

隨機波動性下障礙選擇權之評價分析 Pricing Barrier Options Under Stochastic Volatility

張傳章 Chuang-Chang Chang*

張森林 San-Lin Chung

許博翔 Bor-Shayang Hsu

National Central University

國立中央大學

摘 要

文獻上有關障礙選擇權訂價方法之探討者眾，其中Boyle-Tian(1999)利用變數轉換技巧，成功地建構一個可以計算常數彈性變異數(Constant Elasticity Variance)之障礙選擇權訂價模型，本文之貢獻在於將Hilliard-Schwartz(1996)之隨機波動性簡單型選擇權訂價模型，加以擴展至障礙選擇權的訂價之上。此外，我們亦驗證了Hilliard-Schwartz和Boyle-Tian的模型，在特定參數設定下為本文模型的一個特例。再則，由模擬結果得知，隨機波動性對障礙選擇權價格的影響程度，遠較對簡單型選擇權價格的影響程度來得大。

Abstract

There are tremendous papers to construct models for valuing barrier options. Recently, Boyle and Tian (1999) used change variable technique to succeed in building a model, which is able to value barrier options under constant elasticity variance process. The contribution of this paper is to extend the Hilliard and Schwartz's (1995) plain vanilla option pricing model with stochastic volatility to the case of barrier options. We also show that both the Hilliard and Schwartz's model and Boyle and Tian's model are special cases of our model under some specifications of parameters. From the simulation results, we find that the stochastic volatility effects for barrier options are much larger than those of plain vanilla options

關鍵詞：障礙選擇權，隨機波動性，常數彈性變異數。

Key Word: Barrier Options, Stochastic Volatility, Constant Elasticity Variance.

* 國立中央大學財務管理系，中壢市五權里38號，E-mail:ccchang@cc.ncu.edu.tw，Fax:886-3-4252961。感謝主編及三位匿名評審的寶貴意見。

隨機波動性下障礙選擇權之評價分析

壹、前言

自從Black-Scholes(1973)選擇權定價模型發表之後，選擇權市場即隨之蓬勃發展，而於1970年代所交易的選擇權契約，一般皆以標準型選擇權(Standard Options)為主，然而自1980年代以來，世界各地之選擇權店頭市場，爲了滿足其客戶之投資及避險需求，紛紛不斷地推出各式各樣的新奇選擇權(Exotic Options)，且其成交量有與日俱增的趨勢。由於新奇選擇權之發展極爲迅速，且其契約型態琳瑯滿目，因此在評價上自然也不像簡單型選擇權那樣單純，因此學術界也不斷地發展出各種評價模型¹，其中較爲困難的部分是路徑相依(path-dependent)的新奇選擇權²。因此如何針對此種新奇選擇權發展出一套準確且有效率的評價模型，一直是目前學術界努力的方向，亦是實務界所引頸企盼的。

一般傳統的選擇權評價模式，如Black-Scholes(1973)或Cox-Ross-Rubinstein(1979)，通常皆對其標的資產(underlying asset)的價格做了兩個重要的假設：其一爲假設標的資產之價格遵循幾何布朗運動(geometric Brownian motion)，這個假設隱含著標的資產的價格呈現對數常態分配(lognormal distribution)；其二爲假設標的資產價格的變異數爲固定常數，亦即價格的變異數並不會隨著時間而改變，然而微笑波幅(volatility smile)現象卻在市場上處處可見，爲了使評價模型更能與市場狀況相吻合，文獻上已有許多學者建構非固定或隨機波動性下之選擇權評價模型，非固定波動性模型中最常被引用者爲Cox(1975)之常數彈性變異數(Constant Elasticity Variance)模型，而隨機波動性模型中最具代表性者有Hull-White(1987)、Scott(1991)和Heston(1993)等模型，然而這些模型只能評價歐式選擇權，最近Hilliard-Schwartz(1996)(此後簡稱爲H-S模型)則建構一個可以計算隨機波動性下美式選擇權的多元二項式評價模型。

¹ 請參閱Scott(1996)。

² 路徑相依選擇權乃是指一種選擇權，其價格不但會受標的資產價格及契約到期日長短的影響，亦會受到期日之前其標的資產價格行走路徑的影響，例如向後看選擇權(Lookback Options)的價格會受到其標的資產在契約存續期間之最高或最低價格的影響。由於路徑相依選擇權的價格會受到其標的資產價格到期日之前行走路徑的影響，故在訂價及避險之上極爲複雜且費時，因此對一個動輒需要同時計算數以百計之路徑相依選擇權的金融機構而言，一個計算快速且準確度高的模型是極爲必要的。

障礙選擇權乃新奇選權中交易量最大者之一，其損益結構會受到到期前標的資產的價格曾是否達到某一障礙價格(Barrier price)的影響，亦即當標的資產之價格在一定的期間內觸及到契約約定的障礙價格時，選擇權即開始生效或終止，故其為一典型之路徑相依選擇權。基本上我們可以將障礙選擇權分成六類³：向上終止(up-and-out)、向上生效(up-and-in)、向下終止(down-and-out)、向下生效(down-and-in)、雙向終止(double-out)、雙向生效(double-in)。

文獻上有關障礙選擇權訂價方法探討者眾，其中Merton(1973)首先推導出向下終止障礙選擇權之歐式買權的封閉解，隨後Boyle-Lau(1994)利用Cox-Ross-Rubstein(1979)(此後簡稱為CRR)二項樹模型來計算美式障礙選擇權的價格，然而他們發現CRR模型應用於標準選擇權上可以很精確的評價出選擇權價格，但若應用在障礙選擇權上，即使切割期數很大，亦可能出現極嚴重的偏誤，而且隨著切割期數的增加，偏誤的大小呈現鋸齒狀，推究其產生此種偏誤型態的原因在於計算的過程中，障礙價格沒有落於節點之上，而是落於兩節點之間。他們發現直接利用CRR模型所計算出來之向下生效選擇權的價格會有低估的情形，而向下終止選擇權則會有高估的現象。

Ritchken(1995)指出Boyle-Lau (1994)所使用的二項樹之障礙選擇權評價模式雖然可以使偏誤降至最小，但若是障礙價格並非固定不變，而是隨時間變動而變動，或者選擇權有多個障礙價格時，此時Boyle-Lau 的評價模式即難以做正確評價，因此Ritchken 提出使用三項樹之節點調整法，透過參數 λ 的調整，使得障礙價格剛好落於節點之上，如此即可作最有效率、精確的評價。使用三項樹最大的好處在於，其收斂較二項樹快速、有效率，尤其當代入的參數值 λ 能使股價持平的機率等於1/3時，其收斂最快速；不過值得注意的是，當股價已經很接近障礙價格時，Ritchken的節點調整法則無法有效率地評價。

Cheuk-Vorst(1996)指出Boyle-Lau(1994)二項樹模型雖然能準確計算障礙選擇權價格，但若障礙價格是隨時間多變或有多個障礙價格時，此模型則難以應用；Ritchken(1995)的三項樹模型雖然能解決障礙價格是隨時間多變或有多個障礙價格的問題，但當障礙價格與股價太接近時，此種方式又產生問題。為了解決此問題，Cheuk-Vorst(1996)提出一個時間

³ 若再將每一類細分為歐式或美式、買權或賣權，則共可將障礙選擇權分成24種；此外，若考慮標的資產價格是否觸及障礙價格的觀察方式，則又可分為連續型及間斷型，所謂連續型是指隨時觀察股價是否觸及障礙價格，若是，則選擇權立即生效或失效；而間斷型則是指以某一特定時日價格為準(如收盤價)，若其價格觸及障礙價格，則選擇權即生效或失效。

相關移動(time-dependent shift)模型，此種模型尚能應用於連續觀察(continuous observation)或間斷觀察(discrete observation)之障礙選擇權上，一般在店頭交易市場中以匯率為標的資產之障礙選擇權為連續型，其他大部分為間斷觀察型。上述有關障礙選擇權評價的研究中，皆在股價為對數常態分配的假設下來作評價分析，於是Boyle-Tian(1999)(此後簡稱B-T模型)結合變數轉換法與三項樹之參數 λ 的調整方法而推導出在股價為CEV過程下之障礙選擇權的評價模式。由B-T之模擬結果得知，CEV模型下之障礙選擇權價格和固定下波動性之障礙選擇權價格，其價格差異可高達32.84%，因此考慮隨機波動性對障礙選擇權之訂價非常重要。

隨機波動性選擇權評價模型一方面可降低評價誤差⁴，另一方面亦可捕捉市場上之微笑波幅現象，然而文獻上獻有關障礙選擇之評價，除了B-T模型外皆仍屬於固定波動性模型，因此如何將隨機波動性納入考慮，以建構一個更能與市場狀況相吻合之障礙選擇權評價模型，藉以減少發行者於評價障礙選擇權時之模型風險(model risk)⁵，乃本文之研究動機。職是之故，本文結合了H-S之變數調整法及Ritchken(1995)與B-T模型之節點調整法的優點，並透過參數 λ 的調整來建構一個同時可以處理CEV和隨機波動性之障礙選擇權評價模型，為了達成此一目的，我們必須將H-S所推導出來的兩個各自擴散之二項樹繼續做延伸，使之一個成為二項樹，另一個則成為三項樹，之後再將二者結合成一個簡單的雙元多項樹。準此，若將本文所推導出來的模型之障礙價格上、下限各設為零及無窮大，且令 $\lambda = 1$ ，則本文模型將與H-S模型相同；反之，若使標的資產價格波動性之標準差(standard deviation of underlying asset volatility)趨近於零，則本文模型將與B-T之模型相同，因此H-S和B-T模型將個別是本文模型的一個特例。

本文共分為四節，除了前言之外，第二節我們詳細說明如何結合H-S之變數調整法及Ritchken(1995)與B-T模型之節點調整法，進而推導出一個隨機波動性障礙選擇權評價模型，第三節則是以模擬分析的方式，說明本文模型之正確性，並探討與比較隨機波動性對標準化選擇權及障礙選擇權價格之影響有何差異，第四節則為本文之結論。

⁴ 自Engle(1982)提出ARCH模型以來，後續學者亦提出不少隨機波動性模型，而文獻上之實證研究亦支持金融商品價格之波動性具有ARCH特質，此外，最近Bakshi-Gao-Chen(1997)曾對文獻之各種選擇權評價模型，以S&P500選擇權作實證分析，其得出的結論是不論是在定價誤差上或避險效果上，隨機波動性選擇權評價模型皆表現最佳。

⁵ 本文所指的模型風險是：實際世界是A模型但是卻用B模型(因為B簡單好用)所造成的風險。

貳、本文模型之建構

一、Hilliard-Schwartz模型的擴展

參考Hilliard-Schwartz模型，在連續且風險中立的假設下⁶，我們可以將標的資產及其隨機波動性過程設定為：

$$\begin{aligned} dS &= m_s dt + f(S)h(V) dZ_s \\ dV &= m_v dt + bV dZ_v \end{aligned} \quad (1)$$

其中 S 為股價， m_s 為標的資產的持有成本，一般可表示為 $m_s = S(r-d)$ ，其中 r 為無風險利率，在此我們假設股利發放率 d 等於0，而股價變動之標準差 $\sigma_s = f(S)h(V)$ ，一般可假設為 $\sqrt{V}S^\theta$ 形式， θ 為CEV過程之彈性係數，其介於0與1之間； V 為標的資產的瞬間變異數， b 為資產變異數的瞬間標準差， m_v 則為標的資產瞬間變異數的瞬間變動平均數，在此亦假設為0，並令 $\text{Corr}(dZ_s, dZ_v) = \rho_{sv}$ 為資產價格與變異數間的相關係數。

