

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

不同標的利率、殖利率曲線、波動結構對標準與亞式利率上限契約價值的影響

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC91-2416-H-002-026-

執行期間：91 年 08 月 01 日至 92 年 07 月 31 日

執行單位：國立臺灣大學財務金融學系暨研究所

計畫主持人：李賢源

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 92 年 12 月 24 日

不同標的利率、殖利率曲線、波動結構對標準與亞式利率上限契約價值的影響

Impacts of Underlying Interest Rates, Yield Curves and Volatility

Structure on the Values of Standard Cap and Average Cap

計劃編號：NSC 91-2416-H-002-026

執行期間：91 年 8 月 1 日至 92 年 7 月 31 日

主持人：李賢源 國立台灣大學財務金融系(所)

一、中英文摘要

本文推導不同利率模型下、不同標的資產的標準利率上限契約的評價封閉解,並且應用實例驗證各種評價公式的差異。本文分別在 Hull and White (1990)、Heath, Jarrow and Morton (1992)、Brace, Gatarek and Musiela (1997) 利率模型下推導評價公式,標的資產則分別以瞬間短率(Short Rate)、即期利率(Spot Rate)、LIBOR 利率當指標。本文的實證則探討分析在不同利率模型下,標準利率上限契約價值的比較 利率波動性結構型態對標準利率上限契約價值的影響 以及標準單一利率上限契約價值與契約到期期限的關係。

關鍵字：利率期間結構、利率波動性結構、利率選擇權、利率上限契約

Abstract：

This paper derives the pricing formula for a standard cap, under different term structure models and using different interest rates as the underlying asset. The term structure models employed include Hull and White (1990), Heath, Jarrow and Morton (1992), Brace, Gatarek and Musiela (1997). In separate cases, the underlying asset is assumed to pay the short rate, the spot rate, and the

LIBOR rate. A unique pricing formula appropriate for each case is derived here and a numerical example is applied to demonstrate their differences. The following empirical studies are conducted：(1) Computation of premiums of standard caps with various underlying assets and maturities; (2) Impact of interest rate volatility structure on the premium of a standard cap; (3) Relationship between cap premium and maturity.

Keywords：

Term Structure of Interest Rate, Volatility Structure of Interest Rate, Interest Rate Options, Interest Rate Caps

緣由與目的

當公司以舉債的方式籌措資金進行投資時,利率的波動是影響公司資金成本的重要因素。尤其是,舉借的若是浮動利率的債務,則利率上升時,公司的資金成本變高;利率下降時,公司的資金成本變低。由於利率的變動並非一成不變,因此公司的資金成本也具不確定性。公司為了規避利率變動對營運所產生的風險,可依照自己對未來利率趨勢的預期、或公司資金成本規畫的特殊考量等因素,選擇不同的利

率衍生性商品來避險。一般可供避險的利率衍生性商品如下：利率期貨(Interest Rate Futures)、利率交換(Interest Rate Swap; IRS)、遠期利率合約(Forward Rate Agreement; FRA)、利率上限(Interest Rate Cap; Cap)、利率下限(Interest Rate Floor; Floor)等。

利率衍生性商品都有避險功能，但由於報償型態(Payoff Pattern)不同，所以會導致不同的應用決策。例如上述的浮動利率債務：若公司希望固定資金成本、且不願意付避險費用但願意承擔義務，則可以訂定一個利率交換的契約，支付固定的利率、收取浮動的利率。由於利率交換契約的報償型態是一對角線的型態，因此當市場利率上升時，公司可鎖住資金成本在固定利率的水準而不會隨市場利率上升；反之，當市場利率下跌時，公司也必須鎖住資金成本在固定利率的水準而負擔較高的資金成本，無法獲得利率下跌所導致資金成本減少的好處。因此，簽訂利率交換契約時，雖不用負擔任何避險費用，而且擁有利率上升時享有好處的權利，但同時也承擔利率下跌時壞處的義務。另外，若是公司希望控制資金成本在某一個界限下、且不願意承擔義務但願意付避險費用，則公司可購買利率上限契約。由於利率上限契約的報償型態是一拗折線的型態，因此當利率上升且超過上限利率(Cap Rate)時，公司可以執行契約而得到市場利率與上限利率的差額補償，將資金成本固定在上限利率的水準；反之，當利率下降且低於上限利率時，公司可以放棄執行契約，而享受利率下跌造成資金成本降低的好處(註¹)。由上述的兩種利率衍生性商品可

知，雖然兩種利率衍生性商品都可達到避險的目的，但是由於使用者願不願意付避險費用與願不願意承擔義務的態度，會左右公司選用何種利率衍生性商品來避險的決策；再者，避險費用的高低以及承擔義務的輕重也是影響公司決定使用何種利率衍生性商品來避險的重要因素。因此，選擇何種利率衍生性商品來避險，其實是因人、因時、因利率環境而變動，並沒有一定的準則。

近年來，國內隨著經濟的發展與金融的自由化，利率的波動較以往益形顯著。再者，愈來愈多的利率商品內含利率選擇權，例如：不動產抵押擔保債權證券(Mortgage-Backed Securities; MBS)內含提早還款(Prepayment)選擇權、或是公司債裏內含利率賣權或買權(如 Inverse Floater)等。這些因素促使利率選擇權常被應用來當做避險工具，且有愈來愈普遍的趨勢；尤有甚者，由於各種利率期間結構(Term Structure of Interest Rates)的理論模型被蓬勃的發展，因此可以用來計算利率選擇權的權利金、以及進行風險管理。本文即因應這種趨勢，專注推導各種利率期限結構模型的利率選擇權評價公式，並且以實例驗證各種利率選擇權評價公式以及比較彼此之間的差異。本文探討的主題之所以重要主要是下列原因：(1)國內櫃檯買賣中心已於民國九十二年八月開放證券商承做利率選擇權(Interest Rate Options; 簡稱 IRO)，目前開放的 IRO 屬於標準型態的利率選擇權，如 Caps、Floors、Collars 等，這些商品是被應用來交易出指標利率的隱含波動率(Implied Volatility)，故一般僅需要用 Black (1976)的評價公式即可；但是，

註¹：由於利率上、下限契約的評價與避險原理一樣，為節省篇幅，本文主要以利率上限契約為

例來探討。至於利率下限契約的結果，讀者若有興趣，可來函向主通訊投稿者函索。

預期證券商會衍生出許多的利率選擇權商品，故需要各種利率期限結構模型的利率選擇權評價公式。(2) 利率選擇權評價公式會因依據什麼利率期限結構模型來推導、以及用什麼指標利率當標的資產而產生不同的結果，就作者有限之知識範圍內所知，國內外既存文獻尚未有類似本文主題之研究，特別是實例之數值比較，故本文之研究結論可做為理論與實務的參考。

早期對利率選擇權評價公式的推導，通常以瞬間即期利率(Instantaneous Spot Rate；或稱短率 Short Rate)的利率期限結構模型來推導。這類利率選擇權的評價公式一般有三個嚴重的缺陷：(1)應用的利率期限結構模型與市場現今的利率期限結構不吻合，這會使得利率選擇權的評價產生很大的誤差，例如：Jamshidian (1989)應用 Vasicek (1977) 利率期限結構模型解出利率選擇權的評價封閉解；以及後來應用 Cox, Ingersoll and Ross(1985)利率期限結構模型所推導出的利率選擇權評價公式等，都有這個缺陷。(2) 這類利率選擇權的評價有的是以瞬間即期利率當作利率選擇權的標的資產，例如：Longstaff (1995)在 Vasicek 模型架構下，推導利率上限契約封閉解；但是，因為瞬間即期利率是理論值，在市場上並無法直接觀察得到，以瞬間即期利率當標的資產會使得利率選擇權的評價公式不符合實務應用。(3) 利率選擇權的評價受到利率的波動性結構(Volatility Structure)影響甚大，特別是利率波動性的型態(例如：指數遞減型或駝峰型)；但是，瞬間即期利率的利率期限結構模型，一般並無法反映利率波動性的型態對利率選擇權的評價影響。由於這類利率選擇權的評價公式有上述這些缺陷，因此本文在推導各種利率期限結構模型的利率選擇權評價公式時，將針對這些缺陷修正之。

