矩陣與 AR 參數矩陣及 X 參數矩陣間的關係如下[3]：

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{q}_0 \quad (15.a)$$

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{q}_i - \sum_{j=1}^i \mathbf{f}_j \mathbf{Y}_{i-j}, \quad i=1,2,\dots,q \quad (15.b)$$

$$\mathbf{Y}_i = -\sum_{j=1}^q \mathbf{f}_j \mathbf{Y}_{i-j}, \quad i=q+1,q+2,\dots,\infty \quad (15.c)$$

前 q 項部份的 MP 參數是分別由 AR 及 X 參數矩陣決定，其餘的 MP 參數矩陣則是由 AR 參數矩陣來決定。

五、特徵系統識別運算

ERA 利用已知系統馬可夫參數推算等效狀態系統矩陣。其運算順序為先建立一個零階 Hankel 矩陣 $\mathbf{H}(0)$ ，再使用奇值分解方法將此矩陣分解，並分析其奇值以決定系統階數。最後利用一階 Hankel 矩陣 $\mathbf{H}(1)$ 建立一個最小階數的等效系統矩陣。當 $\mathbf{Y}_k$ 為 $n_o \times n_i$ 之矩陣時，選取 α 與 β 分別作為 Hankel 矩陣中 $\mathbf{Y}_k$ 的區塊列數與區塊行數，可建立一由 $\alpha \times \beta$ 個 $\mathbf{Y}_k$ 所組成之 $\alpha n_o \times \beta n_i$ 的 Hankel 矩陣為[1]：

$$\mathbf{H}(k-1) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_k & \mathbf{Y}_{k+1} & \Lambda & \mathbf{Y}_{k+\hat{a}-1} \\ \mathbf{Y}_{k+1} & \mathbf{Y}_{k+2} & \Lambda & \mathbf{Y}_{k+\hat{a}} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ \mathbf{Y}_{k+\hat{a}-1} & \mathbf{Y}_{k+\hat{a}} & \Lambda & \mathbf{Y}_{k+\hat{a}+\hat{a}-2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$\mathbf{H}(k-1)$ 可分解為三部份：

$$\mathbf{H}(k-1) = \mathbf{P}_{\hat{a}} \mathbf{A}_{\hat{a}}^{k-1} \mathbf{Q}_{\hat{a}} \quad (17)$$

其中 $\mathbf{P}_{\hat{a}}$ 稱為可觀測矩陣， $\mathbf{Q}_{\hat{a}}$ 稱為可控制矩陣。則當 $k=1$ 時：

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{P}_{\hat{a}} \mathbf{Q}_{\hat{a}} \quad (18)$$

在 $\alpha n_o \times \beta n_i$ 之 Hankel 矩陣 $\mathbf{H}(0)$ 中，存在著 $\alpha n_o \times \alpha n_o$ 正交矩陣 $\mathbf{R}$ 與 $\beta n_i \times \beta n_i$ 正交矩陣 $\mathbf{S}$ ，且在滿足 $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ 及 $\mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{S} \mathbf{S}^T = \mathbf{I}$ 條件，將 $\mathbf{H}(0)$ 分解如下：

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{S}^T \quad (19)$$

式中 $\mathbf{O}$ 為 $\alpha n_o \times \beta n_i$ 奇值矩陣。假設 MP 參數所構成的 $\mathbf{H}(0)$ 矩陣在無雜訊條件下，奇值矩陣可表為：

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中， $\mathbf{O}_n = \text{diag}[\sigma_1, \Lambda, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \Lambda, \sigma_n]$ 為由非零奇值所構成的對角矩陣；且奇值滿足遞減關係， $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \Lambda \geq \sigma_i \geq \sigma_{i+1} \geq \Lambda \geq \sigma_n \geq 0$ 。在無雜訊干擾下， n 為系統自由度 p 之兩倍。若有雜訊干擾時，則其他本為零之奇值將可能不為零之較小數值，且依訊號雜訊比而有不同程度之大小。故在決定 α 及 β 大小時必須注意使 αn_o 及 βn_i 大於或等於 $2p$ 。將式(19)改寫成：

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{R}_n \mathbf{O}_n \mathbf{S}_n^T \quad (21)$$

