

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

GPS 輔助之陀螺儀參數校準法

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC92-2213-E-002-043-

執行期間：92 年 08 月 01 日至 93 年 07 月 31 日

執行單位：國立臺灣大學電機工程學系暨研究所

計畫主持人：張帆人

計畫參與人員：黃以民

報告類型：精簡報告

報告附件：出席國際會議研究心得報告及發表論文

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 93 年 8 月 20 日

GPS 輔助之陀螺儀參數校準法

GPS-Aided Calibration Method of Gyro Parameters

計畫編號：NSC92 – 2213 – E002 – 043

執行時間：92 年 8 月 1 日至 93 年 7 月 31 日

主 持 人：張帆人 台灣大學電機系 教授

1 摘要 (關鍵字：卡門濾波器、球形線性內插法)

姿態判定在載具的運動中是很重要的，本文討論的主題就是從陀螺儀以及 GPS 所提供的資訊做姿態的判定。陀螺儀量到的角速度能藉由姿態運動方程式求得表示姿態的單位四元數；GPS 的載波相位二次差分模型則能利用 QUEST 的方法求得四元數，之後再利用濾波器將兩者做一結合，以得到更準確的估測。

由於在姿態判定中所使用的狀態方程式為非線性，所以一般會選用延伸型卡門濾波器來整合資訊，但姿態四元數有單範的限制條件，這會造成卡門濾波器中的協方差矩陣奇異性問題，因而導致演算過程無法收斂。在本文中，將利用修正式延伸型卡門濾波器解決此問題。修正式延伸型卡門濾波器的概念是以四元數的運算，並利用小角度的假設，減少協方差矩陣的維數，因而避開奇異性的問題。

除了修正式延伸型卡門濾波器之外，本文尚利用了球形線性內插法的觀念來做濾波。球形線性內插法的優點有計算量較小且能得到與卡門濾波器相若的效能；但是由於它無法提供陀螺儀偏置值的資訊，因此在使用上有任務時間的限制，此為其缺點。所以在選擇濾波器的時候，必須在計算量、任務時間長短以及陀螺儀偏置值標準差的大小做一衡量，選擇最適合當時情況的演算法。

Abstract (keyword: EKF, SLERP, Integration,)

The attitude determination is very important in the moving vehicles, the topic of this thesis is the attitude determination from the information that GPS and gyro provide. The unit quaternion which expressed the attitude can be

derived from the angular velocity that gyro measures; also we can make use of the QUEST algorithm to obtain the unit quaternion from double difference of GPS carrier phase. These two data can be combined into a more accurate one by filters.

Since the state equations are nonlinear, the linearization approaches may be used. The extended Kalman filter is an appropriate method for attitude determination. But unit norm constraint of quaternion vector results in the singularity of the error covariance matrix. To overcome this problem, we can use the modified extended Kalman filter. The modified extended Kalman filter adopts quaternion multiplication which preserves the unit norm of quaternion and reduces the dimension of error covariance matrix by an assumption of infinitesimal rotation.

In addition to the modified extended Kalman filter, we propose the concept of spherical linear interpolation (SLERP) in the filter. The advantage of SLERP is less computation load and its performance is similar to that of Kalman filter. But the method of SLERP can not provide the measurement update of gyro bias, so using this method is restricted by mission duration. Therefore, when selecting the filter, we need consider a tradeoff among mission duration, computation load and gyro bias.

2. 四元數簡介：

尤拉定理說道『任何已知的一系列旋轉，皆可被表示為，繞著某一單一固定軸旋轉一個角度』，換言之，只要我們能求得載具每一個時刻的旋轉軸與旋轉角，就能達到姿態判定的目的。

a. 四元數代數[4][5][9][10]

一般說來，四元數有很多種表示方法，以下列舉幾個較常見的，其定義如下：

$$\bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{q}} \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\omega}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = q_1 i + q_2 j + q_3 k + q_4 \quad (1)$$

其中單位向量 $\hat{\mathbf{n}}$ 代表座標系旋轉所對應的轉軸， θ 則為繞著 $\hat{\mathbf{n}}$ 軸旋轉的角度。 $\underline{\mathbf{q}}$ 為由 q_1 、 q_2 、 q_3 組成的向量部分(vector part)， q_4 則為純量部分(scalar part)。