本文用來推導利率選擇權評價公式的利率期限結構模型包括：Hull-White (1990；簡稱 HW)、Heath-Jarrow-Morton (1992；簡稱 HJM)、Brace-Gatarek-Musiela (1997；簡稱 BGM)等。之所以選用這三個模型，主要是：(1)它們是學術界與實務界廣為探討與應用的模型。(2)它們是瞬間即期利率、瞬間遠期利率(Instantaneous Forward Rate)、LIBOR 利率的代表性利率期限結構模型，因此探討比較它們的利率選擇權評價公式，具有廣泛的價值性與代表性。(3) 它們都以目前市場上的殖利率曲線(Yield Curve)做為輸入的資料，因此推導出來的利率選擇權評價公式都沒有前述的第一個缺陷。了解這三個模型解決上述第一個缺陷的優勢之後，本文接著探討以不同的指標利率當標的資產的影響。

本文推導下列以不同的指標利率當標的資產的利率選擇權評價公式：(1)在 HW 模型下，以即期利率(Spot Rate) 當標的資產(註²)，推導出利率選擇權評價公式。(2) 在 HJM 模型下，先由瞬間遠期利率推導出瞬間即期利率的隨機微分方程(Stochastic Differential Equation)，再分別以瞬間即期利率、以即期利率當標的資產，分別推導出對應的利率選擇權評價公式。(3) 在 BGM 模型下，以 LIBOR 利率當標的資產，推導出利率選擇權評價公式(註³)。透過

註²：本文不推導 HW 模型下以瞬間即期利率為標的資產的利率選擇權評價公式，是因為這可以參考 Longstaff (1995)的作品，故不再贅述。

註³：一般而言，最常被用來當利率選擇權之標的資產的指標利率是 LIBOR 利率，然而除了 BGM 模型可以直接利用 LIBOR 利率隨機過程來推導利率選擇權的評價公式之外，HW 模型和 HJM 模型都是應用零息債券價格和 LIBOR 利率的關係，將 LIBOR 利率轉換成零息債券價格

上述這些評價公式的推導，本文即可以用數值實例來比較不同的模型、不同的指標利率標的資產對利率選擇權的評價影響。上述在 HJM 模型及 BGM 模型下推導得到的不同的指標利率當標的資產的利率選擇權評價公式，尚可用來探討不同的利率波動型態對利率選擇權評價的影響。HJM 模型長久以來即以能彈性的描述各種型態的遠期利率波動結構而廣為人知，也因為這項特性而能把 HW 模型納為特例，使之成為遠期利率波動型態呈現指數遞減型的 HJM 模型。再者，BGM 模型是間斷型的 HJM 模型，尤有甚者它是可以直接利用市場上可觀察到的 LIBOR 利率當標的資產的模型，因此可以很容易的利用市場的 LIBOR 利率資料作模型的校準(calibration)，使得模型不僅符合市場的利率期限結構，而且也符合遠期利率波動結構，對於利率衍生性商品的評價與避險有極大的幫助。

二、結果與討論

本節應用實例驗證不同模型、不同標的資產的標準利率上限契約的評價差異。由於利率上限契約是一利率買權(Interest Rate Call)，因此其評價受利率波動結構型態影響很大，故本節亦探討不同型態的利率波動結構對利率上限契約的評價影響。除了 HW 模型因為其利率波動性結構為特殊型態之外(註 11)，其餘 HJM 模型與 BGM

模型本文將分別考慮利率的波動性結構為水平型、上升型、下降型、指數遞減型或駝峰型等型態，探討其對利率上限契約的評價影響。另外，影響利率上限契約價值的另一重要因素—殖利率曲線，由於既存文獻探討已多，故本文只假設目前市場的利率期間結構為上升型 $R(0,t) = 0.08 - 0.025e^{-0.18t}$ ，再根據它討論不同模型下，標準利率上限契約價值的比較、利率波動性結構型態對標準利率上限契約價值的影響、以及標準單一利率上限契約價值與契約到期期限的關係。

一、Heath-Jarrow-Morton 模型

(一) 標準利率上限契約的評價實證分析

在 HJM 模型下評價標準利率上限契約，其評價公式是(27)式。表 3-1 報告在利率期間結構為 $R(0,t) = 0.08 - 0.025e^{-0.18t}$ 、利率波動結構型態分別為水平型、上升型、下降型、指數遞減型和駝峰型等不同狀況下，標準利率上限契約的價值。

由表 3-1 可知，無論利率波動性結構型態為何，標準利率上限契約的價值有下列的特徵：(1)隨著上限利率遞增，契約的價值遞減；(2)隨著契約重設次數愈多(即 T 愈大)，契約的價值愈大。第一項特徵是因為利率上限契約是利率買權契約，而執行價(即上限利率)愈高的買權愈沒價值。第二項特徵則是因為 T 愈大代表這個利率上限契約包含愈多個單一利率上限契約，當然其價值愈大。

另外，由表 3-1 可知，因為所有的利率波動性結構型態都是從 5%出發，因此可以比較不同型態的利率波動性結構對利率

表示，再以零息債券價格當標的資產來推導評價公式，而以零息債券價格當標的資產即是相當於以即期利率當標的資產來推導評價公式。

註 11: Hull-White 模型若是從瞬間短率的隨機過程出發，其利率波動性結構一般設為常數；但是，若是從瞬間遠期利率的隨機過程出發，則其利率波動性結構為指數遞減的特殊型態。因

此，Hull-White 模型的利率波動性結構對評價的影響，實證結果可由 HJM 模型裏看出，不再贅述。

上限契約價值的影響。例如：(1)上升型的利率波動性結構之利率上限契約價值都比水平型、下降型和指數遞減型者要高；再者，水平型的利率波動性結構之利率上限契約價值都比下降型和指數遞減型者要高；另外，下降型的利率波動性結構之利率上限契約價值都比指數遞減型者要高。這是因為波動性愈大的利率買權，其價值愈高，而在表 3-1 中，波動性大小排序為上升型波動性最大、然後依序為水平型、下降型和指數遞減型，故有這樣的實證結果。（註¹⁴）至於駝峰型的利率波動性結構之利率上限契約價值，在表 3-1 中是最高的，比上升型者還高；但是，觀諸附錄的試算表，駝峰型的利率波動幅度並不是都比上升型者高，可是利率上限契約的價值卻比上升型者高。要解釋這種現象必須借助圖 3-1 的結果，故先分析圖 3-1 的實證結果以後，再回頭探討為何駝峰型的利率波動性結構之利率上限契約價值是最高的。

（二）標準單一利率上限契約價值與契約到期期限的關係

本節探討 HJM 模型下、不同的利率波動結構型態，標準單一利率上限契約的到期期限(Time to Expiration)與權利金(Caplet Premium)的關係。如同上節的起始資料：利率期間結構仍為上升型

$R(0, t) = 0.08 - 0.025e^{-0.18t}$ 、上限利率 $K =$

5%、利率波動結構型態仍是那五種型態，且都是從 5%出發。實證結果繪於圖 3-1。由圖 3-1 可知，當利率波動結構為上升型態時，標準單一利率上限契約的權利金隨著契約的到期期限愈長而遞增；相對的，當利率波動結構為下降型和指數遞減型時，標準單一利率上限契約的權利金開始時隨著到期期限增加而升高，但隨後隨著到期期限的增加而降低，而且以指數遞減型者較先反轉、依序為下降型；至於利率波動結構為水平型時，標準單一利率上限契約的權利金開始時亦隨著到期期限增加而升高，但隨後權利金並未隨到期期限的增加而升高或降低得很明顯。