由於此資產價格的擴散方程式之變異數本身亦為一溫那擴散過程，因此若直接對其作二項樹評價將會非常困難，為了建構一個路徑相獨立(path Independent)之二項樹，我們必須利用變數轉換法使得股價的擴散過程變為簡單的三項樹，而變異數的擴散過程變為簡單的二項樹，之後再結合成為一個雙元多項樹⁷。首先對變異數 V 作轉換，令

$$Y = \frac{\ln(V)}{b} \quad (2)$$

根據Ito's lemma，我們可以得到 Y 的擴散過程，且其變異數變為單位變異數：

$$dY = m_y dt + dZ_v$$

⁶ 有關風險中立成立之條件並非本文探討的重點，有興趣的讀者可參閱Rubinstein(1976)或Duan(1995)等文章。

⁷ 比較一致性的做法應該是價格和波動性皆採三項樹，但為簡化推導起見，本文在波動性變動方面採二項樹。雖然三項樹模型源自於有限差分法(finite difference method)，而二項樹模型源自於套利定價原理，但因本研究是在風險中立假設成立的前提下，設法去建構雙元多項樹來逼近資產價格的風險中立分配，因此並不會造成理論架構不一的問題。作者感謝匿名評審的提醒以澄清此點。

(3)

其中：

$$m_y = \frac{m_v}{b_v} - 0.5b$$

接著對資產價格作轉換，由於股價波動的變異數和S及V有關，因此無法直接作轉換，必須透過二次轉換，即先將S轉換成H，再將H轉換成單位變異數的Q。先假設 $H=H(S,V)$ ，根據Ito's lemma，我們可以得到H的擴散過程：

$$\begin{aligned} dH &= H_s \sqrt{V} S^\theta dZ_s + H_v bV dZ_v + m_h dt \\ &= m_h dt + \sigma_h dZ_h \end{aligned}$$

(4)

其中：

$$\begin{aligned} m_h &= H_s m_s + H_v m_v + 0.5 H_{ss} S^{2\theta} V + 0.5 H_{vv} b^2 V^2 + H_{sv} bVS \sqrt{V} \rho_{sv} \\ \sigma_h &= \left[1 - bH \rho_{sv} + 0.25 (bH)^2 \right]^{0.5} \end{aligned}$$

再假設 $Q=Q(H)$ ，同樣根據Ito's lemma，則可以得到Q的擴散過程：

$$dQ = m_q dt + dZ_h$$

(5)

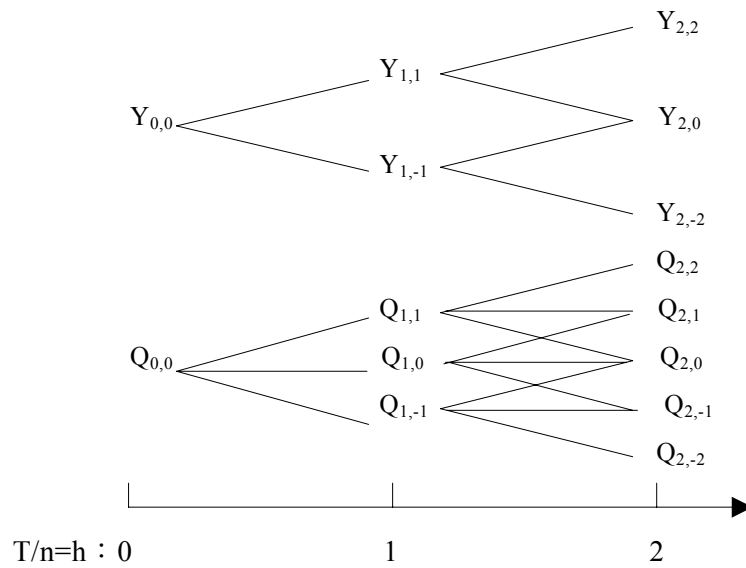
其中：

$$m_q = \frac{m_h}{\sigma_h} + 0.5 Q_{hh} \sigma_h^2$$

經由上述的轉換過程，我們可以輕易將Y與Q皆變成單位變異數的擴散過程，則Y與Q將可以擴散出簡單的二項樹或三項樹，以二期的狀況為例，圖一說明如何建構Y與Q之二項樹及三項樹。

在上述中，Y及Q皆為單位波動，依標準單位波動模型，其二項式及三項式變動過程中的變動幅度及機率分別為：

$$(6) \quad Y_1 = \begin{cases} Y_0 + \sqrt{\Delta t} & \text{向上變動，且其機率為 } q_1 \\ Y_0 - \sqrt{\Delta t} & \text{向下變動，且其機率為 } q_2 \end{cases}$$



圖一 分別建構Y與Q的簡單路徑獨立二項樹及三項樹（N=2）

$$(7) \quad Q_1 = \begin{cases} Q_0 + \lambda \sqrt{\Delta t} & \text{向上變動，且其機率為 } p_1 \\ Q_0 & \text{維持不變，且其機率為 } p_2 \\ Q_0 - \lambda \sqrt{\Delta t} & \text{向下變動，且其機率為 } p_3 \end{cases}$$

其中 $\Delta t = T/n$ 為單位時間的長度，而各項變動機率可分別表示為：

$$q_1 = 0.5 \times (1 + m_y \sqrt{\Delta t})$$

$$q_2 = 0.5 \times (1 - m_y \sqrt{\Delta t})$$

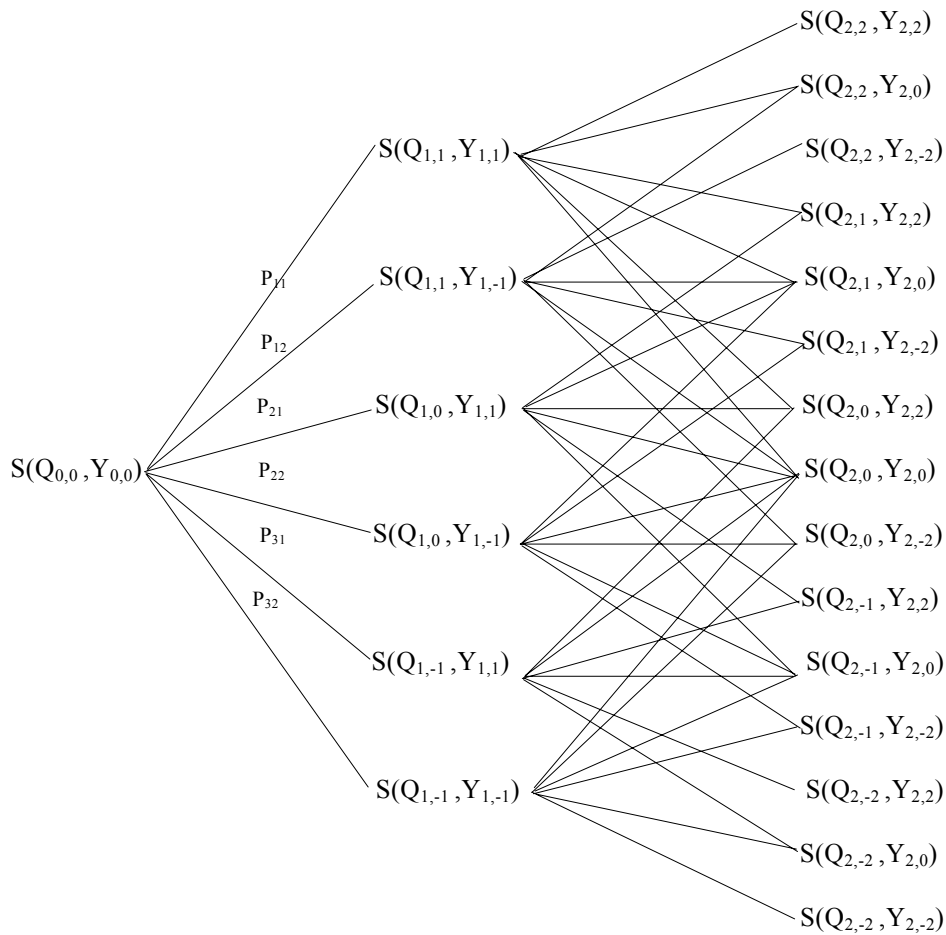
$$p_1 = 0.5 \times \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{m_q \sqrt{\Delta t}}{\lambda} \right)$$

$$p_3 = 0.5 \times \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{m_q \sqrt{\Delta t}}{\lambda} \right)$$

$$p_2 = 1 - \frac{1}{\lambda^2} = 1 - p_1 - p_3$$

(8)

最後再將此二項樹及三項樹結合成一個雙元多項樹來評價，則每一個節點可以用Q×Y空間來表示：



圖二 在Q×Y空間下之雙元多項樹的樹狀擴散圖 (N=2)

而每一節點的(Q,Y)值，透過反函數轉換即可求得其S及V之值，即：

$$V = e^{Yb} \quad (9)$$

$$H = \frac{1}{b} \left[2\rho_{SV} - (1 - \rho_{SV}^2) e^{-0.5bQ} + e^{0.5bQ} \right] \quad (10)$$

$$S = \begin{cases} \left[\sqrt{V} (1 - \theta) H \right]^{\frac{1}{1-\theta}} & \theta \neq 1 \\ e^{\sqrt{V}H} & \theta = 1 \end{cases} \quad (11)$$

假設 P_{11} 、 P_{12} 、 P_{21} 、 P_{22} 、 P_{31} 、 P_{32} 為聯合變動機率，其定義如次：

$$\begin{aligned} P_{11} &= \text{prob}(Q_1^+, Y_1^+) \\ P_{12} &= \text{prob}(Q_1^+, Y_1^-) \\ P_{21} &= \text{prob}(Q_1^*, Y_1^+) \\ P_{22} &= \text{prob}(Q_1^*, Y_1^-) \\ P_{31} &= \text{prob}(Q_1^-, Y_1^+) \\ P_{32} &= \text{prob}(Q_1^-, Y_1^-) \end{aligned} \quad (12)$$

其中上標符號「+」表示狀態變數向上變動，「*」表示狀態變數維持不變，而「-」則表示狀態變數向下變動。

在上述轉換過程中，其瞬間變動之隨機誤差項 dZ_h 及 dZ_v 存在相關性：

$$\text{Corr}(dZ_h, dZ_v) = \frac{\rho_{SV} - 0.5bH}{\sigma_h} \quad (13)$$

而根據Y及Q的擴散過程公式可知， $\text{Corr}(dY, dQ) = \text{Corr}(dZ_h, dZ_v)$ ，這些相關性將在建構雙元二項樹變動的聯合機率中考慮進去，因此我們需要設立四項邊際機率及叉積動差(cross-product moment)的限制式來求算

聯合變動機率值：

$$1. \text{邊際機率：} \Delta Q^+ = Q_1 - Q_0, \text{ 則 } P_{11} + P_{12} = p_1. \quad (14)$$

$$\Delta Q^* = Q_1 - Q_0, \text{ 則 } P_{21} + P_{22} = p_2. \quad (15)$$

$$2. \text{邊際機率：} \Delta Y = Y_1 - Y_0, \text{ 則 } P_{11} + P_{21} + P_{31} = q_1. \quad (16)$$

$$3. E(\Delta Q \Delta Y) = \lambda \Delta t (2P_{11} + 2P_{32} - p_1 - p_3). \quad (17)$$

$$4. \text{假設 } P_{21} = p_2 \times q_1, \text{ 則 } P_{22} = p_2 \times q_2. \quad (18)$$