$\mathbf{R}_n$ 及 $\mathbf{S}_n$ 為 $\mathbf{R}$ 及 $\mathbf{S}$ 前 n 個行所組成之矩陣且滿足 $\mathbf{R}_n^T \mathbf{R}_n = \mathbf{I}_n = \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n$ 。比較式(18)及式(21)兩式中右式，運用平衡識別的概念可令：

$$\mathbf{P}_{\hat{a}} = \mathbf{R}_n \mathbf{O}_n^{1/2}, \quad \mathbf{Q}_{\hat{a}} = \mathbf{O}_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \quad (22)$$

再令：

$$\mathbf{E}_{n_o}^T = [\mathbf{I}_{n_o} \quad \mathbf{0}_{n_o} \quad \Lambda \quad \mathbf{0}_{n_o}] \quad (23.a)$$

$$\mathbf{E}_{n_i}^T = [\mathbf{I}_{n_i} \quad \mathbf{0}_{n_i} \quad \Lambda \quad \mathbf{0}_{n_i}] \quad (23.b)$$

綜合上式(23)、(21)、及式(22)，可導出：

$$\bar{\mathbf{A}}_d = \mathbf{O}_n^{-1/2} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}(1) \mathbf{S}_n \mathbf{O}_n^{-1/2} \quad (24.a)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_d = \mathbf{O}_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \mathbf{E}_{n_i} \quad (24.b)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{E}_{n_o}^T \mathbf{R}_n \mathbf{O}_n^{1/2} \quad (24.c)$$

又由式(10.a) $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{D}$ 可知：

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{Y}_0 \quad (25)$$

式(24.a)、式(24.b)、式(24.c)與式(25)分別構成離散時間等效狀態方程式相對於式(7)之狀態、輸入影響、輸出影響與直接傳輸矩陣 $[\bar{\mathbf{A}}_d, \bar{\mathbf{B}}_d, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{D}}]$ 。將離散時間狀態矩陣 $\bar{\mathbf{A}}_d$ 進行特徵分析，可將 $\bar{\mathbf{A}}_d$ 表為：

$$\bar{\mathbf{A}}_d = \bar{\mathbf{O}} \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{O}}^{-1} \quad (26)$$

$\bar{\mathbf{O}}$ 為含有 $2p$ 個特徵向量之特徵向量矩陣， $\bar{\mathbf{A}}$ 為含有 $2p$ 個特徵值之特徵值矩陣。由二階微分方程式之特性可知，狀態系統矩陣之系統特徵值皆為成雙成對出現。每一對共軛複根 (λ_i, λ_i^*) 代表了該系統矩陣的第 i 個動態模式，可將其所支配的第 i 個自然振頻與阻尼比分別表為：

$$\omega_i = \frac{1}{\Delta t} \sqrt{\frac{\ln(\lambda_i \lambda_i^*)^2}{4} + \left(\cos^{-1} \left(\frac{\lambda_i + \lambda_i^*}{2\sqrt{\lambda_i \lambda_i^*}} \right) \right)^2} \quad (27)$$

$$\xi_i = \frac{\sqrt{\frac{\ln(\lambda_i \lambda_i^*)^2}{4} + \left(\cos^{-1} \left(\frac{\lambda_i + \lambda_i^*}{2\sqrt{\lambda_i \lambda_i^*}} \right) \right)^2}}{\sqrt{\ln(\lambda_i \lambda_i^*)^2 + 4 \left(\cos^{-1} \left(\frac{\lambda_i + \lambda_i^*}{2\sqrt{\lambda_i \lambda_i^*}} \right) \right)^2}} \quad (28)$$

六、特徵靈敏度反式法修正 FEM 模型

本文所使用的特徵靈敏度反式法，乃是在 1974 年率先由 Collins[4]等人所提出，之後再由 Chen[5]等人修正成現在所看到的矩陣形式，整個修正程序如下：(一) 將欲修正的分析模型表成子矩陣的組合。修正的質量矩陣和勁度矩陣可表示為分析模型中子矩陣的組合，如下式：

$$M_U = \sum_{i=1}^L a_i M_i \quad (29.a)$$

$$K_U = \sum_{i=1}^L b_i K_i \quad (29.b)$$

其中：L 為修正係數的數目， a_i 和 b_i 為待決定的修正係數，如第 i 個修正係數沒有誤差，則 a_i 和 b_i 之值應為 1，但如 a_i 和 $b_i \gg 1$ (或 $\ll 1$)，表示此元素在建構上有問題。 M_i 和 K_i 為系統矩陣的子矩陣。質量矩陣和勁度矩陣的第 i 個 macro element matrices M_i 及 K_i ，可表示為與個別修正係數有關之元素質量矩陣的和，如下式：

