

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫 ☒ 成果報告
☐ 期中進度報告

高速銑削模具鋼之研究 (3/3)

計畫類別：☒ 個別型計畫 ☐ 整合型計畫

計畫編號：NSC 91 - 2212 - E - 002 - 048

執行期間：91 年 8 月 1 日至 92 年 7 月 31 日

計畫主持人：廖運炫

共同主持人：

計畫參與人員：

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)：☐ 精簡報告 ☒ 完整報告

本成果報告包括以下應繳交之附件：

☐ 赴國外出差或研習心得報告一份

☐ 赴大陸地區出差或研習心得報告一份

☐ 出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份

☐ 國際合作研究計畫國外研究報告書一份

處理方式：除產學合作研究計畫、提升產業技術及人才培育研究計畫、
列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢

☐ 涉及專利或其他智慧財產權，☐ 一年 ☐ 二年後可公開查詢

執行單位：國立台灣大學機械工程學系

中 華 民 國 九 十 二 年 八 月 一 日

摘 要

顫振 (chatter) 在切削加工上一直是個惱人的問題；顫振的發生不但會破壞工件表面精度，對於刀具、甚至工具機的壽命皆有著負面影響。

前人曾提出利用顫振頻率與一固定實數來調整主軸轉速以抑制顫振的策略。其中的固定實數可代表預期的系統相位差值，也就是刀刃振動與工件表面波紋的相位差。若系統的相位差達到此一預期值時，系統便可穩定。此法事先不需要對工具機做精確的系統識別，可以廣泛地應用在不同的工具機上。但此法有時會發生無法順利將系統調整至穩定的情況。

經過理論推導後，本文針對上述現象提出一解釋，指出主軸轉速改變會同時造成系統振動頻率的改變，導致系統無法達到預期的相位差值而失效。因此本文在主軸轉速調整方法上提出一修正，將原本使用的固定實數修正為可變動的實數，而變動的依據則來自於顫振發生時的系統相位差值。若調整前後的系統相位差值能滿足相加之和等於 1，便可減少調整前後系統振動頻率的變動，使調整後的系統能有效接近穩定的相位差值，以達到穩定系統的目的。雖然調整前後系統振動頻率依然有變動存在，但與前人的方法相比，變動幅度已經減小，因此相較之下可以有較佳的調整效率。

本文並以數值模擬與實際加工的方式，針對前人與本文的方法作一比較與驗證。結果顯示，本文所提出的主軸轉速調整方法確實可以一次就使系統達到穩定，因此可以得到較佳的調整效率。

關鍵字：銑削、顫振、主軸轉速調整

Abstract

Chatter, which not only makes damage on the surface finish, but also has negative effect on cutter and machine tool, is always an irritating problem in machining.

The method of spindle speed regulation by adjusting the phase shift between the cutting force and vibration to a specific value was proposed in previous researches. Being not necessary to identify the system parameters accurately, this method can be applied widely to different machine tools. However, this method sometimes is incapable of suppressing chatter.

In this paper, the reason of invalidity of the approach by previous researches is explained. It is found that the phase shift of the system can not be maintain because the chatter frequency will vary once the spindle speed is changed. To solve this problem, a modification is proposed. The new phase shift is adjusted to a value which is equal to 1 minus the phase shift of the system when chatter occurs. It is note that there is still variation in chatter frequency by applying this approach, but the variation is much smaller that the method would be more efficient than those without modification.

Numerical simulations and experiments are conducted to verify the proposed approach. It is found that the spindle speed regulation with modification proposed in this paper has better efficiency than others.

Keywords: milling, chatter, spindle speed regulation

目 錄

中文摘要	一
英文摘要	二
目 錄	三
圖目錄	五
表目錄	八
第一章 緒論	1
1-1 研究動機.....	1
1-2 文獻回顧.....	3
1-3 本文目的.....	11
1-4 本文內容.....	12
第二章 顫振理論	13
2-1 顫振模式分類	13
2-1.1 強迫式振動	13
2-1.2 自激式振動	14
2-2 再生式顫振數學模式的建立	16
2-2.1 問題簡化	16
2-2.2 系統方塊圖與特徵方程式推導	18
2-2.3 系統極圖 (Polar Plot) 推導	20
2-3 系統穩定性圖	25
第三章 主軸轉速調整方法推導與電腦模擬	28
3-1 系統極點於複數平面上的映射	28
3-2 系統振動頻率相位差之關係	32
3-3 主軸轉速調整方法	39
3-4 電腦模擬.....	42

3-5	簡化的誤差	57
第四章	實驗設備與方法	59
4-1	實驗目的	59
4-2	實驗設備	59
4-3	實驗設備架構	62
4-4	線上顫振監控程式之設計	64
4-5	實驗方法	65
第五章	實驗結果與分析	66
5-1	實驗結果	66
5-2	實驗結果分析	81
第六章	結論與建議	82
參考文獻		84

圖 目 錄

圖 1-1	銑削系統的穩定性示意圖	2
圖 1-2	切削系統的穩定性圖	3
圖 1-3	文獻中【2】的三維穩定性圖	4
圖 1-4	文獻中【6】所定義的五個區域	5
圖 2-1	切削力與切削深度關係示意圖	16
圖 2-2	車削系統示意圖	19
圖 2-3	再生式自激振動迴路方塊圖	19
圖 2-4	$G_m(j\omega)$ 函數的實部與虛部	21
圖 2-5	刀刃振動與工件表面波紋之相位差示意圖	22
圖 2-6	相位差在車削與銑削上的示意圖	22
圖 2-7	$G_{cp}(j\omega)$ 函數與 $\frac{bk_c}{k}G_m(j\omega)$ 函數在複數平面上的映射情形	24
圖 2-8	理論上切削系統之穩定性圖	26
圖 2-9	低速穩定原因說明圖	27
圖 2-10	實際上切削系統之穩定性示意圖	27
圖 3-1	$G_m(s = \sigma + j\omega) _{\sigma < 0}$ 與 $G_{cp}(s = \sigma + j\omega) _{\sigma > 0}$ 在複數平面上的映射	29
圖 3-2	σ 與 $\bar{\mu}$ 的對應關係圖	30
圖 3-3	銑削系統極點的映射區域	30
圖 3-4	系統極點映射簡化示意圖	31
圖 3-5	G_{cp} 與 $\frac{bk}{k_c}G_m$ 函數在複數平面的映射	33
圖 3-6	將圖 3-5 (a)、(b) 合併的情形	34
圖 3-7	顫振頻率與相位差及主軸轉速的關係圖	38

圖 3-8	主軸轉速調整方法在微觀上的示意圖	40
圖 3-9	主軸轉速調整示意圖	41
圖 3-10	主軸轉速由初始的 40Hz 在第一秒時調整為 31.7Hz，取第二至十秒作取樣，顫振頻率為 30.375Hz.....	43
圖 3-11	初始主軸轉速為 31.7Hz，取第二至第十秒作取樣，顫振頻率為 30.375Hz.....	43
圖 3-12	模擬二中主軸轉速在穩定性圖上的移動情況 ($\nu=0$)	44
圖 3-13	模擬二中系統在調整過程中的振動情形 ($\nu=0$)	44
圖 3-14	模擬二中主軸轉速在穩定性圖上的移動情況 ($\nu=0.25$)	45
圖 3-15	模擬二中系統在調整過程中的振動情形 ($\nu=0.25$)	46
圖 3-16	模擬二中主軸轉速在穩定性圖上的移動情況 ($\nu=0.16$)	47
圖 3-17	模擬二中系統在調整過程中的振動情形 ($\nu=0.16$)	47
圖 3-18	模擬三中主軸轉速在穩定性圖上的移動情況 ($\nu=0$)	48
圖 3-19	模擬三中系統在調整過程中的振動情形 ($\nu=0$)	49
圖 3-20	模擬三中主軸轉速在穩定性圖上的移動情況 ($\nu=0.25$)	50
圖 3-21	模擬三中系統在調整過程中的振動情形 ($\nu=0.25$)	50
圖 3-22	模擬三中主軸轉速在穩定性圖上的移動情況 ($\nu=0.05$)	51
圖 3-23	模擬三中系統在調整過程中的振動情形 ($\nu=0.05$)	51
圖 3-24	模擬四中主軸轉速在穩定性圖上的移動情況 ($\nu=0$)	53
圖 3-25	模擬四中系統在調整過程中的振動情形 ($\nu=0$)	53
圖 3-26	模擬四中主軸轉速在穩定性圖上的移動情況 ($\nu=0.25$)	54
圖 3-27	模擬四中系統在調整過程中的振動情形 ($\nu=0.25$)	55
圖 3-28	模擬四中主軸轉速在穩定性圖上的移動情況 ($\nu=0.16$)	56
圖 3-29	模擬四中系統在調整過程中的振動情形 ($\nu=0.16$)	56
圖 3-30	簡化過程所產生的誤差	58
圖 4-1	實驗設備架構圖	63

圖 5-1	實驗一 A 中 TPF=513Hz 時的切削力訊號	67
圖 5-2	實驗一 A 中 TPF=513Hz 時的頻譜圖，顫振頻率為 1885Hz.....	68
圖 5-3	實驗一 A 中將 TPF 調整為 471Hz 時的切削力訊號.....	68
圖 5-4	實驗一 A 中 TPF=471Hz 時的頻譜圖，顫振頻率為 1808Hz.....	69
圖 5-5	實驗一 A 的動態切削力比較圖	69
圖 5-6	實驗一 B 中 TPF=513 時的切削力訊號	70
圖 5-7	實驗一 B 中 TPF=513Hz 時的頻譜圖，顫振頻率為 1885Hz.....	70
圖 5-8	實驗一 B 中將 TPF 調整為 433Hz 時的切削力訊號.....	71
圖 5-9	實驗一 B 中 TPF=433Hz 時的頻譜圖	71
圖 5-10	實驗一 B 的動態切削力比較圖.....	72
圖 5-11	實驗二 A 中 TPF=410Hz 時的切削力訊號	72
圖 5-12	實驗二 A 中 TPF=410Hz 時的頻譜圖，顫振頻率為 1900Hz.....	73
圖 5-13	實驗二 A 中將 TPF 調整為 475Hz 時的切削力訊號.....	73
圖 5-14	實驗二 A 中 TPF=475Hz 時的頻譜圖，顫振頻率為 1806Hz.....	74
圖 5-15	實驗二 A 的動態切削力比較圖	74
圖 5-16	實驗二 B 中 TPF=410Hz 時的切削力訊號.....	75
圖 5-17	實驗二 B 中 TPF=410Hz 時的頻譜圖，顫振頻率為 1890Hz.....	75
圖 5-18	實驗二 B 中將 TPF 調整為 430Hz 時的切削力訊號.....	76
圖 5-19	實驗二 B 中 TPF=430Hz 時的頻譜圖	76
圖 5-20	實驗二 B 的動態切削力比較圖.....	77
圖 5-21	實驗三中 TPF=513Hz 時的切削力訊號	78
圖 5-22	實驗三中 TPF=513Hz 時的頻譜圖，顫振頻率為 1910Hz.....	78
圖 5-23	實驗三中將 TPF 調整為 582Hz 時的切削力訊號.....	79
圖 5-24	實驗三中 TPF=582 時的頻譜圖	79
圖 5-25	實驗三的動態切削力比較圖	80
圖 6-1	考慮兩個模態時的系統穩定性圖	83

表 目 錄

表 3-1	模擬二中主軸轉速調整之過程 ($\nu=0$)	44
表 3-2	模擬二中主軸轉速調整之過程 ($\nu=0.25$)	45
表 3-3	模擬二中主軸轉速調整之過程 ($\nu=0.16$)	46
表 3-4	模擬三中主軸轉速調整之過程 ($\nu=0$)	47
表 3-5	模擬三中主軸轉速調整之過程 ($\nu=0.25$)	49
表 3-6	模擬三中主軸轉速調整之過程 ($\nu=0.05$)	51
表 3-7	模擬四中主軸轉速調整之過程 ($\nu=0$)	53
表 3-8	模擬四中主軸轉速調整之過程 ($\nu=0.25$)	54
表 3-9	模擬四中主軸轉速調整之過程 ($\nu=0.16$)	55

第一章 緒論

1-1 研究動機

銑削加工在製造領域中向來是相當重要的一項技術，不論是傳統的模具開發、航太工業、汽車製造，或是電子、光電、生醫等新興的產業，在生產上對於銑削加工技術都有相當高依賴。高速銑削是銑削加工目前發展的主要趨勢，由於主軸轉速提高，使得進給速度也可以加快，因此縮短了加工時間，提昇了生產效率。除此之外，由於高速銑削具有低切削力、熱量易由切屑帶走等特性，因此具有精度高、熱變形量低等優點。所以，銑削加工技術的提昇，實為增加產業生產力與競爭力的關鍵之一。

材料移除率（material remove rate）常被視為銑削加工效率的一項指標，其意義為單位時間內所移除的材料體積，若材料移除率越大，則表示加工效率快，生產力高。一般來說，要增加材料移除率，除了提高主軸轉速外，也可利用增加切削深度的方法達到目的，但是當切削深度過大時，工具機會發生強烈的振動與噪音，此不穩定的現象稱為「顫振（chatter）」。顫振的發生除了會對工件表面造成破壞，對於刀具、甚至主軸的壽命皆有負面影響，因此，在穩定的前提下，找出能夠達到最大材料移除率的加工參數，以充分發揮工具機性能，一直是許多相關研究所追尋的目標。

圖 1-1 為典型的銑削系統的穩定性圖，其中深色部份代表穩定區域。由圖中可看出，銑削系統的穩定性在某些主軸轉速下會變得特別高，因此，若能使主軸轉速落在狹窄的穩定區間內，將可以避免顫振發生，同時增加穩定的切削深度，進而達到提高材料移除率的目的。以往在主軸轉速的調整上，大多是採用試誤法或憑藉經驗來防止顫振發生，這樣的方式在講求高生產效率與生產自動化的潮流下已不合時宜。因此深入了解顫振發生的機制，以建立顫振控制策略，並且利用電腦強大的計算能力自動執行線上監控顫振的工作，是目前顫振控制的趨勢。

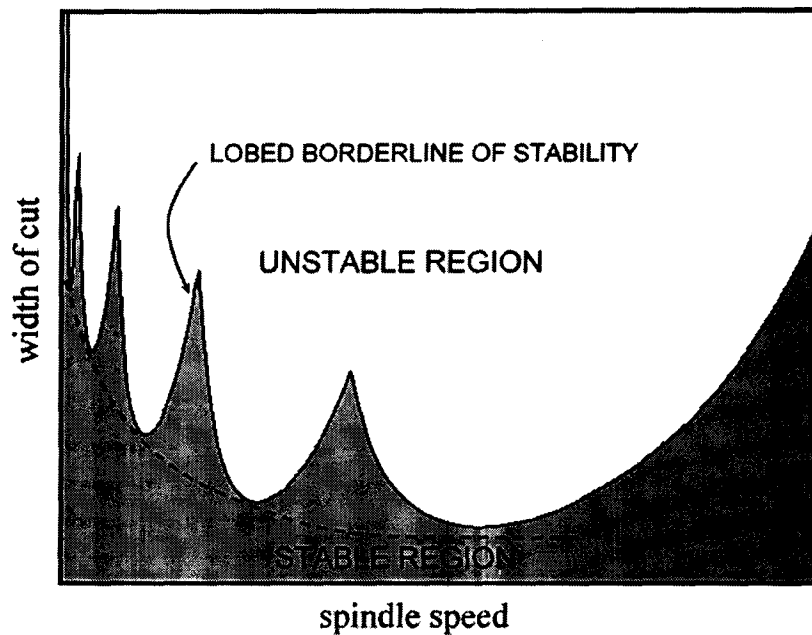


圖 1-1 銑削系統的穩定性示意圖

關於顫振的控制，有許多方法在先前的研究中被提出，這些方法大多需要事先知道系統的參數，但每一台工具機的參數皆有不同，甚至在不同的加工條件下也會有若干差異。因此，有人提出以加工時顫振發生的頻率做為主軸轉速調整的依據，而不需要事先知道系統的參數，這樣的方法在諸多控制策略中可說是最容易直接實現的一個。美中不足的是，利用此方法有時無法一次就順利地將系統調整到穩定狀態，有時甚至在數次的調整後依舊無法將系統穩定【20、21、23】。因此在這方面，仍有值得研究的空間。

1-2 文獻回顧

在銑削行為的分析上，Merritt 等人【1】針對切削系統，結合切削過程的動態特性 (cutting process dynamics) 與工具機結構的動態特性 (structure dynamics) 發展出了一套模式，計算切削系統臨界穩定的切削條件。利用計算出的結果可繪製出一主軸轉速與臨界切削深度的關係圖，稱為穩定性圖 (stability chart)。由此模式所推導出的結果，可以解釋實驗上切削系統的穩定性在某些主軸轉速下特別高的條件性穩定 (conditional stable) 現象。

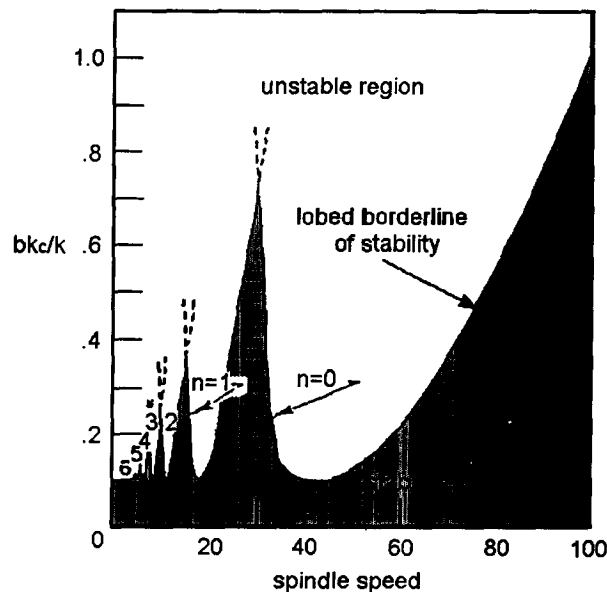


圖 1-2 切削系統的穩定性圖【1】

Hanna 等人【2】考慮切削系統中剛性力與切削力的非線性特性，將原本二維的穩定性圖，延伸為三維穩定性圖，如圖 1-3，此額外增加的一變數為系統振動之振幅大小。由此圖可看出在已知主軸轉速與切削深度下，系統振動的振幅會收斂至一相對應值而並非無限制地發散。至於收斂過程

中，系統狀態的變化，作者則以一般非線性系統中的「跳躍現象 (jump)」加以解釋。

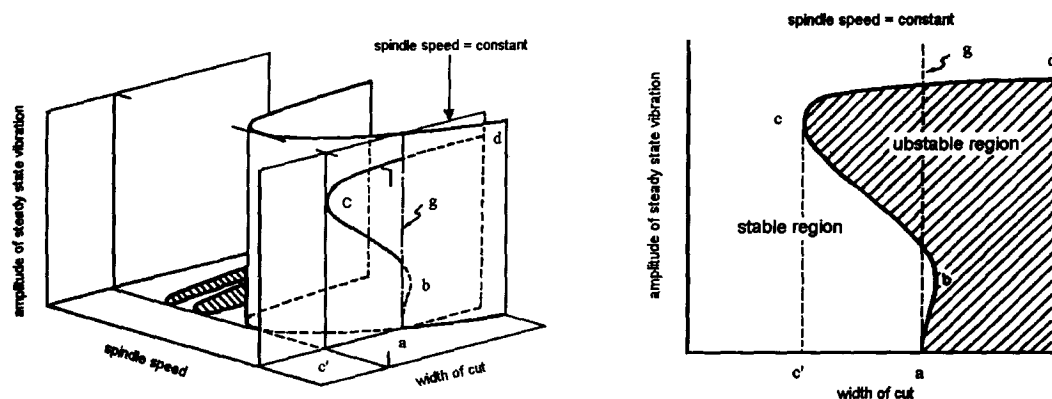


圖 1-3 文獻【2】中的三維穩定性圖

而 Ismail 等人【3、4】考慮當顫振劇烈時，會發生刀尖跳脫工件表面的情況，此時切削力應為零，因此在切削過程中刀具的受力便產生不平滑的非線性現象。利用數值模擬的方式作者獲得刀刀振動的軌跡以及切削力的變化。結果發現在車削加工中，由於刀尖跳脫現象的存在，顫振的振幅大小會隨切削時間的增加而趨於一固定值，而此固定值的大小則與切削深度有關。

Thusty 等人【5】指出，切削時由於刀具的振動，使刀刃在工件表面上留下的是不平坦的波紋，這樣的機制也可以看作是刀刃在水平方向前進的時候，同時於垂直工件表面方向作上下週期性地振動。在刀刃振動的同時，刀腹與工件表面間的隙角 (clearance angle) 也會有一週期性的變化，進而影響刀刃上的切削力，且此時切削力與刀刃向下運動的速度有正比關係，因此可視為一種阻尼力。在波紋斜率越大的時候，這種阻尼力的效果就會越顯著，而波紋斜率大的情況會發生在刀刃水平方向速度低的時候，因此可以解釋實驗上低主軸轉速時穩定性較高的現象。

Montgomer 等人【6】依據刀刀相對於加工表面的速度，將切削作用細分為五個區域，見圖 1-4。第一個區域為切削區，在此區域中的切削力與切削厚度成正比；第二個區域為鬆脫區，刀刀往離開表面的方向移動，此時切削力為零，如同上述 Ismail 等人【3、4】的假設；在第三個區域中刀腹壓入工件表面，作用在銑刀上的力為工件材料的降伏壓力與接觸面積之乘積；第四個區域中刀面與刀腹同時刺入工件表面，這時刀具的受力為第一個區域與第三個區域的向量和；而第五個區域為刀腹與表面的作用，若沒有接觸則銑刀受力為零。利用此一模型來探討刀刀與工件的相對振動，對於切削力與加工表面的影響，模擬與實驗所得到的結果相比大致符合。作者發現若相對振動的頻率與刀刀通過頻率（tool passing frequency）為整數倍關係，則可以得到較好的加工表面，若兩者非整數倍關係，則表面會有週期性的痕跡產生。

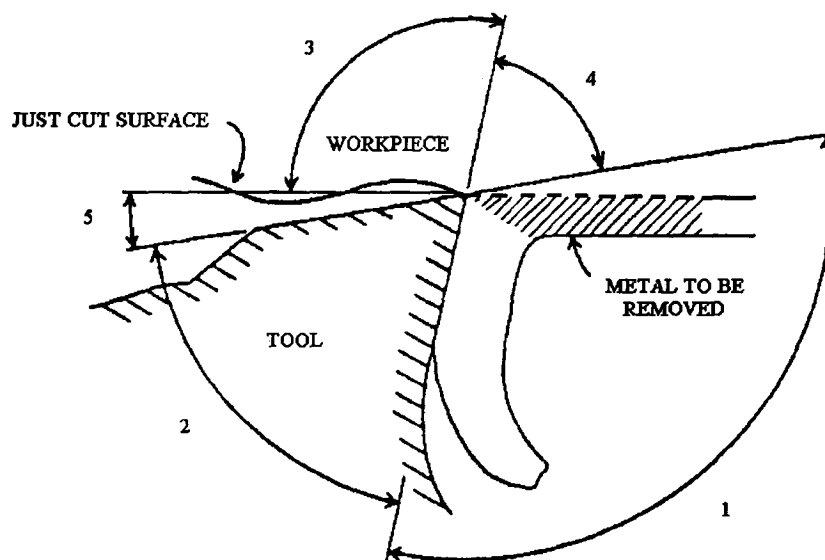


圖 1-4 文獻【6】中所定義的五個區域

在銑削系統穩定性圖的計算方面，Ismail 等人【7】探討方向因子 (directional orientation) 對預測銑削系統穩定性的影響。文中比較由平均方向因子 (average directional orientation) 與由變動方向因子 (varying directional

orientation)所得到的穩定性圖。結果顯示，使用變動方向因子的結果較接近實際切削的結果。此外，除了一般均勻刀刃間距的銑刀，文中也對非均勻刀刃間距的銑刀利用此方法加以分析，結果顯示後者的穩定性較佳，此乃因為後者能減少再生式效應的緣故。

由於銑削系統中的方向因子與窗函數可表示為一週期性時變函數，其中窗函數與銑刀刀刃的銑削角度有關，因此整個銑削系統為一個含有時間延遲項的週期性時變系統。Minis 與 Yanushevsky 等人【8】利用 Floquet's theorem，配合 Fourier series 以及 Nyquist criterion，將系統轉換成無限多階的頻域方程式後，直接將高次項刪除，便可得到簡化的系統特徵方程式。由此簡化的系統特徵方程式，代入主軸轉速與切削深度，便可得到系統的特徵值，以判斷系統穩定狀態，進而得到銑削系統的穩定性圖。根據簡化為一次式所得到的結果與簡化為三次式的相比，兩者差異不大，但計算效率上前者卻好很多。