接著定義兩個四元數的乘法(quaternion product)如下：

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = ijk = -1 \\ ij &= -ji = k \\ jk &= -kj = i \\ ki &= -ik = j \end{aligned} \quad (2)$$

有了(2)式就可以計算出兩個四元數的乘積，我們以 $\otimes$ 符號來代表四元數乘積：

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{p}} \otimes \bar{\mathbf{q}} &= (p_1 i + p_2 j + p_3 k + p_4) \otimes (q_1 i + q_2 j + q_3 k + q_4) \\ &= \begin{bmatrix} p_4 & -p_3 & p_2 & p_1 \\ p_3 & p_4 & -p_1 & p_2 \\ -p_2 & p_1 & p_4 & p_3 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & p_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q_4 & q_3 & -q_2 & q_1 \\ -q_3 & q_4 & q_1 & q_2 \\ q_2 & -q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

(3)式也可以表示為：

$$\bar{\mathbf{p}} \otimes \bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} p_4 \underline{\mathbf{q}} + q_4 \underline{\mathbf{p}} + \underline{\mathbf{p}} \times \underline{\mathbf{q}} \\ p_4 q_4 - \underline{\mathbf{p}} \cdot \underline{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

四元數的共軛(complex conjugate)定義為：

$$\bar{\mathbf{q}}^* = \begin{bmatrix} -\underline{\mathbf{q}} \\ q_4 \end{bmatrix} = -q_1 i - q_2 j - q_3 k + q_4 \quad (5)$$

四元數的反向(inverse)四元數定義為：

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{q}} &= \bar{\mathbf{q}} \otimes \bar{\mathbf{q}}^{-1} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \\ \bar{\mathbf{q}}^{-1} &= \frac{\bar{\mathbf{q}}^*}{N^2(\bar{\mathbf{q}})} \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $N(\bar{\mathbf{q}})$ 為四元數 $\bar{\mathbf{q}}$ 的範數(norm)：

$$N(\bar{\mathbf{q}}) = \sqrt{\bar{\mathbf{q}}^T \bar{\mathbf{q}}} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} \quad (7)$$

在本文中討論姿態時所用到的四元數，範數皆等於 1，我們稱之為單位四元數(unit

quaternion)。這是由於四元數的變數數目(4)多於旋轉表示法的自由度(3)，因此四個變數需符合一個長度為 1 的限制式(constraint)，由此可推得：

$$\bar{\mathbf{q}}^{-1} = \bar{\mathbf{q}}^* \quad (8)$$

以下介紹四元數如何運用在姿態轉換上。

假設現今有一向量 $\mathbf{r}$ ，在兩個不同基底的座標系 a 與座標系 b 的數值表示分別為 $\mathbf{r}^a$ 與 $\mathbf{r}^b$ ，則我們可利用一單位四元數 $\bar{\mathbf{q}}$ ，來求得兩座標系間的姿態矩陣：

$$\bar{\mathbf{r}}^b = \bar{\mathbf{q}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{r}}^a \otimes \bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}^* \otimes \bar{\mathbf{r}}^a \otimes \bar{\mathbf{q}} \quad (9)$$

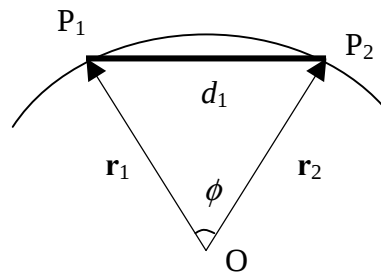
其中

$$\bar{\mathbf{r}}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^a \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{A} \quad \bar{\mathbf{r}}^b = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

(9)式則是利用四元數於姿態轉換中最常用的運算式。

b. 單位四元數的距離[6]

在定義單位四元數的距離之前，我們先考慮單位圓上，點與點的距離，如圖一。假設單位圓之圓心為 O， P_1 、 P_2 為圓上之兩點，則此兩點可以用長度為 1 的單位向量 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$ 分別表示：