$$M_i = \sum_{j=1}^{n_e} M_j^e \quad (30.a)$$

$$K_i = \sum_{j=1}^{n_e} K_j^e \quad (30.b)$$

其中： n_e 為第 i 個 macro element matrice 中所含質量元素的數目， M_j^e 及 K_j^e 為第 j 個元素的元素質量矩陣和勁度矩陣。(二) 特徵靈敏度。如果我們將 p 表示為由修正係數所組成之向量如下：

$$p = \{a_1 \ a_2 \ \Lambda \ a_L \ b_1 \ b_2 \ \Lambda \ b_L\} \quad (31)$$

修正模型第 r 個特徵值以下列泰勒級數展開：

$$\lambda_{Xr} = \lambda_{Ar} + \sum_{j=1}^{2L} \frac{\partial \lambda_{Ar}}{\partial p_j} \Delta p_j + \sum_{j=1}^{2L} \sum_{k=1}^{2L} \frac{\partial^2 \lambda_{Ar}}{\partial p_j \partial p_k} \Delta p_j \Delta p_k + \Lambda \ \Lambda \quad (32)$$

忽略高次項，則上式可以下面近似式表示：

$$\lambda_{Xr} - \lambda_{Ar} = \Delta \lambda_r = \sum_{j=1}^{2L} \frac{\partial \lambda_{Ar}}{\partial p_j} \Delta p_j \quad (33)$$

第 r 個特徵向量的誤差量也可以下式表示：

$$\Delta \phi_r = \sum_{j=1}^{2L} \frac{\partial \phi_{Ar}}{\partial p_j} \Delta p_j \quad (34)$$

將式(33)及式(34)兩式組合成矩陣型式如下：

$$\begin{Bmatrix} \Delta \lambda_r \\ \Delta \phi_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_{Ar}}{\partial a_1} & \Lambda & \frac{\partial \lambda_{Ar}}{\partial a_L} & \frac{\partial \lambda_{Ar}}{\partial b_1} & \Lambda & \frac{\partial \lambda_{Ar}}{\partial b_L} \\ \frac{\partial \phi_{Ar}}{\partial a_1} & \Lambda & \frac{\partial \phi_{Ar}}{\partial a_L} & \frac{\partial \phi_{Ar}}{\partial b_1} & \Lambda & \frac{\partial \phi_{Ar}}{\partial b_L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta a_1 \\ M \\ \Delta a_L \\ \Delta b_1 \\ M \\ \Delta b_L \end{Bmatrix} \quad (35)$$

或

$$\{\Delta_r\}_{(n+1) \times 1} = [S_r]_{(n+1) \times 2L} \{\Delta p\}_{2L \times 1} \quad (36)$$

靈敏度矩陣 $[S_r]$ 中的各元素，可由 Fox[6]等人在 1968 所提出的方法獲得如下：

$$\frac{\partial \lambda_r}{\partial p_i} = \phi_r^T \frac{\partial K}{\partial p_i} \phi_r - \lambda_r \phi_r^T \frac{\partial M}{\partial p_i} \phi_r \quad (37)$$

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^N c_{ij}^r \phi_j \quad (38)$$

$$\text{其中：} c_{ij}^r = \begin{cases} \frac{\phi_j^T \left(\frac{\partial K}{\partial p_i} - \lambda_r \frac{\partial M}{\partial p_i} \right) \phi_r}{\lambda_r - \lambda_j} & (r \neq j) \\ -\frac{1}{2} \phi_j^T \frac{\partial M}{\partial p_i} \phi_r & (r = j) \end{cases}$$

由式(29.a)，我們可得：

$$\frac{\partial M}{\partial a_i} = M_i, \quad \frac{\partial M}{\partial b_i} = 0 \quad (39.a)$$

$$\frac{\partial K}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial b_i} = K_i \quad (39.b)$$

將式(39)代入式(37)和式(38)，可得：

$$\frac{\partial \lambda_r}{\partial a_i} = -\lambda_r \phi_r^T M_i \phi_r \quad (40.a)$$

$$\frac{\partial \lambda_r}{\partial b_i} = \phi_r^T K_i \phi_r \quad (40.b)$$

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial a_i} = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}^r \phi_j, \quad (41.a)$$

$$\alpha_{ij}^i = \begin{cases} -\frac{\lambda_r \phi_j^T M_i \phi_r}{\lambda_r - \lambda_j} & (r \neq j) \\ -\frac{1}{2} \phi_j^T M_i \phi_r & (r = j) \end{cases}$$