根據上述三式，可以推導出聯合變動機率：

$$Cov(\Delta Y \Delta Q) = 2 \lambda \Delta t (P_{11} + P_{32} - p_1 q_1 + p_3 q_1 - p_3)$$

$$Corr(\Delta Y \Delta Q) = \frac{Cov(\Delta Y \Delta Q)}{2 \lambda \Delta t \sqrt{(p_1 + p_3 - p_1^2 + 2 p_1 p_3 - p_3^2) q_1 q_2}}$$

$$P_{11} = p_1 q_1 + 0.5 \kappa Corr(\Delta Y \Delta Q)$$

$$P_{12} = p_1 q_2 - 0.5 \kappa Corr(\Delta Y \Delta Q)$$

$$P_{21} = p_2 q_1$$

$$P_{22} = p_2 q_2$$

$$P_{31} = p_3 q_1 - 0.5 \kappa Corr(\Delta Y \Delta Q)$$

$$P_{32} = p_3 q_2 - 0.5 \kappa Corr(\Delta Y \Delta Q) \quad (19)$$

$$\text{其中 } k = \sqrt{(p_1 + p_3 - p_1^2 + 2 p_1 p_3 - p_3^2) q_1 q_2}$$

經由上述之轉換求值，加上聯合變動機率已知，整個雙元二項樹即構建完成，如此可求出所需的目標值，但這只能計算標準選擇權，至於障礙選擇權仍須作適當的調整，才能求出正確的選擇權價格。

⁸ 此假設的目的是為了增加限制式，減少計算過程中的自由度，以達到求解的順利。此假設為任意假設，但並不會影響我們的結果，我們也嘗試作其他的假設，例如假設 $P_{31} = p_3 \times q_1$ ，而 $P_{32} = p_3 \times q_2$ ，其計算結果與假設4所得之結果大致相同。

二、障礙選擇權評價的調整

(一)單一障礙價格(single barrier)的調整

由Boyle-Lau(1994)的研究得知，當障礙價格落在樹狀的節點上，則可正確評價障礙選擇權，但若障礙價格落在兩節點之間，依此二項樹來作評價，則會產生偏誤，因此必須作調整，本論文將採用Ritchken(1995)與Boyle-Tian(1999)之節點調整法，即透過參數 λ 的調整來改變變動的幅度，使障礙價格剛好落在節點上。

透過前一小節中所推導出的變數轉換公式，我們已經可以擴散出Q與Y的雙元二項樹與三項樹，接著必須調整參數 λ 的值，以確保障礙價格將會落在節點上，首先假設 $\lambda_0 = \sqrt{1.5}$ ，且令

$$Q_d = Q_0 + j\lambda_0\sqrt{\Delta t} \quad (20)$$

$$Y_d = Y_0 \quad (21)$$

其中 Q_0 為初始股價 S_0 轉換成Q變數之後的值， Q_d 則為障礙價格 S_d 轉換成Q變數之後的值，並假設在障礙價格水準下，其股價變異數為初始值，意即在此節點上，Y將等於 Y_0 ；換句話說，我們假設 (Q^j, Y^0) 將落在節點上，其中上標符號表示向上變動次數減向下變動次數，將上式經過計算後，可得到j值為

$$j = \frac{Q_d - Q_0}{\lambda_0\sqrt{\Delta t}} \quad (22)$$

由於變動的次數必須為整數，因此令 j_d 為最接近j之整數，然後透過下式可以得到剛好使障礙價格落在節點之上的參數值 λ_d 為

$$\lambda_d = \frac{Q_d - Q_0}{J_d\sqrt{\Delta t}} \quad (23)$$

利用此參數值 λ_d ，則Q的變動幅度變成為

$$\Delta Q = \begin{cases} \lambda_d \sqrt{\Delta t} & \text{向上變動，其機率爲 } p_1 \\ 0 & \text{維持不變，其機率爲 } p_2 \\ -\lambda_d \sqrt{\Delta t} & \text{向下變動，其機率爲 } p_3 \end{cases} \quad (24)$$

其機率值隨之調整為

$$\begin{aligned} p_1 &= 0.5 \times \left(\frac{1}{\lambda_d^2} + \frac{m_q \sqrt{\Delta t}}{\lambda_d} \right) \\ p_3 &= 0.5 \times \left(\frac{1}{\lambda_d^2} - \frac{m_q \sqrt{\Delta t}}{\lambda_d} \right) \\ p_2 &= 1 - \frac{1}{\lambda_d^2} = 1 - p_1 - p_3 \end{aligned} \quad (25)$$

最後，我們可以利用此調整後的模型來評價障礙選擇權的價格。

(二)雙障礙價格(double barrier)的調整

在單一障礙價格的障礙選擇權評價模式中，雖然我們可以透過參數 λ 值的調整，使障礙價格正好落於樹狀節點上，然而在雙障礙價格的障礙選擇權中，此模型卻無法應用，因為調整參數 λ 值雖可使其其中之一的障礙價格落在節點上，但另一障礙價格卻不一定也會剛好落在節點上，因此對於雙障礙選擇權的評價必須做一修正，我們參酌Ritchken(1995)的調整模式。首先我們利用上述的方式，透過參數 λ 的選擇使價格較高的障礙剛好落於節點上，則Q的變動幅度與機率依舊如下：

$$\Delta Q = \begin{cases} \lambda_u \sqrt{\Delta t} & \text{向上變動，其機率爲 } p_1 \\ 0 & \text{維持不變，其機率爲 } p_2 \\ -\lambda_u \sqrt{\Delta t} & \text{向下變動，其機率爲 } p_3 \end{cases} \quad (26)$$

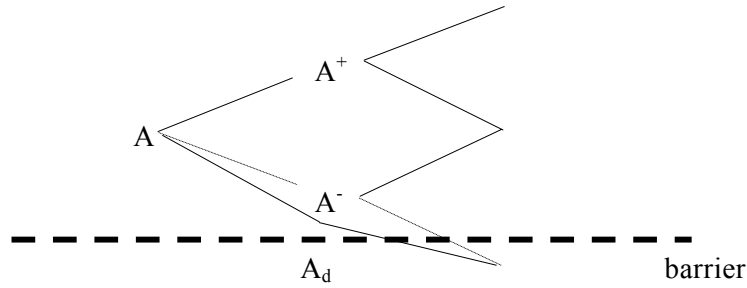
其機率值隨之調整為：

$$p_1 = 0.5 \times \left(\frac{1}{\lambda_u^2} + \frac{m_q \sqrt{\Delta t}}{\lambda_u} \right)$$

$$p_3 = 0.5 \times \left(\frac{1}{\lambda_u^2} - \frac{m_q \sqrt{\Delta t}}{\lambda_u} \right)$$

$$p_2 = 1 - \frac{1}{\lambda_u^2} = 1 - p_1 - p_3 \quad (27)$$

接著我們必須對較低的障礙價格作調整，我們不需要調整所有節點的變動幅度，只需要調整障礙價格上面的節點，如圖三所示，假設節點A向上變動到A⁺，向下變動則到A⁻：



圖三 雙障礙價格模型之下障礙價格附近節點的調整圖 (N=2)

因此我們可以對A節點作調整，使之向上變動仍為A⁺，但向下變動則為A_d，此時A節點的變動幅度與機率則必須修正為：

$$\Delta Q = \begin{cases} \lambda_u \sqrt{\Delta t} & \text{向上變動，其機率為 } p_1 \\ 0 & \text{維持不變，其機率為 } p_2 \\ -\gamma \lambda_u \sqrt{\Delta t} & \text{向下變動，其機率為 } p_3 \end{cases} \quad (28)$$

其機率值將調整為：

$$p_1 = \frac{1}{1 + \gamma} \times \left(\frac{1}{\lambda_u^2} + \frac{\gamma m_q \sqrt{\Delta t}}{\lambda_u} \right)$$

$$p_3 = \frac{1}{\gamma (1 + \gamma)} \times \left(\frac{1}{\lambda_u^2} - \frac{m_q \sqrt{\Delta t}}{\lambda_u} \right)$$

$$p_2 = 1 - p_1 - p_3 \quad (29)$$

再則，其聯合機率亦必須修正如下：

$$\begin{aligned} P_{11} &= p_1 q_1 + \frac{1}{1+\gamma} \kappa \text{Corr}(\Delta Y \Delta Q) \\ P_{12} &= p_1 q_2 - \frac{1}{1+\gamma} \kappa \text{Corr}(\Delta Y \Delta Q) \\ P_{21} &= p_2 q_1 \\ P_{22} &= p_2 q_2 \\ P_{31} &= p_3 q_1 - \frac{1}{1+\gamma} \kappa \text{Corr}(\Delta Y \Delta Q) \\ P_{32} &= p_3 q_2 + \frac{1}{1+\gamma} \kappa \text{Corr}(\Delta Y \Delta Q) \end{aligned} \quad (30)$$

其中 $k = \sqrt{[p_1 + r^2 p_3 - (p_1 - r p_3)^2] q_1 q_2}$

至於 γ 的決定可以利用下列方式得出，假設 W_d 為最接近 W 的整數，其中 W 等於：

$$W = \frac{Q_0 - Q_d}{\lambda_u \sqrt{\Delta t}} \quad (31)$$

而

$$\gamma = \frac{Q_0 - Q_d}{\lambda_u \sqrt{\Delta t}} - (W_d - 1) \quad (32)$$

當 $\gamma = 1$ 時，節點 A 即為節點 A_d ，而其個別機率與聯合機率亦與其他節點相同。透過此修正模型，兩個障礙價格都將落於節點上，因此我們即可評價雙障礙選擇權價格。

(三)避險比率(hedge ratio)

Pelsser-Vorst (1994)指出，利用二項樹方式計算選擇權的避險比率比用其他數值差分的方式還要更正確、更有效率，而同樣的方式亦可應用在雙元二項樹的模型上，在此，避險比率的計算，我們將採用Cheuk-Vorst的回溯方式及Hillard-Schwartz各種避險比率的計算公式，亦即先在Q與Y擴散空間中，由時點0往後推算出Q與Y下的各種避險比率，再經過轉換而計算出S及其標準差 σ 的各種避險比率。

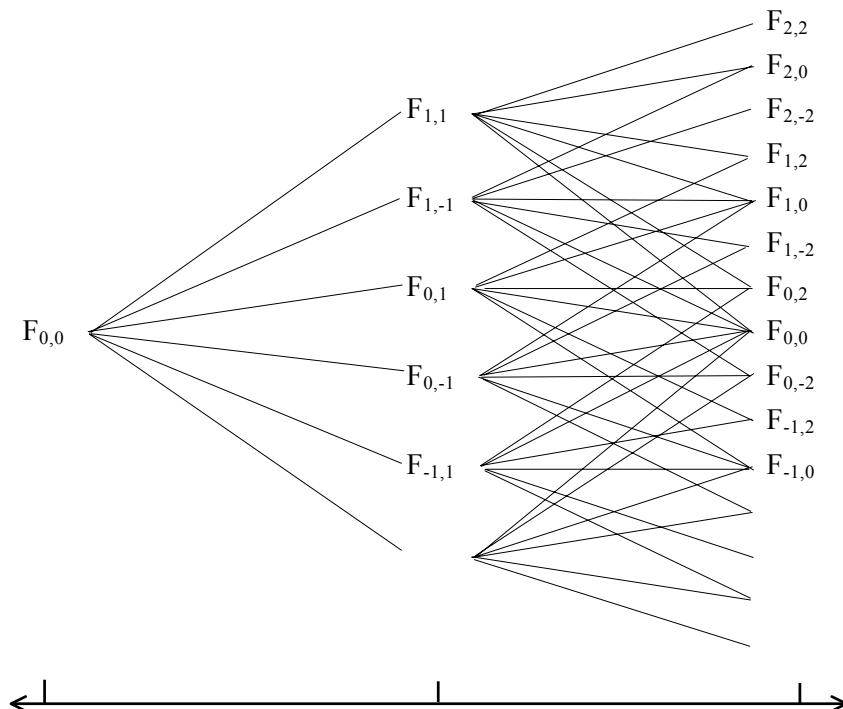
首先假設 $F(Q,Y) \equiv F$ 為在Q與Y擴散空間下的選擇權價格，且定義 $F(Q+i\Delta Q, Y+j\Delta Y) \equiv F_{i,j}$ 為Q變動i次，Y變動j次下選擇權價格，利用往前推算的方式計算出避險比率 $\delta(Q)$ 、 $\text{vega}(Y)$ 、 $\gamma(Q)$ ，其分別可以利用下列公式計算得出：