解釋圖 3-1 的實證結果可由兩個層面：一為時間價值、另一為利率波動度。從時間價值的層面來看，因為標準單一利率上限契約為一利率買權，故契約到期期限愈長，時間價值愈大，權利金也就愈高。從利率波動度的層面來看，上升型的波動結構，因為隨著到期期限愈長，波動度愈大，權利金也就愈高，故兩個層面的因素都促使權利金隨著契約的到期期限愈長而遞增；反觀，下降型和指數遞減型的波動結構，因為隨著到期期限愈長，波動度不是線性式的變小、就是指數式的變小，故標準單一利率上限契約的權利金開始時隨著到期期限增加而升高，這是因為時間價值的因素讓權利金隨著到期期限增加而升高、但是利率波動度線性式變小或指數式變小的因素尚弱，所以尚不會讓權利金與契約的到期期限呈反向走勢，這種反向的走勢會出現在當利率波動度線性式變小或指數式變小的因素強過時間價值的因素時，例如：指數遞減型的波動結構其波動度是指數式的變小，故這種反向的走勢(即權利金隨著到期期限的增加而降低)最先出現，依序為下降型。有了上升型、下降

註¹⁴：欲驗證波動性的大小排序，可以變動 T-t，然後計算各種類型的波動結構之波動幅度即可發現：表 3-1 的波動性大小排序依次為上升型、水平型、下降型、指數遞減型；但是，駝峰型之波動幅度最先幾期是比上升型者高、但是後面幾期則比上升型者低(但仍比其它類型者高)。(詳見附錄一的各類型波動結構之波動幅度試算表)

型和指數遞減型的波動結構於圖 3-1 的實證結果之解釋原因，即不難了解為何水平型的波動結構，其標準單一利率上限契約的權利金開始時亦隨著到期期限增加而升高，但隨後權利金並未隨到期期限的增加而升高或降低得很明顯。

至於駝峰型的波動結構，其標準單一利率上限契約的權利金與到期期限的關係較無一定的型態，主要取決於波動結構的參數，例如：駝峰出現在哪裡？上升到駝峰的速度為何？從駝峰下降的速度又如何等。以圖 3-1 駝峰型的波動結構的實證結果，因為給定的波動結構為 $\sigma(t, T) = (0.05 + 0.04(T - t))e^{-0.3(T-t)}$ ，故其標準單一利率上限契約的權利金與到期期限的關係為：權利金開始時隨著到期期限增加而升高、且升高的幅度比上升型者還大，但隨後隨著到期期限的增加而降低、且降低的幅度比下降型和指數遞減型者大。呈現這種現象，其實都是時間價值與利率波動度兩個因素交相作用的影響。

根據圖 3-1 的實證結果可以解釋為何表 3-1 的數值分析中，駝峰型的利率波動性結構之利率上限契約價值是最高的，甚至比上升型者還高。觀諸附錄一的試算表可知，駝峰型的利率波動幅度在 $T-t = 2.5$ 年以內的利率上限契約的價值比上升型者高並不足為奇；反而比較奇怪的是，到期期限在 2.5 年以上的利率上限契約的價值也都比上升型者高，但是駝峰型的利率波動幅度在 $T-t = 2.5$ 以後都比上升型者低。要解釋這個『似乎不一致』的現象，必須看圖 3-1，以便得到一個比較清楚的概念。圖 3-1 中的駝峰型與上升型的利率波動性結構設定和表 3-1 者都一樣。由圖 3-1 可看出，駝峰型的利率波動性結構其到期期限在 4 年以下的單一利率上限契約的價值都

要比上升型者高，只有到期期限在 4 年以上的單一利率上限契約的價值上升型者才比駝峰型者高。因此，要解釋駝峰型的到期期限在 2.5 年以上的利率上限契約的價值都比上升型者高，可歸諸於(1)到期期限在 4 年以下的單一利率上限契約的價值，駝峰型者都比上升型者高，故駝峰型的到期期限在 4 年以下的利率上限契約的價值要比上升型者高；(2)駝峰型的到期期限為 5 年的利率上限契約的價值，是由到期期限在 5 年以下的單一利率上限契約的價值總合起來，而到期期限在 4 年以下的單一利率上限契約的價值總合駝峰型者高於上升型者，但是到期期限在 4 年以上、5 年以下的單一利率上限契約的價值總合上升型者要高於駝峰型者，可是由於到期期限在 4 年以下的單一利率上限契約的價值總合大於到期期限在 4 年以上、5 年以下的單一利率上限契約的價值總合，故造成駝峰型的到期期限為 5 年的利率上限契約的價值高於上升型者。

二、Brace-Gatarek-Musiela 模型

在 BGM 模型下評價標準利率上限契約，應用的 LIBOR 利率隨機過程為(33)式。由(33)式可知，以純粹折價債券價格 $P(t, T_{k+1})$ 平準，在遠期機率測度 $F_{T_{k+1}}$ 下，LIBOR 利率 $L(t, T_k)$ 為一平賭過程(martingale)。現在令 $\xi(t)$ 為最接近時點 t 的利率重設日之指標，即 $\xi(t) = \inf \{k \geq 0 : T_k \geq t\}$ ，當以純粹折價債券價格 $P(t, T_{\xi(t)})$ 平準時，則 LIBOR 利率 $L(t, T_k)$ 在遠期機率測度 F_{ξ} 下的隨機過程可改寫為：

$$\frac{dL(t, T_k)}{L(t, T_k)} = \zeta_k(t) [\sigma(t, T_{k+1}) - \sigma(t, T_{\xi(t)})] dt + \zeta_k(t) dW_{\xi}(t) \quad (38)$$

其中 $W_{\xi}(t)$ 為遠期機率測度 F_{ξ} 下的 Wiener 隨機過程， $\sigma(t, T_{k+1})$ 與 $\sigma(t, T_{\xi(t)})$ 分別表示純粹折價債券價格 $P(t, T_{k+1})$ 與 $P(t, T_{\xi(t)})$ 的波動度。

由(27)式可知純粹折價債券價格波動度和 LIBOR 利率波動度的關係為：

$$\sigma(t, T_{k+1}) - \sigma(t, T_k) = \frac{\delta L(t, T_k)}{1 + \delta L(t, T_k)} \zeta(t, T_k) \quad (39)$$

將(39)式代入(38)式，可將 $L(t, T_k)$ 的隨機過程改寫為：

$$\frac{dL(t, T_k)}{L(t, T_k)} = \sum_{j=\xi(t)}^k \frac{\delta L(t, T_j) \zeta(t, T_j)}{1 + \delta L(t, T_j)} \zeta(t, T_k) dt + \zeta(t, T_k) dW_{\xi(t)} \quad (40)$$

為了應用 BGM 模型的(40)式，本文採用 Hull and White (2000) 的做法：假設 $\zeta(t, T_k)$ 與該 LIBOR 利率到期前的利率重設期數有關，若令 Λ_k 表示第 k 期時利率重設的 LIBOR 利率波動度的值，則 $\zeta(t, T_k) = \Lambda_{k-\xi(t)}$ ；再令 ω_l 表示經由 Black 公式所推算、對應於標的利率存續期間為 $[T_l, T_{l+1}]$ 的標準單一利率上限契約的即期波動度(spot volatility)，則 Λ_k 可由下式推算得知：

$$\omega_l^2 T_l = \sum_{k=1}^l \Lambda_{l-k}^2 \delta_{k-1} \quad (41)$$

將(41)式代入(40)式，並且假設 $\ln L(t, T_k)$ 的漂移項(drift term)在時間區間 $[T_k, T_{k+1}]$ 維持固定，則可得到 LIBOR 利率的近似公式：

$$L(T_{j+1}, T_l) = L(T_j, T_l) \exp \left[\delta \sum_{k=j+1}^l \left(\frac{\delta L(T_j, T_k) \Lambda_{k-j-1} \Lambda_{l-j-1}}{1 + \delta L(T_j, T_k)} - \frac{\Lambda_{l-j-1}^2}{2} \right) \right] \quad (42)$$