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial b_i} = \sum_{j=1}^N \beta_{ij}^i \phi_j, \quad$$

$$\beta_{ij}^i = \begin{cases} \frac{\phi_j^T K_i \phi_r}{\lambda_r - \lambda_j} & (r \neq j) \\ 0 & (r = j) \end{cases} \quad (41.b)$$

如果我們只量測到 m 個模態，式(36)變成：

$$\{\Delta\}_{m(n+1) \times 1} = [S]_{m(n+1) \times 2L} \{\Delta p\}_{2L \times 1} \quad (42)$$

(三) 比例化特徵靈敏度。求解式(42)所會遇到的問題之一為靈敏度矩陣可能會 ill-conditioned，因為特徵向量的微分通常遠小於特徵值的微分，可由式(40)與式(41)看出此特性。

$$\left\| \frac{\partial \lambda_r}{\partial p_i} \right\| \approx \lambda_r \left\| \frac{\partial \phi_r}{\partial p_i} \right\| \quad (43)$$

故可將式(42)改寫如下：

$$\{\Delta'\} = \begin{Bmatrix} \frac{\Delta \lambda_1}{\lambda_1} \\ \Delta \phi_1 \\ M \\ \Delta \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\Delta \phi_m} \end{Bmatrix} \quad (44)$$

$$[S'] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \lambda_{A1}}{\partial a_1} / \lambda_1 & \Lambda & \frac{\partial \lambda_{A1}}{\partial a_1} / \lambda_L & \frac{\partial \lambda_{A1}}{\partial b_1} / \lambda_1 & \Lambda & \frac{\partial \lambda_{A1}}{\partial b_1} / \lambda_L \\ \frac{\partial \phi_{A1}}{\partial a_1} & \Lambda & \frac{\partial \phi_{A1}}{\partial a_1} & \frac{\partial \phi_{A1}}{\partial b_1} & \Lambda & \frac{\partial \phi_{A1}}{\partial b_1} \\ M & M & M & M & M & M \\ M & M & M & M & M & M \\ \frac{\partial \lambda_{Am}}{\partial a_1} / \lambda_m & \Lambda & \frac{\partial \lambda_{Am}}{\partial a_1} / \lambda_m & \frac{\partial \lambda_{Am}}{\partial b_1} / \lambda_m & \Lambda & \frac{\partial \lambda_{Am}}{\partial b_1} / \lambda_m \\ \frac{\partial \phi_{Am}}{\partial a_1} & \Lambda & \frac{\partial \phi_{Am}}{\partial a_1} & \frac{\partial \phi_{Am}}{\partial b_1} & \Lambda & \frac{\partial \phi_{Am}}{\partial b_1} \end{Bmatrix}$$

$$\text{即 } \{\Delta'\}_{m(n+1) \times 1} = [S']_{m(n+1) \times 2L} \{\Delta p\}_{2L \times 1} \quad (45)$$

式(45)為 over-determined 的必須條件為：

$$m(n+1) > 2L \quad \text{或} \quad m > \frac{2L}{n+1}$$

七、數值計算例：六質量塊系統

採用一 6 自由度彈簧質塊系統，來對此修正方法進行模擬，此系統之外觀如圖 1 所示。此系統之質量矩陣和勁度矩陣分別如下：

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times 10^6$$

只量測第 1、2、3、4 自由度，即由實驗所得前 4 個模態之特徵值和特徵向量為：

$$\lambda_x = \begin{bmatrix} 342813.15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 883824.11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1394923.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2389934.15 \end{bmatrix}$$

$$\phi_x = \begin{bmatrix} 0.2350 & 0.8267 & 0.3158 & -0.0066 \\ 0.3089 & 0.1921 & -0.2494 & -0.0183 \\ 0.4692 & 0.1146 & -0.7309 & 0.2983 \\ 0.4687 & -0.0642 & -0.1928 & -0.1347 \end{bmatrix}$$

此例中質量和勁度矩陣之子矩陣個數不一致，其子矩陣分別如下

$$M_1 = \begin{bmatrix} m1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots,$$

$$M_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m6 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} k1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots,$$

$$K_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_9 & 0 & -k_9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_9 & 0 & k_9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