圖一：單位圓上兩點之間的距離

一般來說，最常用來定義距離的度量(metric)，即是歐式度量(Euclidean metric)，所以 $\mathbf{r}_1$ 、 $\mathbf{r}_2$ 間的距離 d_1 可寫成：

$$d_1 = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \quad (11)$$

其中 d_1 在幾何意義裡，即代表著 P_1 和 P_2 間的

弦長；另一種定義距離的方法，則是定義向量 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$ 的夾角 ϕ 為其距離 d ，可寫為：

$$d_2 = \phi = \cos^{-1} \mathbf{r}_1 \bullet \mathbf{r}_2 \quad (12)$$

或

$$\cos \phi = \mathbf{r}_1 \bullet \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_2 \quad (13)$$

其中 d 的範圍介於 $0 \sim \pi$ 之間，也就是以 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$ 間數值較小的夾角為準。

以上所提及的兩個向量 $\mathbf{r}_1$ 、 $\mathbf{r}_2$ 皆為 2×1 的向量，我們可將此結果推廣到 4×1 的向量，也就是我們的四元數，因此同樣的我們也有兩種方法可以定義單位四元數的距離，假設現今有兩個單位四元數 $\bar{\mathbf{q}}_1$ 、 $\bar{\mathbf{q}}_2$ ：

a. 歐式度量(Euclidean metric)

$$d_1(\bar{\mathbf{q}}_1, \bar{\mathbf{q}}_2) = |\bar{\mathbf{q}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_2| \quad (14)$$

b. 正度量(right metric)

$$d_2(\bar{\mathbf{q}}_1, \bar{\mathbf{q}}_2) = \phi = \cos^{-1} \bar{\mathbf{q}}_1^T \bar{\mathbf{q}}_2 \quad (15)$$

其中 ϕ 的範圍介於 $0 \sim \pi$ 之間。

在本文中若是需要計算兩單位四元數間的距離，皆採用正度量。

c. 球形線性內插法(spherical linear interpolation)[1]

球形線性內插法(spherical linear interpolation, SLERP)是一種為了單位四元數所推導出的一種線性內插法。我們先回到圖一上，若是將 $\mathbf{r}_1$ 、 $\mathbf{r}_2$ 做一般傳統的內插法，我們會得到：

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = (1 - u) \mathbf{r}_1 + u \mathbf{r}_2 \quad (16)$$

其中 $\mathbf{r}$ 為內插後的值， u 為內插的權重值(weighting)，介於 $0 \sim 1$ 之間。仔細觀察不難發現，經由傳統內插所得到的 $\mathbf{r}$ 值，將會落在 $\mathbf{r}_1$ 、 $\mathbf{r}_2$ 之間的『弦』上，也就表示所得到的 $\mathbf{r}$ 向量的端點，將不再落在單位圓上，亦即 $\mathbf{r}$ 的長度不等於 1。這個情形與單位四元數是相同的，若我們運用傳統線性內插的公式於單位四元數，則所得出來的四元數將不具有單範的性

質，所以我們必須使用一種新的內插法，即為球形線性內插，以下將推導其公式。

今給定兩個單位四元數 $\bar{\mathbf{q}}_1$ 、 $\bar{\mathbf{q}}_2$ ，兩者之距離 ϕ 由(15)式所求，設 u 為介於 $0 \sim 1$ 之間的內插的權重值， $\bar{\mathbf{q}}$ 為內插後的單位四元數，可表示為：

$$\bar{\mathbf{q}} = \alpha \bar{\mathbf{q}}_1 + \beta \bar{\mathbf{q}}_2 \quad (17)$$

其中 α 與 β 皆為待求的純量，我們的目標為， $\bar{\mathbf{q}}$ 與 $\bar{\mathbf{q}}_1$ 間的距離為 $u\phi$ ， $\bar{\mathbf{q}}$ 與 $\bar{\mathbf{q}}_2$ 間的距離為 $(1-u)\phi$ ，接著我們再將(17)式，等式兩邊同乘 $\bar{\mathbf{q}}_1^T$ 以及 $\bar{\mathbf{q}}_2^T$ ，並利用(15)式可得：

$$\begin{cases} 1 = \alpha \cos u\phi + \beta \cos(1-u)\phi \\ \cos u\phi = \alpha + \beta \cos \phi \end{cases} \quad (18)$$

將(18)式解聯立，就可得到球形線性內插公式：

$$\bar{\mathbf{q}} = \text{SLERP}(\bar{\mathbf{q}}_1, \bar{\mathbf{q}}_2, u) = \frac{\sin(1-u)\phi}{\sin \phi} \bar{\mathbf{q}}_1 + \frac{\sin u\phi}{\sin \phi} \bar{\mathbf{q}}_2 \quad (19)$$