其中， $\tilde{n}$ 為標準常態分配的隨機樣本。

(42)式即是 Hull and White (2000) 實際應用 BGM 模型時所推得之 LIBOR 利率的解。實務上應用此一近似公式，一般是先用市場交易的資料來校準(Calibration)出(42)式的參數，然後再利用 Monte Carlo 模擬的方式模擬出 LIBOR 利率的隨機過程，然後根據這個模擬出的 LIBOR 利率隨機過程進行各類利率商品的評價。

(一) 標準利率上限契約的評價實證分析

在 BGM 模型下評價標準利率上限契約，其評價公式是(37)式。表 3-2 報告在利率期間結構為 $R(0, t) = 0.08 - 0.025e^{-0.18t}$ 、利率波動結構型態分別為水平型、上升型、下降型、指數遞減型和駝峰型等不同狀況下(註 15)，標準利率上限契約的價值。表 3-2 係根據(42)式，在給定假設的市場資料下，利用 Monte Carlo 模擬方式進行 300,000 次模擬，得到不同到期期限和執行價下的標準利率上限契約的價值，結果如表 3-2 所示。

由表 3-2 可知，無論利率波動性結構型態為何，標準利率上限契約的價值有下列的特徵：(1)隨著上限利率遞增，契約的價值遞減；(2)隨著契約重設次數愈多(即 T 愈大)，契約的價值愈大。這些特徵的原因與表 3-1 者相同，這表示這些特徵係利率上限契約的結構性特徵，與應用 HW

註 15：此處的利率波動結構型態與表 3-1、圖 3-1 者相同，仍為五種型態、但波動函數則不同。此處的波動結構是指 LIBOR 利率的波動結構，而表 3-1、圖 3-1 的波動結構是指瞬間遠期利率的波動結構，兩者是不相同的，故波動函數不同。

模型、HJM 模型或 BGM 模型無關。再者值得注意的是：表 3-1 與表 3-2 的特徵與成因雖相同，但是各個標準利率上限契約的價值並不同，這主要是因為應用不同的利率模型、以及給定的利率波動性結構的函數不同所導致。由這些實證的證據顯示，選擇不同的利率模型與給定不同的利率波動性結構函數會導致不同的標準利率上限契約的價值，這衍生出一個重要的問題：到底應該運用哪一個利率模型？以及應該給定什麼利率波動性結構函數？才能正確的評價利率上限契約的價值？針對這個問題，本文建議應該選擇與市場交易資料愈貼近的模型愈好，因此 BGM 模型在理論上要比 HW 模型及 HJM 模型好，這是因為：(1)實務應用時，一般利率模型輸入的殖利率曲線資料，是由利率交換市場的交換利率所校準得到，而利率交換市場最大的契約即是以 LIBOR 為指標利率的契約，又 BGM 模型即是以 LIBOR 利率隨機過程為基礎的模型，故 BGM 模型貼近市場交易資料的優勢是 HW 模型及 HJM 模型無可匹敵的。(2)從利率模型是否可以適用於各種型態的利率波動性結構來看，BGM 模型及 HJM 模型都要比 HW 模型更有彈性；再者，由於 HJM 模型的利率波動性結構是瞬間遠期利率波動性結構，而瞬間遠期利率是市場上觀察不到的資料，反觀 BGM 模型的利率波動性結構是 LIBOR 利率(或是遠期利率)的波動性結構，而 LIBOR 利率是市場上觀察得到的資料，故在校準利率波動性結構的函數時，BGM 模型是要較 HJM 模型更貼近市場交易資料，更具實務的應用性。

另外，由表 3-2 可知，因為所有的利率波動性結構型態都是從 16.5%出發，因此可以比較不同型態的利率波動性結構對利率上限契約價值的影響。例如：(1)

上升型的利率波動性結構之利率上限契約價值都比水平型、下降型和指數遞減型者要高；再者，水平型的利率波動性結構之利率上限契約價值都比下降型和指數遞減型者要高；另外，指數遞減型的利率波動性結構之利率上限契約價值都比下降型者要高。這是因為波動性愈大的利率買權，其價值愈高，而在表 3-2 中，波動性大小排序為上升型波動性最大、然後依序為水平型、指數遞減型和下降型(詳見附錄波動幅度試算表)，故有這樣的實證結果。至於駝峰型的利率波動性結構之利率上限契約價值，在表 3-2 中顯示 $T = 2$ 以下的利率上限契約價值駝峰型者大於上升型者，但是 $T = 2$ 以上的利率上限契約價值駝峰型者小於上升型者，要解釋這種實證現象需先檢視圖 3-2 的實證結果。

(二) 標準單一利率上限契約價值與契約到期期限的關係

本節探討 BGM 模型下、不同的利率波動結構型態，標準單一利率上限契約的到期期限(Time to Expiration)與權利金(Caplet Premium)的關係。如同上一小節的起始資料：利率期間結構仍為上升型 $R(0, t) = 0.08 - 0.025e^{-0.18t}$ 、上限利率 $K = 5\%$ 、利率波動結構型態仍是那五種型態，且都是從 16.5%出發。實證結果繪於圖 3-2。

由圖 3-2 可知，在 BGM 模型下、不同的利率波動結構型態，標準單一利率上限契約價值與契約到期期限的關係大致相似，即契約到期期限在某段時間內，契約期限越長，其權利金價值越高；之後，契

約到期期限越長，權利金價值卻隨著到期期限的增加而遞減。這種實證結果和圖 3-1 的駝峰型、下降型、指數遞減型之利率波動結構的實證結果類似，但迥然不同於圖 3-1 的上升型與水平型之利率波動結構的實證結果，這又再一次的指出 BGM 模型與 HJM 模型在評價標準單一利率上限契約的差異。另外，圖 3-2 實證結果的原因其實與圖 3-1 的原因一樣；亦即，影響標準單一利率上限契約價值的原因，除了契約到期期限外，還有利率波動度。圖 3-2 實證結果的原因其實是：標準單一利率上限契約的權利金開始時隨著到期期限增加而升高，這是因為時間價值的因素讓權利金隨著到期期限增加而升高、但是利率波動度因素在此階段尚弱，所以尚不會讓權利金與契約的到期期限呈反向走勢，這種反向的走勢會出現在當利率波動度線因素強過時間價值的因素時，此時契約到期期限越長，權利金價值卻隨著到期期限的增加而遞減。

有了圖 3-2 的實證結果，接著可以回頭探討表 3-2 駝峰型波動性結構的利率上限契約價值。由圖 3-2 的實證結果以及附錄的試算表可以看出， $T = 2$ 以下的利率上限契約價值駝峰型者大於上升型者，這主要是因為駝峰型的波動幅度大於上升型者；但是， $T = 2$ 以上的利率上限契約價值駝峰型者小於上升型者，主要是因為駝峰型的波動幅度沒有那麼大於上升型者、而且由圖 3-2 可看出 $T > 2$ 以後上升型的標準單一利率上限契約權利金都高於駝峰型者，故有此實證結果。

三、計劃成果自評

本文推導不同利率模型下、不同標的資產的標準利率上限契約的評價封閉解。總計

本文推導在 HJM 模型下、以短率為標的資產的標準利率上限契約的評價封閉解；再者，分別推導在 HW 模型與 HJM 模型下、以即期利率為標的資產的評價封閉解；最後，在 BGM 模型下、推導以 LIBOR 利率為標的資產的評價封閉解。根據推導所得的評價封閉解，本文應用實例驗證各種評價公式的差異。發現無論利率波動性結構型態為何，標準利率上限契約的價值：(1) 隨著上限利率遞增，契約的價值遞減；(2) 隨著契約重設次數愈多，契約的價值愈大。