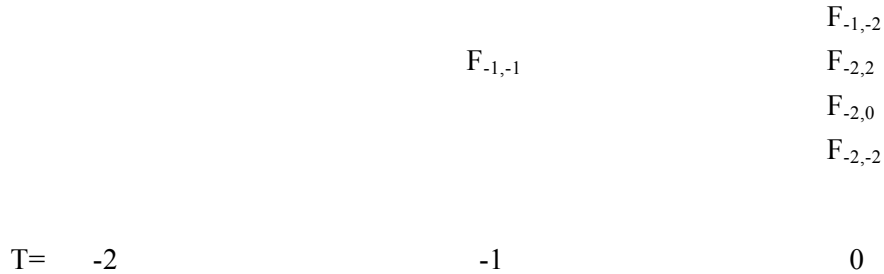
$$\delta(Q) = F_Q \equiv \frac{(F_{1,2} - F_{-1,2}) + (F_{1,0} - F_{-1,0}) + (F_{1,-2} - F_{-1,-2})}{6\lambda\sqrt{\Delta t}} \quad (33)$$

$$\text{vega}(Y) = F_Y \equiv \frac{(F_{1,2} - F_{1,-2}) + (F_{0,2} - F_{0,-2}) + (F_{-1,2} - F_{-1,-2})}{6\sqrt{\Delta t}} \quad (34)$$

$$\gamma(Q) = F_{QQ} \equiv \frac{(F_{1,2} + F_{-1,2} - 2F_{0,2}) + (F_{1,0} + F_{-1,0} - 2F_{0,0}) + (F_{1,-2} + F_{-1,-2} - 2F_{0,-2})}{3\lambda^2 \Delta t} \quad (35)$$

將上式以圖形表示如下：





圖四 節點後推(backward)樹狀擴散圖

經過變數轉換後，在S及 σ 的擴散空間下，我們可以令選擇權的價格 $C(S, \sigma) = F(Q, Y)$ ，則透過鏈鎖率的轉變，即可求得選擇權的避險比率 $\text{delta}(S)$ 、 $\text{vega}(\sigma)$ 、及 $\text{gamma}(S)$ ，其公式如下：

$$\text{delta}(S) \equiv C_s = F_q Q_s \quad (36)$$

$$\text{vega}(\sigma) \equiv C_\sigma = F_q Q_\sigma + F_y Y_\sigma \quad (37)$$

$$\text{gamma}(S) \equiv C_{ss} = F_q Q_{ss} + F_{qq} (Q_s)^2 \quad (38)$$

假設 $\sigma = \sqrt{V_0}$ ，則其中：

$$Q_s = \frac{1}{\sigma_h \sigma S^\theta}$$

$$Q_\sigma = \begin{cases} \frac{-\ln(S)}{\sigma_h \sigma^2} & \text{if } \theta = 1 \\ \frac{-S^{1-\theta}}{(1-\theta)\sigma_h \sigma^2} & \text{if } \theta \neq 1 \end{cases}$$

$$Y_\sigma = \frac{2}{b\sigma}$$

$$Q_{ss} = \frac{-\theta}{\sigma_h \sigma S^{1-\theta}} + \frac{0.5b\rho_{sv} - 0.25b^2H}{\sigma_h^3 \sigma^2 S^{2\theta}}$$

參、模擬結果與分析

本文採用Matlab語言程式來計算各種選擇權價格。若將本文所推導出來的模型，障礙價格上、下限各設為零與無窮下，且令 $\lambda = 1$ ，則本文模型將與H-S模型相同；反之，若使標的資產價格波動性標準差趨近於零，則本文模型將與Boyle-Tian之固定變異數模型相同⁹，因此H-S和B-T

模型分別是本文模型的特例。若在相同變數假設及相同二項樹切割次數下，分別使用本文模型與Boyle-Tian模型來計算在固定變異數下之各種障礙選擇權價格，即可驗證本文程式之正確性。

表一至表六主要觀察標準歐式買權(表一)、向下終止歐式買權(表二)、向上終止歐式買權(表三)、雙向終止歐式買權(表四)、標準美式賣權(表五)、及向下終止美式賣權(表六)在各種不同模型計算下，其價格間的差異，其中起始日股價 S 為100，無風險利率 r 為10%，到期期間為半年，標的資產的波動性 σ_{BS} 為25%¹⁰，二項樹切割期數 $N = 250$ ，執行價 X 的範圍從95至105， θ 為CEV的參數係數， b 為資產價格變異數之瞬間標準差，其中 b 值取0.000001如此小是為了將隨機波動性的影響減少至最小，亦即相當於固定變異數模型，而 b 值取0.1是為了觀察隨機波動性的存在對選擇權價格的影響¹¹；此外在本文模型下假設標的資產價格與變異數間的相關係數 ρ_{sv} 為0，且 B_d 為向下障礙價格， B_u 為向上障礙價格，當 $B_d = 0$ 而 $B_u = \infty$ 時，障礙選擇權則相當於標準選擇權。另外，我們也列出由B-S模型計算出來的標準歐式買權價格及由Merton(1973)所推導出的封閉解來計算向下終止歐式買權的價格及向上終止歐式買權的價格，並與其他模型做比較。

一、不同模型之價格差異分析

在表一中，(1)、(4)、(7)行為在股價為對數常態分配假設下，分別利用B-S模型、本文模型 $b = 0.000001$ 下(Boyle-Tian模型)、及本文模型 $b = 0.1$ 下所計算的標準選擇權價格，而(8)、(9)、(10)行分別為 $\theta = 0$ 、 $\theta = 0.5$

⁹ 若將 b 假設為0時，將會使變數在轉換過程中出現分母為0的情況，因此在本文模型下， b 不能為0，但為了與固定變異數模型做比較，只能盡量將 b 取極小(本文取 $b = 0.000001$)，使隨機波動性的影響降至最低，由模擬結果，我們驗證了 $b = 0.000001$ 下之本文模型，與Boyle-Tian所計算出來的值完全相同。

¹⁰ σ_{BS} 表示在股價變動為對數常態分配的假設(即CEV參數 $\theta = 1$)下，標的資產的波動性，在計算不同CEV參數 θ 時，為了使其股價瞬間變動的變異數相同，因此必須作調整，使其標準差 $\sigma = \sigma_{BS} S^{(1-\theta)}$ ，如此才能在相同的基礎下作比較。

¹¹ 根據實證觀察， b 值大概介於10%~20%之間，如Melino-Turnbull(1990)對加拿大與美國間的匯率作研究，發現從75/01/02-86/12/10間，其 b 值約略介於10%~20%之間；在此，我們取 $b = 10\%$ 。

、 $\theta = 1$ 下，利用本文模型在 $b = 0.000001$ 與 $b = 0.1$ 所計算出來的選擇權價格之差異百分比。首先觀察當變異數為固定下選擇權的價格，即比較(1)、(4)行，發現其之間的差距不超過0.01，此一結果，說明本文模型具有良好的收斂性；若比較隨機波動性的影響，即比較(4)、(7)行，由(10)行可知，其最大的差距為0.0253%。而當 $\theta = 0$ 及 $\theta = 0.5$ 時，隨機波動性對標準選擇權價格所造成的影響最大分別為0.0547%及0.0556%，這樣的差距顯示隨機波動性的存在對標準選擇權價格並不會有太大的影響。

在表二中，(1)、(4)、(7)行為在股價為對數常態分配假設下，分別利用Merton(1973)模型、本文模型 $b = 0.000001$ 下(Boyle-Tian模型)、及本文模型 $b = 0.1$ 下所計算的向下終止選擇權價格，而(8)、(9)、(10)行分別為 $\theta = 0$ 、 $\theta = 0.5$ 、 $\theta = 1$ 下，利用本文模型在 $b = 0.000001$ 與 $b = 0.1$ 所計算出來的向下終止選擇權價格間之差異百分比。首先觀察當變異數為固定下選擇權的價格，即比較(1)、(4)行，發現其之間的差距不超過0.01，甚至不超過0.001；若比較隨機波動性的影響，即比較(4)、(7)行，由(10)行可知，當障礙價格為90時，其最大的差距為2.0495%，而當障礙價格為95時，其最大的差距為6.6983%，這樣的差距顯示隨機波動性的存在對向下終止選擇權價格比對標準選擇權價格的影響來的大¹²，此外我們亦發現，當障礙價格越接近初始股價時，隨機波動性對障礙選擇權的影響越大；再則，在 $\theta = 0$ 及 $\theta = 0.5$ 時，也有相同的發現。

在表三中，(1)、(4)、(7)行為在股價為對數常態分配假設下，分別利用Merton(1973)模型、本文模型 $b = 0.000001$ 下(Boyle-Tian模型)、及本文模型 $b = 0.1$ 下所計算的向上終止選擇權價格，而(8)、(9)、(10)行分別為 $\theta = 0$ 、 $\theta = 0.5$ 、 $\theta = 1$ 下，利用本文模型在 $b = 0.000001$ 與 $b = 0.1$ 所計算出來的向上終止選擇權價格間之差異百分比。首先觀察當變異數為固定下選擇權的價格，即比較(1)、(4)行，發現其之間的差距不超過0.01，甚至不超過0.001；若比較隨機波動性的影響，即比較(4)、(7)行，由(10)行可知，當障礙價格為120時，其最大的差距為15.193%，而當障礙價格為140時，其最大的差距為3.2910%，由此發現隨機波動性的存在對向上終止選擇權價格的影響其實是蠻大的，另外和向下終止選擇權一樣，當障礙價格越接近初始股價時，隨機波動性對障礙選擇權的影響就越大，即使在 $\theta = 0$ 及 $\theta = 0.5$ 時，也有相同的發現。

在表四中，(3)、(6)行為在股價為對數常態分配假設下，分別利用本文模型 $b = 0.000001$ 下(Boyle-Tian模型)、及本文模型 $b = 0.1$ 下所計算的雙

¹² 對發行者而言，如果發行的是障礙選擇權，則不宜以簡單的模型作訂價，而應採用較符合實證結果的隨機波動性模型為之，否則其模型風險將高於發行標準選擇權的例子。

向終止選擇權價格，而(8)、(9)、(10)行分別為 $\theta = 0$ 、 $\theta = 0.5$ 、 $\theta = 1$ 下，利用此兩個模型所計算出來的雙向終止選擇權價格間之差異百分比。在比較隨機波動性的影響，即比較(3)、(6)行，由(9)行可知，當上終障礙價格為140，下終障礙價格為95時，其差距可達到11.21%，而當上終障礙價格為120，下終障礙價格為90時，其差距則可達到21.5378%，由此發現隨機波動性的存在對雙向終止選擇權價格的影響非常大，在 $\theta = 0$ 及 $\theta = 0.5$ 時，也有相同的發現。

在表五中，(1)、(4)、(7)行為在股價為對數常態分配假設下，分別利用CRR模型、本文模型 $b = 0.000001$ 下(Boyle-Tian模型)、及本文模型 $b = 0.1$ 下所計算的標準美式選擇權價格，而(8)、(9)、(10)行分別為 $\theta = 0$ 、 $\theta = 0.5$ 、 $\theta = 1$ 下，利用本文模型在 $b = 0.000001$ 與 $b = 0.1$ 所計算出來的選擇權價格之差異百分比。首先觀察當變異數為固定下選擇權的價格，即比較(1)、(4)行，發現其結果完全相同，此一結果，說明本文模型具有良好的收斂性；若比較隨機波動性的影響，即比較(4)、(7)行，由(10)行可知，其最大的差距為0.0278%。而當 $\theta = 0$ 及 $\theta = 0.5$ 時，隨機波動性對標準選擇權價格所造成的影響最大分別為0.0536%及0.0699%，這樣的差距顯示隨機波動性的存在除了對標準歐式選擇權價格並不會有太大的影響外，對標準美式賣權的價格也不會有太大的影響。