Altınış 與 Budak 等人【9】與 Minis 的方法一樣，先利用 Fourier series 將系統轉換並刪除高次項得到簡化的系統特徵方程式，但接著就直接在系統的自然共振頻率附近選出一個共振頻率代入此簡化的系統特徵方程式中，便可算出臨界的切削深度，最後再求出此時的主軸轉速。與 Minis 的方法相比，此方法的計算速度較高，準確性卻較低，但在趨勢上依然大致能夠符合。除了一般的銑削情況之外，Altınış 與 Budak 也以此方法針對非均勻刀刃間距的銑刀 (Variable Pitch Cutters)【10】與球銑刀【11】的切削情況做分析。

Jensen 等人【12】沿用 Altınış 等人的分析方法，在原本二維的平面模型上增加軸向的自由度，以更完整地模擬銑削系統的穩定性。

Tian 與 Hutton 等人【13】將主軸的偏心效應 (gyroscopic effect) 列入考慮，使用 Müller's optimization algorithm 來計算其模型的特徵值，發現偏心效應會使系統特徵值的實部增加，減少了系統的穩定性。

Davies 等人【14】試圖利用切削時的情況預測顫振的發生。在主軸末端安裝一電容探針，即時地量測銑刀在 x 方向與 y 方向偏擺的軌跡。再以主軸轉速為取樣頻率，將此一連續的偏擺軌跡離散化，以取樣點分佈的情形作為判斷顫振是否發生的依據。結果發現，在穩定的情況下，取樣點會小範圍地聚集在一起。而在不穩定的情況下，若為全沒入式銑削，取樣點會傾向一橢圓形環狀分佈；非全沒入式銑削，其分佈可能為大塊地聚集，或是有多個聚集處。

也有研究提出以加工路徑規劃的方法來避免顫振的發生。Tsai 與 Takata 等人【15】在穩定和精度的前提下，以最大金屬去除率為目標來規劃加工路徑。他們認為徑向切削深度決定了實際切削工件的刀刀數，進而影響切削力及穩定性。換句話說，銑削的穩定性可以說是由徑向切削深度所決定的。因此，維持瞬間接觸工件的刀刀數量不大於 1，以維持切削力的穩定，是此文中加工路徑規劃的原則。

王土權等人【16】考慮工件在經過粗加工後，表面會留下階梯狀的痕跡，此一階梯狀的痕跡會造成球銑刀在精加工過程中受力變動過大，對於工件的精度與刀具的壽命皆有負面的影響。因此文中利用粗加工後的表面輪廓，將精加工在每一位置所要移除的材料體積算出，再代入材料移除體積、切削力與進給率的關係式，得到使切削力穩定的進給率，以達到刀具受力穩定，進而避免顫振的目的。

另外有研究利用特殊的方法達到避免顫振的目的，如 Liu 與 Rouch 等

人【17】在二維的銑削系統中加裝一吸震塊於徑向深度方向上，連結吸震塊與主系統的彈簧與阻尼，其係數則採用最佳化方法來求得，以設計出最佳的吸震效果。利用這樣的方法，可以使銑削系統的臨界穩定切削深度提高將近一倍。

Shiraishi, Yamanaka 及 Fujita【18】將最佳控制 (optimal control) 用在顫振控制上。其 LQI 控制系統包含積分控制器 (integral controller)、最佳調節器 (optimal regulator) 和狀態觀測器 (state observer)。根據狀態回饋，使刀具位置的追蹤誤差 (tracking error) 最小，以控制瞬時未切屑厚度的再生式效應。但這種缺點仍需要極正確的工具機結構動態特性系統識別，無法適應實際的時變切削系統。該實驗結果也只針對某一特定之系統有效而已。

Smith 等人【19】從最大材料移除效率的觀點出發，探討不同銑刀懸長對於顫振頻率的影響。一般來說，增加刀具懸長會使自然共振頻率下降，造成穩定切削區間在穩定性圖中向左移，也就是落在轉速較低的區域，於是轉速降低進而使金屬移除率也隨之下降。因此文中提出一策略：配合工具機最大轉速來調整刀具懸長，使狹窄的穩定切削區間能夠正好落在工具機的最高轉速，將工具機的材料移除率發揮到最大。

由於量測工具機的系統轉移函數是麻煩而且不可靠的，每一次量測所得到的結果與加工時的許多參數都有強烈的關聯，例如工件材料的性質、質量，或是銑刀的夾持長度等，都會影響量測所得到的結果。而這些加工參數在每一次的操作時都會有所不同，因此每次量測的結果只能夠代表該次量測時的系統狀況，而不能代表其他加工時的狀況。於是，線上顫振控制策略的概念便被提出。而在許多線上顫振控制的方法中，調整主軸轉速可說是最簡單而直接的一種，相關的研究介紹如後。

Smith 等人【20、21】提出以加工時的顫振頻率作為調整主軸轉速的

依據。當顫振發生時先分辨出顫振的頻率再調整主軸整轉速，使刀刃通過頻率的倍數能夠等於顫振頻率。從微觀上來看，就是使刀刃振動軌跡與工件表面波紋相位差等於零，以維持切削厚度的變化為零，利用切削系統中的阻尼效應穩定系統。同時為避免轉速變動時刀具受力過大，在調整轉速的過程中採用類似 ACC 控制 (adaptive control with constraint) 的方法，若刀具受力達到某一程度時，便將進給率降低至某一預定值，一方面可達到避免刀具受力過大的目的，一方面可減小顫振的振幅，待系統的狀態穩定之後，再將進給率提高到可接受的大小。Trang 等人【31、32】在這個方法上有相當的研究。

Kasahara 與 Sato 等人【22】認為刀刃振動與工件表面波紋間的相位差對顫振行為有相當的關聯，因此可以由改變主軸轉速來調整此相位差，使系統狀態達到穩定。

Liao 與 Young 等人【23】由能量的觀點，發現刀具振動相位在領先工件表面波紋的情況下，系統振動的能量會在切削過程被吸收，進而穩定系統，而且在領先的相位在九十度的時候會有最大的穩定效果。

蔡志成與林明良等人【24】便應用 Smith 等人【20、21】所提出的方法調整主軸轉速，尋找能達到最大材料移除率的切削參數。其方法為增加切削深度，若顫振發生則調整主軸轉速使其穩定，如此一再重複使系統的狀態能夠落在狹窄的穩定區間內。由於切削深度大，因此可以有較高的材料移除效率。

除了將主軸轉速調整至固定值之外，也有人提出以不斷變化主軸轉速的方法來穩定切削系統，其依據的概念有二：一為使刀具振動與工件表面波紋之間的相位差不斷地改變，以減少因達到臨界相位差而引發不穩定的機會；二為使激振刀具的頻率不斷連續地改變，而不是使此一激振的頻率

固定於自然頻率附近。

Sexton 與 Stone 等人【25】便將主軸轉速週期性地改變，以期提高車削加工的穩定性，文中利用類比電路來模擬車削時的振動，發現主軸轉速變動的幅度越大或頻率越高時，提高穩定性的效果會越顯著，而且三角波或正弦波的變化方式效果比方形波來得好。

類似於 Sexton 與 Stone 的方法，Yang 與 Zhang 等人【26】以週期性調變斜角 (rake angle) 的方式來提高車削加工的穩定性。由文中建立的模型與分析的結果來看，此種控制方法有造成切削過程函數在複數平面上向左移的效果，於是減少了與工具機結構函數相交的機會，因此可以提高車削加工時的穩定性。同時進一步指出，若 rake angle 變化的頻率 f_r 能滿足

$$\cos(2\pi f_r T) = 1$$

可以得到最佳的穩定效果，其中 T 為主軸轉動的週期。

Yilmaz 等人【27】則提出隨機調變主軸轉速的方法。他認為以週期性方式調變主軸轉速需要對工具機本身特性有相當的了解，並且受限於不同的加工參數，而以隨機調變的方式則可以減少這些麻煩。其主軸的速度命令訊號以零階保持 (zero-order-hold) 的型態輸入，保持的時間長度取決於主軸的響應特性。若保持時間過長，有可能激起顫振；過短，則有可能因主軸反應不及而使效果打折扣。至於速度變化的範圍，也被主軸的工作範圍所限制，但實驗結果也顯示，若變化範圍越大則穩定效果越佳。

Ismail 等人【28】在五軸加工機上加工渦輪機葉片，除了將主軸轉速以步階型態增加，也探討增加進給對抑制顫振的效果。實驗結果發現，同時將兩個參數以步階型態調變，可以得到非常好的效果。

1-3 本文目的

本文主要將針對利用調整主軸轉速來控制顫振的方法做一探討，試圖對前人提出的主軸轉速調整方法無法順利將系統調整至穩定的現象提出一解釋，指出主軸轉速改變會同時造成系統振動頻率的改變，使調整後的主軸轉速無法有預期的相位差而失效。因此本文在主軸轉速調整方法上提出一修正，利用顫振發生時的系統相位差，將顫振時的落後關係調整為領先關係，如此可減少調整前後系統振動頻率的變動，使調整後的主軸轉速能有效達到預期的相位差以穩定系統。文中並利用電腦模擬與實際加工加以說明及驗證。

1-4 本文內容

本文內容一共分為六章。第一章為緒論，介紹顫振控制的相關背景與長久以來的發展，以引導本文發展方向。第二章為顫振理論，說明一般顫振發生的原因，並建立再生式自激振動的數學模式，最後得到切削系統的穩定性圖。第三章為主軸轉速調整方法推導與電腦模擬，在此將提出一顫振控制方法，並以電腦模擬加以說明。第四章為實驗設備與方法，實驗中將以電腦執行線上顫振監控的工作，驗證本文所提出的顫振控制方法，此處將先介紹實驗時所使用的設備，以及實驗的規劃與方法。第五章為實驗結果與分析，將比較本文提出的方法與前人提出的方法，在實驗上所獲得的結果與差異。第六章為結論與建議。

第二章 顫振理論

2-1 顫振模式分類

一般來說，造成工具機振動的原因主要可以分為兩大類：

1. 強迫式振動 (Forced Vibration)

2. 自激式振動 (Self-Excited Vibration)

若存在某種明顯之外部振源，而工具機的振動頻率與此外部振源的頻率一致時，可以將這種的振動歸類為強迫式振動。

但是若無法找到任何一個外部振源能夠與工具機的振動頻率一致時，那麼振動的能量可能就不是由外界進入的，而是由內部切削過程動態所堆積的，這種振動則可歸類於自激式振動。以下將對這兩類的振動模式作一說明：

2-1.1 強迫式振動

假設有一個外力輸入系統，則系統會被強迫以此外力的頻率振動，如同微分方程式 ($ay'' + by' + cy = F$) 中的非齊性項的效果。而隨著外力輸入的來源不同，強迫式振動又可以分為以下幾種：

a. 外部振動 (External Vibration)

這種振動通常是由於一部機器藉由地板將振動傳到另一部機器所造成，所以又可稱為地板振動 (Floor Vibration)。這種振動一般來說只有在精密度要求較高的時候才會顯得比較重要而被考慮到，例如在磨削過程 (Grinding process) 時。

b. 機件強制振動 (Component Forced Vibration)

此種振動模式是由於機件的缺陷 (defects of mechanical component) 所造成，例如在磨削過程中，若砂輪不平衡(Unbalance Wheel)，就會形成一個振動的來源。但是一般來說，機件都會有著某種程度的缺陷，所以此種模式的振動多半都會存在著，不過只要稍加注意，例如將砂輪平衡準確地做好，這種振動模式大多不會造成很大的問題。

c.加工過程的強迫振動 (Process Forced Vibration)

這種模式的振動有一種其他模式不會有的特性，就是它只發生在金屬移除的過程中。以銑削過程為例，因為不是連續而是斷續 (intermittent) 切削，因此切削力不會是一個定值，而是會隨著時間有週期性變化的動態切削力，此一動態的切削力會激振整個系統，導致系統振動的頻率有接近自然共振頻率的可能。若此振動頻率接近到系統的某個自然共振頻率，則振動的情況就會變得相當嚴重，這種現象就稱為顫振 (chatter)。因此這類振動只有在頻率接近系統自然共振頻率時才需要特別注意。

上述的強迫式振動最重要的問題，是找出振源的振動頻率，由於現今各種的偵測與分析工具的進步，要找出振源的振動頻率並不困難，但是若要將振動源所造成的影響完全阻絕於系統之外，則不是件容易的事。

2-1.2 自激式振動

在加工的過程中，有可能已經發生了振動，卻無法找到振動源，這樣的振動就是自激式振動。自激式振動是一種動態系統不穩定的現象，雖然沒有外部振源，切削過程卻會不斷地提供能量累積於系統內，造成並且維持系統的振動。其發生與切削條件有關，因此通常會降低加工時的轉速以避免自激式振動的發生，但這也同時造成了生產效率的降低。自激式振動主要又可歸類為下列幾種：

a.再生式振動(Regenerative vibration)

當找不到任何振源的振動時，很有可能是發生了再生式振動。再生式效應是造成加工顫振最主要的原因，也是本研究所要探討的主題。再生式振動起源於切削的時間延遲 (time delay)，簡言之，就是當隨機的跳動發生時，刀刀跳離設定的切削深度，使得下一次切削相同的位置時，就必須承受額外的切深負荷，如此惡性循環，便會引發系統的不穩定。

b.模態耦合 (Mode Coupling)

這種振動發生在最少兩個自由度以上的系統。若刀具振動路徑成為一個橢圓時，當刀具運動方向與受力方向相同，能量便會輸入振動系統，發出更嚴重的振動。從數學模式推導的結果可以發現，模態耦合效應的臨界切削深度是再生式效應的兩倍。換句話說，當切寬漸漸增加，會先發生再生式效應的振動，因此再生式效應會比模態耦合的效應來得重要。

c.切削力下降特性 (Falling Characteristic of Cutting)

很多的材料都有隨切削速度提高，切削力下降的特性。當刀具在沿切削速度方向發生振動時，相對速度會有週期性的變化。於是，刀具在相對速度減小時切削力會增加，反之，相對速度增加則會使切削力減小。這種變化會使得阻尼值隨之不斷改變，一旦當阻尼值小於零的時候，系統就會不穩定而引發出顫振。

強迫式振動與自激式振動之間最大的不同點在於：當切削寬度增加到某一定程度的時候，自激式振動的振幅會突然劇烈地增加，而強制式振動的振幅則與切寬有正相關。另外，自激式振動的頻率會很接近工具機的自然共振頻率 (Natural frequency)，而強制式振動之頻率則是與外部振源之頻率一致。

2-2 再生式顫振數學模式的建立

2-2.1 問題簡化

切削加工本身是一個極複雜的非線性動態過程，結合了切削過程 (cutting process) 及工具機結構的動態特性 (structural dynamics)。切削過程中，牽涉到切削速度、進給、切深、切寬、工件材料及幾何形狀、刀具材料及磨耗情形等等之因素；而在工具機結構方面，牽涉到結構剛性、制振性（阻尼值的大小）、結構模態形狀(mode shapes)、自然頻率(natural frequency)等因素。由於要考慮的因素太多，且多半屬於非線性，在數學處理上有某種程度上的困難。因此，將對這些問題做合理的線性化。

a. 切削過程

如果不考慮切削過程的動態行為，僅以靜態描述時，則可假設切削力與瞬時切削深度成正比，如圖 2-1 所示。即：

$$F(t) = bk_c u(t) \quad (2.1)$$

其中 F 為切削力， b 為切削寬度（方向為垂直紙面方向）， k_c 為靜態切削勁度 (cutting stiffness)， u 為切削深度。將上式取拉普拉斯轉換 (Laplace Transform) 之後得到：

$$F(s) = bk_c U(s) \quad (2.2)$$

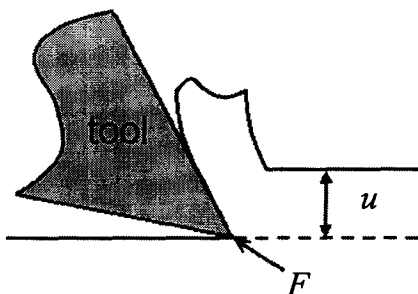


圖 2-1 切削力與切削深度關係示意圖

b. 工具機結構

工具機結構是一個均佈系統，理論上有無限多個自由度，也就是有無限多個自然頻率，但是由於相對而言高頻響應的振幅較小而可以忽略，所以可以將其簡化為由有限個自由度所組成的系統。將工具機視為一單自由度之線性振動系統加以考慮，經由多次實驗可得到此系統表現出之特性，通常只有某一個自然共振頻率較為明顯，若 y 為系統振動的位移，則其動態方程式通常可以等效為一個二階常微分方程式：

$$my'' + cy' + ky = F(t) \quad (2.3)$$

取拉普拉斯轉換：

$$ms^2Y(s) + csY(s) + kY(s) = F(s) \quad (2.4)$$

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad (2.5)$$

可進一步簡化：

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{F(s)} &= \frac{1}{k} \times \frac{1}{\frac{m}{k}s^2 + \frac{c}{k}s + 1} \\ &= \frac{1}{k} \times \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{k} G_m(s) \end{aligned} \quad (2.6)$$

其中 $G_m(s)$ 稱為工具機結構轉移函數， ω_n 為工具機之自然共振頻率， ξ 為阻尼比。

2-2.2 系統方塊圖與特徵方程式推導

考慮一個車削系統，其工件主軸轉速為 N Hz，並假設工件為一理想固定剛體，工具機為一單自由度結構，整體示意圖如圖 2-2 所示。若在時間為 t 時，因為工具機振動的緣故減少了切削工件的深度，則經過一段時間 T 之後 ($T = \frac{1}{N}$)，主軸正好旋轉了一圈回到相同的位置，此時瞬間的切削深度就要加上之前所沒有切到的深度。以一個重疊因子(overlap factor) μ 來表示相鄰兩次切削重疊的程度，若為正交切削，也就是車刀的進給速率為零時，則 $\mu = 1$ ，因此 μ 的範圍會介於 0 到 1 之間。於是，瞬時切削深度便可以表示為：

$$u(t) = u_0(t) - y(t) + \mu y(t - T) \quad (2.7)$$

$$T = \frac{1}{N}$$

其中 $u(t)$ ：瞬時切削深度

$u_0(t)$ ：預定切削深度

μ ：重疊因子 (overlap factor)， $0 \leq \mu \leq 1$

$y(t)$ ：瞬時刀具偏移量，以刀具離開工件方向為正

$y(t - T)$ ：此處上一圈刀具偏移量

N ：轉速

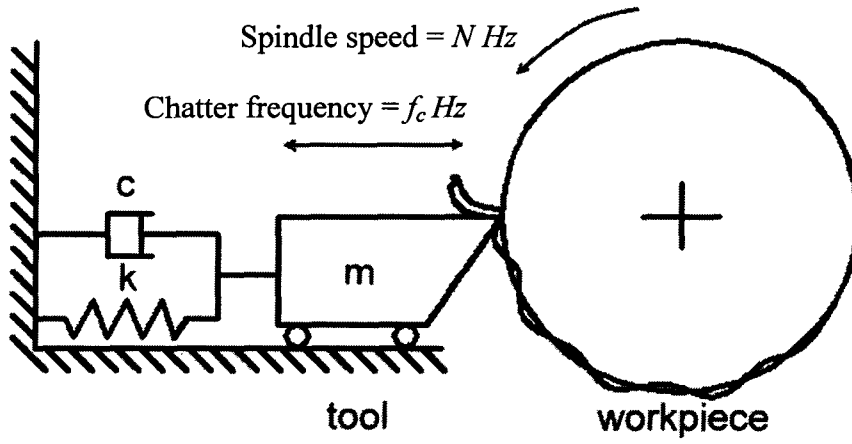


圖 2-2 車削系統示意圖

將式 (2.7) 取拉普拉斯轉換得到：

$$U(s) = U_0(s) - Y(s) + \mu e^{-Ts} Y(s) \quad (2.8)$$

因此可以建構出圖 2-2 之再生式自激振動迴路的方塊圖，如圖 2-3 所示。

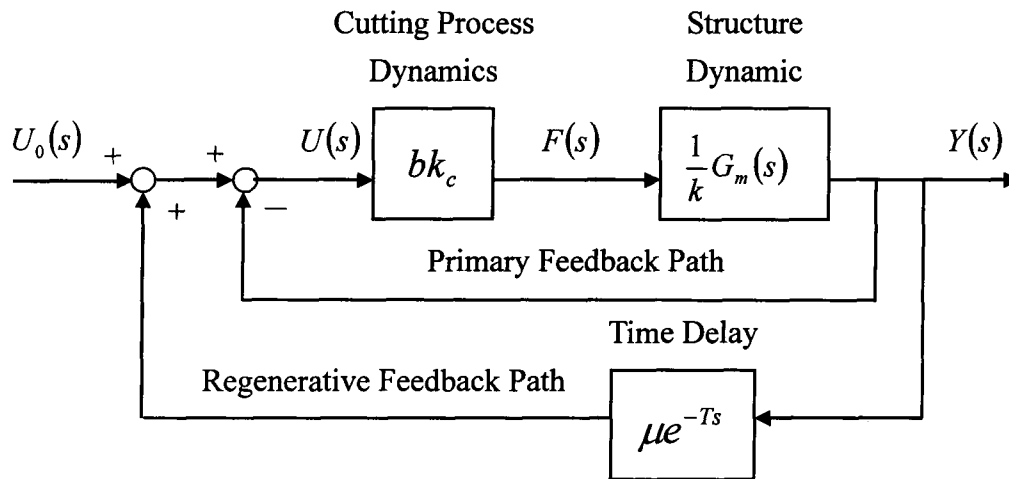


圖 2.3 再生式自激振動迴路方塊圖

再利用 Mason's Gain Formula，可以將再生式顫振迴路方塊圖化簡得到系統的特徵方程式 (characteristic equation)：

$$1 + (1 - \mu e^{-Ts}) \frac{bk_c}{k} G_m(s) = 0 \quad (2.9)$$

2-2.3 系統極圖(Polar Plot)推導

由系統的特徵方程式，也就是式 (2.9)，可整理為：

$$\frac{bk_c}{k} G_m(s) = \frac{-1}{1 - \mu e^{-sT}} \quad (2.10)$$

令 $G_{cp}(s) = \frac{-1}{1 - \mu e^{-sT}} \quad (2.11)$

則可化簡為 $\frac{bk_c}{k} G_m(s) = G_{cp}(s) \quad (2.12)$

若系統的極點為 $s = \sigma + j\omega$ ，當系統極點實部小於零 ($\sigma < 0$)，系統的振動便會收斂；反之，當系統極點的實部大於零 ($\sigma > 0$)，系統振動便會發散。而系統極點的實部為零時，則表示系統為臨界穩定。此外，極點的虛部 ω 則代表系統振動時的頻率。因此，為求出系統臨界穩定的狀態，將 $s = j\omega$ 帶入式 (2.12) 中成為：

$$\frac{bk_c}{k} G_m(j\omega) = G_{cp}(j\omega) \quad (2.13)$$

接下來對 $G_m(j\omega)$ 與 $G_{cp}(j\omega)$ 函數做個別討論：

a. $G_m(j\omega)$

由式 (2.6) 可知， $G_m(j\omega)$ 函數為：

$$G_m(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 - \omega^2) + j2\xi\omega_n\omega}$$

經有理化處理後，可得到 $G_m(j\omega)$ 函數的實部 $\text{Re}[G_m(j\omega)]$ 與虛部 $\text{Im}[G_m(j\omega)]$ ，其兩者圖形如圖 2-4 所示。從圖中可以看出，在自然共振頻率 $\omega = \omega_n$ 的地方， $\text{Re}[G_m(j\omega_n)] = 0$ ，而 $\text{Im}[G_m(j\omega_n)]$ 則為 $\text{Im}[G_m(j\omega)]$ 函數的極值。