利率波動性結構的型態對於標準利率上限契約價值的影響，不論何種利率模型，只要確定哪一種型態的利率波動性較大，則利率上限契約的價值較高；例如，上升型、水平型、下降型和指數遞減型的波動性結構較容易確定哪一種型態的利率波動性較大，故這些波動性結構對應的利率上限契約的價值較容易判斷大小。至於駝峰型的波動性結構，由於其波動函數的參數會影響波動性的升降幅度與速度，故波動性的大小不一致，所以對應的利率上限契約的價值並無法一致性的判斷大小。尤有甚者，既存文獻(例如：Ritchken and Chuang (2001))指出，實務上最常見的利率波動性結構卻是駝峰型結構，這顯示實務上要評價利率上限契約，非得準確的校準估計駝峰型的波動函數不可，否則無法判斷利率上限契約的價值是高估或是低估。

標準單一利率上限契約價值與契約到期期限之關係，大體上呈現契約到期期限在某段時間內，契約期限越長，其權利金價值越高，這主要是時間價值因素造成；之後若是利率波動度因素蓋過時間價值因素，則契約到期期限越長，權利金價值卻隨著到期期限的增加而遞減。

最後值得一提的是：選擇不同的利率模型與給定不同的利率波動性結

構函數，會導致不同的標準利率上限契約的價值。這衍生出到底應該運用哪一個利率模型？以及應該給定什麼利率波動性結構函數？才能正確的評價利率上限契約的價值？針對這個問題，本文建議應該選擇與市場交易資料愈貼近的模型愈好，因此 BGM 模型在理論上要比 HW 模型及 HJM 模型好，而 HJM 模型又比 HW 模型更具彈性。

參考文獻

1. Black, F. (1976) "The Pricing of Commodity Contracts," *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, 167-179.
2. Brace, A., D. Gatarek and M. Musiela (1997), "The Market Model of Interest Rate Dynamics," *Mathematical Finance*, Vol. 7, No. 2, 127-155.
3. Clewlow, L. and C. Strickland (1997), *Exotic Options : The State of the Art*, International Thomson Business Press.
4. Cox, J. C., J. E. Ingersoll and S. A. Ross (1985), "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, Vol. 3, 385-467.
5. Heath, D., R. Jarrow and A. Morton (1992), "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A New Methodology for Contingent Claims Valuation," *Econometrica*, Vol. 60, 77-105.
6. Hull, J. (2000), *Options, Futures, and Other Derivative Securities*, 4th edition, Prentice-Hall, Inc.
7. Hull, J. and A. White (1990), "Pricing Interest-rate-derivative Securities," *Review of Financial Studies*, Vol. 3, No. 4, 573-592.
8. Hull, J. and A. White (2000), "Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities, and the Implementation of the LIBOR Market Model," *Journal of Fixed Income*, Vol. 10, Iss. 2, 46-62.
9. Jamshidian, F., (1989), "An Exact Bond Option Formula," *Journal of Finance*, Vol. 44, 205-209.
10. Longstaff, F. A. (1995), "Hedging Interest Rate Risk with Options on Average Interest Rates," *Journal of Fixed Income*, Vol. 4, Iss. 4, 37-45.
11. Pedersen, M. B. (1998), "Calibration LIBOR Market Models," Working paper, SimCorp Financial Research.
12. Ritchken, P. H. and I. Chuang (2000), "Interest Rate Option Pricing with Volatility Humps," *Review of Derivatives Research*, Vol. 3, Iss. 3, 231-268.
13. Sidenius, J. (2000), "LIBOR Market Models in Practice," *Journal of Computational Finance*, Vol. 3, No. 3, 5-26.
14. Vasicek, T. (1977), "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, 179-193.

表 2-1 不同模型、不同標的資產的標準利率上限契約評價封閉解之特徵

利率模型	Hull-White Model		BGM Model	HJM Model	
	(符合市場利率期間結構，但假設瞬間短率的波動結構為常數)		(符合市場利率期間結構，且 LIBOR 利率波動結構可為任意型態)	(符合市場利率期間結構，且瞬間遠期利率波動結構可為任意型態)	
標的利率	瞬間短率	即期利率	LIBOR 利率	瞬間短率	即期利率
	(理論值；無法由市場觀察得到，須以市場短天期即期利率替代；Longstaff (1995) 的評價封閉解即是此類，故本文並未再推導)	(將 LIBOR 利率轉換成純粹折價債券價格表示，以瞬間短率之隨機過程推導評價封閉解)	(直接由 BGM 模型之 LIBOR 利率隨機過程推導評價封閉解)	(理論值；無法由市場觀察得到，須以市場短天期即期利率替代；Longstaff (1995) 的結果是本文的特例)	(將 LIBOR 利率轉換成純粹折價債券價格表示，以瞬間遠期利率之隨機過程推導評價封閉解)

表 2-2 HJM 模型下、以瞬間短率為標的之標準單一利率上限契約評價公式

利率模型	基本隨機過程與標準單一利率上限契約評價公式
HJM Model	$df(t, T) = -\sigma(t, T)b(t, T)dt + \sigma(t, T)dW^Q(t)$ (1)
	$r_t = f(0, t) + \int_0^t \sigma(u, t)[b(u, T) - b(u, t)]du + \int_0^t \sigma(u, t)dW^F(u)$ (5)
	$C(t) = \delta P(t, T) \left\{ \frac{V}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(M-K)^2}{2V^2}\right) + (M-K)\Phi\left(\frac{M-K}{V}\right) \right\}$ (11)
	其中， $M = f(0, T)$ ， $V = \int_0^T \sigma^2(u, T)du$ 。

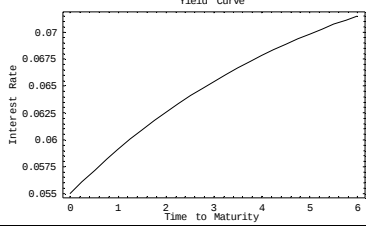
表 2-3 不同模型下、以即期利率為標的之標準單一利率上限契約評價公式

利率模型	基本隨機過程與標準單一利率上限契約評價公式
HW Model	$dr_t = (\alpha(t) - br)dt + \sigma dW^Q(t)$ (14)
	$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r(t)dt - \sigma B(t,T)dW^Q(t)$ (19)
	$C_k(t) = P(t, T_{k+1}) \left[e^{M_k + \frac{1}{2}V_k^2} \Phi(d_1) - (1 + \delta K)\Phi(d_2) \right]$ (23)
	其中 $M = e^{M_k + \frac{1}{2}V_k^2}$, $d_1 = \frac{\ln \frac{M}{1 + \delta K} + \frac{1}{2}V_k^2}{V_k}$, $d_2 = d_1 - V_k$
HJM Model	$df(t,T) = -\sigma(t,T)b(t,T)dt + \sigma(t,T)dW^Q(t)$ (1)
	$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r(t)dt + b(t,T)dW^Q(t)$ (24)
	$C_k(t) = P(t, T_{k+1}) [M\Phi(d_1) - (1 + \delta K)\Phi(d_2)]$ (27)
	其中其中 $M = \frac{P(0, T_k)}{P(0, T_{k+1})} e^{-\pi_{T_k} + \frac{1}{2}\chi_{T_k}^2}$, $d_1 = \frac{\ln \frac{M}{1 + \delta K} + \frac{1}{2}\chi_{T_k}^2}{\chi_{T_k}}$, $d_2 = d_1 - \chi_{T_k}$, $\pi_{T_k} = \frac{1}{2} \int_0^{T_k} \gamma^2(u, T_{k+1}, T_k) du$, $\chi_{T_k}^2 = \int_0^{T_k} \gamma^2(u, T_{k+1}, T_k) du$, $\gamma(u, k, l) = b(u, k) - b(u, l)$ 。