在表六中，(1)、(4)行為在股價為對數常態分配假設下，分別利用本文模型 $b = 0.000001$ 下(Boyle-Tian模型)、及本文模型 $b = 0.1$ 下所計算的向下終止美式賣權價格，而(7)、(8)、(9)行分別為 $\theta = 0$ 、 $\theta = 0.5$ 、 $\theta = 1$ 下，利用本文模型在 $b = 0.000001$ 與 $b = 0.1$ 所計算出來的向下終止美式賣權價格間之差異百分比。在比較隨機波動性的影響，當障礙價格為90時，其最小的差距為0.0637%，而最大的差距為5.8687%；若障礙價格為95時，其最小的差距為0.044%，而最大的差距為5.7865%；這樣的差距顯示隨機波動性的存在對向下終止美式賣權價格比對標準選擇權價格的影響來的大，但卻沒有比對向下終止歐式賣權的影響大¹³，此外我們亦發現，當障礙價格越接近初始股價時，隨機波動性對障礙選擇權的影響越大。而當障礙價格與執行價相同時，下終美式賣權的價格為零，此乃因為當該選擇權為價平或價內時，該選擇權已觸及障礙價格而失效，故其值為零。

表七主要觀察在起始日股價 S 為100，執行價 X 為100，障礙價格為90，無風險利率 r 為10%，到期期間為半年，標的資產的波動性 $\sigma_{BS} = 25\%$ ，

¹³為了節省篇幅，表六並未列出歐式向下終止賣權的值，有興趣的讀者可逕向作者索取。

二項樹切割期數 $N=250$ 下，在不同隨機波動性的參數係數 b 及相關係數 ρ_{sv} 下，向下終止選擇權的價格間的差異，其中隨機波動性的參數係數 b 的範圍從5%~25%，而相關係數 ρ_{sv} 的範圍從-0.5~0.5之間。由表中可發現，隨著相關係數 ρ_{sv} 的增加，選擇權價格大致上亦微幅增加。仔細分析，若相關係數 ρ_{sv} 為負，當股價上漲時，則波動性將減小，因此對向下終止選擇權而言，其上漲部分的價值將縮減，但當股價下跌時，雖然波動性將增加，然而因為障礙價格的存在，對障礙選擇權來說，並不一定增加其價值，因此整體來說將使選擇權的價格變小。相反的，若相關係數 ρ_{sv} 為正，當股價上漲時，則波動性將增加，因此對向下終止選擇權而言，其上漲部分的價值將增加，但當股價下跌時，雖然波動性將減少，然而因為障礙價格的存在，對障礙選擇權來說其影響並不如上漲部分來的大，因此整體來說將使選擇權的價格變大。而當相關係數 ρ_{sv} 為正時，隨著標的資產的標準差 b 增加，在CEV係數 $\theta=0$ 或 $\theta=1$ 的情況下，障礙選擇權價格的將變小；若相關係數 ρ_{sv} 為負時，隨著標的資產的標準差 b 增加，在CEV係數 $\theta=0$ 的情況下，障礙選擇權價格將變小，但在常數彈性變異係數 $\theta=1$ 的情況下，障礙選擇權價格卻隨著變大。

二、避險比率(hedge ratio)分析

表八主要說明當 b 取很小，且 $\theta=1$ 時，本文模模型即變成間斷型之B-S模型，進而與B-S模型所計算出來的delta值作比較，以檢驗本文模型計算避險比率之正確性。由表中可發現，使用本文模型與H-S模型所計算出來的避險比率，和利用B-S模型所計算出來的避險比率很接近，此一結果說明了本文模型之正確性。表九及表十主要分別觀察在各種不同模型下，其向下終止歐式買權的避險比率delta及gamma值，並觀察隨機波動性對障礙選擇權之避險比率的影響，至於表九、十列出由Merton(1973)封閉式解所導出的delta值，是為檢驗本文模型計算避險比率之正確性，因為表九、十之第四欄即為本文模型變成Merton模型所計算的delta值。其中執行價 X 為100，障礙價格 B_d 為90，無風險利率 r 為5%，到期期間為半年，CEV參數 θ 分別為0、0.5、1，股價與波動性間的相關係數 $\rho_{sv}=0$ ，標的資產的波動性 σ_{BS} 的範圍從15%~25%，二項樹切割期數 $N=250$ 下，股價/執行價(S/X)比率的範圍從0.95~1.1， b 為資產價格變異數之瞬間標準差，其中 b 值取0.000001如此小是為了將隨機波動性的影響減少至最小，亦即相當於固定變異數模型，而 b 值取0.1是為了觀察隨機波動性的存在對選擇權向下終止歐式買權之避險比率的影響，此外本文模型是採用Cheuk-Vorst所建議的節點回推法(backward)來計算避險比率，而所列gamma值部分則同樣是乘上100之後的結果。

在表九中(1)、(4)、(7)行為在股價變動為對數常態分配假設下，分別利用Merton(1973)封閉解模型、本文模型 $b=0.000001$ (B-T模型)與本文模型 $b=0.1$ 下所計算的向下終止歐式買權的delta值，而(8)、(9)、(10)行則分別為 $\theta=0$ 、 $\theta=0.5$ 、 $\theta=1$ 下，利用本文模型 $b=0.000001$ (B-T模型)與本文模型 $b=0.1$ 所計算得到之delta值的差異百分比。在比較(1)與(4)行發現，當變異數的變動趨近於0時，利用本文模型所計算出來的delta值與Merton模型之結果完全相同至小數後2~3位，甚至更小，此一結果說明了本文模型之正確性；若觀察隨機波動性對障礙選擇權之delta的影響，發現其差距皆在2.5%以內，且當隨機波動性存在時，delta值將變小，即使在 $\theta=0$ 或 $\theta=0.5$ 時也會有相同的結果。

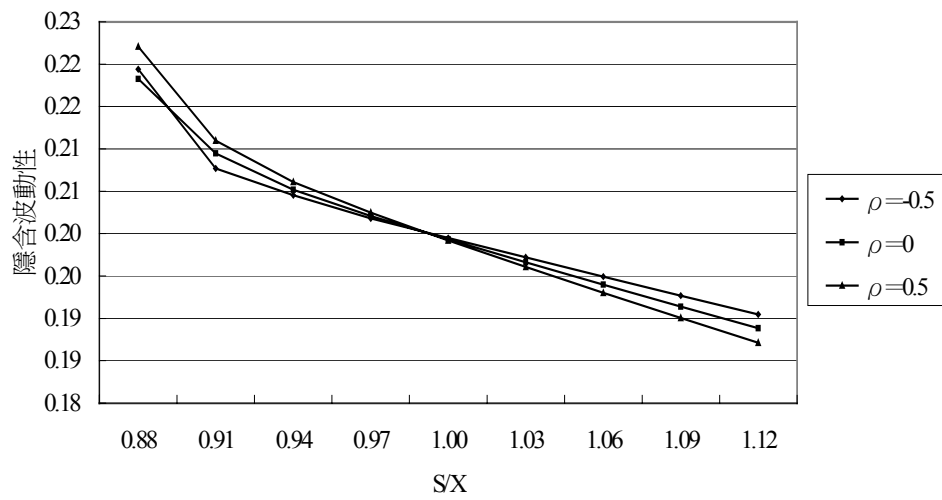
至於gamma值部分，在表十中(1)、(4)、(7)行為在股價變動為對數常態分配假設下，分別利用Merton(1973)封閉解模型、本文模型 $b=0.000001$ (B-T模型)與本文模型 $b=0.2$ 下所計算的向下終止歐式買權的gamma值，而(8)、(9)、(10)行則分別為 $\theta=0$ 、 $\theta=0.5$ 、 $\theta=1$ 下，利用本文模型 $b=0.000001$ (B-T模型)與本文模型 $b=0.2$ 所計算得到之gamma值的差異百分比。在比較(1)與(4)行發現，當變異數的變動趨近於0時，利用本文模型所計算出來的gamma值與Merton模型之結果相差不到0.0001，甚至更小；若觀察隨機波動性對障礙選擇權之gamma的影響，發現在股價接近障礙價格(即 $S=95$)時，隨機波動性對gamma影響較大，尤其當最初的股價波動之標準差越大時；至於其他的差距則皆在0.1%之內，另外我們也發現當隨機波動性存在時，gamma值將增加，即使在 $\theta=0$ 或 $\theta=0.5$ 時也會有相同的結果。表10之結果卻說明隨機波動性對barrier options之gamma影響很大，故對barrier options之發行者而言，在考慮隨機波動性的情況下，對delta避險部位的調整，應較不考慮隨機波動性的情況下，對delta避險部位的調整來得頻繁；至於表10有些Gamma值為負，其原因乃因為障礙選擇權會產生delta jump現象所造成。

三、隱含波動性(implied volatility)分析

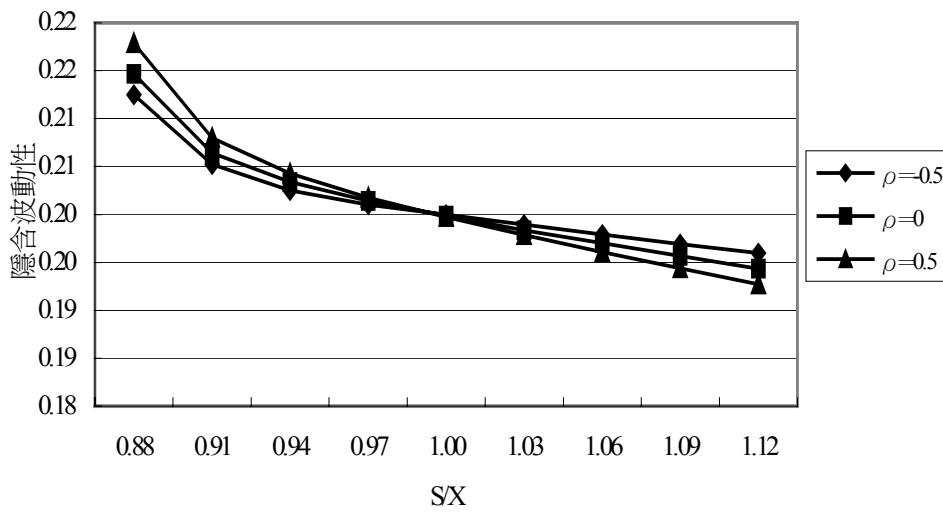
由於市場上微笑波幅的現象處處可見，因此本小節接下來針對本文所建構的隨機波動性模型進行分析，以檢驗其是否可以描述微笑波幅(volatility smile)或半微笑(volatility smirks)的現象。表十一主要觀察在不同相關係數及股價/執行價(S/X)比率下的向下終止歐式買權之隱含波動性的變化。首先在執行價 X 為100，障礙價格 B_d 為85，無風險利率 r 為5%，到期期間為半年，CEV參數 θ 分別為0、0.5、1，隨機波動性的參數係數 $b=0.1$ ，標的資產的波動性 σ_{BS} 為25%，股價與波動性間之相關係數 ρ_{sv} 的範圍分別從-0.5~0.5，二項樹切割期數 $N=250$ ， S/X 的範圍從0.88~

1.12的條件下，由本文模型下先求出向下終止歐式買權價格後，而後將此價格視為真實價格，並透過Merton(1973)所導出的封閉解公式來計算此價格下的隱含波動性。圖五至圖七則是利用表十一繪製而成，其分別為不同常數彈性變異係數 $\theta = 0$ 、 $\theta = 0.5$ 、 $\theta = 1$ 情況下，描繪向下終止選擇權在不同股價/執行價比與其隱含波動性間的關係。由表十一及圖五至圖七中可發現，隨著股價/執行價比(S/X)的增加，選擇權的隱含波動性下降，且呈現「半微笑(smirk curve)」情形，而當相關係數 $\rho_{sv} = -0.5$ 或 $\rho_{sv} = 0$ ，且 $\theta = 1$ 時，隨著股價/執行價比(S/X)的增加，選擇權的隱含波動性先