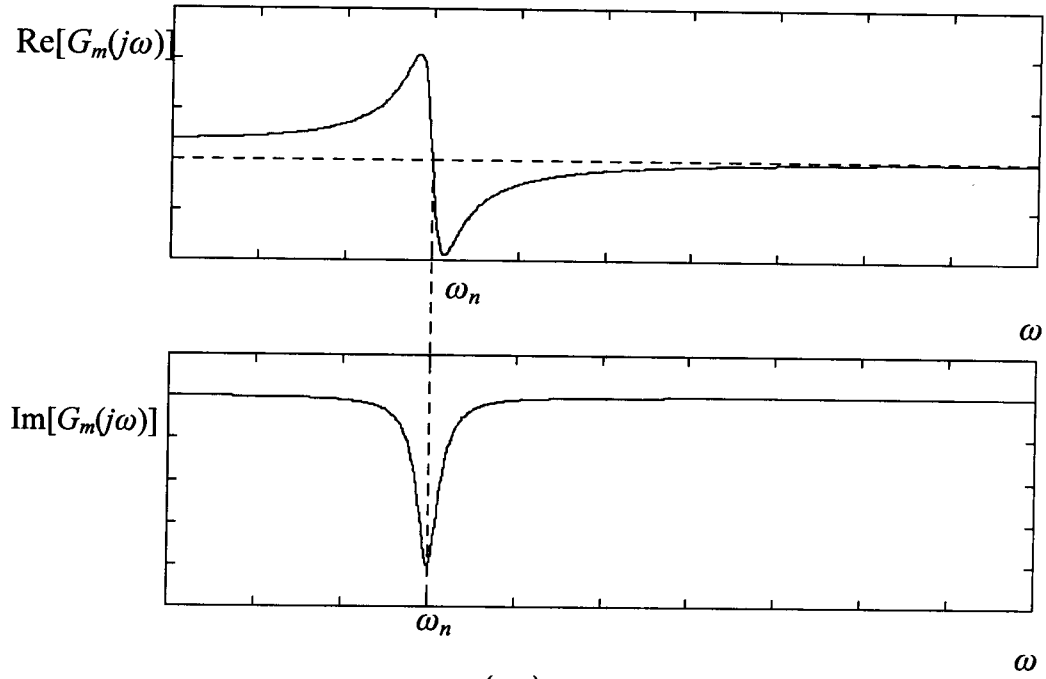


圖 2-4 $G_m(j\omega)$ 函數的實部與虛部

b. $G_{cp}(j\omega)$

在 $G_{cp}(j\omega)$ 函數中， ωT 的單位為徑度 (rad)，可將其改寫為：

$$\omega T = 2\pi f_c T = 2\pi(n + \nu) \quad (2.14)$$

其中 f_c 的單位為 Hz，因此可得到主軸轉速與系統振動頻率的關係

$$\text{式：} \quad N = \frac{1}{T} = \frac{f_c}{n + \nu} = \frac{\omega}{2\pi(n + \nu)} \quad (2.15)$$

其中 n 為一正整數， ν 為介於 0 與 1 之間的實數。

關於式 (2.15) 所代表的物理意義，可利用圖 2-2、圖 2-5 以及圖 2-6 來加以說明。考慮車削加工一圓柱形工件，工件之轉速為 N Hz，在切削時，刀具會因為振動的緣故於工件表面上造成連續的波紋，如圖 2-2 所示。當工件每旋轉一圈 ($\theta = 2\pi$)，刀具在工件表面上所造成的波紋個數可以 $(n + \nu)$ 來表示，如圖 2-5 所示。其中 n 為一正整數，代表完整波紋的個數，例如在圖 2-5 中有兩個完整週期的波

紋，因此 $n=2$ ，而 ν 為一介於 0 與 1 之間的實數，表示不完整的殘餘波紋之相位。若令工件在上一圈時被切削所留下的波紋高度為 y_0 ，目前這一圈的波紋為 y ，則從圖 2-5 中可以看出， y_0 與 y 的相位差大小為 $2\nu\pi$ 。圖 2-6 為此相位差觀念在車削與銑削上的示意圖，由圖中可看出相位差在車削與銑削上的意義。

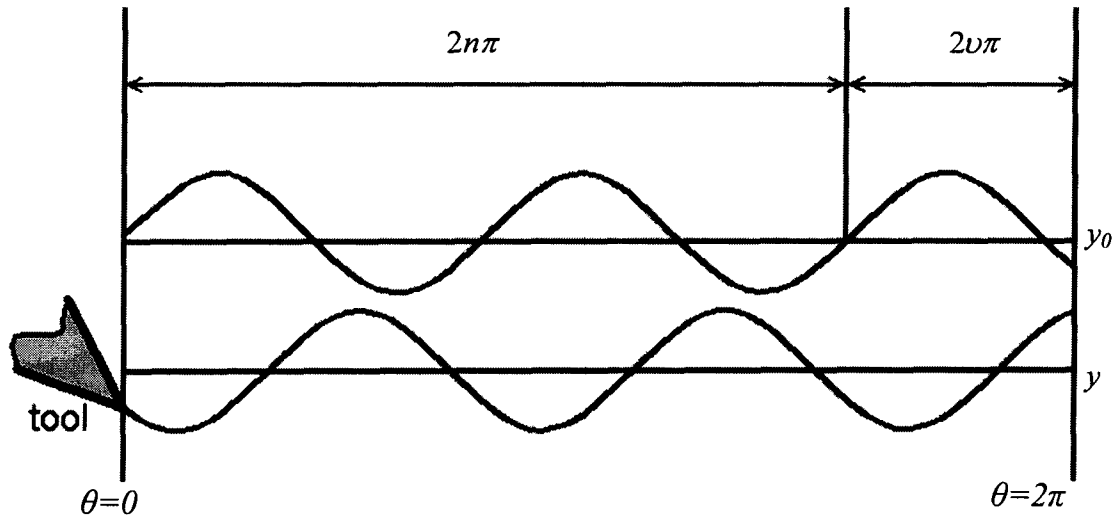


圖 2-5 刀刃振動與工件表面波紋之相位差示意圖

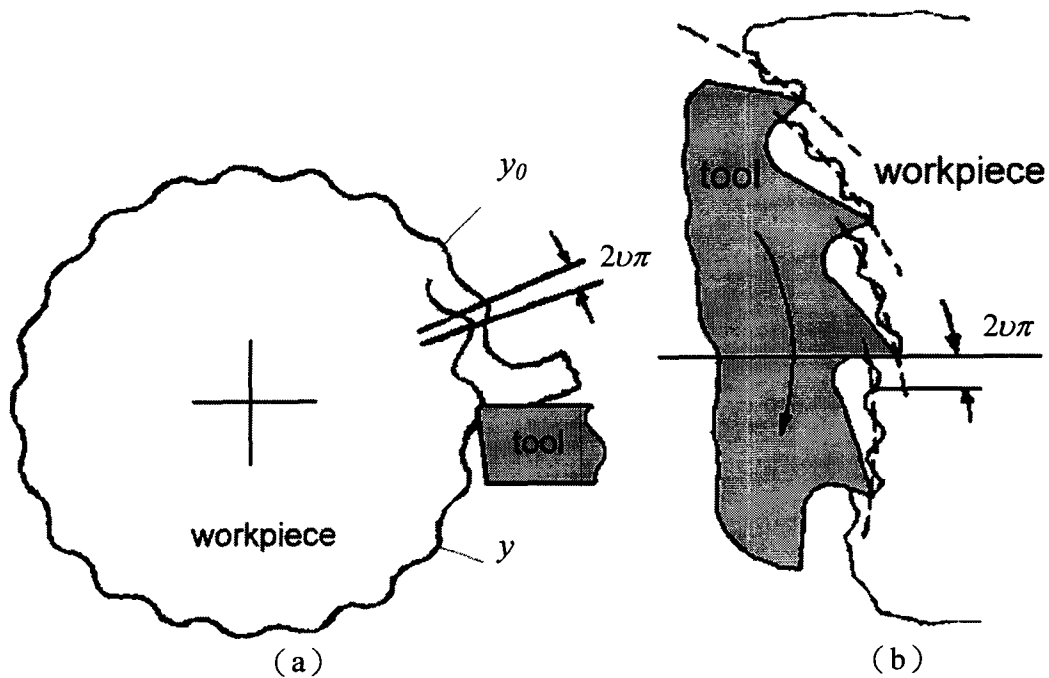


圖 2-6 相位差在車削與銑削上的示意圖【5】(a) 車削上 (b) 銑削上

從以上的分析可知，對於工件轉速 N 與工具機振動頻率 ω 兩者之間的關係，可利用一正整數 n 與一實數 ν 來表達，且 ν 的大小值介於 0 和 1 之間。因此將式 (2.15) 代回式 (2.12) 可得：

$$\begin{aligned} G_{cp} &= \frac{-1}{1 - \mu e^{-j\omega T}} \\ &= \frac{-1}{1 - \mu e^{-j2\pi(n+\nu)}} \\ &= \frac{-1}{1 - \mu e^{-j2\pi\nu}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

進一步整理為：

$$\frac{1}{\mu} e^{j2\pi\nu} = \frac{G_{cp}}{1 + G_{cp}} \quad (2.17)$$

將 G_{cp} 轉換為複數座標平面，故可令

$$G_{cp} = x + yi \quad (2.18)$$

代入式 (2.15) 可得：

$$\frac{1}{\mu} e^{j2\pi\nu} = \frac{x + yi}{1 + x + yi} \quad (2.19)$$

解得：

$$x = \frac{-(1 - \mu \cos 2\pi\nu)}{1 + \mu^2 - 2\mu \cos 2\pi\nu} \quad (2.20)$$

$$y = \frac{\mu \sin 2\pi\nu}{1 + \mu^2 - 2\mu \cos 2\pi\nu} \quad (2.21)$$

設

$$c = 1 + \mu^2 - 2\mu \cos 2\pi\nu \quad (2.22)$$

則式(2.17)可改寫為

$$\left(x + \frac{1}{c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\mu}{c}\right)^2 \quad (2.23)$$

式 (2.19) 在平面座標上為一組由 μ 所構成的圓系，其圓心為 $(\frac{-1}{c}, 0)$ ，半徑為 $\frac{\mu}{c}$ 。

c. 系統特徵方程式

利用上述對 $G_m(j\omega)$ 與 $G_{cp}(j\omega)$ 函數的分析結果，可以得到特徵方程式（也就是式 (2.12)）中 $G_{cp}(j\omega)$ 函數與 $\frac{bk_c}{k}G_m(j\omega)$ 函數在複數平面上的映射圖形，如圖 2-7：

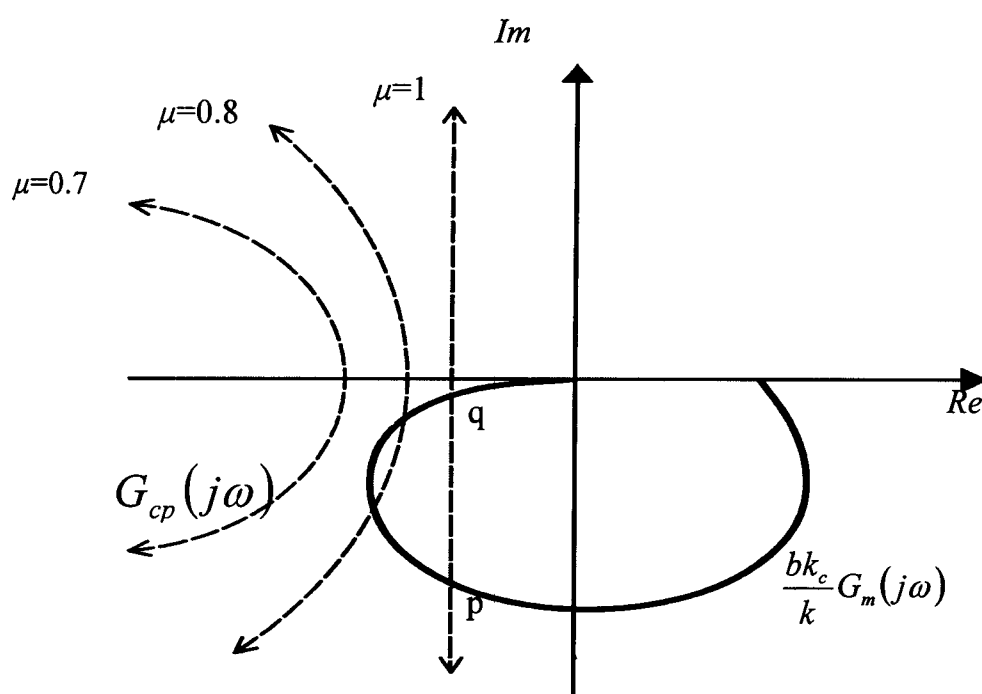


圖 2-7 $G_{cp}(j\omega)$ 函數與 $\frac{bk_c}{k}G_m(j\omega)$ 函數在複數平面上的映射情形

若以最容易發生不穩定的正交切削作為考慮情況，此時 $\mu = 1$ ，則由圖 2-7 可看出， $G_{cp}(j\omega)$ 函數在 $\mu = 1$ 時，映射在複數平面上的圖形為一直線，其方程式為：

$$x = \frac{-1}{2} \quad (2.24)$$

而 $\frac{bk_c}{k}G_m(j\omega)$ 函數與此直線會有兩交點 p、q，此兩點所代表的 ω 值即為式 (2.13) 的解，也就代表系統在臨界穩定時振動的頻率。

2-3 系統穩定性圖

從上一節的極圖可看出，當切寬 b 不夠大，使 $\frac{bk_c}{k}G_m(j\omega)$ 函數無法與 $G_p(j\omega)$ 函數在 $\mu=1$ 的直線（也就是 $x = \frac{-1}{2}$ ）相交時，系統將會永遠維持穩定。若將切寬 b 增加使兩者發生相交，則由交點上的 ω 值與 ν 值則表示系統在臨界穩定時的振動頻率與相位差。將此一臨界的 ω 值與 ν 值代入 (2.15) 的假設中，便可得到臨界穩定狀態下的主軸轉速 N 。同理，將各不同切削寬度 b 下的臨界穩定主軸轉速求出，便可繪製出一臨界穩定下主軸轉速與切寬的關係圖，稱之為穩定性圖 (stability chart)，理論上此穩定性圖之輪廓如圖 2-8 所示。圖中深色範圍表示穩定狀態的區域。

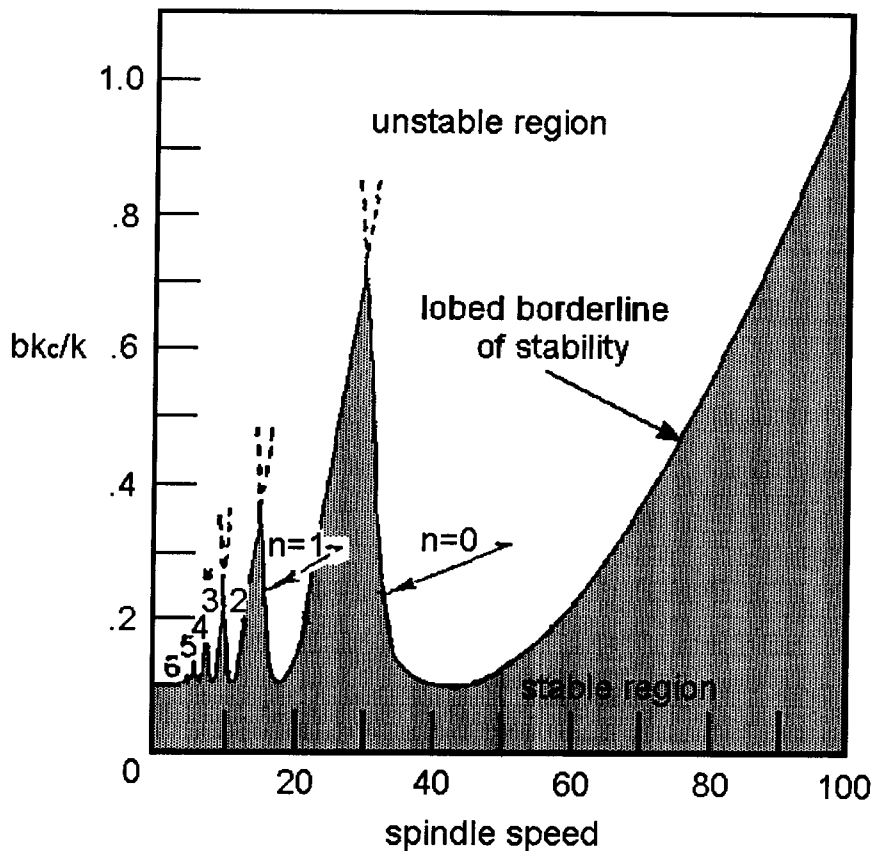


圖 2-8 理論上切削系統之穩定性圖【29】

然而實際上，在低速切削時的穩定性會比高速切削來得高。這是因為在低速切削時工件表面的波紋會變得比較陡峭，使刀腹易與新的表面因干涉而衍生出阻尼力（damping force）【5】，如圖 2-9 所示。此阻尼力有吸收能量的效果，於是振動便被抑制下來。在波紋斜率越大的時候，這種阻尼力 F_d 的效果就會越顯著，而波紋斜率大的情況會發生在刀刃水平方向速度低的時候，因此可以解釋實驗上低主軸轉速時穩定性較高的現象。所以，增加顫振頻率、增加刀腹磨耗區域、降低切削速度、或減小刀具與工件表面間的隙角(clearance angle)都會有增加阻尼力的效果，這就是所謂的低速穩定性（low speed stability）。

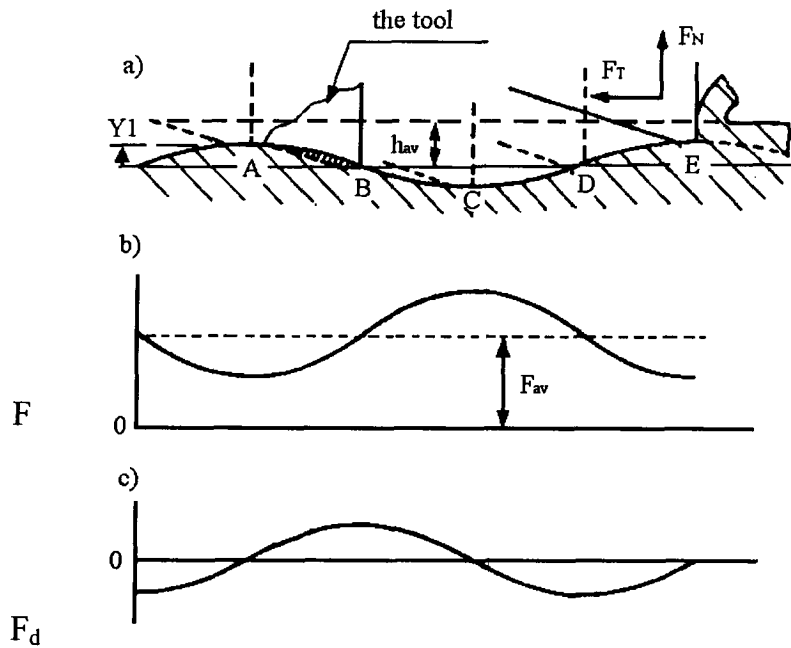


圖 2-9 低速穩定原因說明圖【5】 a)刀腹與工件表面干涉示意圖 b)因振動造成切削深度變化使切削力產生動態變化 c)阻尼力的變化情形

因此，經由實際加工所得到的穩定性圖會與由理論推導所獲得的結果有若干差異，如圖 2-10 所示。

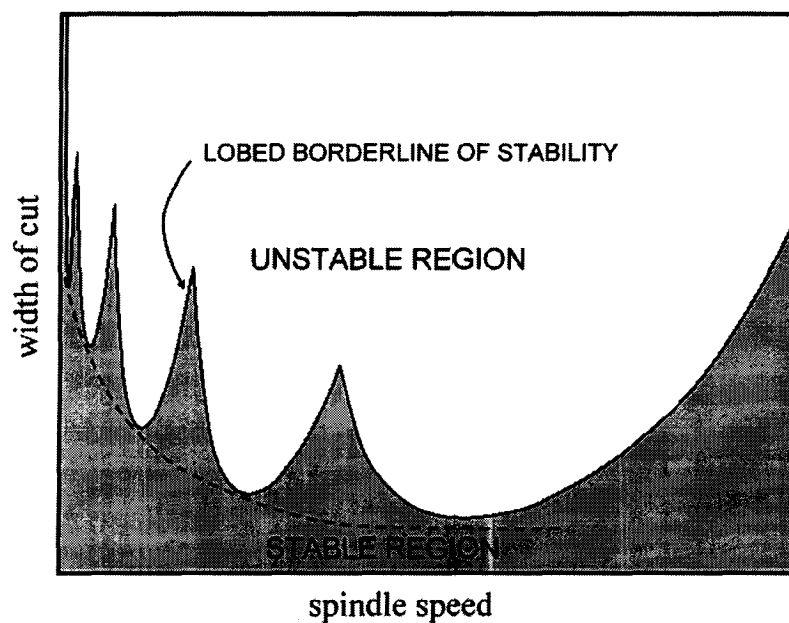


圖 2-10 實際上切削系統之穩定性示意圖

第三章 主軸轉速調整方法推導與電腦模擬

3-1 系統極點於複數平面上的映射與簡化

由前述的分析可知，再生式自激振動之系統特性方程式可表示為

$$\frac{bk_c}{k}G_m(s) = G_{cp}(s) \quad (3.1)$$

其中 $G_m(s)$ 為工具機結構之轉移函數， $G_{cp}(s)$ 代表切削過程。

考慮系統在臨界穩定的狀態時，由上一章討論可知，吾人可令系統極點的實部為零（ $s = j\omega$ ）代入特徵方程式。今若同時考慮系統極點的實部與虛部，即令 $s = \sigma + j\omega$ ，則由式（2.6）：

$$\frac{1}{k}G_m(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

$$\begin{aligned} \text{因此} \quad \frac{1}{k}G_m(s = \sigma + j\omega) &= \frac{1}{m(\sigma + j\omega)^2 + c(\sigma + j\omega) + k} \\ &= \frac{1}{(m\sigma^2 - m\omega^2 + c\sigma + k) + j(2\sigma\omega m + c\omega)} \end{aligned}$$

由此可知，在同頻率（ $\omega = \text{constant}$ ）時，

$$|G_m(s = \sigma + j\omega)|_{\sigma > 0} < |G_m(s = \sigma + j\omega)|_{\sigma = 0}$$

因此， $G_m(s = \sigma + j\omega)|_{\sigma > 0}$ 的區域會落在圖 3-1（a）中陰暗的區域內，而此區域以外即 $G_m(s = \sigma + j\omega)|_{\sigma < 0}$ 的區域。

同理由式（2.12）及（2.18）， $G_{cp}(s)$ 函數以 $s = \sigma + j\omega$ 代入可得

$$G_{cp}(s = \sigma + j\omega) = \frac{-1}{1 - \mu e^{-\sigma T} e^{-j2\pi\nu}}$$

令 $\bar{\mu} = \mu e^{-\sigma T}$ (3.2)

代入得 $G_{cp}(s = \sigma + j\omega) = \frac{-1}{1 - \bar{\mu} e^{-j2\pi\nu}}$ (3.3)

考慮最容易發生不穩定的情況，也就是假設

$$\mu = 1$$

代入式 (3.2) 中，由於 T 代表時間，其值恆為正，因此由式 (3.2) 可得 σ 與 $\bar{\mu}$ 的關係如圖 3-2 所示。由圖 3-2 中可知，當 $\sigma > 0$ 時 $\bar{\mu} < 1$ ，而 $\sigma < 0$ 時 $\bar{\mu} > 1$ ，因此由式 (3.3)， $G_{cp}(s)$ 函數的映射情形如圖 3-1 (b)，圖中陰暗區域代表 $G_{cp}(s = \sigma + j\omega)_{\sigma > 0}$ 的映射區域，而另一半則是 $G_{cp}(s = \sigma + j\omega)_{\sigma < 0}$ 的映射區域。

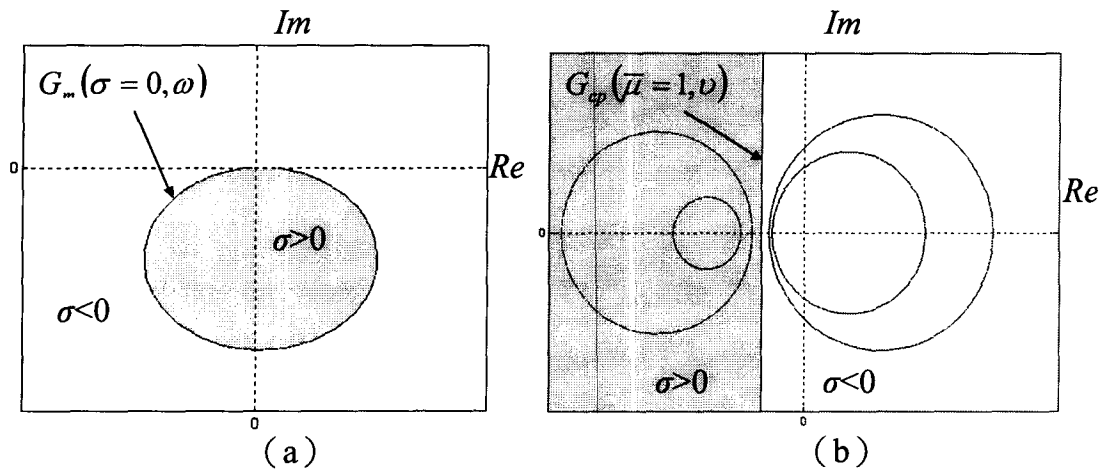


圖 3-1 $G_m(s = \sigma + j\omega)_{\sigma < 0}$ 與 $G_{cp}(s = \sigma + j\omega)_{\sigma > 0}$ 在複數平面上的映射