表 2-4 BGM 模型下、以 LIBOR 利率為標的之標準單一利率上限契約評價公式

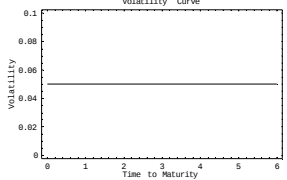
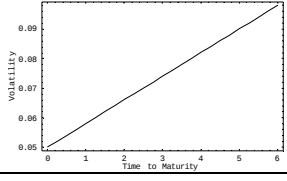
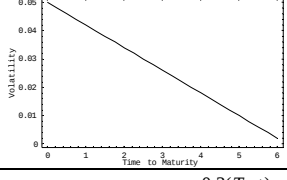
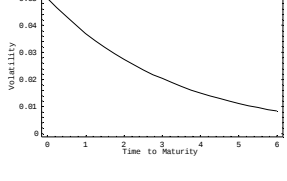
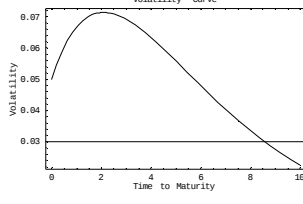
利率模型	基本隨機過程與標準單一利率上限契約評價公式
BGM Model	$d\hat{f}(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\hat{f}(t, x) + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2(t, x) \right) dt + \hat{\sigma}(t, x) dW^Q(t) \right] \quad (28)$
	$d\hat{L}(t, x) = \hat{L}(t, x) \cdot \hat{\gamma}(t, x) (\hat{\sigma}(t, x + \delta) dt + dW^Q(t)) \quad (31)$
	$dW^F(t) = dW^Q(t) + \hat{\sigma}(t, x + \delta) dt \quad (32)$
	$dL(t, T) = L(t, T) \zeta(t, T) dW^F(t) \quad (33)$
	其中 $\sigma(t, T) = \hat{\sigma}(t, x)$, $L(t, T) = \hat{L}(t, x)$, $\zeta(t, T) = \hat{\gamma}(t, x)$。
	$C_k(t) = \delta \cdot P(t, T_{k+1}) [L(t, T_k) \Phi(d_1(t)) - K \Phi(d_2(t))] \quad (37)$
	其中 , $\theta_k^2(t) = \int_t^{T_k} \zeta_k^2(u) du$, $d_1(t) = \frac{\ln \frac{L(t, T_k)}{K} + \frac{1}{2} \theta_k^2(t)}{\theta_k(t)}$, $d_2(t) = d_1(t) - \theta_k(t)$。

表 3-1 HJM 模型下標準利率上限契約的價值

	標準利率上限契約
模型 設定	$df(t, T) = -\sigma(t, T) \cdot b(t, T)dt + \sigma(t, T)dW^Q(t)$ $b(t, T) = -\int_t^T \sigma(t, u)du$
契約 規格	在契約期間內，以市場上三個月期之即期利率為標的資產，每三個月重設利率一次（註 ¹² ）。
殖利 率曲 線的 市場 資料	利率期間結構 $R(0, t) = 0.08 - 0.025e^{-0.18t}$  The graph is titled 'Yield Curve'. The vertical axis is labeled 'Interest Rate' and ranges from 0.055 to 0.07 in increments of 0.0025. The horizontal axis is labeled 'Time to Maturity' and ranges from 0 to 6 in increments of 1. A smooth, upward-sloping curve starts at (0, 0.055) and ends at (6, 0.07).

註¹²：本文僅報告標的資產為即期利率的標準利率上限契約之評價實證結果，不報告標的資產為瞬間短率的實證結果，主要是為節省篇幅、以及後者僅是理論結果並不具實用性；然而，若是讀者有興趣這部分的實證結果，可洽作者函索。

表 3-1 HJM 模型下標準利率上限契約的價值(續)

利率波動結構		契約價值				
水平型	$\sigma(t,T)=0.05$ 	K=0.05	K=0.055	K=0.06	K=0.065	K=0.07
	T=1	1.4253	1.2135	1.0230	0.8540	0.7061
	T=2	4.3878	3.9887	3.4661	3.0603	2.6910
	T=3	8.0375	7.3976	6.6248	5.9897	5.4018
	T=4	12.0716	11.1688	10.2013	9.3497	8.5537
	T=5	16.2975	15.1195	14.0087	12.9565	11.9588
上升型	$\sigma(t,T)=0.05+0.008(T-t)$ 	K=0.05	K=0.055	K=0.06	K=0.065	K=0.07
	T=1	1.4864	1.2765	1.0867	0.9173	0.7680
	T=2	4.7246	4.2524	3.8139	3.4088	3.0384
	T=3	8.9237	8.2383	7.5353	6.9552	6.3177
	T=4	13.8868	12.8677	11.9775	11.1366	10.3447
	T=5	19.1865	18.0427	16.9528	15.9170	14.9353
下降型	$\sigma(t,T)=0.05-0.008(T-t)$ 	K=0.05	K=0.055	K=0.06	K=0.065	K=0.07
	T=1	1.3652	1.1513	0.9600	0.7914	0.6452
	T=2	4.0640	3.5766	3.1290	2.7216	2.3542
	T=3	7.2056	6.4570	5.7612	5.1190	4.5308
	T=4	10.4840	9.4878	8.5556	7.6883	6.8859
	T=5	13.7249	12.4956	11.3492	10.2896	9.2540
指數遞減型(註13)	$\sigma(t,T)=0.05e^{-0.3(T-t)}$ 	K=0.05	K=0.055	K=0.06	K=0.065	K=0.07
	T=1	1.3213	1.1088	0.9137	0.7455	0.6006
	T=2	3.8649	3.3711	2.9196	2.5112	2.1453
	T=3	6.7768	6.0150	5.3103	4.6635	4.0747
	T=4	9.7983	8.7812	7.8338	6.9572	6.1516
	T=5	12.7911	11.5331	10.3558	9.2609	8.2455
駝峰型	$\sigma(t,T)=(0.05+0.04(T-t))e^{-0.3(T-t)}$ 	K=0.05	K=0.055	K=0.06	K=0.065	K=0.07
	T=1	1.5831	1.3758	1.1871	1.0171	0.8666
	T=2	5.1145	4.6491	4.2144	3.8106	3.4374
	T=3	9.6246	8.9193	8.2526	7.6250	7.0300
	T=4	14.6466	13.7218	12.8389	12.0011	11.2083
	T=5	19.8656	18.7321	17.6455	16.6152	15.6319
		註：T 為契約期限、K 為執行價格、權利金單位為%				

註13：在 HJM 模型架構下，若假設利率波動結構為指數遞減型，則所得到的結果與 Hull-White 模型之結果一致。

圖 3-1 標準單一利率上限契約權利金與契約到期期限之關係

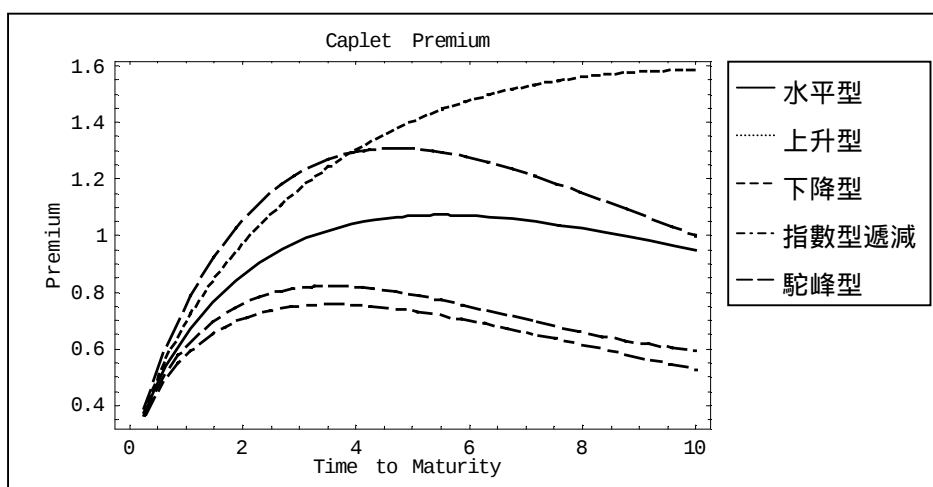
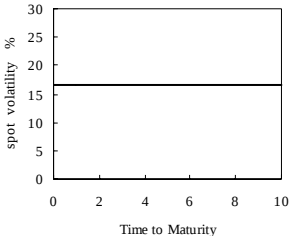
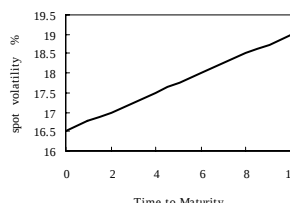
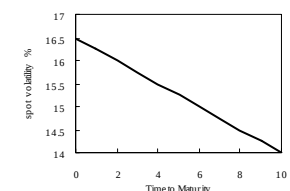
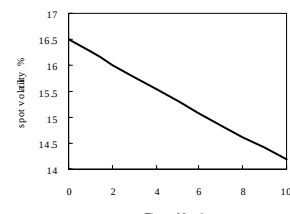