質量與勁度矩陣共有 15 個參數 ($m_1 \sim m_6$ & $k_1 \sim k_9$), 在所有子矩陣都有誤差的情況下進行模擬, 相對於各子矩陣的誤差係數分別為:

$$(0.85, 0.85, 0.9, 0.9, 0.85, 0.9, 0.9, 0.9, \dots, 0.9, 0.9, 0.85, 0.9, 0.9, 0.85, 0.85)$$

修正係數所組成之向量如下:

$$\{a_1, a_2, \dots, a_6, b_1, b_2, \dots, b_9\}$$

此例量測到之模態數 $m = 4$, 如用 4 個模態所構成之特徵靈敏度矩陣來計算修正係數, 在收斂條件訂為 $\|\Delta p\| \leq 0.001$ 之下, 不論有沒有將特徵靈敏度矩陣比例化, 皆無法收斂。故採用下面途徑來改善收斂結果, 將 $\{\Delta\}$ 和 $[S]$ 補滿至 N 個模態 (本例 $N = 6$), 使式(42)變成 $\{\Delta\}_{N(N+1) \times 1} = [S]_{N(N+1) \times 2L} \{\Delta p\}_{2L \times 1}$, 其中 $\{\Delta\}$ 內對應到實驗未量測之自由度則以零取代, 則在相同的收斂條件 $\|\Delta p\| \leq 0.001$ 下, 當特徵靈敏度矩陣沒有比例化, 經過疊代 37 次後收斂, 當特徵靈敏度矩陣有比例化, 經過疊代 28 次後收斂, 可見比例化有助於改善收斂速度。

八、結論

本研究整合 ARX 與 ERA 系統鑑定法, 能合理有效的識別出結構系統的特性參數。此法優點可以藉由 ARX 模式直接由量測資料取得馬可夫參數, 藉由 ERA 免去一般由 ARX 模型識別模態參數需要降階的困擾。並將識別結果提供給 IEM 更新運算以修正六自由度質量塊系統。由數值例結果可知, 模態參數識別的越經精確, 其修正後之結果越佳。比例化特徵靈敏度有助於改善修正過程中之收斂速度。

九、參考文獻

1. Juang, J. N., "Applied System Identification", 1994, Prentice Hall.
2. 柯文俊, 洪振發, "結構動態系統矩陣鑑定", 中華民國第六屆振動與噪音工程學會研討會論文集, pp165-173, 八十七年五月。
3. LEE, H. C., M. H. HSAIO, J. K. HUANG and C. W. CHEN 1996 Journal of Vibration and Acoustics 118, pp169-175. Identification of Stochastic System and Controller via Projection Filters.
4. Collins, J. D., G. C. Hart, T. K. Hasselman, and B. Kennedy, "Statistical Identification of Structures", AIAA Journal, Vol. 12, No. 2, 1974, pp. 185-190.
5. Chen, J. C. and J. A. Garba, "Analytical Model Improvement Using Modal Test Results", AIAA Journal, Vol. 18, No.6, 1980, pp. 684-690.
6. Fox, R. L., and Kapoor, M. P., "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors," AIAA Journal, Vol. 6, No. 12, 1968, pp. 2426-2429.

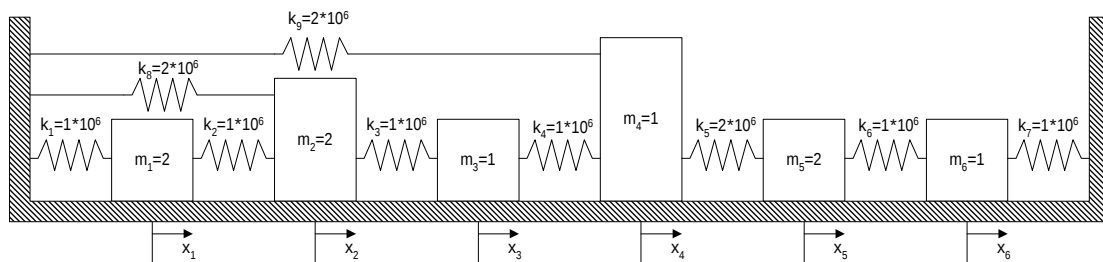


圖 1.6 自由度質量塊系統