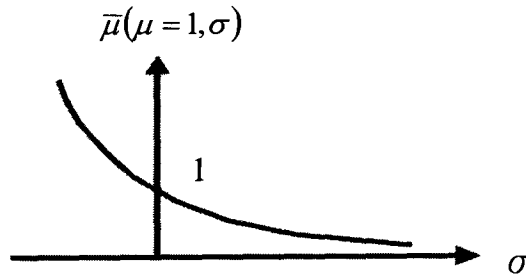


圖 3-2 σ 與 $\bar{\mu}$ 的對應關係圖

取圖 3-1 中兩函數的交集可得到整個系統的極點映射範圍，如圖 3-3。圖中右半邊的深色區域為系統極點實部小於零 ($\sigma < 0$) 的區域，也就是系統穩定的區域，而左邊較小的陰暗弓形封閉區域為系統極點實部大於零 ($\sigma > 0$) 的區域，此區域內系統不穩定。

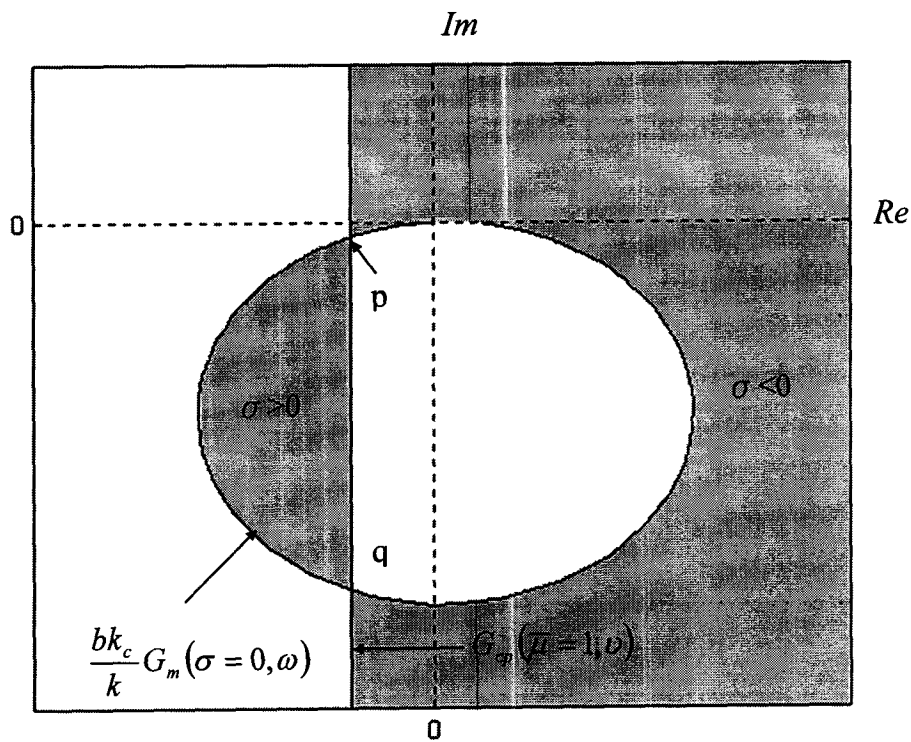


圖 3-3 銑削系統極點的映射區域

由於計算系統極點在複數平面上確實的映射位置是相當複雜的，因此本文接下來的討論將先假設系統所有極點皆會映射在圖 3-3 中 $G_{cp}(\bar{\mu}=1, \nu)$

的直線上，也就是 $\text{Re} = -\frac{1}{2}$ 的直線上。

至於簡化的方法則如圖 3-4 所示：若系統極點映射在 a 點位置，則吾人假設此極點可視為映射在 a* 位置，也就是沿著 $G_m(\sigma, \omega = \text{const})$ 的軌跡移動至 $\text{Re} = -\frac{1}{2}$ 的位置上；同理，在映射在 b 點極點，亦視為映射在 b* 點位置上。因此，不穩定極點的映射位置吾人將視為落在圖 3-3 中 p、q 兩點之間；反之，穩定極點的映射位置則在 p、q 兩側。

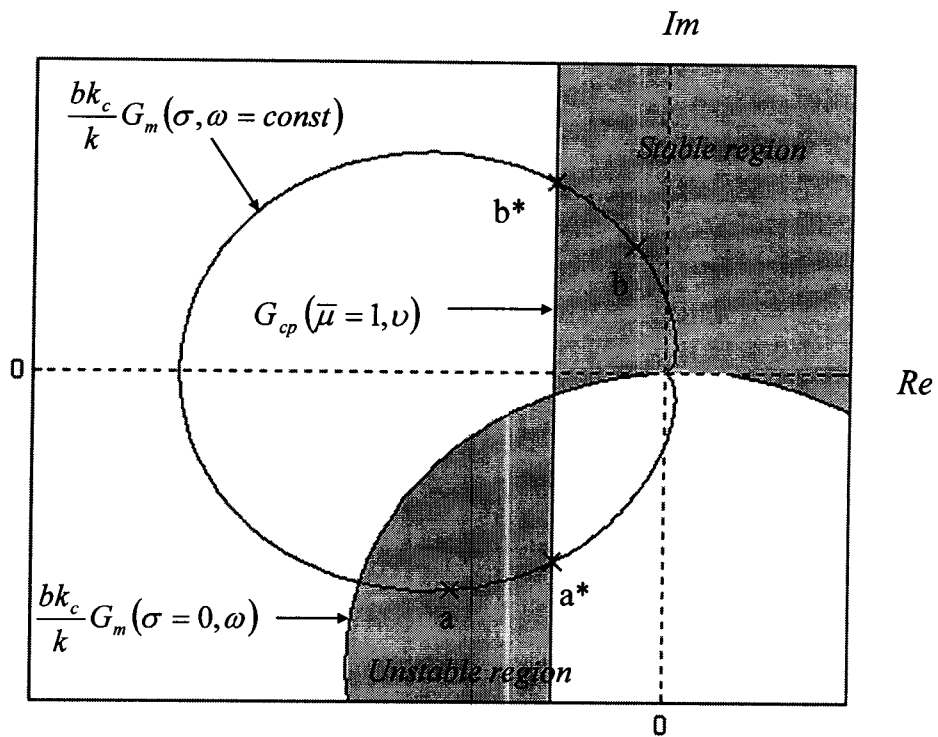


圖 3-4 系統極點映射簡化示意圖

3-2 系統振動頻率與相位差之關係

本節將對系統振動的頻率與相位差做進一步的探討，先研究相位差在複數平面上映射的分佈情形，再討論系統振動頻率的變化，最後將結果整合，得到主軸轉速與系統振動頻率的關係，以作為下一節所提出的主軸轉速調整方法的依據。

首先考慮 G_{cp} ，將式 (3.3) 以複數型態表示可整理得：

$$G_{cp}(\bar{\mu}, \nu) = \frac{(\bar{\mu} \cos 2\pi\nu - 1) + j(\bar{\mu} \sin 2\pi\nu)}{(\bar{\mu} \cos 2\pi\nu - 1)^2 + (\bar{\mu} \sin 2\pi\nu)^2} \quad (3.4)$$

此函數在複數平面上的映射軌跡如圖 3-5 (a)。圖中的每條虛線表示 G_{cp} 函數在 $\bar{\mu}$ 值為不同常數時的映射軌跡，實線代表 ν 為不同常數時的軌跡。由圖中可看出 $G_{cp}(\bar{\mu}, \nu = \text{const})$ 的分佈對稱於實軸，且 $G_{cp}(\bar{\mu}, \nu = 0.5)$ 的映射則落在實軸上，因此可以說 $G_{cp}(\bar{\mu}, \nu = \text{const})$ 是以 $G_{cp}(\bar{\mu}, \nu = 0.5)$ 呈對稱分佈。以圖 3-5 (a) 為例，若在上半平面的三條實線由上而下所代表的 ν 值為 0.15、0.25、0.35，則在下半平面對應的三條實線由下而上的 ν 值則為 0.85、0.75、0.65。若假設 $\bar{\mu} = 1$ ，則 G_{cp} 函數在複數平面上的映射為

$$G_{cp}(\bar{\mu} = 1, \nu) = \frac{(\cos 2\pi\nu - 1) + j(\sin 2\pi\nu)}{(\cos 2\pi\nu - 1)^2 + (\sin 2\pi\nu)^2} \quad (3.5)$$

$$\text{實部：} \quad \text{Re}[G_{cp}(\bar{\mu} = 1, \nu)] = -\frac{1}{2} \quad (3.6)$$

$$\text{虛部：} \quad \text{Im}[G_{cp}(\bar{\mu} = 1, \nu)] = \frac{\sin 2\pi\nu}{2(1 - \cos 2\pi\nu)} = \frac{V}{2} \quad (3.7)$$

接著考慮 G_m 函數，由式 (2.6) 可得：

$$G_m(s = \sigma + j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(\sigma + j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(\sigma + j\omega) + \omega_n^2}$$

$$= \frac{\omega_n^2}{(\sigma^2 - \omega^2 + \omega_n^2 + 2\xi\omega_n\sigma) + j(2\sigma\omega + 2\xi\omega_n\omega)} \quad (3.8)$$

由式 (3.8) 可得到 $\frac{bk_c}{k}G_m$ 函數在複數平面上的映射軌跡如圖 3-5 (b) 所示。

圖中實線代表頻率固定 ($\omega = \text{constant}$) 時 $\frac{bk_c}{k}G_m$ 函數的映射軌跡，虛線代表實部為零 ($\sigma = 0$) 時的映射軌跡。圖中三條實線軌跡所代表的頻率之大小關係為 $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ ，實線上的箭頭方向表示 σ 增加的方向。

圖 3-6 為圖 3-5 (a) 與圖 3-5 (b) 合併的情形。由圖中可看出一個 $\frac{bk_c}{k}G_m(\sigma, \omega = \text{constant})$ 的軌跡與 $G_{cp}(\bar{\mu} = 1, \nu)$ 的直線會有兩交點，一交點落在穩定區域，令此點在 G_{cp} 函數上對應的 ν 值為 ν_1 ，而另一交點則落在不穩定區域，令此點在 G_{cp} 函數上對應的 ν 值為 ν_2 。

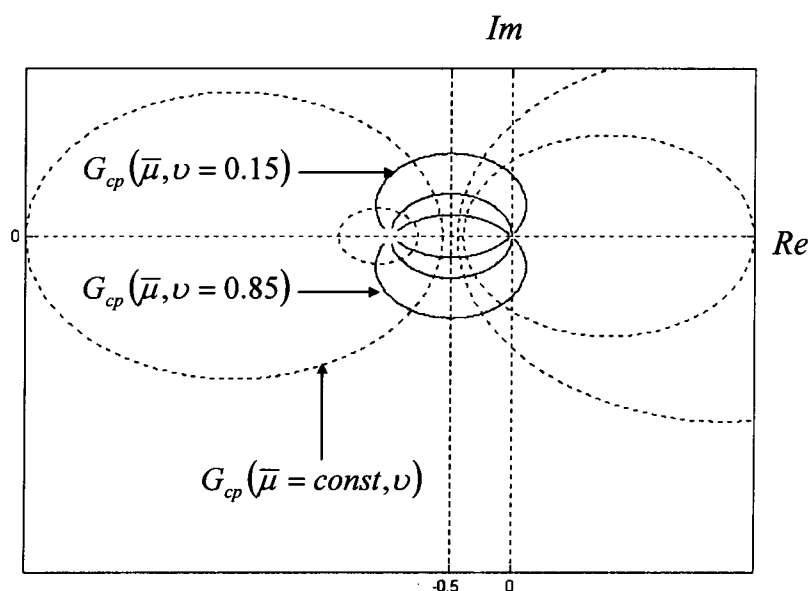


圖 3-5 (a) G_{cp} 函數在複數平面的映射

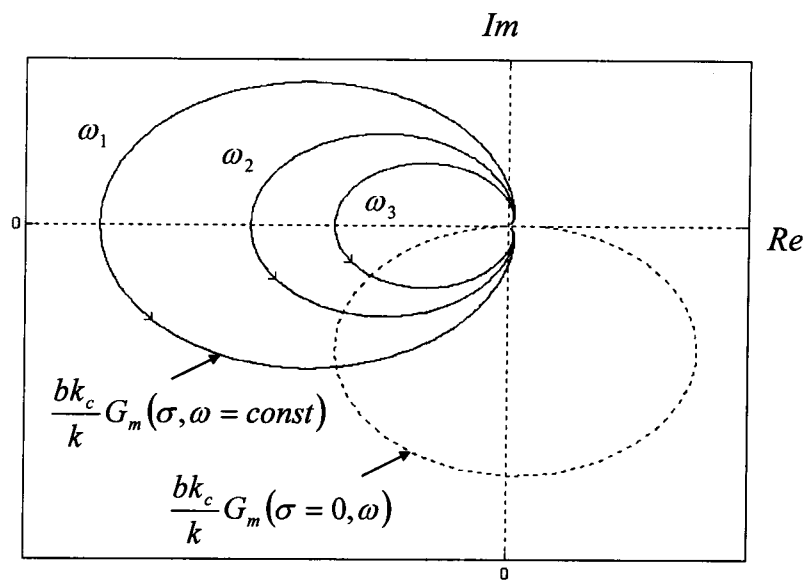


圖 3-5 (b) $\frac{bk_c}{k} G_m$ 函數在複數平面的映射

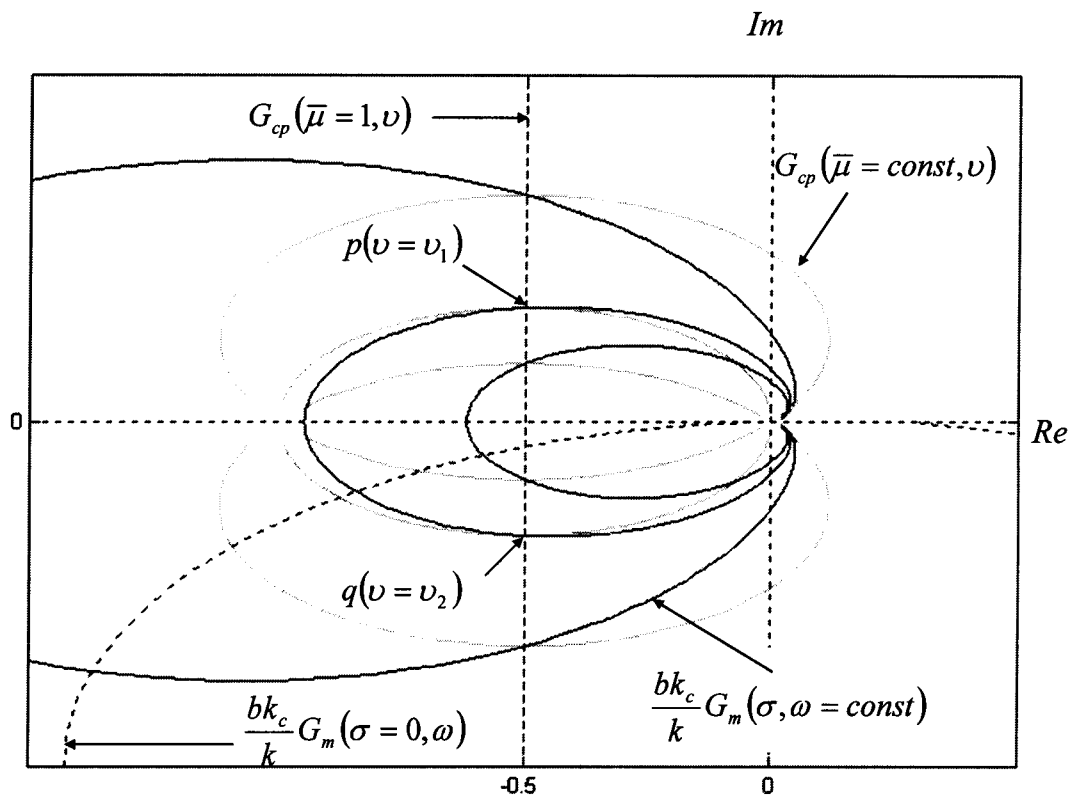


圖 3-6 將圖 3-5 (a)、(b) 合併的情形

在式 (3.8) 中，令

$$A = \sigma^2 - \omega^2 + \omega_n^2 + 2\zeta\omega_n\sigma \quad (3.9)$$

$$B = 2\sigma\omega + 2\zeta\omega_n\omega \quad (3.10)$$

則式 (3.8) 可簡化為

$$\begin{aligned} G_m(\sigma + j\omega) &= \frac{\omega_n^2}{A + jB} \\ &= \frac{A\omega_n^2 - jB\omega_n^2}{A^2 + B^2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

因此若令 $\beta = \frac{bk_c}{k}$

則
$$\frac{bk_c}{k} G_m(\sigma + j\omega) = \frac{A\beta\omega_n^2 - jB\beta\omega_n^2}{A^2 + B^2}$$

實部
$$\text{Re}[\beta G_m(\sigma, \omega)] = \frac{A\beta\omega_n^2}{A^2 + B^2} \quad (3.12)$$

虛部
$$\text{Im}[\beta G_m(\sigma, \omega)] = \frac{-B\beta\omega_n^2}{A^2 + B^2} \quad (3.13)$$

將式 (3.6)、(3.7)、(3.12)、(3.13) 作係數比較，可得

$$\begin{cases} \frac{A\beta\omega_n^2}{A^2 + B^2} = -\frac{1}{2} \\ -\frac{B\beta\omega_n^2}{A^2 + B^2} = \frac{V}{2} \end{cases} \quad (3.14)$$

將式 (3.14) 整理為
$$\begin{cases} A^2 + B^2 + 2A\beta\omega_n^2 = 0 \\ V(A^2 + B^2) + 2B\beta\omega_n^2 = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

對 A 與 B 來說，式 (3.15) 可視為一個二元聯立方程組，其解 A 、 B 分別

$$\text{為} \quad A = \frac{-2\beta\omega_n^2}{1+V^2} \quad (3.16)$$

$$B = \frac{-2\beta\omega_n^2}{1+V^2}V \quad (3.17)$$

由式 (3.9)、(3.10) 將 A 、 B 還原，並代入式 (3.16)、(3.17)

$$\begin{cases} \sigma^2 - \omega^2 + \omega_n^2 + 2\xi\omega_n\sigma = \frac{-2\beta\omega_n^2}{1+V^2} \\ 2\sigma\omega + 2\xi\omega_n\omega = \frac{-2\beta\omega_n^2}{1+V^2}V \end{cases} \quad (3.18)$$

由式 (3.18) 的第二個方程式可得

$$\sigma = \frac{-1}{2\omega} \left(\frac{2\beta\omega_n^2}{1+V^2}V + 2\xi\omega_n\omega \right) \quad (3.19)$$

代回式 (3.18) 的第一個方程式可得

$$4\omega^4 - 4\omega_n^2 \left(1 + \frac{2\beta}{1+V^2} - \xi^2 \right) \omega^2 - \left(\frac{2\beta\omega_n^2}{1+V^2}V \right)^2 = 0 \quad (3.20)$$

在式 (3.20) 中 V 皆為偶次項，且 V 相關於 $\text{Im}[G_{cp}(\bar{\mu}=1, \nu)]$ ，因此不論

$\text{Im}[G_{cp}(\bar{\mu}=1, \nu)]$ 為正或為負，只要絕對值相同，對式 (3.20) 解出的 ω 都沒

有影響。又 $G_{cp}(\bar{\mu}=1, \nu)$ 對稱於實軸，因此任意 $\beta G_m(\sigma, \omega = \text{constant})$ 的軌跡

若與 $G_{cp}(\bar{\mu}=1, \nu)$ 的直線相交於兩點，則此兩點會對稱於實軸，如圖 3-3 中

的 p 、 q 兩點，其對應的 ν 值分別為 ν_1 、 ν_2 且恆滿足

$$\nu_1 + \nu_2 = 1 \quad (3.21)$$

式 (3.21) 可解釋為：在相位差為 ν_1 、 ν_2 時，由於系統極點實部各為一負一正，因此系統狀態各為穩定與不穩定，但是其振動頻率是一致的。

若系統與切削條件已知，即 ω_n 、 ξ 與 β 已知，則式 (3.20) 可視為 ω 與 ν 的關係式，也就是系統振動頻率與相位差的對應關係。在 $\omega_n = 30 \text{ Hz}$ 、 $\xi = 0.05$ 的系統參數下為例，吾人可得 ω 與 ν 的對應關係如圖 3-7(a) 所示，圖中四條線由上而下分別代表 $\frac{bk_c}{k} G_m = 0.5、0.4、0.3、0.2$ 。再由式 (2.15)：

$$N = \frac{\omega}{2\pi(n+\nu)}$$

吾人可利用振動頻率 ω 與相位差 ν 得到此狀態的主軸轉速 N ，圖 3-7 (b) 為取 $n=0$ 時，主軸轉速與系統振動頻率的關係圖，圖中四條線由上而下分別代表 $\frac{bk_c}{k} = 0.5、0.4、0.3、0.2$ 。由圖中可發現在相同的主軸轉速 N 下，不同的 $\frac{bk_c}{k}$ 值（可視為不同的銑削深度），所產生的顫振頻率 ω 有所不同，且顫振頻率的增加與銑削深度成正相關。圖 3-7 (c) 為 $\frac{bk_c}{k} = 0.2$ 時，取 $n=0,1,2,3$ ，所得到的主軸轉速與系統振動頻率的關係圖。圖中可看出在相同的 n 值下，顫振頻率與主軸轉速有正相關。

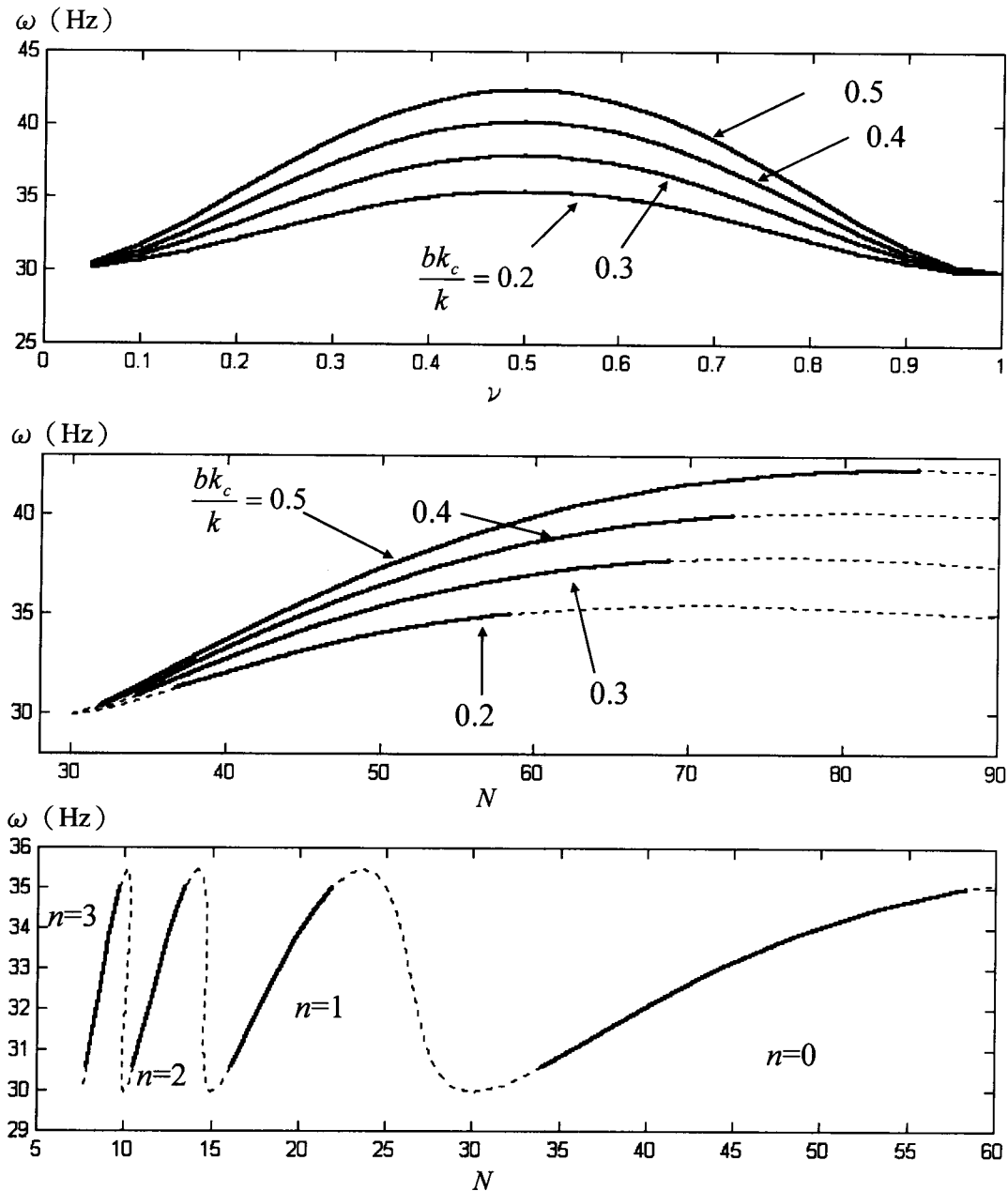


圖 3-7 顫振頻率與相位差及主軸轉速的關係圖 (a) 系統相位差與振動頻率的對應關係圖 (b) 主軸轉速與系統振動頻率在 $n=0$ 時的關係圖。其中實線為不穩定狀態，虛線為穩定狀態 (c) $\frac{bk_c}{k}=0.2$ 時，主軸轉速與系統振動頻率的關係圖。其中實線為不穩定狀態，虛線為穩定狀態