表 3-2 BGM 模型架構下標準利率上限契約的價值

	標準利率上限契約
模型設定	$dL(t, T) = L(t, T)\zeta(t, T)dW^F(t)$
契約規格	在契約期間內，以市場上半年期之 LIBOR 利率為標的資產，每半年重設利率一次。
殖利率曲線的市場資料	利率期間結構 $R(0, t) = 0.08 - 0.025e^{-0.18t}$

表 3-2 BGM 模型架構下標準利率上限契約的價值(續)

契約隱含波動結構		契約價值																																								
水平型	$\omega(t,T)=16.5\%$ Volatility Curve 	<table><tr><th></th><th>K=0.05</th><th>K=0.055</th><th>K=0.06</th><th>K=0.065</th><th>K=0.07</th></tr><tr><td>T=1</td><td>1.2913</td><td>0.8724</td><td>0.5302</td><td>0.2911</td><td>0.1458</td></tr><tr><td>T=2</td><td>3.0527</td><td>2.2488</td><td>1.5675</td><td>1.0440</td><td>0.6705</td></tr><tr><td>T=3</td><td>5.0812</td><td>3.9232</td><td>2.9233</td><td>2.1191</td><td>1.5060</td></tr><tr><td>T=4</td><td>7.2344</td><td>5.7534</td><td>4.4599</td><td>3.3923</td><td>2.5483</td></tr><tr><td>T=5</td><td>9.4146</td><td>7.6411</td><td>6.0786</td><td>4.7691</td><td>3.7104</td></tr></table>						K=0.05	K=0.055	K=0.06	K=0.065	K=0.07	T=1	1.2913	0.8724	0.5302	0.2911	0.1458	T=2	3.0527	2.2488	1.5675	1.0440	0.6705	T=3	5.0812	3.9232	2.9233	2.1191	1.5060	T=4	7.2344	5.7534	4.4599	3.3923	2.5483	T=5	9.4146	7.6411	6.0786	4.7691	3.7104
		K=0.05	K=0.055	K=0.06	K=0.065	K=0.07																																				
T=1	1.2913	0.8724	0.5302	0.2911	0.1458																																					
T=2	3.0527	2.2488	1.5675	1.0440	0.6705																																					
T=3	5.0812	3.9232	2.9233	2.1191	1.5060																																					
T=4	7.2344	5.7534	4.4599	3.3923	2.5483																																					
T=5	9.4146	7.6411	6.0786	4.7691	3.7104																																					
上升型	$\omega(t,T)=16.5+0.25(T-t)\%$ Volatility Curve 	<table><tr><th></th><th>K=0.05</th><th>K=0.055</th><th>K=0.06</th><th>K=0.065</th><th>K=0.07</th></tr><tr><td>T=1</td><td>1.2933</td><td>0.8769</td><td>0.5373</td><td>0.2983</td><td>0.1536</td></tr><tr><td>T=2</td><td>3.0631</td><td>2.2670</td><td>1.5953</td><td>1.0756</td><td>0.7084</td></tr><tr><td>T=3</td><td>5.1095</td><td>3.9687</td><td>2.9883</td><td>2.1956</td><td>1.5964</td></tr><tr><td>T=4</td><td>7.2914</td><td>5.8400</td><td>4.5799</td><td>3.5349</td><td>2.7125</td></tr><tr><td>T=5</td><td>9.5130</td><td>7.7842</td><td>6.2720</td><td>4.9991</td><td>3.9703</td></tr></table>						K=0.05	K=0.055	K=0.06	K=0.065	K=0.07	T=1	1.2933	0.8769	0.5373	0.2983	0.1536	T=2	3.0631	2.2670	1.5953	1.0756	0.7084	T=3	5.1095	3.9687	2.9883	2.1956	1.5964	T=4	7.2914	5.8400	4.5799	3.5349	2.7125	T=5	9.5130	7.7842	6.2720	4.9991	3.9703
		K=0.05	K=0.055	K=0.06	K=0.065	K=0.07																																				
T=1	1.2933	0.8769	0.5373	0.2983	0.1536																																					
T=2	3.0631	2.2670	1.5953	1.0756	0.7084																																					
T=3	5.1095	3.9687	2.9883	2.1956	1.5964																																					
T=4	7.2914	5.8400	4.5799	3.5349	2.7125																																					
T=5	9.5130	7.7842	6.2720	4.9991	3.9703																																					
下降型	$\omega(t,T)=16.5-0.25(T-t)\%$ Volatility Curve 	<table><tr><th></th><th>K=0.05</th><th>K=0.055</th><th>K=0.06</th><th>K=0.065</th><th>K=0.07</th></tr><tr><td>T=1</td><td>1.2898</td><td>0.8684</td><td>0.5236</td><td>0.2820</td><td>0.1394</td></tr><tr><td>T=2</td><td>3.0445</td><td>2.2324</td><td>1.5415</td><td>1.0096</td><td>0.6377</td></tr><tr><td>T=3</td><td>5.0592</td><td>3.8844</td><td>2.8638</td><td>2.0419</td><td>1.4243</td></tr><tr><td>T=4</td><td>7.1893</td><td>5.6801</td><td>4.3510</td><td>3.2519</td><td>2.3938</td></tr><tr><td>T=5</td><td>9.3365</td><td>7.5202</td><td>5.9052</td><td>4.5467</td><td>3.4591</td></tr></table>						K=0.05	K=0.055	K=0.06	K=0.065	K=0.07	T=1	1.2898	0.8684	0.5236	0.2820	0.1394	T=2	3.0445	2.2324	1.5415	1.0096	0.6377	T=3	5.0592	3.8844	2.8638	2.0419	1.4243	T=4	7.1893	5.6801	4.3510	3.2519	2.3938	T=5	9.3365	7.5202	5.9052	4.5467	3.4591
		K=0.05	K=0.055	K=0.06	K=0.065	K=0.07																																				
T=1	1.2898	0.8684	0.5236	0.2820	0.1394																																					
T=2	3.0445	2.2324	1.5415	1.0096	0.6377																																					
T=3	5.0592	3.8844	2.8638	2.0419	1.4243																																					
T=4	7.1893	5.6801	4.3510	3.2519	2.3938																																					
T=5	9.3365	7.5202	5.9052	4.5467	3.4591																																					
指數型遞減	$\omega(t,T)=16.5e^{-0.015(T-t)}\%$ Volatility Curve 	<table><tr><th></th><th>K=0.05</th><th>K=0.055</th><th>K=0.06</th><th>K=0.065</th><th>K=0.07</th></tr><tr><td>T=1</td><td>1.2900</td><td>0.8689</td><td>0.5235</td><td>0.2825</td><td>0.1398</td></tr><tr><td>T=2</td><td>3.0449</td><td>2.2333</td><td>1.5414</td><td>1.0107</td><td>0.6394</td></tr><tr><td>T=3</td><td>5.0599</td><td>3.8863</td><td>2.8651</td><td>2.0449</td><td>1.4297</td></tr><tr><td>T=4</td><td>7.1925</td><td>5.6844</td><td>4.3552</td><td>3.2585</td><td>2.4037</td></tr><tr><td>T=5</td><td>9.3428</td><td>7.5274</td><td>5.9137</td><td>4.5600</td><td>3.4768</td></tr></table>						K=0.05	K=0.055	K=0.06	K=0.065	K=0.07	T=1	1.2900	0.8689	0.5235	0.2825	0.1398	T=2	3.0449	2.2333	1.5414	1.0107	0.6394	T=3	5.0599	3.8863	2.8651	2.0449	1.4297	T=4	7.1925	5.6844	4.3552	3.2585	2.4037	T=5	9.3428	7.5274	5.9137	4.5600	3.4768
		K=0.05	K=0.055	K=0.06	K=0.065	K=0.07																																				
T=1	1.2900	0.8689	0.5235	0.2825	0.1398																																					
T=2	3.0449	2.2333	1.5414	1.0107	0.6394																																					
T=3	5.0599	3.8863	2.8651	2.0449	1.4297																																					
T=4	7.1925	5.6844	4.3552	3.2585	2.4037																																					
T=5	9.3428	7.5274	5.9137	4.5600	3.4768																																					