3.濾波器設計：

這節中將介紹如何把球形線性內插的概念，應用於姿態判定的濾波器上。大部分的推導仍然跟卡門濾波器相同，不同的地方就是量測更新的部分，在卡門濾波器中，是先利用協方差矩陣以及量測方程式求得卡門增益，並由此卡門增益進行修正狀態的工作；而在(19)式的公式中，當我們要進行球形線性內插之前，必須先求得一權重值 u ，這個觀念事實上跟求得卡門增益是相當的。在本節將介紹如何找到一個合適的權重值，並利用球形線性內插法得到當時刻最好的估測值。

首先定義四元數的誤差 $\delta \bar{\mathbf{q}}$ 如下[7]：

$$\delta \bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}^* \otimes \hat{\bar{\mathbf{q}}} \quad (20)$$

其中 $\bar{\mathbf{q}}$ 為四元數真值， $\hat{\bar{\mathbf{q}}}$ 為四元數的估測值，並假設 $\delta \bar{\mathbf{q}}$ 是無偏置(unbiased) [7]：

$$E[\delta \bar{\mathbf{q}}] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \quad (21)$$

假設在第 k 時刻，有一從陀螺儀得到的

四元數 $\bar{\mathbf{q}}_1(k)$ [3][4][9]以及從 GPS 量測得到的 $\bar{\mathbf{q}}_2(k)$ [7]，並假設 u 是當時刻最佳權重值，則我們利用球形線性內插可得到最佳估測值

$\hat{\bar{\mathbf{q}}}(k)$ ：

$$\hat{\bar{\mathbf{q}}}(k) = \frac{\sin(1-u)\phi}{\sin\phi} \bar{\mathbf{q}}_1(k) + \frac{\sin u\phi}{\sin\phi} \bar{\mathbf{q}}_2(k) \quad (22)$$

其中 ϕ 為 $\bar{\mathbf{q}}_1(k)$ 與 $\bar{\mathbf{q}}_2(k)$ 的距離，GPS 沒有週波脫落(cycle slip)而正常運作時 ϕ 可以假設為一很小的值。

令 $\bar{\mathbf{q}}(k)$ 為真值，將(22)式兩邊同乘 $\bar{\mathbf{q}}^*(k)$ ，並利用(20)式替換之：

$$\delta\bar{\mathbf{q}}(k) = \frac{\sin(1-u)\phi}{\sin\phi} \delta\bar{\mathbf{q}}_1(k) + \frac{\sin u\phi}{\sin\phi} \delta\bar{\mathbf{q}}_2(k) \quad (23)$$

其中 $\delta\bar{\mathbf{q}}$ 、 $\delta\bar{\mathbf{q}}_1$ 、 $\delta\bar{\mathbf{q}}_2$ 分別為 $\hat{\bar{\mathbf{q}}}$ 、 $\bar{\mathbf{q}}_1$ 、 $\bar{\mathbf{q}}_2$ 與真值的誤差，而我們的目的則是希望 $\delta\bar{\mathbf{q}}$ 能最小。

由於 ϕ 很小， $\sin(1-u)\phi \cong (1-u)\phi$ ， $\sin u\phi \cong u\phi$ ，因此(23)式可近似為：

$$\delta\bar{\mathbf{q}}(k) = \frac{(1-u)\phi}{\phi} \delta\bar{\mathbf{q}}_1(k) + \frac{u\phi}{\phi} \delta\bar{\mathbf{q}}_2(k) = (1-u)\delta\bar{\mathbf{q}}_1(k) + u\delta\bar{\mathbf{q}}_2(k) \quad (24)$$

要讓 $\hat{\bar{\mathbf{q}}}$ 成為最佳估測解，也就是我們希望

$\text{tr}E[\delta\bar{\mathbf{q}}\delta\bar{\mathbf{q}}^T]$ 為最小，如此我們只要滿足以下

兩個條件即能求出最佳估測解的 u 值：

$$\frac{d\text{tr}E[\delta\bar{\mathbf{q}}\delta\bar{\mathbf{q}}^T]}{du} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{d^2\text{tr}E[\delta\bar{\mathbf{q}}\delta\bar{\mathbf{q}}^T]}{du^2} > 0 \quad (26)$$