3-3 主軸轉速調整方法

一般顫振發生時，主軸轉速調整的方式類似於式 (2.15)

$$N = \frac{\omega}{2\pi(n+\nu)}$$

也就是將顫振頻率 ω 除以一實數 $2\pi(n+\nu)$ ，其中 ν 為欲調整到的相位差 ν ，但由上一節的討論可知，顫振頻率並非維持固定不變，因此 ν 的選擇若不能滿足式 (3.21)，則系統振動頻率將會改變，使調整後的主軸轉速無法達到預期的相位差。

假設在主軸轉速為 N_1 時發生顫振，顫振頻率為 ω_1 ，則可知此時系統的相位差為

$$\nu_1 = \frac{\omega_1}{N_1}$$

由式 (3.21) 可知，相位差為 ν_2 可使顫振頻率不變且穩定系統，因此可將轉速調整為

$$N_2 = \frac{\omega_1}{2\pi(n+\nu_2)}$$

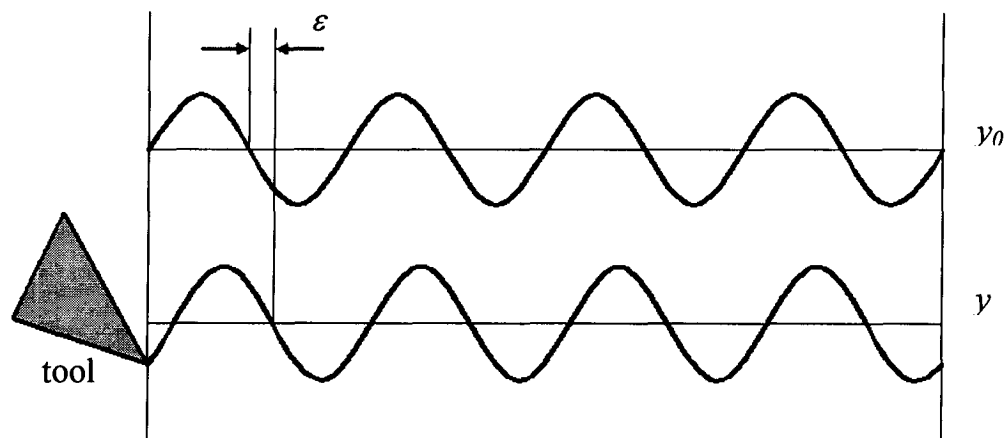
且由式 (3.21)

$$\nu_1 + \nu_2 = 1$$

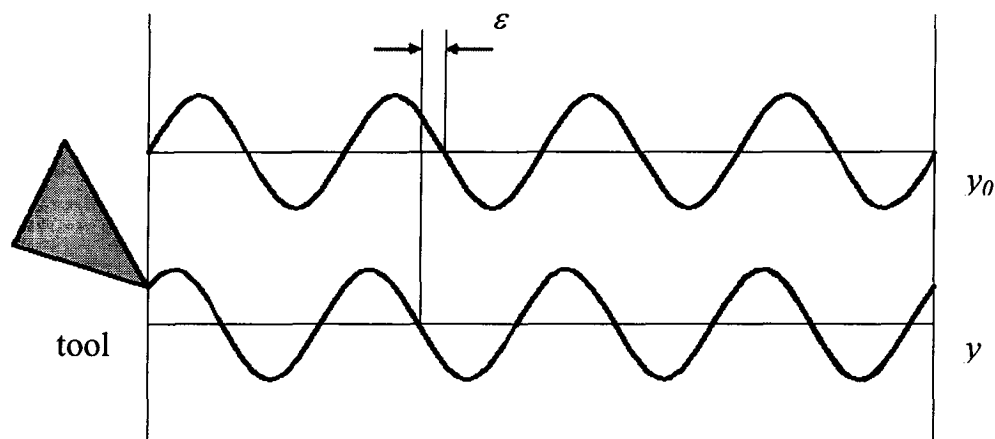
因此

$$N_2 = \frac{\omega_1}{2\pi(n+(1-\nu_1))} \quad (3.22)$$

式 (3.22) 的主軸轉速調整方法，在微觀上的示意圖如圖 3-8 所示。在文獻【23】中指出，若刀刃的振動相位 y 領先工件表面波紋的相位 y_0 ，則系統振動能量會被吸收，因此有使系統穩定的效果。而式 (3.22) 便是利用系統在不穩定的情況下刀刃振動所落後之相位差值 ε ，將系統的相位差關係由刀刃落後 ε 調整為刀刃領先 ε ，以使系統穩定。



(a) 調整前，刀刃振動相位 y 落後工件表面波紋相位 y_0



(b) 調整後，刀刃振動相位 y_0 領先工件表面波紋相位 y

圖 3-8 主軸轉速調整方法在微觀上的示意圖

由上一節的圖 3-7 可知，在同一個 n 值，相同切削深度下，主軸轉速越高所得到的顫振頻率也會越高。假設系統的穩定區間非常狹窄而可以視為一固定的主軸轉速 N_c ，如圖 3-9，若 a 、 b 為兩個擁有不同初始轉速的不穩定狀態，則以式 (2.15) 的型態要將 a 、 b 兩點調整到穩定狀態 N_c ，下列關係必須成立

$$N_c = \frac{\omega_a}{2\pi(n + \nu_a)} = \frac{\omega_b}{2\pi(n + \nu_b)} \quad (3.23)$$

且 $\omega_a > \omega_b$

因此 $\nu_a > \nu_b$

換句話說，由於穩定區間狹窄，因此在不同的狀態下應使用不同的 ν 值，而式 (3.22) 的方法正好具有這種其他調整方法所沒有的特性。

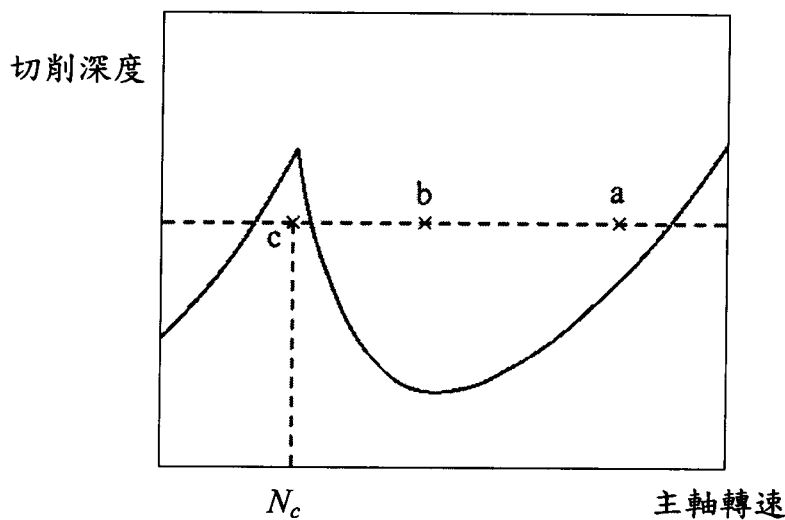


圖 3-9 主軸轉速調整示意圖

3-4 電腦模擬

此節將以本研究所提出的主軸轉速調整方法，與 Smith 等人【20、21】及 Liao 與 Young 等人【23】所提出的調整方法，在下列四個電腦模擬中做一比較，以說明在某些情況下，前人的調整方法會發生無法一次將系統調整至穩定的情況，而本研究所提出的調整方法則可以使系統穩定。Smith 認為令 $\nu=0$ 代入式(2.15)中可使系統穩定；而 Liao 與 Young 認為 $\nu=0.25$ 會有最快的收斂速度。以下的模擬工作是使用四階 Runge-Kutta 數值分析方法完成，使用的系統參數為： $\omega_n=30\text{ Hz}$ 、 $\xi=0.05$ 。

模擬一

模擬一將先探討不同初始狀態對於顫振頻率的識別的差異。以圖 3-10 與圖 3-11 為例，在 $\frac{bk_c}{k}=0.4$ 的情況下，圖 3-10 的初始主軸轉速為 40Hz，在第一秒時調整為 31.7Hz，取第二至第十秒作 FFT，得顫振頻率為 30.375Hz；而圖 3-11 則是在一開始就將初始主軸轉速設為 31.7Hz，同樣以第二至第十秒作 FFT，結果亦為 30.375Hz。因此不同的初始主軸轉速在模擬上對識別的結果沒有差異，所以接下來的模擬中，將以圖 3-11 的方式來識別顫振頻率。

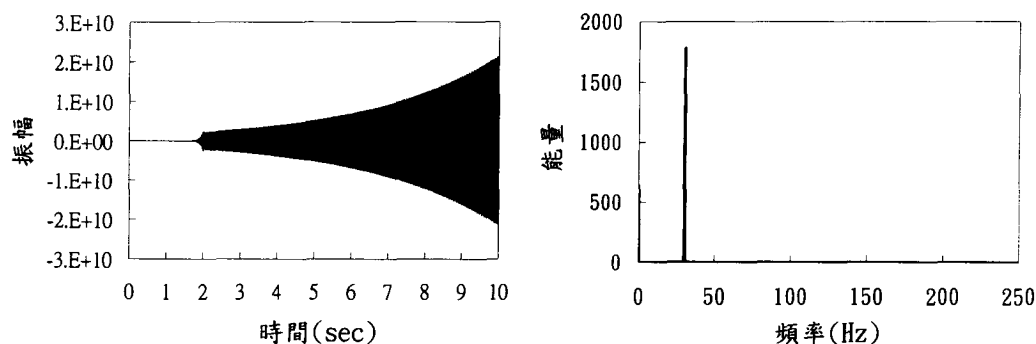


圖 3-10 由初始轉速 40Hz 在第一秒時調整為 31.7Hz，取第二至十秒作取樣，顫振頻率為 30.375Hz

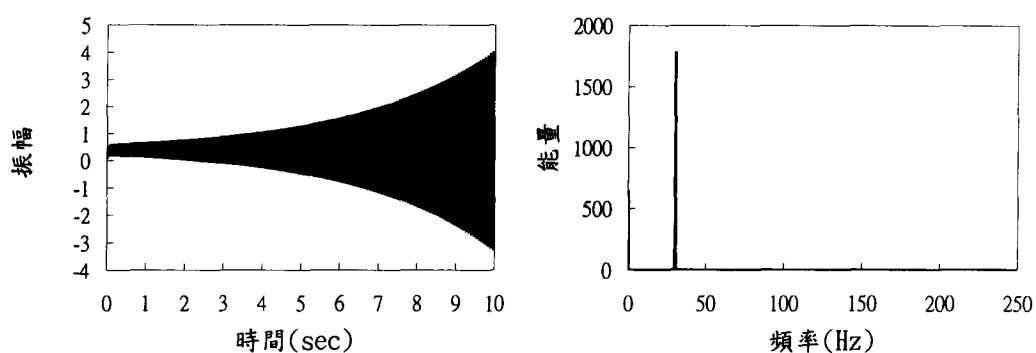


圖 3-11 初始轉速為 31.7Hz，取第二至第十秒作取樣，顫振頻率為 30.375Hz

模擬二

$$\frac{bk_c}{k}=0.4、\text{初始主軸轉速}=40\text{ Hz}$$

在此初始條件下，系統狀態位於不穩定區域，顫振頻率為 33.5 Hz，相位差約為 0.84，以下為針對三種主軸轉速調整方法各令 $\nu=0$ 、0.25 以及 0.16 的模擬結果。

i. $\nu=0$ ， $n=1$

利用 $\nu=0$ 的方法，每間隔一秒鐘調整一次主軸轉速，直到穩定為止，模擬的過程如圖 3-12 與圖 3-13 所示，數據列於表 3-1。

表 3-1 模擬二中主軸轉速調整之過程 ($\nu=0$)

編號	主軸轉速	顫振頻率	相位差
a	40	33.5	0.84
b	33.5	31.2	0.93
c	31.2		

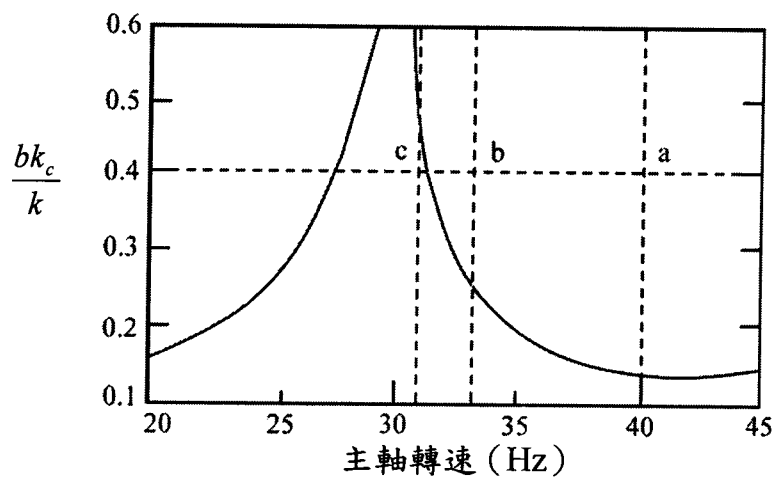


圖 3-12 模擬二中主軸轉速在穩定性圖上的移動情況 ($\nu=0$)

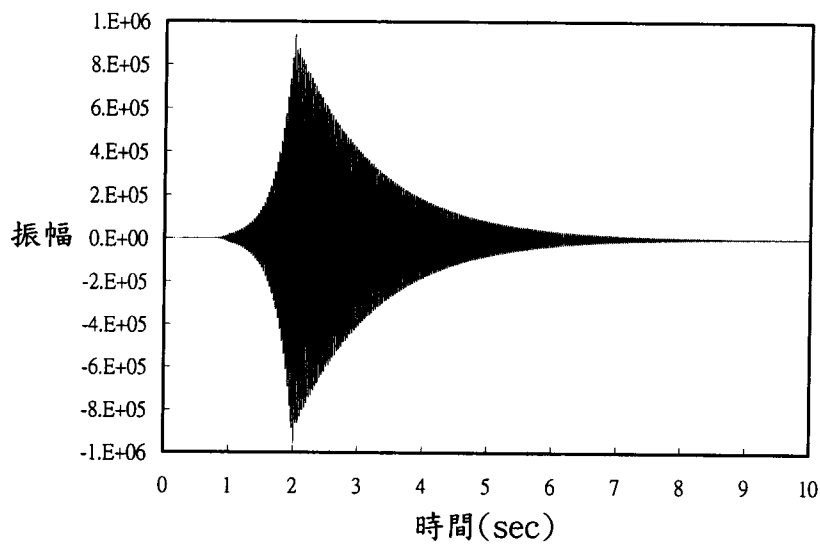


圖 3-13 模擬二中系統在調整過程中的振動情形 ($\nu=0$)

ii. $\nu = 0.25$, $n = 1$

利用 $\nu = 0.25$ 的方法，在第一秒鐘調整主軸轉速，系統便穩定，模擬的過程如圖 3-14 與圖 3-15 所示，數據列於表 3-2。

表 3-2 模擬二中主軸轉速調整之過程 ($\nu = 0.25$)

編號	主軸轉速	顫振頻率	相位差
a	40	33.5	0.84
b	26.8		

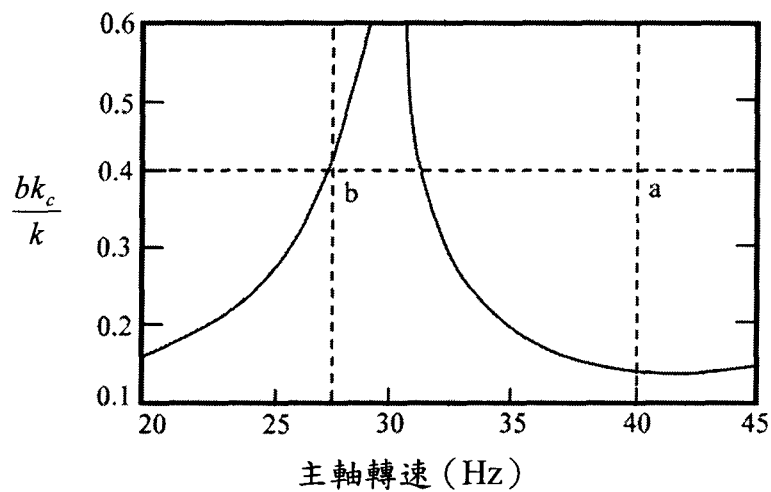


圖 3-14 模擬二中主軸轉速在穩定性圖上的移動情況 ($\nu = 0.25$)

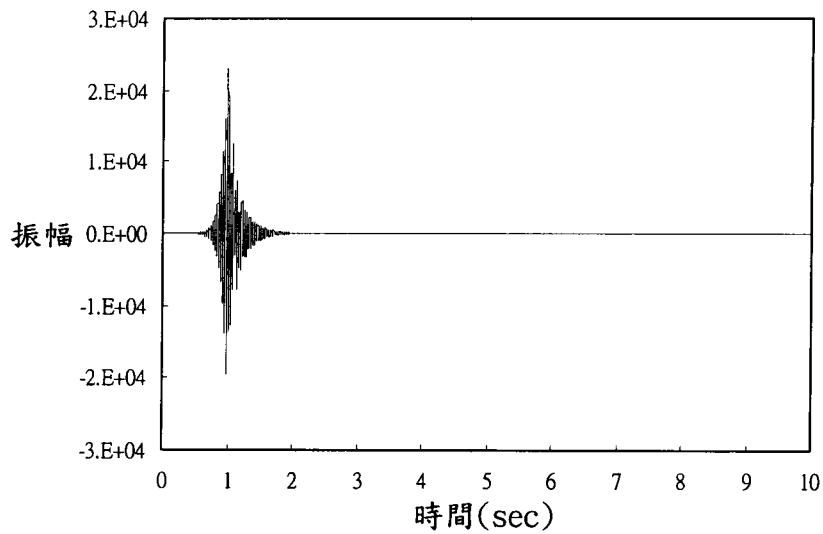


圖 3-15 模擬二中系統在調整過程中的振動情形 ($\nu = 0.25$)

iii. $\nu = 0.16$, $n = 1$

由於初始的相位差為 0.84，利用本文所提出的方法，令 $\nu = 0.16$ ，在第一秒鐘調整主軸轉速，便使系統穩定，模擬的過程如圖 3-16 與圖 3-17 所示，數據列於表 3-3。

表 3-3 模擬二中主軸轉速調整之過程 ($\nu = 0.16$)

編號	主軸轉速	顫振頻率	相位差
a	40	33.5	0.84
b	28.9		

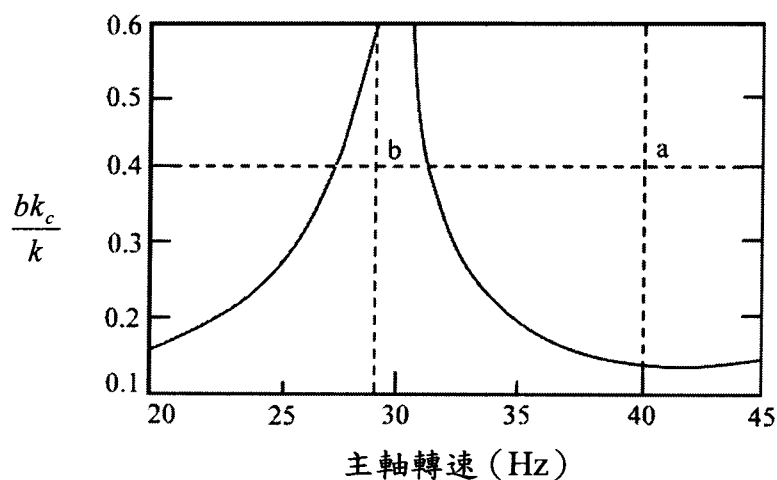


圖 3-16 模擬二中主軸轉速在穩定性圖上的移動情況 ($\nu = 0.16$)

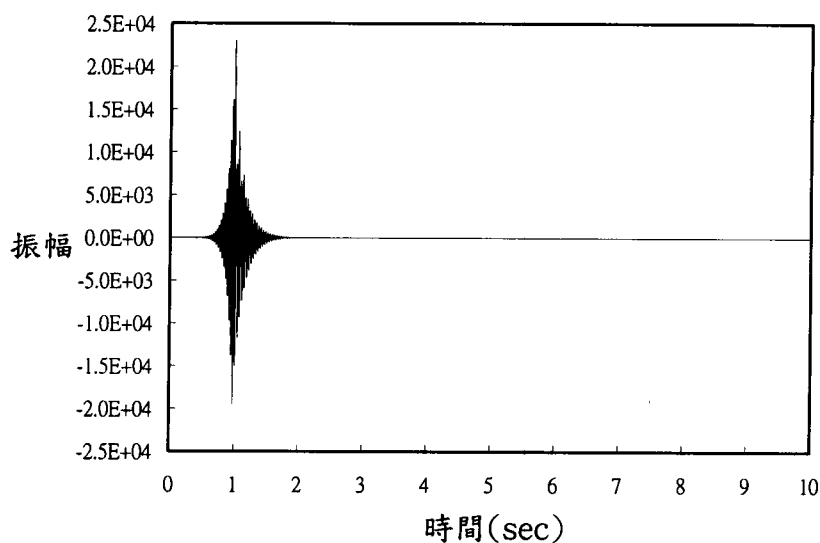


圖 3-17 模擬二中系統在調整過程中的振動情形 ($\nu = 0.16$)

在模擬二中，吾人發現以 $\nu = 0$ 的方式，會有使系統相位差逐漸增大的現象，因此從穩定圖上來看，主軸轉速會在相同 n 值的 lobe 中逐漸往左移動。因此以 $\nu = 0$ 的方式經過兩次調整，系統才被穩定下來。而令 $\nu = 0.25$ 或本文所提出的令 $\nu = 0.16$ ，可直接將系統穩定。

模擬三

$$\frac{bk_c}{k}=0.4、\text{初始主軸轉速}=32\text{ Hz}$$

在此初始條件下，系統狀態位於不穩定區域，此時顫振頻率為 30.5 Hz，相位差約為 0.95，以下為針對三種主軸轉速調整方法各令 $\nu = 0$ 、0.25 以及 0.05 的模擬結果。

i. $\nu = 0$ ， $n = 1$

利用 $\nu = 0$ 的方法，在第一秒鐘調整主軸轉速，系統便穩定，模擬的過程如圖 3-18 與圖 3-19 所示，數據列於表 3-4。

表 3-4 模擬三中主軸轉速調整之過程 ($\nu = 0$)

編號	主軸轉速	顫振頻率	相位差
a	32	30.5	0.95
b	29		

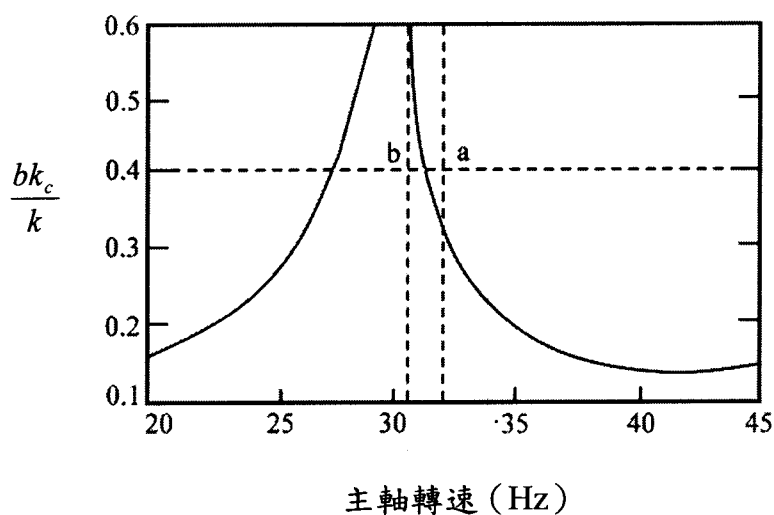


圖 3-18 模擬三中主軸轉速在穩定性圖上的移動情況 ($\nu = 0$)