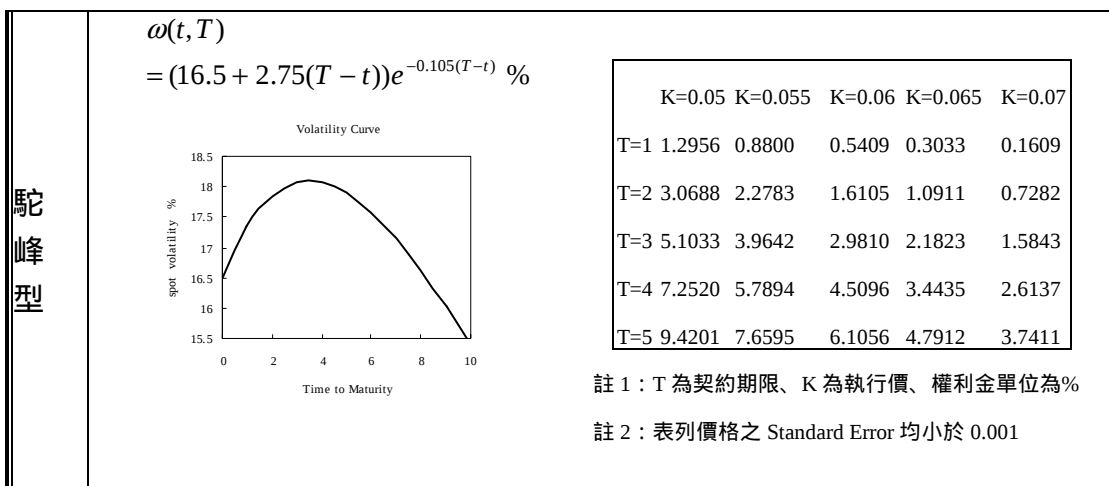
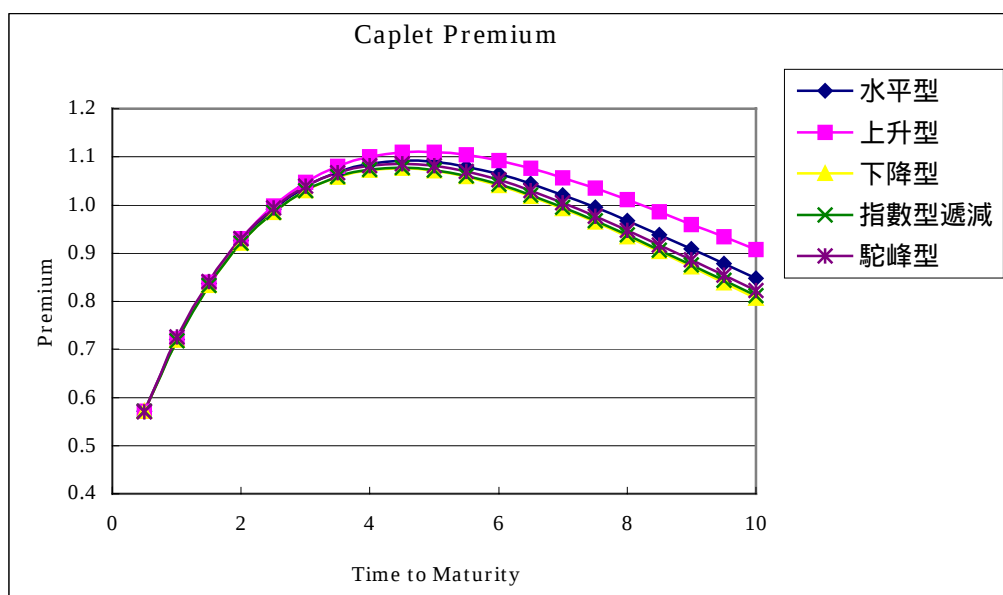


圖 3-2 標準單一利率上限契約權利金與契約到期期限之關係



附錄一

表 3-1、3-2 各類型利率波動性結構之波動幅度試算表

表3-1波動幅度之試算						表3-2波動幅度之試算				
T-t	水平型	上升型	下降型	指數遞減	駝峰型	水平型	上升型	下降型	指數遞減	駝峰型
0.00	0.0500	0.0500	0.0500	0.0500	0.0500	0.1650	0.1650	0.1650	0.1650	0.1650
0.25	0.0500	0.0520	0.0480	0.0464	0.0557	0.1650	0.1656	0.1644	0.1644	0.1674
0.50	0.0500	0.0540	0.0460	0.0430	0.0602	0.1650	0.1663	0.1638	0.1638	0.1696
0.75	0.0500	0.0560	0.0440	0.0399	0.0639	0.1650	0.1669	0.1631	0.1632	0.1716
1.00	0.0500	0.0580	0.0420	0.0370	0.0667	0.1650	0.1675	0.1625	0.1625	0.1733
1.25	0.0500	0.0600	0.0400	0.0344	0.0687	0.1650	0.1681	0.1619	0.1619	0.1749
1.50	0.0500	0.0620	0.0380	0.0319	0.0701	0.1650	0.1688	0.1613	0.1613	0.1762
1.75	0.0500	0.0640	0.0360	0.0296	0.0710	0.1650	0.1694	0.1606	0.1607	0.1774
2.00	0.0500	0.0660	0.0340	0.0274	0.0713	0.1650	0.1700	0.1600	0.1601	0.1783
2.25	0.0500	0.0680	0.0320	0.0255	0.0713	0.1650	0.1706	0.1594	0.1595	0.1791
2.50	0.0500	0.0700	0.0300	0.0236	0.0709	0.1650	0.1713	0.1588	0.1589	0.1798
2.75	0.0500	0.0720	0.0280	0.0219	0.0701	0.1650	0.1719	0.1581	0.1583	0.1803
3.00	0.0500	0.0740	0.0260	0.0203	0.0691	0.1650	0.1725	0.1575	0.1577	0.1806
3.25	0.0500	0.0760	0.0240	0.0189	0.0679	0.1650	0.1731	0.1569	0.1571	0.1808
3.50	0.0500	0.0780	0.0220	0.0175	0.0665	0.1650	0.1738	0.1563	0.1566	0.1809
3.75	0.0500	0.0800	0.0200	0.0162	0.0649	0.1650	0.1744	0.1556	0.1560	0.1809
4.00	0.0500	0.0820	0.0180	0.0151	0.0633	0.1650	0.1750	0.1550	0.1554	0.1807
4.25	0.0500	0.0840	0.0160	0.0140	0.0615	0.1650	0.1756	0.1544	0.1548	0.1804
4.50	0.0500	0.0860	0.0140	0.0130	0.0596	0.1650	0.1763	0.1538	0.1542	0.1800
4.75	0.0500	0.0880	0.0120	0.0120	0.0577	0.1650	0.1769	0.1531	0.1537	0.1795
5.00	0.0500	0.0900	0.0100	0.0112	0.0558	0.1650	0.1775	0.1525	0.1531	0.1789