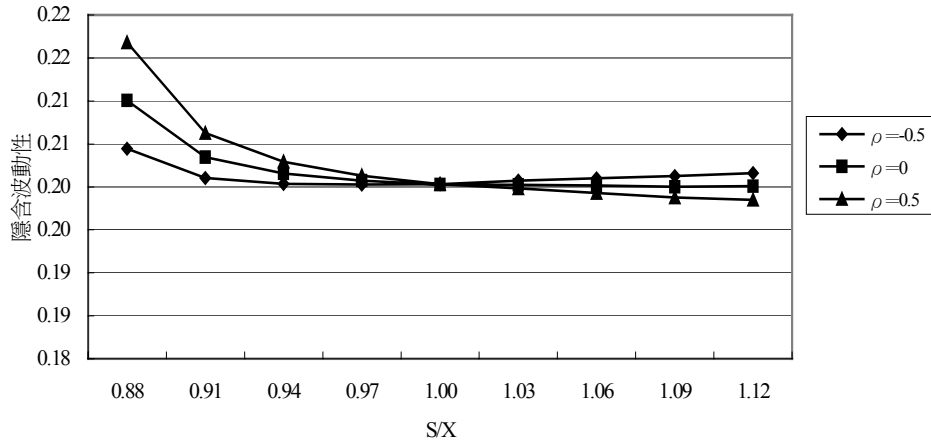
下降而後增加，即呈現「微笑波幅」的性質。



圖五 不同S/X比率下的隱含波動性($\theta = 0$)



圖六 不同S/X比率下的隱含波動性($\theta = 0.5$)



圖七 不同S/X比率下的隱含波動性($\theta = 1$)

肆、結 論

本文結合Hillard-Schwartz的雙元二項樹及雙元二項樹轉換模型及Boyle-Tian的單元三項樹轉換模型的優點，進而發展出一雙元多項樹模型來評價障礙選擇權；在本文模型之下，當障礙價格上、下限各設為零和無窮大，且令 $\lambda = 1$ ，則本文模型將與H-S模型相同；反之，若使標的資產價格波動性標準差趨近於零，則本文模型將與Boyle-Tian之模型相同，因此H-S和B-T模型分別是本文模型的一個特例。我們將本文所得到的結論歸納如下：

1.在觀察隨機波動性對選擇權價格的影響中，我們發覺隨機波動性對障礙選擇權的影響比對標準選擇權的影響來的大，而且當障礙價格愈接近初始股價時，隨機波動性對障礙選擇權的價格的影響也就愈大。

2.隨著相關係數 ρ_{sv} 的增加，障礙選擇權價格亦微幅增加，而當相關係數 ρ_{sv} 為正時，隨著標的資產的標準差 b 增加，在CEV係數 $\theta = 0$ 或 $\theta = 1$ 的情況下，障礙選擇權價格的將變小；若相關係數 ρ_{sv} 為負時，隨著標的資產的標準差 b 增加，在CEV係數 $\theta = 0$ 的情況下，障礙選擇權價格將變小，但在常數彈性變異係數 $\theta = 1$ 的情況下，障礙選擇權價格卻隨著變大。

3.利用本文模型及H-S模型來計算標準歐式買權的delta、vega、gamma

等避險比率值，並與B-S模型所推導出來的結果作比較，結果發現使用本文模型與H-S模型所計算出來的避險比率，和利用B-S模型所計算出來的避險比率相差無幾，可以相同到小數後2~3位。

4.分別利用Merton(1973)模型、及本文模型來計算向下終止歐式買權的避險比率delta及gamma值，發現在本文模型 $b=0.000001$ 下(即變異數為固定)，其delta與gamma值與Merton(1973)模型所推導出來的結果大致可以相同到小數後2~3位；而在考慮隨機波動性對選擇權價格的影響下，即在標的資產的標準差 $b=0.2$ 情況下來計算向下終止障礙選擇權的避險比率，結果發現，隨著 b 值的增加，delta值將變小而gamma值則變大。

5.隨著股價/執行價比(S/X)的增加，選擇權的隱含波動性下降，且呈現「半微笑(smirk curve)」情形；而當CEV參數係數 $\theta=1$ 且相關係數 $\rho_{sv}=-0.5$ 或0時，隨著股價/執行價比(S/X)的增加，選擇權的隱含波動性先下降而後增加，即呈現「微笑波幅」的性質。

參考文獻

1. Bakshi, G., Cao, C., and Chen, Z., 1997, "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models." *Journal of Financial Economics*, 52, 2003-2049.
2. Black, F. and M. Scholes. 1973, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities." *Journal of Political Economy*, 3, 637-654.
3. Boyle, P. P. March 1988, "A Lattice Framework for Options with Two State Variables." *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23, 1-12.
4. Boyle, P. P., and S. H. Lau. 1994, "Bumping Up against the Barrier with the Binomial Method." *Journal of Derivatives*, 2, 6-14.
5. Boyle, P. P., and Y. S. Tian. 1999, "Pricing Lookback and Barrier Option under the CEV Process." *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 34, June, 241-264.
6. Cheuk, T. H. F., and T. C. F. Vorst. 1994a, "Real-Life Barrier Option." Unpubl. Manuscript, Erasmus Univ., Rotterdam, the Netherlands.
7. _____. 1996, "Complex Barrier Option." *Journal of Derivatives*, 4, 8-22.

8. Cox, J. C. 1975, "Notes on Option Pricing I :Constant Elasticity of Variance Diffusions." Unpubl. Note, Stanford Univ.
9. _____.1996, special issue honoring Fischer Black, "The Constant Elasticity of Variance Option Pricing Model." *Journal of Portfolio Management*, 22, 15-17.
10. Cox, J. C.; S. A. Ross; and M. Rubinstein. 1979, "Option Pricing: A Simplified Approach." *Journal of Financial Economics*, 7, 229-264.
11. Derman, E.; I. Kain; D. Ergener; and I. Bardhan. 1995, "Enhanced Numerical Methods for Options with Barriers." *Financial Analysts Journal*, 51, 65-74.
12. Duan, J., 1995, "The GARCH Option Pricing Model," *Mathematical Finance*, 5, 13-32.
13. Engle, R., 1982, "Autoregressive Conditional Heteroscedacity with Estimates of the Variance of UK Inflation," *Econometrica*, 50, 987-1108.
14. Hilliard J. E., and A. Schwartz. 1996, "Binomial Option Pricing Under Stochastic Volatility and Correlated State Variables." *The Journal of Derivatives*, 23-39.
15. Hull, J., and A. White. 1988, "An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by Stochastic Volatility." *Advances in Futures and Option Research*, 3, 27-61.
16. _____. 1987, "The Pricing of Option on Assets with Stochastic Volatilities." *Journal of Finance*, 42, 281-300.
17. _____. 1990, "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method." *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, 87-100.
18. Kamrad, B., and P. Ritchken. 1991, "Multinomial Approximating Models for Options with k-State Variables." *Management Science*, 37, 1640-1652.
19. Merton, R. C. 1973, "Theory of Rational Option Pricing." *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141-183.
20. Nelson D. B., and K. Ramaswamy. 1990, "Simple Binomial Processes as Diffusion Approximations in Financial Models." *Review of Financial Studies*, 3, 393-430.
21. Ritchken, P. 1995, "On Pricing Barrier Options." *Journal of Derivatives*, 3, 19-28.

22. Rubinstein, M.E., 1976, "The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options," *Bell Journal of Economics*, 7, 407-425.
23. Scott, L. 1996, "Reference Checks : A Bibliography of Exotic Option Models." *Journal of Derivatives*, Spring, 65-78.
24. Sharpe, W. F. Investments (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ), (1978).

表一 在各種不同模型之下標準歐式買權的價格

S = 100, r = 0.1, T = 0.5, $\sigma = 0.25$, N = 250, $\rho_{sv} = 0$												
B-S模型			本文模型(b = 0.000001) (Boyle-Tian模型)				本文模型(b = 0.1)			隨機波動性 所造成之差距百分比		
B_u	B_d	X	(1) $\theta = 1$	(2) $\theta = 0$	(3) $\theta = 0.5$	(4) $\theta = 1$	(5) $\theta = 0$	(6) $\theta = 0.5$	(7) $\theta = 1$	(8) (%)	(9) (%)	(10) (%)
$+\infty$	0	95	12.5880	12.7439	12.6641	12.5892	12.7419	12.6621	12.5882	0.0228	0.0197	0.0079
$+\infty$	0	100	9.5822	9.5885	9.5818	9.5798	9.5902	9.5833	9.5786	0.0063	0.0094	0.0125
$+\infty$	0	105	7.0996	6.9413	7.0186	7.1018	6.9386	7.0154	7.1000	0.0547	0.0556	0.0253

註：此表列出在B-S模型、本文模型b = 0.000001下(Boyle-Tian模型)、及本文模型b = 0.1下分別求出之標準歐式買權價格。其中二項樹切割期數N為250期，股價S = 100，無風險利率r = 10%，到期期間為半年， θ 為CEV模型之參數係數，當 θ 為1時，股價變動為對數常態分配，且假設其股價變動最初標準差 $\sigma_{BS} = 0.25$ ，並在不同的CEV參數下，調整其股價變動最初標準差 $\sigma = \sigma_{BS} * S^{(1-\theta)}$ ，如此即可在相同瞬間變動標準差下做比較。股價與其變異數間的相關係數 $\rho_{sv} = 0$ ， B_u 為向上障礙價格， B_d 為向下障礙價格，當 $B_d = 0$ 而 $B_u = \infty$ 時，障礙選擇權相當於標準選擇權；而X為執行價，b為變異數變動量(dV)之浮動係數，其分別假設為0.000001及0.1，b取如此小是為了使變異數的變動趨近於0。另外(8)、(9)、(10)行之值分別為(2)與(5)行、(3)與(6)行、(4)與(7)行所求出選擇權價格之間的差距百分比。

表二 在各種不同模型之下向下終止(down-and-out)歐式買權的價格

S=100, r=0.1, T=0.5, $\sigma=0.25$, N=250, $\rho_{sv}=0$													
			Merton	本文模型(b=0.000001)				本文模型(b=0.1)			隨機波動性		
			封閉解	(Boyle-Tian模型)							所造成之差距百分比		
			(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	
B _u	B _d	X	$\theta=1$	$\theta=0$	$\theta=0.5$	$\theta=1$	$\theta=0$	$\theta=0.5$	$\theta=1$	(%)	(%)	(%)	
+∞	90	95	10.6308	10.5744	10.6028	10.6321	10.8174	10.8337	10.8500	2.2980	2.1768	2.0495	
+∞	90	100	8.3698	8.2409	8.3039	8.3705	8.4071	8.4616	8.5154	2.0118	1.8967	1.7311	
+∞	90	105	6.3722	6.1462	6.2577	6.3749	6.2498	6.3565	6.4670	1.6740	1.5724	1.4447	
+∞	95	95	6.9582	6.9987	6.9789	6.9586	7.4816	7.5023	7.4246	6.9044	7.5028	6.6983	
+∞	95	100	5.6718	5.6294	5.6504	5.6726	5.9934	6.0481	6.0257	6.4661	7.0384	6.2265	
+∞	95	105	4.4653	4.3335	4.3986	4.4668	4.5957	4.6870	4.7238	6.0456	6.5542	5.7536	