將(24)式代入(25)、(26)式中，並假設 $\delta\bar{\mathbf{q}}_1$ 與 $\delta\bar{\mathbf{q}}_2$ 互相獨立，可得：

$$u = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (27)$$

且

$$\frac{d^2\text{tr}E[\delta\bar{\mathbf{q}}\delta\bar{\mathbf{q}}^T]}{du^2} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 > 0 \quad (28)$$

其中

$$\sigma_1^2 = \text{tr}E[\delta\bar{\mathbf{q}}_1\delta\bar{\mathbf{q}}_1^T]、\sigma_2^2 = \text{tr}E[\delta\bar{\mathbf{q}}_2\delta\bar{\mathbf{q}}_2^T]$$

可分別從 GPS 及 Gyro 中得到[3][7][9]

(27)式即為當時刻的最佳權重值。

最後將(24)式代入 $E[\delta\bar{\mathbf{q}}\delta\bar{\mathbf{q}}^T]$ ，推導 $\delta\bar{\mathbf{q}}$ 的協

方差矩陣 $\hat{\mathbf{P}}$ ：

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}} = E[\delta\bar{\mathbf{q}}\delta\bar{\mathbf{q}}^T] &= (1-u)^2 E[\delta\bar{\mathbf{q}}_1\delta\bar{\mathbf{q}}_1^T] + u^2 E[\delta\bar{\mathbf{q}}_2\delta\bar{\mathbf{q}}_2^T] \\ &= (1-u)^2 \mathbf{P}_1 + u^2 \mathbf{P}_2 \end{aligned} \quad (30)$$

其中 $\mathbf{P}_1$ 、 $\mathbf{P}_2$ 分別為 $\delta\bar{\mathbf{q}}_1$ 與 $\delta\bar{\mathbf{q}}_2$ 的協方差矩陣，

分別在[3][8]中有詳細的推導。

由於在姿態判定中，狀態變數除了四元數之外，還有偏置值，因此我們也需推導偏置值的協方差矩陣：

$$\begin{aligned} E[\delta\bar{\mathbf{q}}\delta\mathbf{b}^T] &= E[((1-u)\delta\bar{\mathbf{q}}_1 + u\delta\bar{\mathbf{q}}_2)\delta\mathbf{b}^T] \\ &= (1-u)E[\delta\bar{\mathbf{q}}_1\delta\mathbf{b}^T] + uE[\delta\bar{\mathbf{q}}_2\delta\mathbf{b}^T] \\ &= (1-u)E[\delta\bar{\mathbf{q}}_1\delta\mathbf{b}^T] \end{aligned} \quad (31)$$

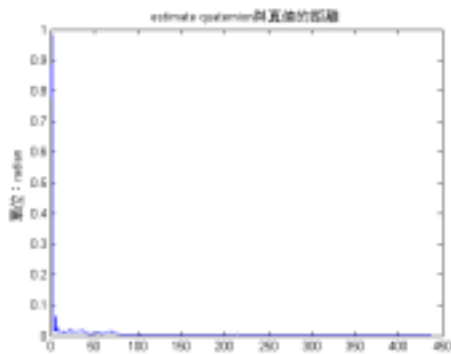
由於在 GPS 並沒有陀螺儀的偏置值，所以(31)

式中的 $E[\delta\bar{\mathbf{q}}_2\delta\mathbf{b}^T]$ 在本文中假設為 0 矩陣。

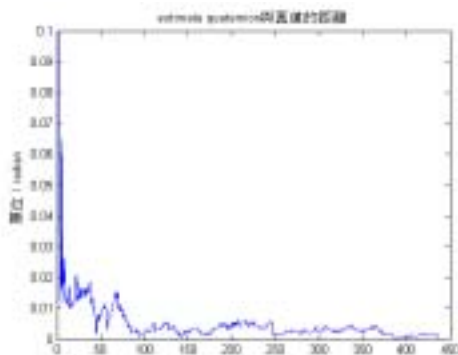
至於 $E[\delta\mathbf{b}\delta\mathbf{b}^T]$ ，由於球形線性內插法並沒有辦法針對偏置值來做量測更新，所以 $E[\delta\mathbf{b}\delta\mathbf{b}^T]$ 將不會被更新。