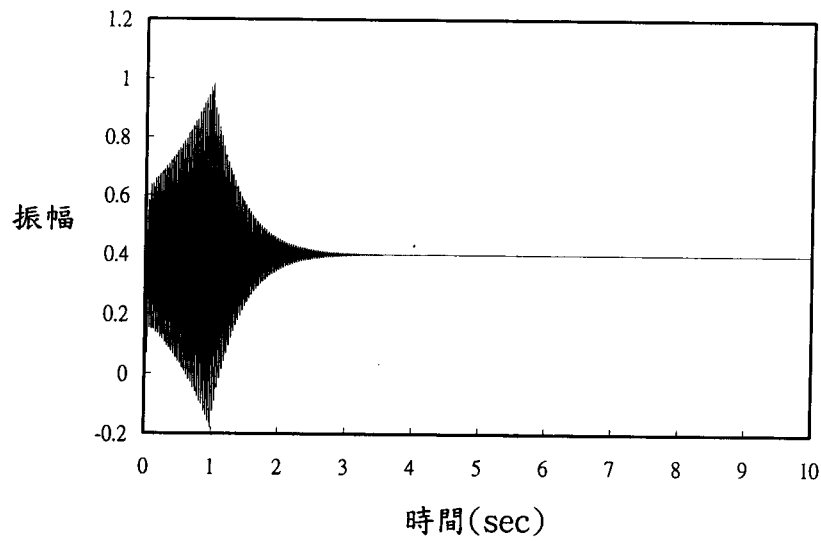


圖 3-19 模擬三中系統在調整過程中的振動情形 ($\nu=0$)

ii. $\nu=0.25$, $n=1$

利用 $\nu=0.25$ 的方法，每間隔一秒鐘調整一次主軸轉速，直到穩定為止，模擬的過程如圖 3-20 與圖 3-21 所示，數據列於表 3-5。

表 3-5 模擬三中主軸轉速調整之過程 ($\nu=0.25$)

編號	主軸轉速	顫振頻率	相位差
a	32	30.5	0.95
b	24.4	38.9	0.6
c	31.1		

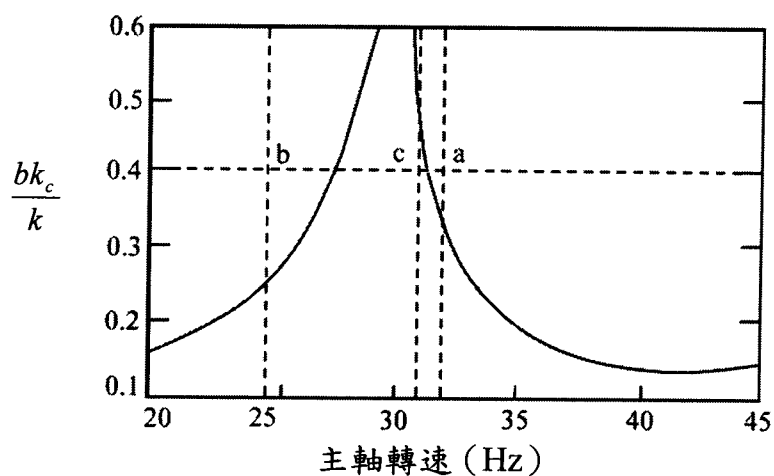


圖 3-20 模擬三中主軸轉速在穩定性圖上的移動情況 ($\nu=0.25$)

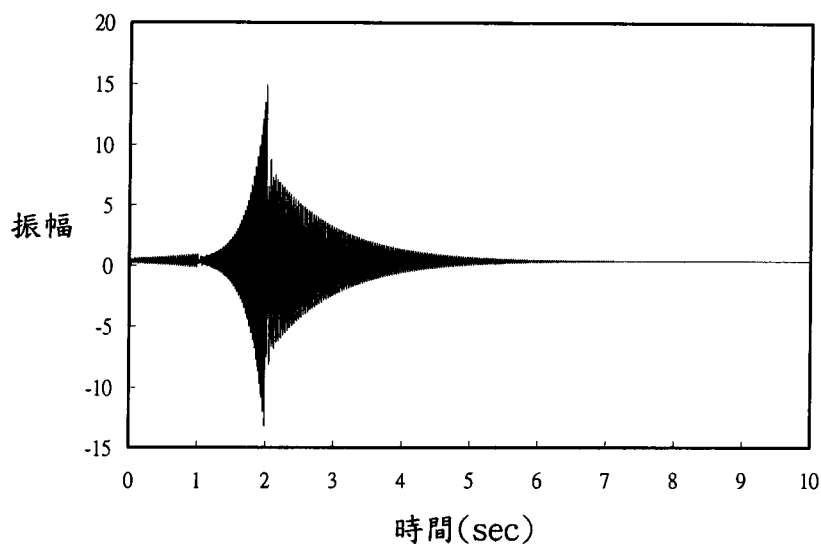


圖 3-21 模擬三中系統在調整過程中的振動情形 ($\nu=0.25$)

iii. $\nu=0.05$, $n=1$

由於初始的相位差為 0.05，利用本文所提的方法，令 $\nu=0.05$ ，在第一秒鐘調整主軸轉速，便使系統穩定，模擬的過程如圖 3-22 與圖 3-23 所示，數據列於表 3-6。

表 3-6 模擬三中主軸轉速調整之過程 ($\nu = 0.05$)

編號	主軸轉速	顫振頻率	相位差
A	32	30.5	0.95
B	29		

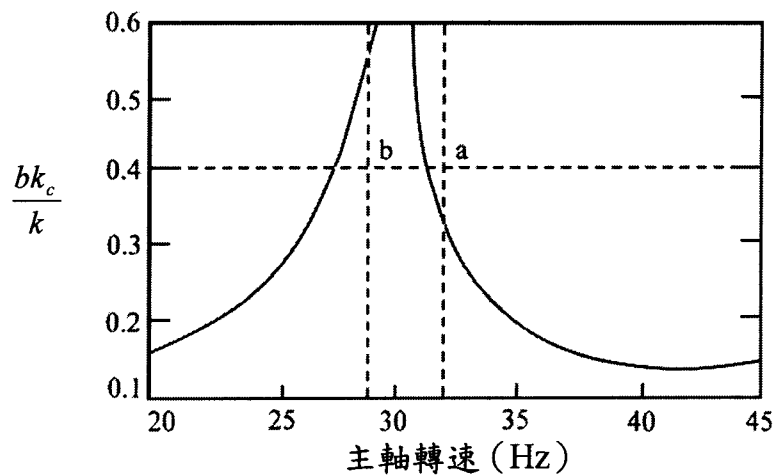


圖 3-22 模擬三中主軸轉速在穩定性圖上的移動情況 ($\nu = 0.05$)

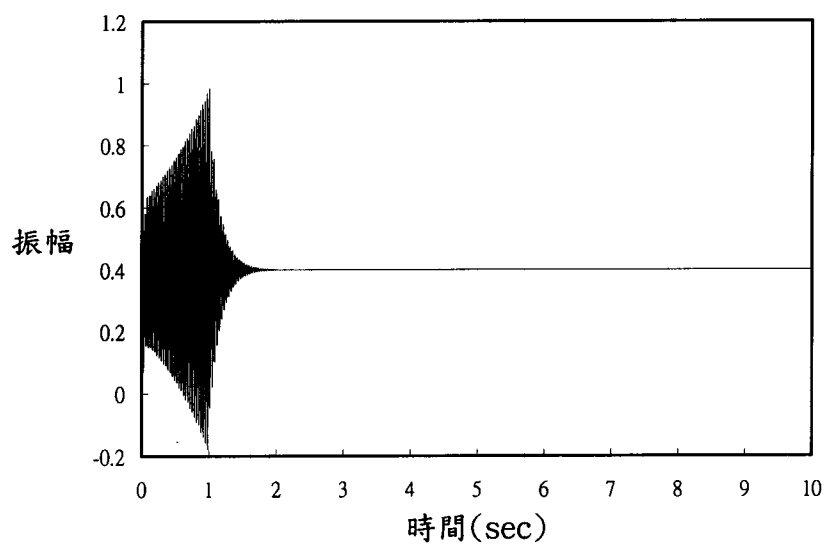


圖 3-23 模擬三中系統在調整過程中的振動情形 ($\nu = 0.05$)

在模擬三中發現， $\nu=0.25$ 的方法在很接近穩定邊界而不穩定的狀態下，會發生無法一次就將系統調整至穩定的情況。吾人認為造成這些現象的原因在於使用了不適當的 ν 值，以模擬三的初始條件來說，發生顫振時的相位差約為 0.95，因此令 $\nu=0.05$ 可以直接將主軸轉速調整到穩定的區間內，若以 $\nu=0.25$ 代入式

$$N = \frac{\omega}{2\pi(n+\nu)}$$

中，則會由於除數變大，導致得到的主軸轉速偏低，所以在圖 3-20 中 b 點的位置會落在穩定區間的左方，同樣地 c 點也因為這個原因無法落在穩定區間內。因此吾人認為，以上式的型態調整主軸轉速，並不是在任何初始條件下都可使系統狀態移動到期望的位置，因此即使最後系統穩定了，其相位差也不見得會是預期的值。同樣地，以 $\nu=0$ 的方式來調整，也不一定能直接將主軸轉速調整到穩定的區間內。

模擬四 $\frac{bk_c}{k}=0.3$ 、初始主軸轉速=11.5 Hz

在此初始條件下，系統狀態位於不穩定區域，此時顫振頻率為 32.7 Hz，相位差約為 0.84，以下為針對三種主軸轉速調整方法各令 $\nu=0$ 、0.25 以及 0.16 的模擬結果。。

i. $\nu=0$, $n=2$

利用 $\nu=0$ 的方法來調整主軸轉速，每間隔一秒鐘調整一次主軸轉速，直到穩定為止，模擬的過程如圖 3-24 與圖 3-25 所示，數據列於表 3-7。

表 3-7 模擬四中主軸轉速調整之過程 ($\nu=0$)

編號	主軸轉速	顫振頻率	相位差
a	11.5	32.7	0.84
b	16.35	31.3	0.91
c	15.65	30.4	0.94
d	15.2		

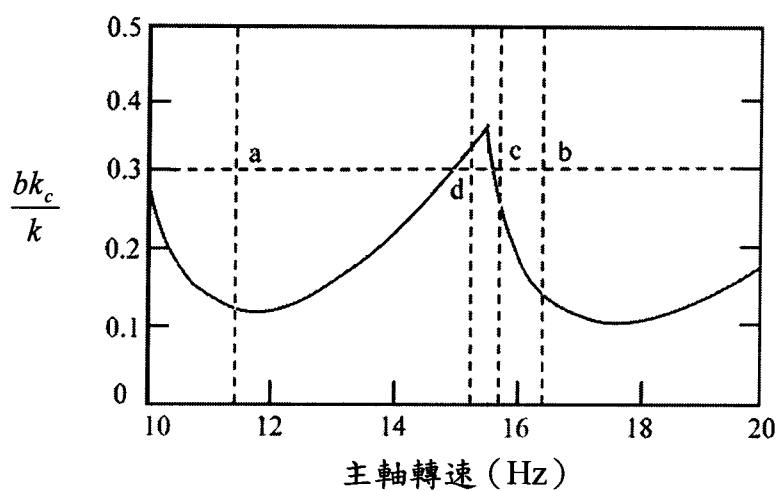


圖 3-24 模擬四中主軸轉速在穩定性圖上的移動情況 ($\nu=0$)

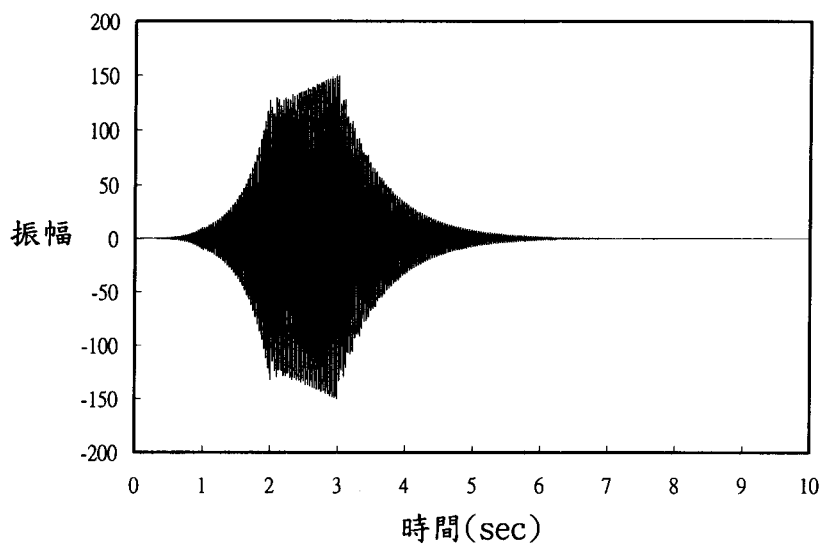


圖 3-25 模擬四中系統在調整過程中的振動情形 ($\nu=0$)

ii. $\nu = 0.25$, $n = 2$

利用 $\nu = 0.25$ 的方法，從第五秒起每間隔 0.5 秒調整一次主軸轉速，共做了 8 次調整依然無法得到穩定的主軸轉速。模擬的過程如圖 3-26 與圖 3-27 所示，數據列於表 3-8。

表 3-8 模擬四中主軸轉速調整之過程 ($\nu = 0.25$)

編號	主軸轉速	顫振頻率	相位差
a	11.5	32.7	0.84
b	14.53	37.4	0.57
c	16.64	31.6	0.90
d	14.06	36.6	0.61
e	16.26	31.2	0.92
f	13.86	36.4	0.63
g	16.17	31.1	0.92
h	13.82	36.3	0.63
i	16.13	31	0.92

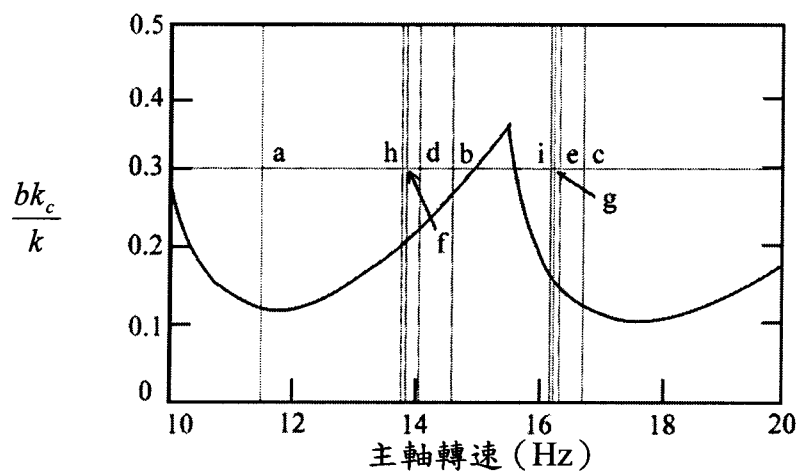


圖 3-26 模擬四中主軸轉速在穩定性圖上的移動情況 ($\nu = 0.25$)

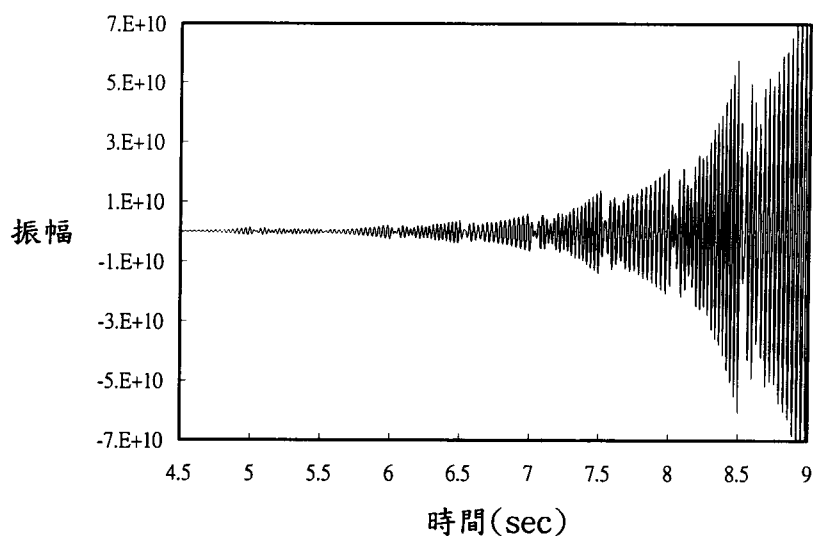


圖 3-27 模擬四中系統在調整過程中的振動情形 ($\nu = 0.25$)

iii. $\nu = 0.16$, $n = 2$

由於初始的相位差為 0.84，利用本文所提的方法，令 $\nu = 0.16$ ，在第一秒鐘調整主軸轉速，便使系統穩定，模擬的過程如圖 3-28 與圖 3-29 所示，數據列於表 3-7。

表 3-7 模擬四中主軸轉速調整之過程 ($\nu = 0.16$)

編號	主軸轉速	顫振頻率	相位差
a	11.5	32.7	0.84
b	15.1		

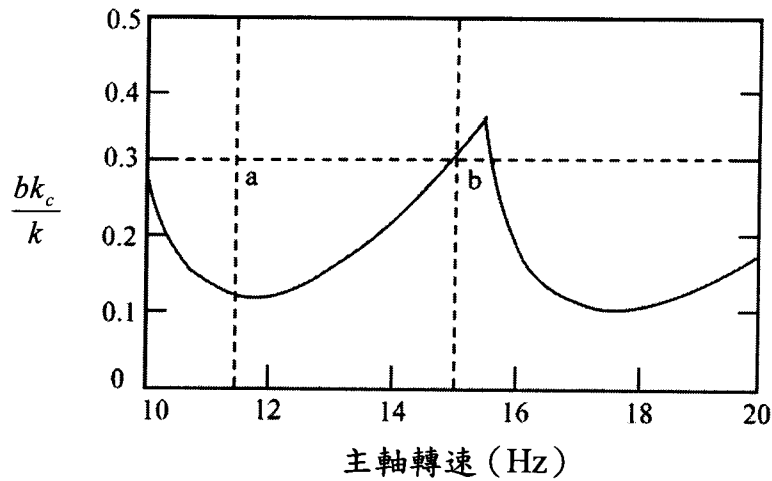


圖 3-28 模擬四中主軸轉速在穩定性圖上的移動情況 ($\nu = 0.16$)

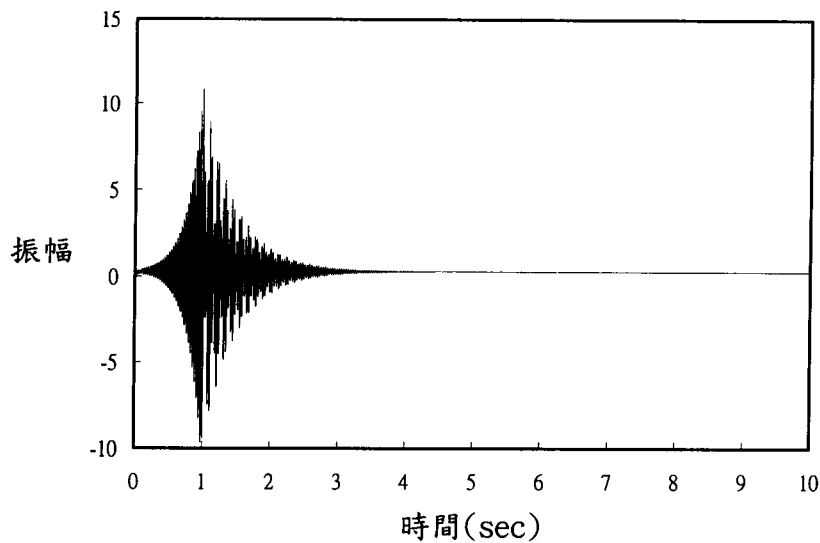


圖 3-29 模擬四中系統在調整過程中的振動情形 ($\nu = 0.16$)

模擬四中取 $n=2$ ，此時穩定區間變得更加狹窄，因此轉速的偏移對於調整效率的影響顯得更明顯，當 $\nu=0.25$ 時甚至發生無法將系統穩定的情形，而隨著初始條件的不同，有時以 $\nu=0$ 的調整方式也會發生這種現象。但以本文所提出的方法將 ν 值修正為 0.16，依然能夠順利將主軸轉速調整至狹窄的穩定區間內。

3-5 簡化的誤差

由於銑削系統為非常複雜之非線性時變系統，要解得此系統極點的解析解並非易事，因此本文在上述的推導之前，先假設系統極點在複數平面上的映射皆會落在 $\text{Re} = -\frac{1}{2}$ 的直線上，並且得到如式 (3.21)：

$$\nu_1 + \nu_2 = 1$$

之結果。此結果表示：若系統發生顫振，而顫振頻率為 ω_c 、系統相位差為 ν_1 ，則由式 (3.21) 所得到的 ν_2 ，將可以維持系統的振動頻率不變。

圖 3-30 為考慮未作簡化時的情形。若 a 與 b 各代表在 ω_c 之系統振動頻率下，不穩定與穩定極點的映射，且其相位差各為 ν_a 、 ν_b ；而 a^* 、 b^* 為本文所簡化的映射位置。則由圖中可看出，由於

$$\nu_a + \nu_a' = 1$$

$$\nu_b + \nu_b' = 1$$

所以

$$\nu_a + \nu_b \neq 1$$

由此看來，此一簡化方式在系統極點的計算上會有誤差存在，但從前述的電腦模擬結果來看，本文所提出的主軸轉速調整方法在與前人的方法相比之下，有較佳的調整效率。

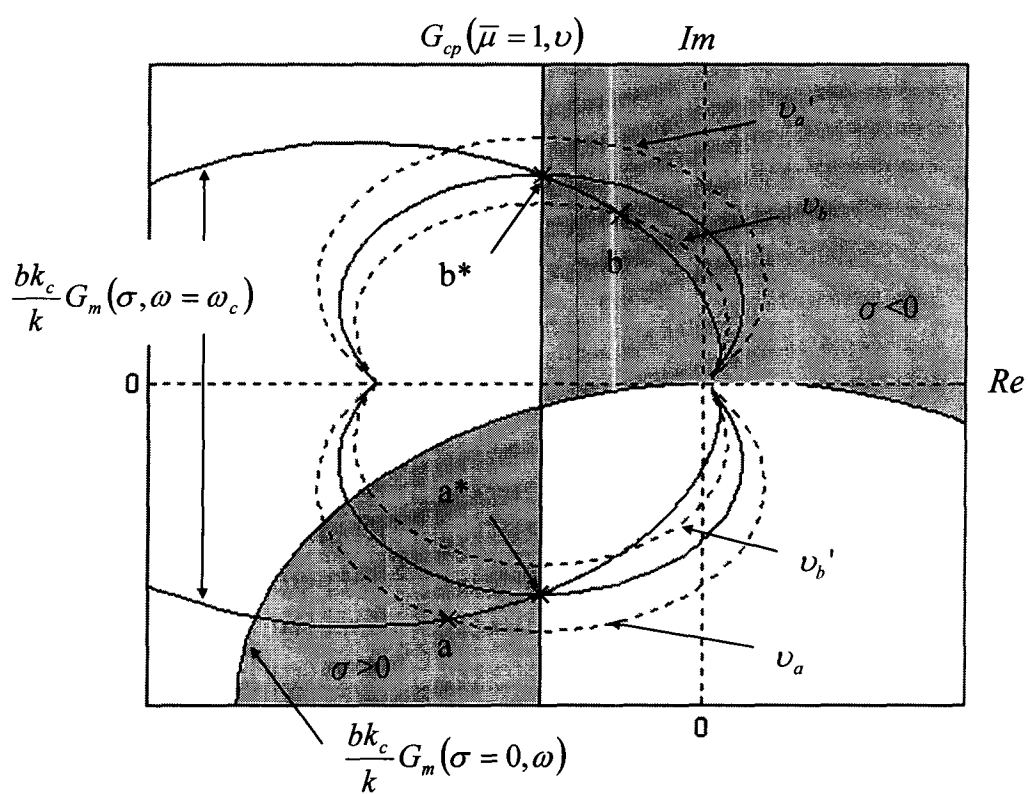


圖 3-30 簡化過程所產生的誤差

第四章 實驗設備與方法

4-1 實驗目的

本實驗將利用電腦執行線上顫振監控的工作，以驗證本文所提出的主軸轉速調整方法。除此之外，也將利用前人的調整方法，以作為比較。

4-2 實驗設備

1. 銑床

型式：台中精機 CNC 銑床 Vector65/I

最大切削進給率：5000 mm/min

最大床台移動速度：X 軸：18000 mm/min

Y 軸：18000 mm/min

Z 軸：12000 mm/min

2. 主軸

型式：IBAG HF-140 高速主軸

最高轉速：24000 rpm

最大輸出功率：14kW

3. 變頻器

型式：YASKAWA CIMR-G3A2015

最大輸出：AC 三相，230V，72A，27.4kVA

4. 動力計 (dynamometer)

型式：KISTLER 9257A

量測範圍：X 軸： $\pm 5000N$ ，線性度小於 3%

Y 軸： $\pm 5000N$ ，線性度小於 3%

Z 軸： $\pm 10000N$ ，線性度小於 3%

自然共振頻率：4kHz

適用溫度範圍：0 ~ 70°C

5. 電荷放大計 (charge amplifier)