註：此表列出在Merton(1973)封閉解模型、本文模型b=0.000001下(Boyle-Tian模型)、及本文模型b=0.1下分別求出之向下終止歐式買權價格。其中二項數切割期數N為250期，股價S=100，無風險利率r=10%，到期期間為半年， θ 為CEV模型之參數係數，當 θ 為1時，股價變動為對數常態分配，且假設其股價變動最初標準差 $\sigma_{BS}=0.25$ ，並在不同的CEV參數下，調整其股價變動最初標準差 $\sigma = \sigma_{BS} * S^{(1-\theta)}$ ，如此即可在相同瞬間變動標準差下做比較。股價與其變異數間的相關係數 $\rho_{sv}=0$ ， B_u 為向上障礙價格， B_d 為向下障礙價格，而X為執行價，b為變異數變動量(dV)之浮動係數，其分別假設為0.000001及0.1，b取如此小是為了使變異數的變動趨近於0。另外(8)、(9)、(10)行之值分別為(2)與(5)行、(3)與(6)行、(4)與(7)行所求出選擇權價格之間的差距百分比。

表三 在各種不同模型之下向上終止(up-and-out)歐式買權的價格

S = 100, r = 0.1, T = 0.5, $\sigma = 0.25$, N = 250, $\rho_{sv} = 0$												
			Merton 封閉解	本文模型(b=0.000001) (Boyle-Tian模型)				本文模型(b=0.1)			隨機波動性 所造成之差距百分比	
B _u	B _d	X	(1) $\theta = 1$	(2) $\theta = 0$	(3) $\theta = 0.5$	(4) $\theta = 1$	(5) $\theta = 0$	(6) $\theta = 0.5$	(7) $\theta = 1$	(8) (%)	(9) (%)	(10) (%)
120	0	95	2.8628	3.4354	3.1285	2.8533	3.6617	3.3730	3.0953	6.6245	7.8359	8.4814
120	0	100	1.5374	1.9277	1.7156	1.5267	2.0912	1.8898	1.6942	8.5210	10.180	10.971
120	0	105	0.6711	0.8857	0.7694	0.6674	0.9860	0.8736	0.7688	11.375	13.558	15.193
140	0	95	8.9572	10.6258	9.8121	8.9546	10.7450	9.9606	9.1491	1.1332	1.5217	2.1732
140	0	100	6.3383	7.6979	7.0353	6.3333	7.8055	7.1669	6.5005	1.4083	1.8793	2.6400
140	0	105	4.2421	5.2783	4.7770	4.2419	5.3660	4.8842	4.3815	1.6692	2.2526	3.2910

註：此表列出在Merton(1973)封閉解模型、本文模型b=0.000001下(Boyle-Tian模型)、及本文模型b=0.1下分別求出之向上終止歐式買權價格。其中二項樹切割期數N為250期，股價S=100，無風險利率r=10%，到期期間為半年， θ 為CEV模型之參數係數，當 θ 為1時，股價變動為對數常態分配，且假設其股價變動最初標準差 $\sigma_{BS}=0.25$ ，並在不同的CEV參數下，調整其股價變動最初標準差 $\sigma = \sigma_{BS} * S^{(1-\theta)}$ ，如此即可在相同瞬間變動標準差下做比較。股價與其變異數間的相關係數 $\rho_{sv}=0$ ，B_u為向上障礙價格，B_d為向下障礙價格，而X為執行價，b為變異數變動量(dV)之浮動係數，其分別假設為0.000001及0.1，b取如此小是為了使變異數的變動趨近於0。另外(8)、(9)、(10)行之值分別為(2)與(5)行、(3)與(6)行、(4)與(7)行所求出選擇權價格之間的差距百分比。

表四 在各種不同模型之下雙向終止(double-knock-out)歐式買權的價格

S = 100, r = 0.1, T = 0.5, $\sigma = 0.25$, N = 250, $\rho_{sv} = 0$											
			本文模型(b = 0.000001)			本文模型(b = 0.1)			隨機波動性		
			(Boyle-Tian模型)						所造成之差距百分比		
B _u	B _d	X	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
			$\theta = 0$	$\theta = 0.5$	$\theta = 1$	$\theta = 0$	$\theta = 0.5$	$\theta = 1$	(%)	(%)	(%)
120	90	95	2.0745	1.8748	1.6977	2.4022	2.2048	1.9522	16.1100	17.8974	15.3033
120	90	100	1.2326	1.0898	0.9639	1.4434	1.3012	1.1293	17.4260	19.6946	17.3909
120	90	105	0.5913	0.5098	0.4391	0.7077	0.6252	0.5327	19.9898	22.9257	21.5378
140	95	95	5.2863	4.7214	4.1377	5.4148	4.5487	4.5911	2.3205	3.7149	10.8988
140	95	100	4.1014	3.6344	3.1517	4.2090	3.5114	3.4976	2.5485	3.4375	10.9222
140	95	105	2.9908	2.6247	2.2460	3.0786	2.5504	2.4990	2.8634	2.8826	11.2100

註：此表列出在本文模型b = 0.000001下(Boyle-Tian模型)、及本文模型b = 0.1下分別求出之雙向終止歐式買權價格。其中二項樹切割期數N為250期，股價S = 100，無風險利率r = 10%，到期期間為半年， θ 為CEV模型之參數係數，當 θ 為1時，股價變動為對數常態分配，且假設其股價變動最初標準差 $\sigma_{BS} = 0.25$ ，並在不同的CEV參數下，調整其股價變動最初標準差 $\sigma = \sigma_{BS} * S^{(1-\theta)}$ ，如此即可在相同瞬間變動標準差下做比較。股價與其變異數間的相關係數 $\rho_{sv} = 0$ ，B_u為向上障礙價格，B_d為向下障礙價格，而X為執行價，b為變異數變動量(dV)之浮動係數，其分別假設為0.000001及0.1，b取如此小是為了使變異數的變動趨近於0。另外(8)、(9)、(10)行之值分別為(2)與(5)行、(3)與(6)行、(4)與(7)行所求出選擇權價格之間的差距百分比。

表五 在各種不同模型之下標準美式賣權的價格

S = 100, r = 0.1, T = 0.5, $\sigma = 0.25$, N = 250, $\rho_{sv} = 0$												
			CRR 模型	本文模型(b = 0.000001) (Boyle-Tian模型)				本文模型(b = 0.1)			隨機波動性 所造成之差距百分比	
			(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
B_u	B_d	X	$\theta = 1$	$\theta = 0$	$\theta = 0.5$	$\theta = 1$	$\theta = 0$	$\theta = 0.5$	$\theta = 1$	(%)	(%)	(%)
$+\infty$	0	95	3.2337	3.3560	3.2930	3.2337	3.3542	3.2907	3.2328	0.0536	0.0699	0.0278
$+\infty$	0	100	5.2218	5.1779	5.1981	5.2218	5.1784	5.1977	5.2209	0.0097	0.0077	0.0172
$+\infty$	0	105	7.8779	7.6643	7.7688	7.8779	7.6628	7.7661	7.8769	0.0196	0.0348	0.0127

註：此表列出在CRR模型、本文模型b = 0.000001下(Boyle-Tian模型)、及本文模型b = 0.1下分別求出之標準美式賣權價格。其中二項樹切割期數N為250期，股價S = 100，無風險利率r = 10%，到期期間為半年， θ 為CEV模型之參數係數，當 θ 為1時，股價變動為對數常態分配，且假設其股價變動最初標準差 $\sigma_{BS} = 0.25$ ，並在不同的CEV參數下，調整其股價變動最初標準差 $\sigma = \sigma_{BS} * S^{(1-\theta)}$ ，如此即可在相同瞬間變動標準差下做比較。股價與其變異數間的相關係數 $\rho_{sv} = 0$ ， B_u 為向上障礙價格， B_d 為向下障礙價格，當 $B_d = 0$ 而 $B_u = \infty$ 時，障礙選擇權相當於標準選擇權；而X為執行價，b為變異數變動量(dV)之浮動係數，其分別假設為0.000001及0.1，b取如此小是為要使變異數的變動趨近於0。另外(8)、(9)、(10)行之值分別為(2)與(5)行、(3)與(6)行、(4)與(7)行所求出選擇權價格之間的差距百分比。

表六 在各種不同模型之下向下終止(down-and-out)美式賣權的價格

S=100, r=0.1, T=0.5, $\sigma=0.25$, N=250, $\rho_{sv}=0$											
本文模型(b=0.000001)			本文模型(b=0.1)			隨機波動性			所造成之差距百分比		
(Boyle-Tian模型)											
B _u	B _d	X	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
			$\theta=0$	$\theta=0.5$	$\theta=1$	$\theta=0$	$\theta=0.5$	$\theta=1$	(%)	(%)	(%)
$+\infty$	90	95	2.0771	2.1061	2.2003	2.0324	1.9825	2.1803	2.1520	5.8687	0.9090
$+\infty$	90	100	4.7319	4.7936	4.8911	4.7124	4.7317	4.8791	0.4121	1.2913	0.2453
$+\infty$	90	105	7.6130	7.7218	7.8444	7.6081	7.7052	7.8394	0.0644	0.2150	0.0637
$+\infty$	95	95	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$+\infty$	95	100	3.0794	3.1177	3.1574	3.0326	2.8447	3.1557	1.5198	8.7565	0.0538
$+\infty$	95	105	6.8910	6.9686	7.0496	6.8683	6.7443	7.0465	0.3294	3.2187	0.0440

註：此表列出在本文模型b=0.000001下(Boyle-Tian模型)、及本文模型b=0.1下分別求出之向下終止美式賣權價格。其中二項樹切割期數N為250期，股價S=100，無風險利率r=10%，到期期間為半年， θ 為CEV模型之參數係數，當 θ 為1時，股價變動為對數常態分配，且假設其股價變動最初標準差 $\sigma_{BS}=0.25$ ，並在不同的CEV參數下，調整其股價變動最初標準差 $\sigma=\sigma_{BS}*S^{(1-\theta)}$ ，如此即可在相同瞬間變動標準差下做比較。股價與其變異數間的相關係數 $\rho_{sv}=0$ ，B_u為向上障礙價格，B_d為向下障礙價格，而X為執行價，b為變異數變動量(dV)之浮動係數，其分別假設為0.000001及0.1，b取如此小是為了使變異數的變動趨近於0。另外(8)、(9)、(10)行之值分別為(2)與(5)行、(3)與(6)行、(4)與(7)行所求出選擇權價格之間的差距百分比。

表七 在不同的隨機波動性之係數**b**及相關係數 ρ_{sv} 下的向下終止歐式買權價格

S = 100, X = 100, B _d = 90, r = 0.1, T = 0.5, $\sigma = 0.25$, N = 250					
CEV係數 θ	$\rho_{sv} = -0.5$	$\rho_{sv} = -0.25$	$\rho_{sv} = 0$	$\rho_{sv} = 0.25$	$\rho_{sv} = 0.5$
Panel A : b=5%					
$\theta = 0$	8.4153	8.4214	8.4266	8.4274	8.4310
$\theta = 0.5$	8.4309	8.4684	8.4685	8.4664	8.4807
$\theta = 1$	8.4406	8.4770	8.5156	8.5572	8.6030
Panel B : b=15%					
$\theta = 0$	8.3955	8.3971	8.4034	8.4115	8.4282
$\theta = 0.5$	8.4402	8.4425	8.4514	8.4719	8.4763
$\theta = 1$	8.4654	8.4889	8.5147	8.5435	8.5763
Panel C : b=25%					
$\theta = 0$	8.3703	8.3822	8.3993	8.4039	8.4073
$\theta = 0.5$	8.3870	8.4724	8.4604	8.4668	8.5063
$\theta = 1$	8.4830	8.4951	8.5106	8.5300	8.5518

註：此表列出在不同的變異數變動量(dV)之浮動係數**b**及股價與其變異數間之相關係數 ρ_{sv} 下，由本文模型所求出之向下終止歐式買權價格。其中二項樹切割期數N為250期，股價S=100，執行價X=100，向下障礙價格B_d=90，無風險利率r=10%，到期期間為半年，股價變動最初標準差 $\sigma_{BS} = 0.25$ ， θ 為CEV模型之參數係數，當 θ 為1時，股價變動為對數常態分配。圖表A部分假設b=5%，圖表B部分則假設b=15%，而圖表C部分則假設b=25%。