4. 模擬結果與結論：

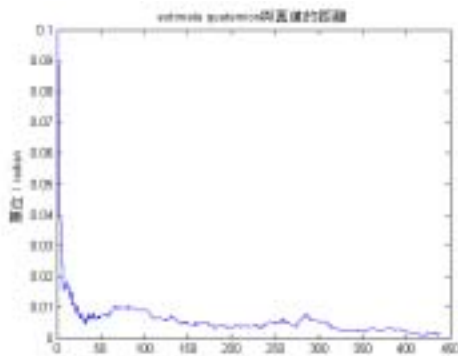
在本節會將前述所介紹之建基於球形線性內插的延伸型卡門濾波器(SLERP based EKF)與傳統使用延伸型卡門濾波器(EKF)所做的姿態判定效能做一個比較，以下為兩種濾波器姿態判定的結果：



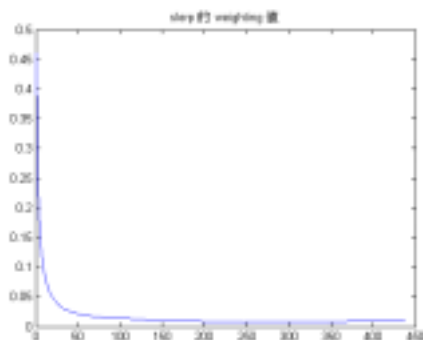
圖二：利用 EKF 估測的姿態誤差



圖三：圖二的放大圖



圖四：SLERP based MEKF 估測的姿態誤差



圖五：SLERP 的權重值

觀察以上的模擬結果，可以得到幾個結論，在穩態的時候兩種濾波器的效能相當接近，並無明顯的優劣；暫態方面則是 SLERP based EKF 較好一些；計算量方面，在 EKF 中是靠著卡門增益得到最佳估測解，在 SLERP based EKF 中則是靠著權重值 u ，所以 EKF 將會造成較大的運算負擔。

前一節中已有提過，由於 SLERP 的演算法無法提供陀螺儀偏置值的更新量，所以當姿態判定的時間過久，或是陀螺儀偏置值變大的情形下 SLERP based EKF 的演算法效能將會愈來愈差，直到最後其權重值將會等於 1，也就是完全靠 GPS 的資訊來達成姿態判定，因此在使用上此濾波器只適用於短時間的導航任務，所以在濾波器的選擇上，應視陀螺儀偏置值大小、導航任務時間長短、計算量大小做一衡量，選擇最適合的濾波器。

5. 參考文獻：

- [1] Alan Watt, and Mark Watt. “Advanced animation and rendering techniques : theory and practice,” New York, N.Y. : ACM Press, 1992.
- [2] Arthur Gelb. “Applied optimal estimation, ” Cambridge, Massachusetts : M.I.T. Press, 1974.
- [3] E. J. Lefferts, F. L. Markeylry, and M. D. Shuster. “Kalman filtering for spacecraft attitude estimation.” *Journal of Guidance, Control and Dymanics*, 5(5): 417-429 , September -October 1982.
- [4] Jay Farrell, and Matthew Barth. “The Global Positioning System and Inertial Navigation, ” New York : McGraw-Hill, 1999.
- [5] Jack B. Kuipers. “Quaternions and rotation sequences,” Princeton, N.J. : Princeton University Press, 1999.

- [6] Matthew T. Mason. "Mechanics of Robotic Manipulation," Cambridge, Mass. : M.I.T. Press, 2001.
- [7] M. D. Shuster, and S. D. Oh. Three-axis attitude determination from vector observations. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 4(1):70-77, January-February 1981.
- [8] <http://www.imar-navigation.de/englishside/imar.htm>
- [9] 姜義德，整合 GPS 載波相位及陀螺儀量測應用於姿態判定，國立台灣大學電機工程所博士論文，2002.
- [10] 陳逸，約束型濾波於低軌道衛星姿態判定之應用，國立台灣大學電機工程所碩士論文，2002.
- [11] 莊智清 黃國興，e-navigation 電子導航，全華科技圖書，2001.
- [12] 盧冠穎，GPS/INS 整合式之導航系統，國立台灣大學電機工程所碩士論文，2003.