型式：KISTLER 5007

最大輸出電壓： $\pm 10V$

輸出電流： $\pm 5mA$

輸出阻抗： $100 \pm 5\% \Omega$

6. A/D、D/A 轉換卡

型式：研華 Advantech PCL-818L

解析度：12bit

最大取樣速度：40kHz

A/D 輸入範圍：0 ~ 5V 或 0 ~ 10V

D/A 輸出範圍：0 ~ 10V

7. 個人電腦

CPU：Intel Pentium-S 120MHz

Ram：16MB

8. 端銑刀

型式：SANDVIK R216.34-12030-BC26N 1010

材質：碳化鎢

刀具直徑：12 mm

刀刃數：四刃

9. 工件材料

中碳鋼 (S45C) 約 12 cm長

10. 光學測速計

型式：Lucas Microtach 8400

11. 數位攝影機

型式：SONY TRV410

4-3 實驗設備架構

圖 4-1 為實驗設備的架構圖。電腦經由 AD/DA 卡做 D/A 轉換，輸給變頻器一直流電壓以驅動主軸轉速。切削過程中的切削力訊號由工件下方的動力計產生，經過電荷放大器後，進入 AD/DA 卡做 A/D 轉換以得到切削力的數據資料傳入電腦。此時所得到的是時域的切削力數據，對其做快速傅立葉轉換 (Fast Fourier Transform FFT) 得到其頻譜，便可判斷顫振是否發生或進一步偵測顫振的頻率，以決定下來的主軸轉速。

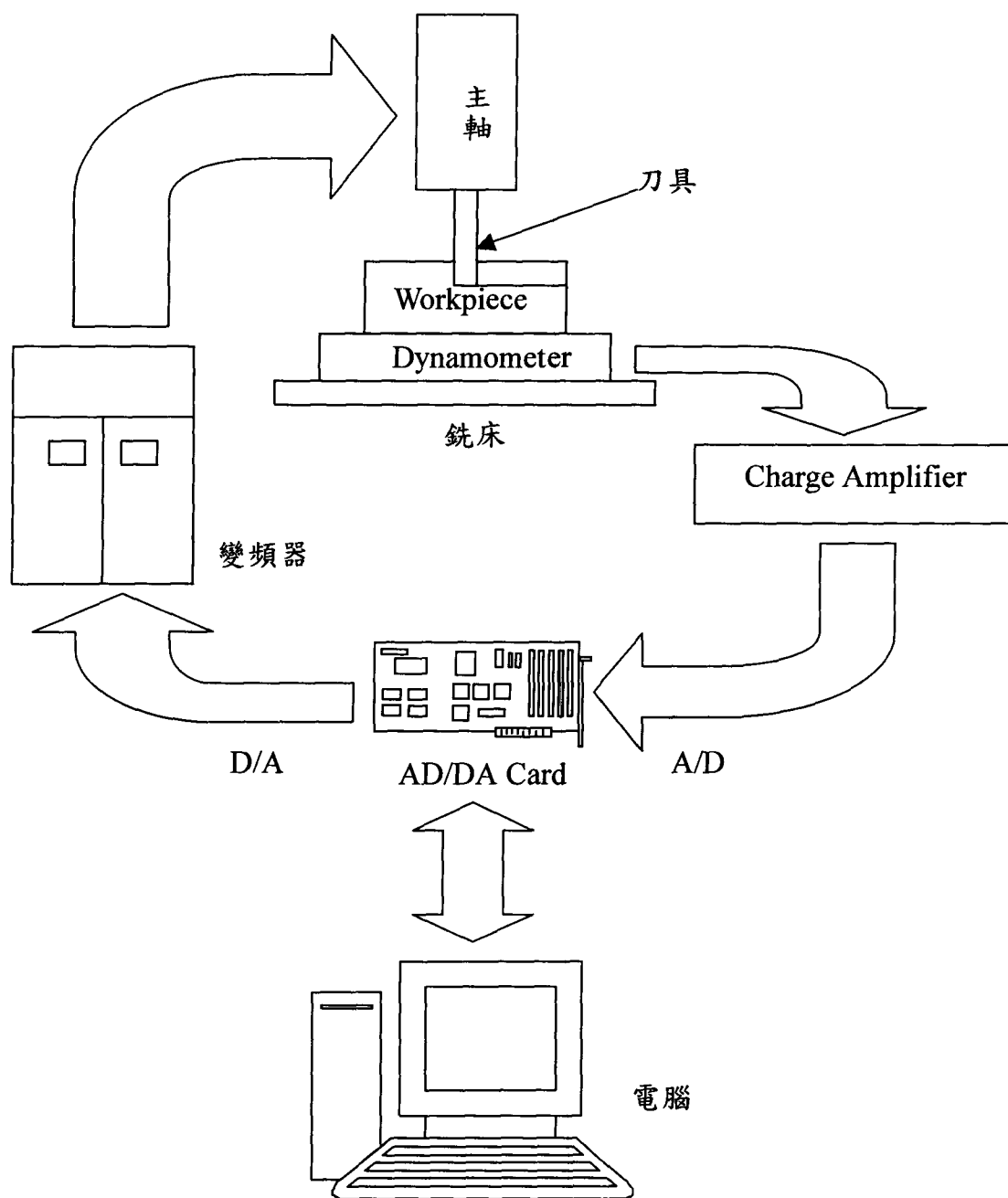


圖 4-1 實驗設備架構圖

4-4 線上顫振監控程式之設計

本實驗所使用的程式是以 Turbo C 2.0 撰寫完成，其主要功能有三：一為利用 A/D 轉換卡取得切削力數據，並且加以儲存以供後續的計算工作；其次為對切削力數據作 FFT 以取得系統振動的頻譜，再進一步偵測顫振頻率、決定新的主軸轉速；再其次是經由 D/A 轉換卡，將新的主軸轉速傳送到變頻器，以調整主軸轉速。此外，當然還包括了使用介面的功能，讓使用者容易掌握目前狀況。關於其中參數設定敘述如後。

1. A/D 轉換的取樣速度為 4kHz，輸入電壓範圍為 0~5V，以 DMA (Direct Memory Access) 方式一次取樣 2048 筆資料，因此取樣時間大約為 0.5 秒，可量測的最高頻率為 2kHz，並且在下一次取樣動作之前，就先將目前的取樣資料儲存一份在硬碟裡，以供未來分析時使用。
2. 利用 A/D 轉換的取樣資料做 FFT，所得到的頻譜可用來判斷顫振發生與否，而判斷的依據在此實驗中是令臨界能量為 5，此一標準乃是由先前的加工經驗獲得，必須考慮到對於工件表面精度的要求與容忍度。當不只一個頻率的能量超過臨界能量，且其頻率值不是主軸轉速或其諧頻時，則取能量最大的頻率當作顫振頻率。此外，程式中還有偵測刀刀通過頻率的設計，以更精確地計算新的主軸轉速。
3. 主軸最大轉速為 24000 rpm，而 D/A 轉換卡之解析度為 12 bit，輸出電壓範圍為 0~10V，且變頻器的輸入範圍亦為 0~10V，因此輸入 D/A 轉換卡的數值 D_m 可利用線性比例的方式來計算

$$D_m = \frac{New_RPM}{24000} \times 4095$$

64

4-5 實驗方法

本實驗使用四刃碳化鎢銑刀，刀具直徑為 12 mm，以溝槽銑削 (slotting) 的方式切削中碳鋼 (S45C)，銑削深度為 0.8 mm，進給速度固定為 1200 mm/min，在切削過程中有噴灑切削液。

實驗中使用動力計來量測進給方向的切削力，經過電荷放大器與 A/D 轉換卡，將切削力數據輸入電腦，再以自行撰寫的程式執行線上顫振監控。在每一道溝槽的切削過程中，可以完成約九至十筆的切削力數據取樣工作，每筆數據的時間長度約為 0.5 秒，將其全部儲存，以供後續的實驗結果分析。若有顫振發生，則程式會自動偵測顫振頻率及刀刃通過頻率，並計算出新的主軸轉速，再將結果利用 D/A 轉換卡輸入變頻器以調整主軸轉速。

實驗中不但將針對本文所提出的主軸轉速調整方法加以試驗，也將使用先前他人所提出的方法，以作為比較。

第五章 實驗結果與分析

本實驗利用動力計來量測進給方向的切削力，並輸入電腦，再以自行撰寫的程式執行線上顫振監控。在每一道溝槽的切削過程中，可以完成約九至十筆的切削力數據取樣工作，每筆數據的時間長度約 0.5 秒。因此，接下來的實驗結果中所顯示的切削力數據，便是擷取自該次實驗中某筆據有代表性的數據，而非整個實驗過程的取樣數據。

所有的實驗皆使用直徑 12 mm 的四刃碳化鎢銑刀，切削深度皆為 0.8 mm，在主軸轉速調整過程中，將不改變進給速度，一律維持 1200 mm/min 的進給速度。

此外，為說明與計算方便，以下將以刀刀通過頻率（tool passing frequency 簡稱 TPF）代替主軸轉速來做討論，兩者之間的轉換關係為：

$$\text{刀刀通過頻率 (Hz)} = \text{主軸轉速 (RPS)} \times \text{銑刀刀刀數}$$

5-1 實驗結果

此將處列出三個實驗結果。在第一個與第二個實驗中，各包含了兩種主軸轉速調整方法的實驗結果，分別為令 $v=0$ (A) 與本文所提出的方法 (B)，由兩者的比較結果可以看出不同 v 值對調整效率的影響。

實驗一

- A. 在初始 TPF 為 513 Hz 時，主軸轉速為 7695 rpm，系統發生顫振，切削力如圖 5-1 所示，此顫振頻率約為 1885Hz，見圖 5-2。取 $n+v=4$ ，將 TPF 調整為 471Hz，主軸轉速 7065rpm，此時切削力如圖 5-3，調整後仍存在一顫振頻率為 1808Hz，見圖 5-4。圖 5-5 是動態切削力的比較圖，此圖為將量測到的切削力濾去 TPF 所得到的結果，比較調整前 (a) 與調整後 (b) 的動態切削力，兩者差異不大，因此意味著顫振仍然存在。

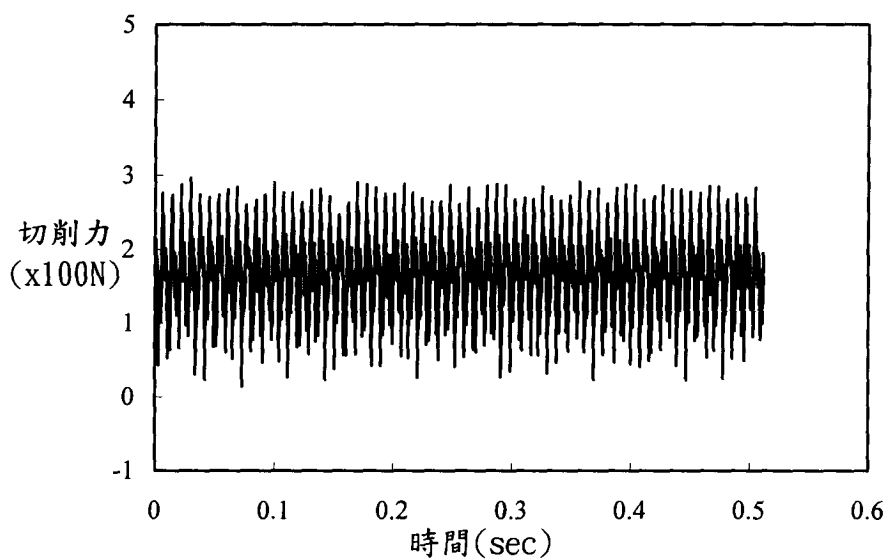


圖 5-1 實驗一 A 中 TPF=513Hz 時的切削力訊號

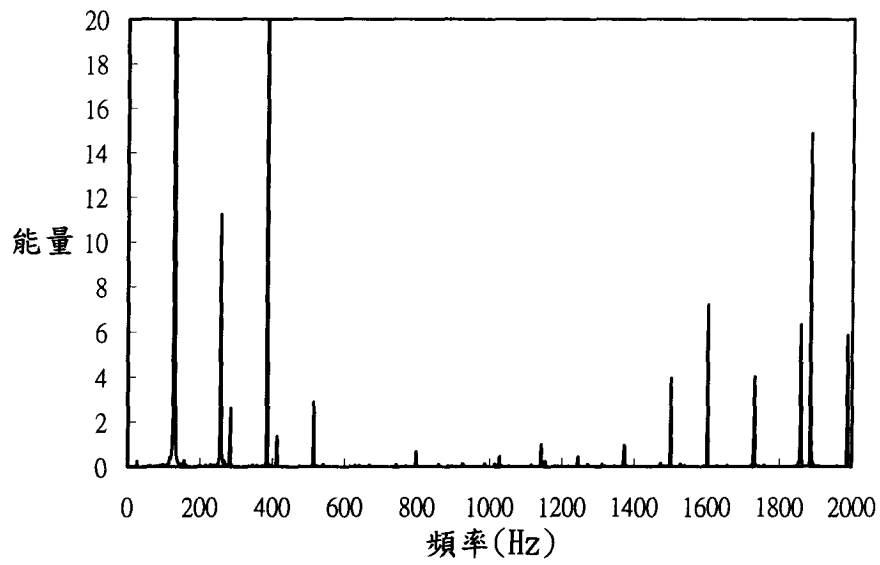


圖 5-2 實驗一 A 中 TPF=513Hz 時的頻譜圖，顫振頻率為 1885Hz

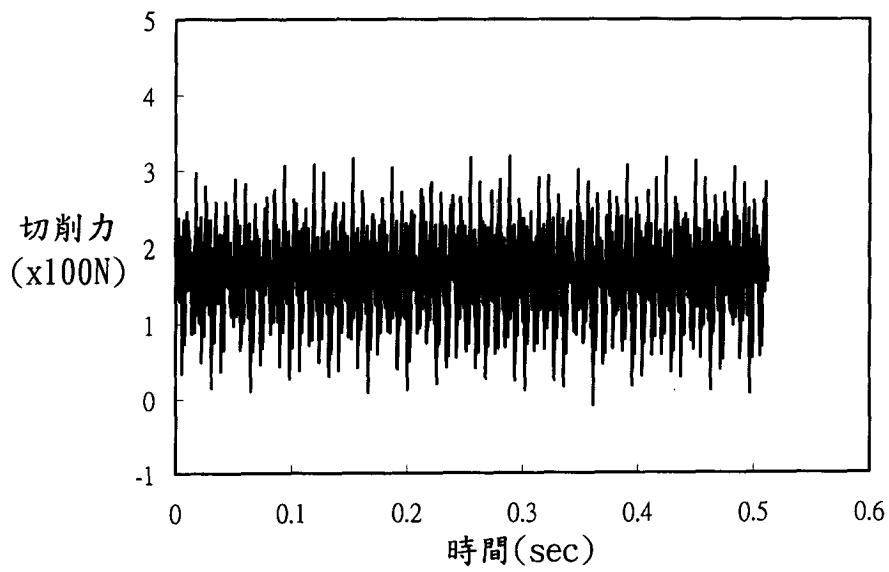


圖 5-3 實驗一 A 中將 TPF 調整為 471Hz 時的切削力訊號

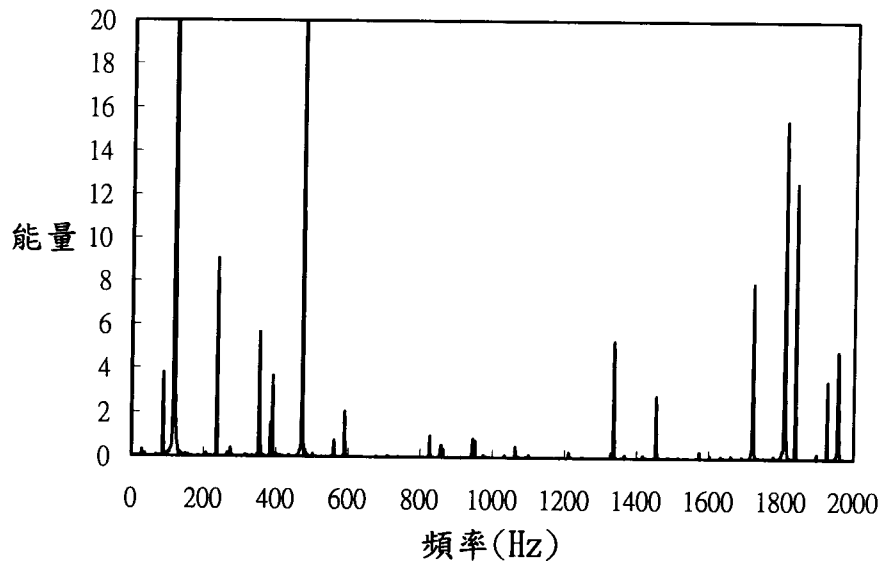


圖 5-4 實驗一 A 中 TPF=471Hz 時的頻譜圖，顫振頻率為 1808Hz

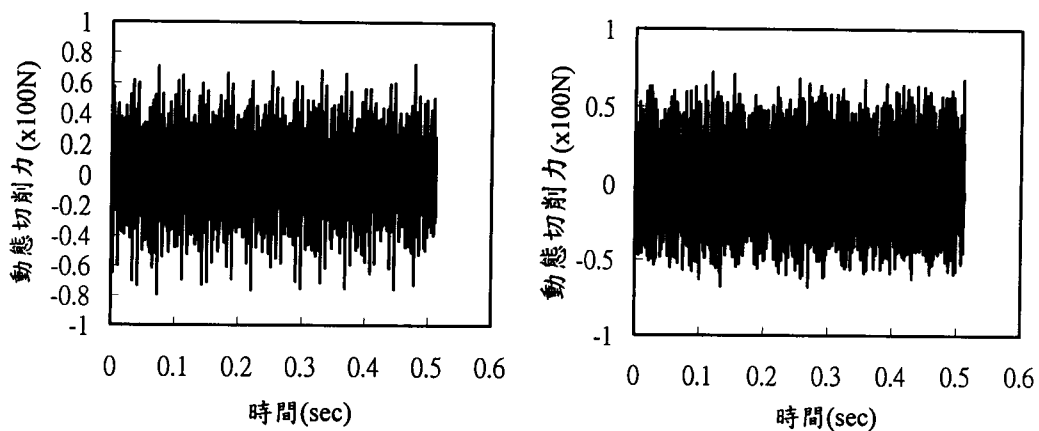


圖 5-5 實驗一 A 的動態切削力比較圖 (a) 調整前 (b) 調整後

B. 在另一次實驗中，同樣將初始 TPF 定為 513 Hz，此時切削力如圖 5-6，顫振頻率約為 1885Hz，見圖 5-7。利用本文所提出的方法，計算得相位差為 0.66，因此取 $n+v=4.34$ ，將 TPF 調整為 433Hz，吵雜的噪音便消失，切削力如圖 5-8，此時頻譜上只有低頻的 TPF 訊號，見圖 5-9。圖 5-10 是動態切削力的比較圖，比較調整前 (a) 與調整後

(b) 的動態切削力，可以看出調整後動態切削力明顯降低，因此可以證明本文所提出的調整方法可以有抑制顫振的效果。

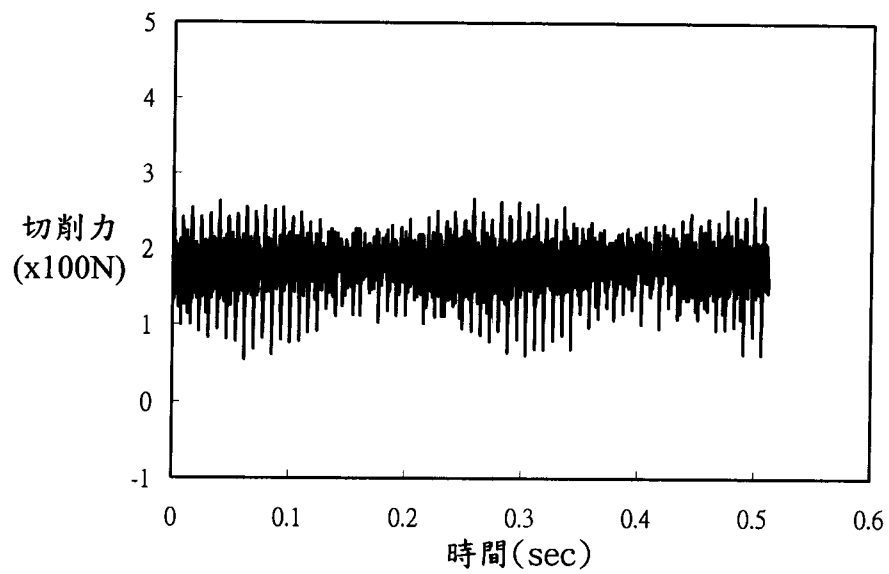


圖 5-6 實驗一 B 中 TPF=513 時的切削力訊號

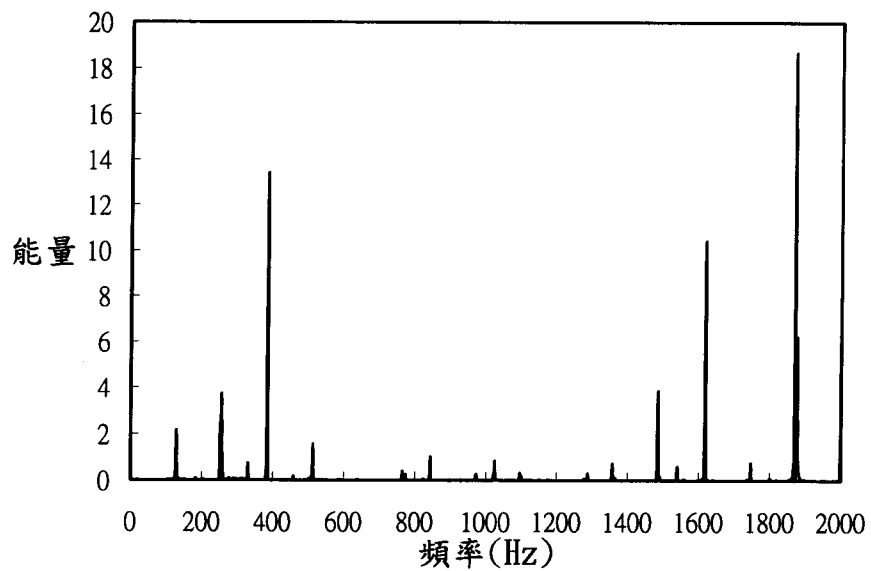


圖 5-7 實驗一 B 中 TPF=513Hz 時的頻譜圖，顫振頻率為 1885Hz

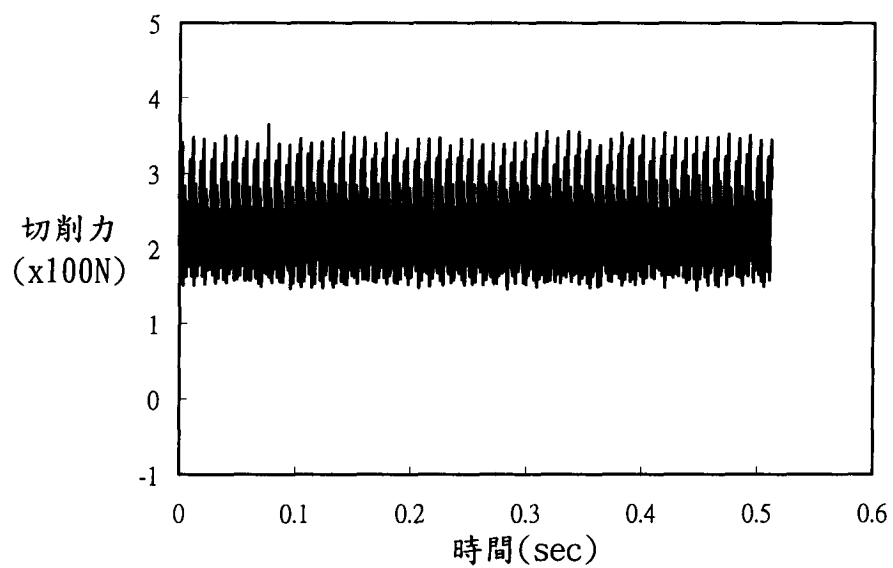


圖 5-8 實驗一 B 中將 TPF 調整為 433Hz 時的切削力訊號

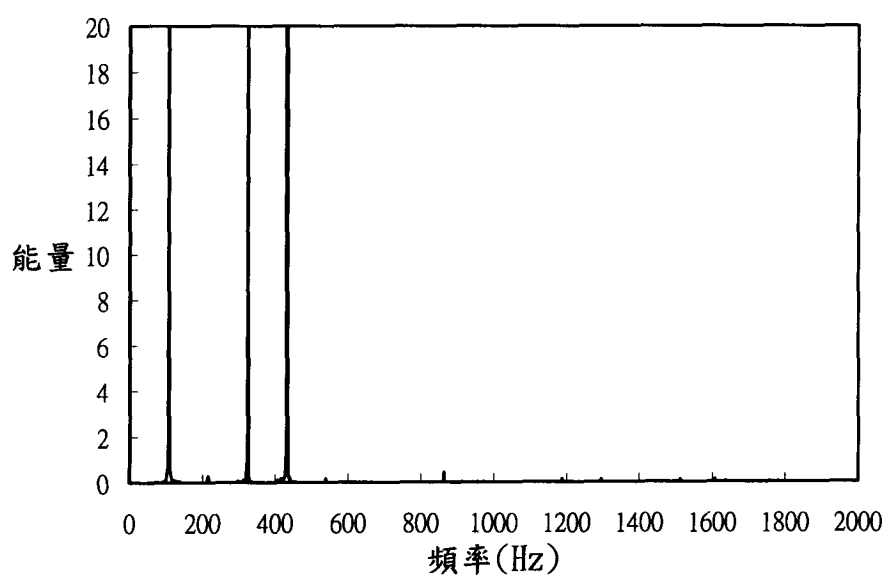


圖 5-9 實驗一 B 中 TPF=433Hz 時的頻譜圖

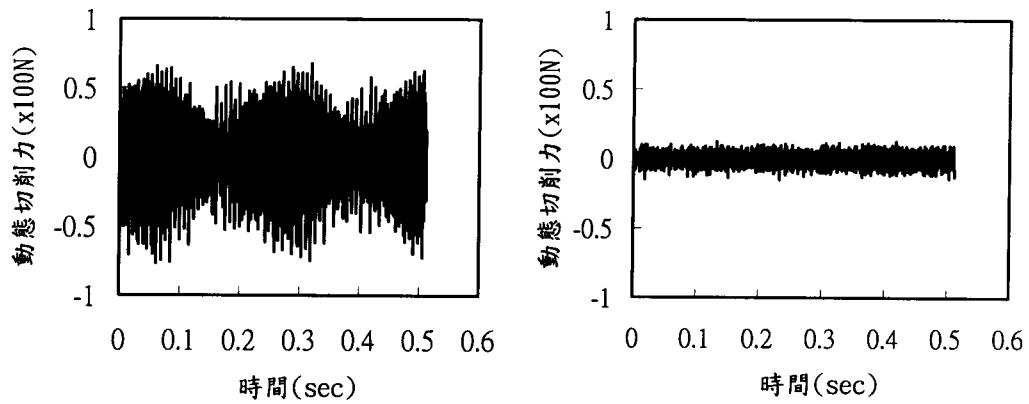


圖 5-10 實驗一 B 的動態切削力比較圖 (a) 調整前 (b) 調整後

實驗二

- A. 初始 TPF 為 410 Hz 時，主軸轉速為 6150rpm，此時切削力如圖 5-11，顫振頻率約為 1900Hz，見圖 5-12。取 $n+v=4$ ，將 TPF 提高為 475Hz 後，主軸轉速為 7125rpm，產生了另一顫振頻率，此時切削力如圖 5-13，約為 1806Hz，見圖 5-14。圖 5-15 為調整前後濾去 TPF 訊號的動態切削力比較圖。