表八 在不同股價/執行價比率下之一般標準歐式買權的避險比率

X=100, r=0.05, T=0.5, N=250, b=0.0001, $\rho_{sv}=0$									
S/X	Delta			Vega			Gamma(x100)		
	B-S	H-S	本文模型	B-S	H-S	本文模型	B-S	H-S	本文模型
Panel A：最初股價波動標準差 $\sigma_{BS}=15\%$									
0.8	0.035	0.035	0.035	0.044	0.044	0.044	0.905	0.911	0.907
0.9	0.241	0.241	0.241	0.198	0.198	0.198	3.261	3.261	3.261
1.0	0.614	0.614	0.614	0.271	0.272	0.271	3.608	3.604	3.606
1.1	0.883	0.882	0.882	0.153	0.155	0.154	1.690	1.691	1.691
1.2	0.978	0.978	0.978	0.045	0.047	0.046	0.418	0.420	0.419
Panel B：最初股價波動標準差 $\sigma_{BS}=20\%$									
0.8	0.092	0.092	0.092	0.093	0.093	0.093	1.455	1.460	1.458
0.9	0.309	0.309	0.309	0.224	0.225	0.225	2.770	2.768	2.768
1.0	0.598	0.598	0.598	0.274	0.274	0.274	2.736	2.733	2.734
1.1	0.822	0.821	0.821	0.203	0.206	0.204	1.677	1.676	1.677
1.2	0.938	0.938	0.938	0.104	0.105	0.105	0.722	0.723	0.723
Panel C：最初股價波動標準差 $\sigma_{BS}=25\%$									
0.8	0.151	0.151	0.151	0.132	0.133	0.133	1.655	1.656	1.656
0.9	0.357	0.357	0.357	0.237	0.238	0.238	2.345	2.341	2.343
1.0	0.591	0.591	0.591	0.275	0.277	0.276	2.198	2.196	2.196
1.1	0.779	0.779	0.779	0.231	0.234	0.232	1.527	1.524	1.526
1.2	0.896	0.896	0.896	0.153	0.154	0.154	0.849	0.850	0.850

註：此表列出在Black-Scholes、Hilliard-Schwartz、及本文模型下分別求出之歐式買權的避險比率。其中二項樹切割期數N為250期，S/X為股價與執行價的比率，執行價X=100，無風險利率r=5%，到期期間為半年，H-S模型及本文模型採用相同參數條件，即股價與其變異數間的相關係數 $\rho_{sv}=0$ ，變異數變動量(dV)之浮動係數b=0.0001，b取如此小是為與固定變異數下之模型(Boyle-Tian模型)做比較。而避險比率的計算，本論文之模型及H-S模型則採用Cheuk-Vorst所建議的節點回推法(backward)，至於Gamma值部分為乘上100倍之後的結果。

表九 比較在各種不同模型下之向下終止(down-and-out)歐式買權的Delta值

X=100, Bd=90, r=0.05, T=0.5, N=250, $\rho_{sv}=0$										
S/X	Merton 封閉解	本文模型(b=0.000001) (Boyle-Tian模型)			本文模型(b=0.1)			隨機波動性 所造成之差距百分比		
	(1) $\theta=1$	(2) $\theta=0$	(3) $\theta=0.5$	(4) $\theta=1$	(5) $\theta=0$	(6) $\theta=0.5$	(7) $\theta=1$	(8) (%)	(9) (%)	(10) (%)
Panel A：最初股價波動標準差 σ BS=15%										
0.95	0.521	0.501	0.511	0.521	0.490	0.501	0.510	-2.1956	-1.9569	-2.1113
1.00	0.642	0.630	0.636	0.643	0.625	0.632	0.639	-0.7937	-0.6289	-0.6221
1.05	0.781	0.765	0.772	0.780	0.763	0.771	0.779	-0.2614	-0.1295	-0.1282
1.10	0.884	0.865	0.874	0.884	0.864	0.874	0.884	-0.1156	0	0
Panel B：最初股價波動標準差 σ BS=20%										
0.95	0.628	0.604	0.616	0.629	0.589	0.601	0.614	-2.4834	-2.4351	-2.3847
1.00	0.679	0.667	0.673	0.679	0.656	0.667	0.670	-1.6492	-0.8915	-1.3255
1.05	0.759	0.746	0.752	0.759	0.740	0.747	0.754	-0.8043	-0.6649	-0.6588
1.10	0.836	0.819	0.827	0.836	0.815	0.824	0.834	-0.4884	-0.3628	-0.2392
Panel C：最初股價波動標準差 σ BS=25%										
0.95	0.706	0.679	0.693	0.707	0.661	0.675	0.691	-2.6510	-2.5974	-2.2631
1.00	0.725	0.711	0.718	0.726	0.696	0.704	0.713	-2.1097	-1.9499	-1.7906
1.05	0.769	0.759	0.764	0.769	0.747	0.754	0.760	-1.5810	-1.3089	-1.1704
1.10	0.820	0.808	0.814	0.820	0.800	0.807	0.815	-0.9901	-0.8600	-0.6098

註：此表列出分別由Merton(1973)封閉解模型、本文模型b=0.000001(Boyle-Tian模型)、及本文模型b=0.2下求出的向下終止歐式買權之避險比率，其中二項樹切割期數N為250期，S/X為股價與執行價間的比率，執行價X=100，向下終止價格Bd=90，無風險利率r=5%，到期期間為半年， θ 為CEV模型之參數係數， σ BS為股價變動之最初標準差，並在不同的CEV參數下，調整其股價變動最初標準差 $\sigma = \sigma BS \cdot S(1-\theta)$ ，如此即可在相同瞬間變動標準差下做比較。股價與其變異數間的相關係數 $\rho_{sv}=0$ ，變異數變動量(dV)之浮動係數b，b取0.000001是為为了使變異數的變動趨近於0，而取0.1是為为了觀察隨機波動性的影響。本文模型的避險比率之計算採用Cheuk-Vorst所建議的節點回推法(backward)。另外(8)、(9)、(10)行之值分別為(2)與(5)、(3)與(6)、(4)與(7)行所求出選擇權delta值之間的差距百分比。

表十 比較在各種不同模型下之向下終止(down-and-out)歐式買權的Gamma值

X=100, Bd=90, r=0.05, T=0.5, N=250, $\rho_{sv}=0$										
	Merton 封閉解	本文模型(b=0.000001) (Boyle-Tian模型)				本文模型(b=0.2)			隨機波動性 所造成之差距百分比	
S/X	(1) $\theta = 1$	(2) $\theta = 0$	(3) $\theta = 0.5$	(4) $\theta = 1$	(5) $\theta = 0$	(6) $\theta = 0.5$	(7) $\theta = 1$	(8) (%)	(9) (%)	(10) (%)
Panel A：最初股價波動標準差 σ BS=15%										
0.95	1.624	1.605	1.608	1.615	1.792	1.756	1.775	11.6511	9.2040	9.9071
1.00	2.866	2.796	2.830	2.862	2.898	2.913	2.956	3.6481	2.9329	3.2844
1.05	2.496	2.528	2.515	2.495	2.574	2.550	2.527	1.8196	1.3917	1.2826
1.10	1.637	1.795	1.720	1.638	1.814	1.731	1.646	1.0585	0.6395	0.4884
Panel B：最初股價波動標準差 σ BS=20%										
0.95	0.411	0.420	0.411	0.404	0.503	0.548	0.451	19.7619	33.3333	11.6337
1.00	1.446	1.365	1.403	1.442	1.489	1.474	1.556	9.0842	5.0606	7.9057
1.05	1.647	1.570	1.608	1.643	1.657	1.683	1.714	5.5414	4.6642	4.3214
1.10	1.410	1.408	1.413	1.409	1.464	1.458	1.445	3.9773	3.1847	2.5550
Panel C：最初股價波動標準差 σ BS=25%										
0.95	-0.031	-0.010	-0.023	-0.035	0.154	0.311	0.351	1640.0000	1452.1739	1102.8571
1.00	0.698	0.644	0.668	0.695	0.757	0.768	0.787	17.5466	14.9701	13.2374
1.05	0.997	0.909	0.950	0.993	1.006	1.037	1.076	10.6711	9.1579	8.3585
1.10	1.014	0.944	0.980	1.013	1.018	1.043	1.068	7.8390	6.4286	5.4294

註：此表列出分別由Merton(1973)封閉解模型、本文模型b=0.000001(Boyle-Tian模型)、及本文模型b=0.2下求出的向下終止歐式買權之避險比率，其中二項樹切割期數N為250期，S/X為股價與執行價間的比率，執行價X=100，向下終止價格Bd=90，無風險利率r=5%，到期期間為半年， θ 為CEV模型之參數係數， σ BS為股價變動之最初標準差，並在不同的CEV參數下，調整其股價變動最初標準差 $\sigma = \sigma BS \cdot S(1-\theta)$ ，如此即可在相同瞬間變動標準差下做比較。股價與其變異數間的相關係數 $\rho_{sv}=0$ ，變異數變動量(dV)之浮動係數b，b取0.000001是為了使變異數的變動趨近於0，而取0.2是為了觀察隨機波動性的影響。本文模型的避險比率之計算採用Cheuk-Vorst所建議的節點回推法(backward)，而Gamma部分則為乘上100倍之後的結果。另外(8)、(9)、(10)行之值分別為(2)與(5)、(3)與(6)、(4)與(7)行所求出選擇權delta值之間的差距百分比。

表十一 估計在不同股價/執行價比率下之向下終止(down-and-out)歐式買權的隱含波動性

X = 100, B _d = 85, r = 0.05, T = 0.5, N = 250, b = 0.1, $\sigma = 0.25$									
S/X	$\rho_{sv} = -0.5$			$\rho_{sv} = 0$			$\rho_{sv} = 0.5$		
	$\theta = 0$	$\theta = 0.5$	$\theta = 1$	$\theta = 0$	$\theta = 0.5$	$\theta = 1$	$\theta = 0$	$\theta = 0.5$	$\theta = 1$
1.12	0.1905	0.1960	0.2016	0.1888	0.1943	0.2001	0.1871	0.1927	0.1985
1.09	0.1927	0.1969	0.2013	0.1914	0.1957	0.2000	0.1900	0.1944	0.1988
1.06	0.1949	0.1979	0.2010	0.1940	0.1970	0.2002	0.1930	0.1961	0.1993
1.03	0.1972	0.1989	0.2007	0.1966	0.1984	0.2002	0.1961	0.1979	0.1998
1.00	0.1995	0.2000	0.2003	0.1993	0.1999	0.2003	0.1992	0.1998	0.2003
0.97	0.2018	0.2010	0.2003	0.2021	0.2014	0.2008	0.2025	0.2018	0.2013
0.94	0.2045	0.2025	0.2004	0.2052	0.2034	0.2016	0.2061	0.2043	0.2029
0.91	0.2077	0.2052	0.2010	0.2095	0.2064	0.2035	0.2110	0.2080	0.2063
0.88	0.2194	0.2125	0.2045	0.2183	0.2146	0.2101	0.2221	0.2179	0.2168

註：本表的隱含波動率計算方式是由本文模型下先求出向下終止歐式買權的價格，並將此價格當作真實價格後透過Merton(1973)所導出的封閉解公式來計算此價格下的隱含波動性。其中二項樹切割期數N為250期，S/X為股價與執行價間的比率，執行價X = 100，向下終止價格B_d = 85，無風險利率r = 5%，最初股價波動標準差 $\sigma = 0.2$ ，變異數變動量(dV)之浮動係數b = 0.1，到期期間為半年，而 ρ_{sv} 為股價與其變異數間的相關係數。