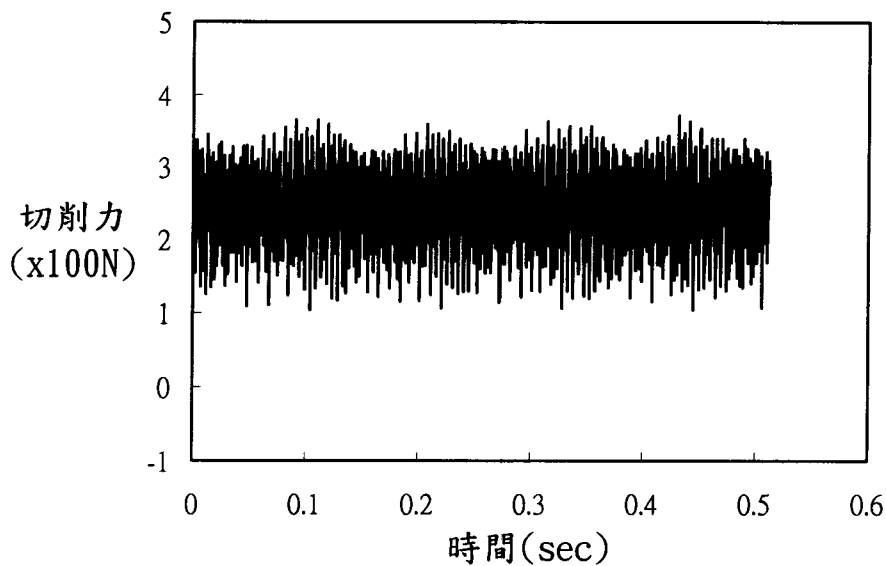


圖 5-11 實驗二 A 中 TPF=410Hz 時的切削力訊號

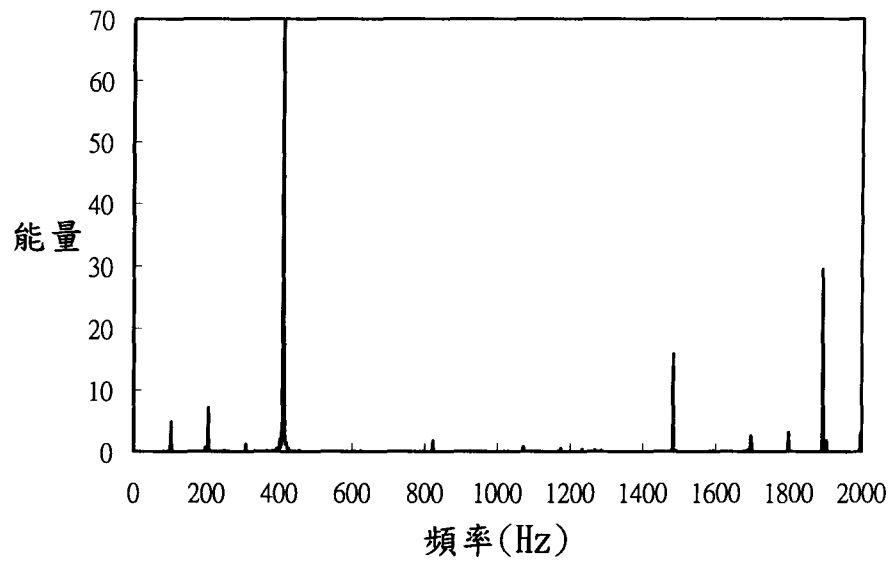


圖 5-12 實驗二 A 中 TPF=410Hz 時的頻譜圖，顫振頻率為 1900Hz

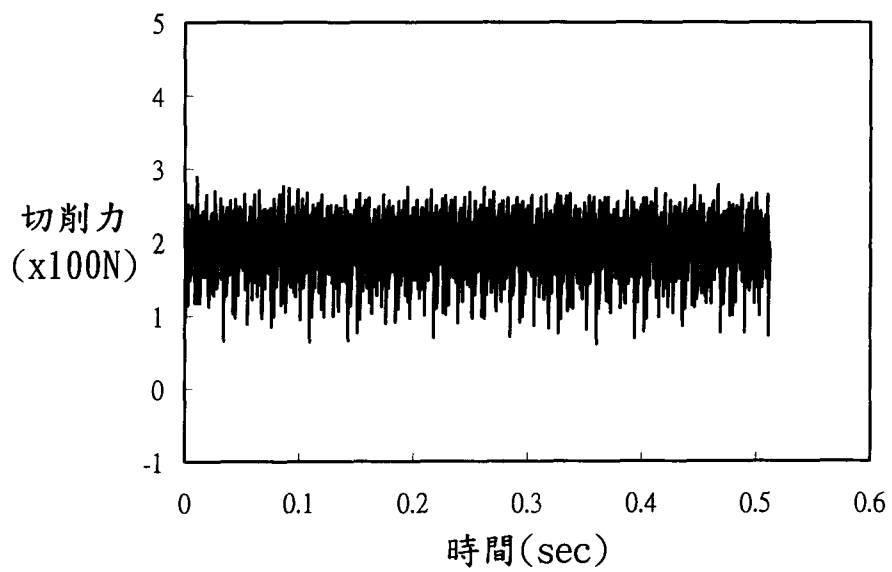


圖 5-13 實驗二 A 中將 TPF 調整為 475Hz 時的切削力訊號

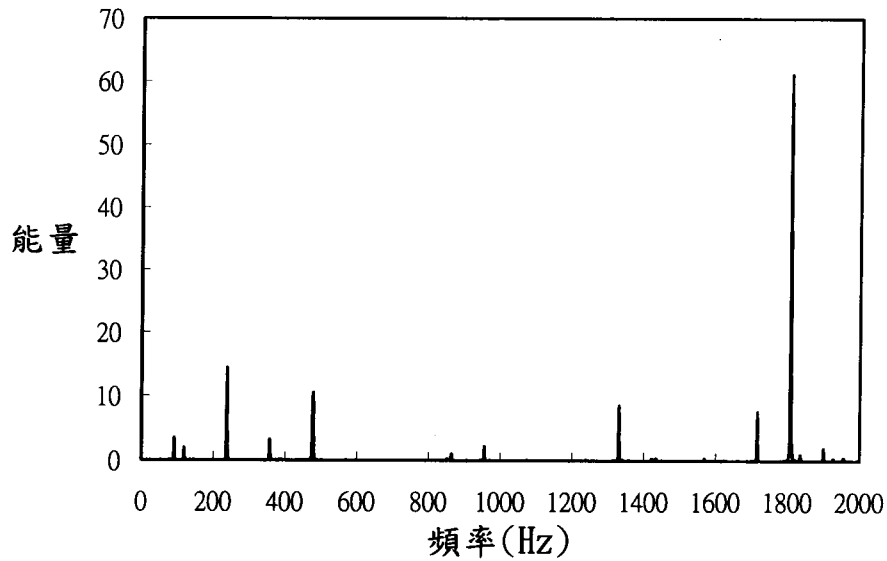


圖 5-14 實驗二 A 中 TPF=475Hz 時的頻譜圖，顫振頻率為 1806Hz

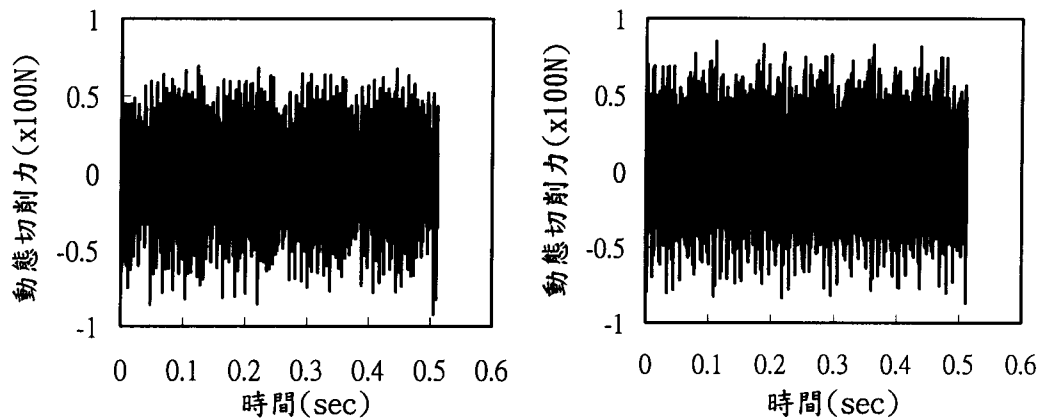


圖 5-15 實驗二 A 的動態切削力比較圖 (a) 調整前 (b) 調整後

B. 同樣在初始 TPF 為 410 Hz，主軸轉速為 6150 rpm，切削力如圖 5-16，顫振頻率約為 1890Hz 時，見圖 5-17。利用本文所提出的方法，計算得相位差為 0.61，取 $n+v=4.39$ ，將 TPF 調整為 430Hz，主軸轉速為 6450 rpm 顫振的噪音便消失，此時切削力如圖 5-18，頻譜上只剩下低頻的 TPF 較為明顯，見圖 5-19。由圖 5-20 比較調整前後的動態切削

力大小，亦可證明顫振消失。

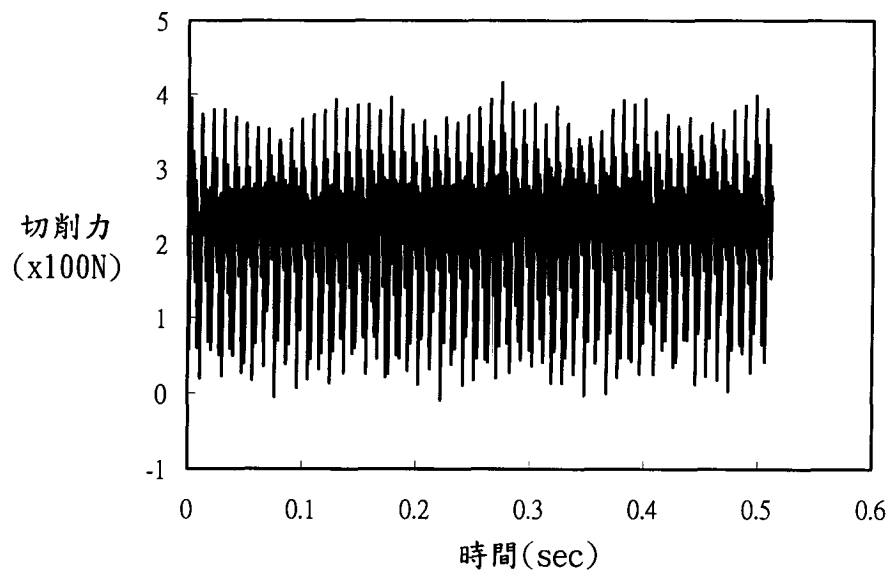


圖 5-16 實驗二 B 中 TPF=410Hz 時的切削力訊號

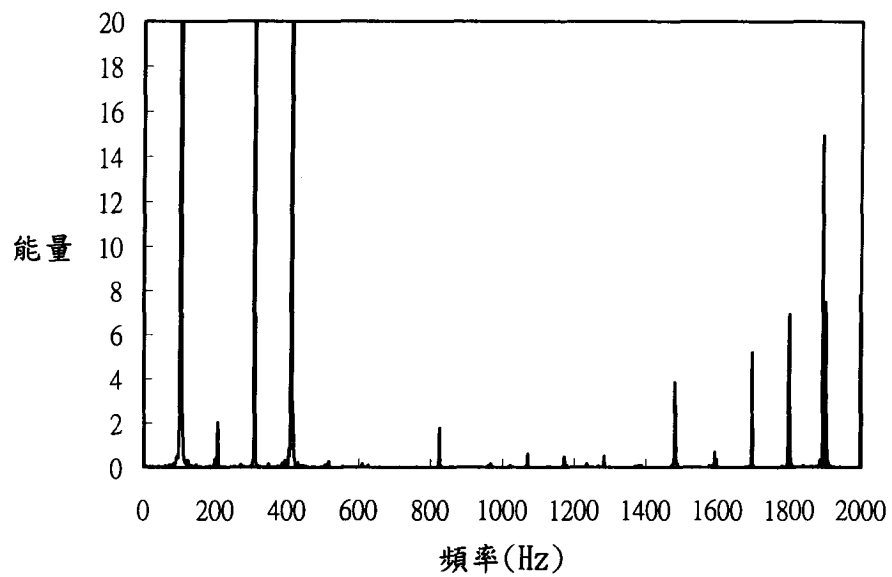


圖 5-17 實驗二 B 中 TPF=410Hz 時的頻譜圖，顫振頻率為 1890Hz

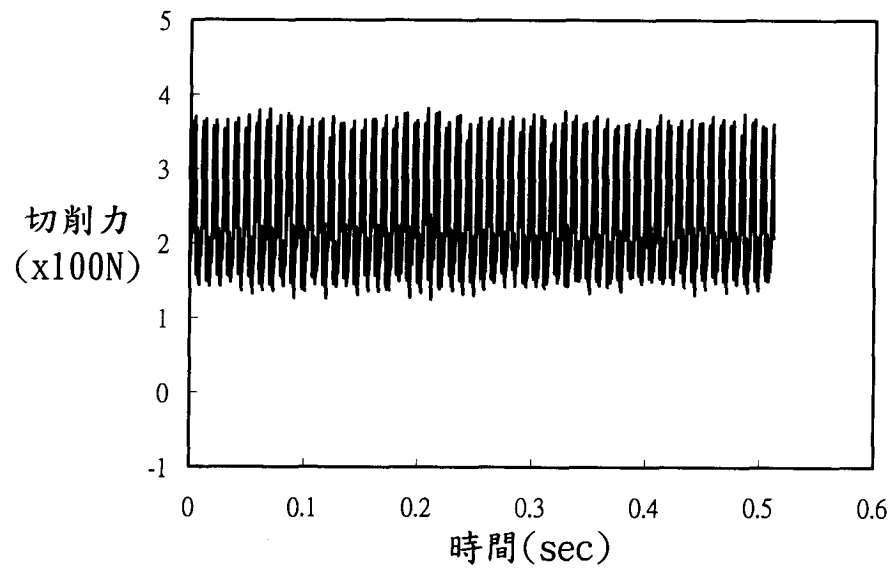


圖 5-18 實驗二 B 中將 TPF 調整為 430Hz 時的切削力訊號

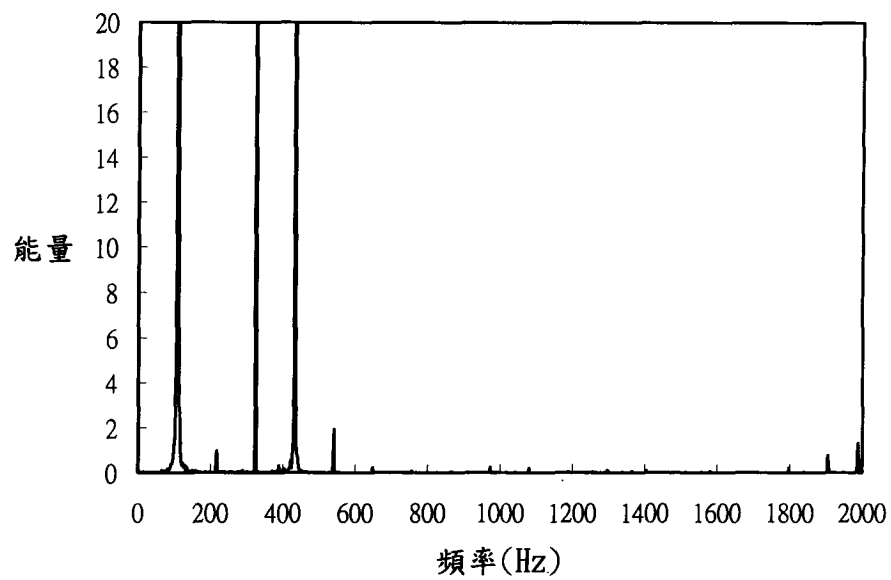


圖 5-19 實驗二 B 中 TPF=430Hz 時的頻譜圖

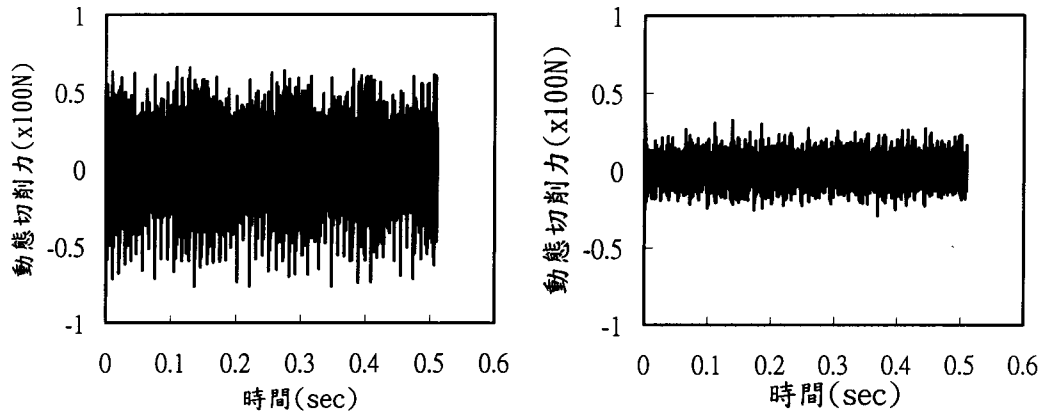


圖 5-20 實驗二 B 的動態切削力比較圖 (a) 調整前 (b) 調整後

一般當顫振發生時，通常採取降低主軸轉速的方來避免顫振，在實驗一中即是採取這種方式。在實驗二中，吾人嘗試將主軸轉速提高以穩定系統，如此一來不但可兼顧穩定性，更可提高材料移除率。而由實驗結果來看，本文所提出的方法可以達成此目標。在接下來的實驗三中，吾人將嘗試把主軸轉速再更進一步提高。

實驗三

在初始 TPF 為 513 Hz，主軸轉速為 7695 rpm，此時切削力訊號如圖 5-21，顫振頻率為 1910Hz 時，見圖 5-22。利用本文所提出的方法，計算得相位差為 0.72，取 $n+\nu=3.28$ ，將 TPF 調整為 582Hz，主軸轉速 8730 rpm，顫振便消失，圖 5-23 為調整後的切削力訊號，此時頻譜見圖 5-24。圖 5-25 為調整前後將切削力濾去 TFP 訊號的動態切削力比較圖，由此圖中可看出顫振抑制前後的差異。

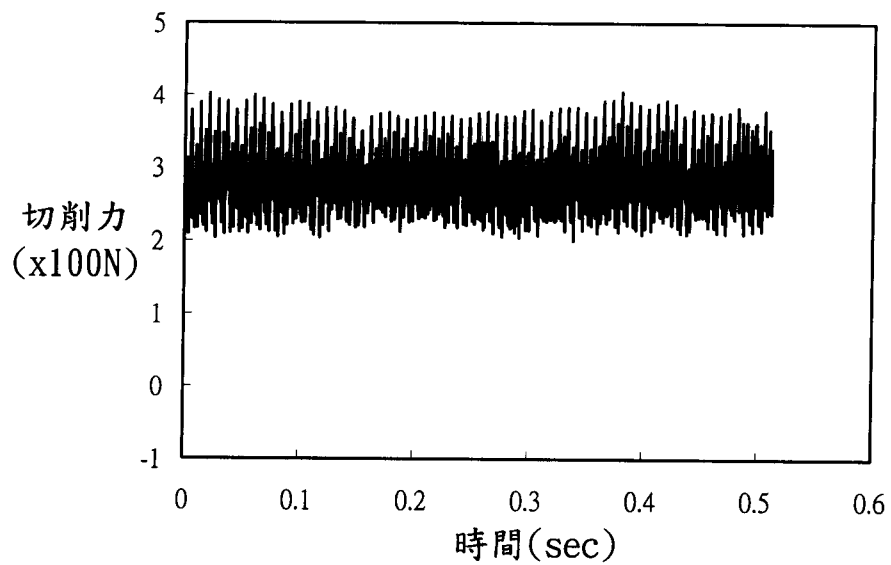


圖 5-21 實驗三中 TPF=513Hz 時的切削力訊號

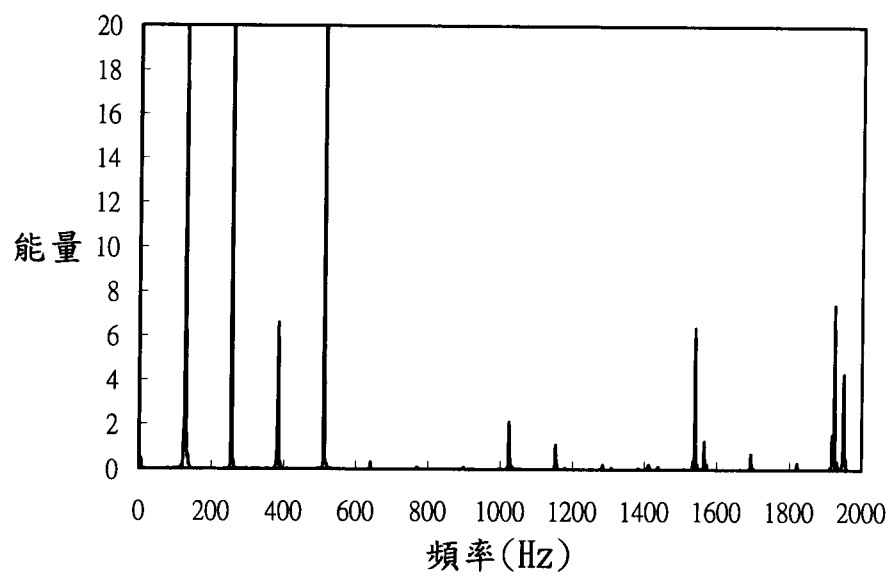


圖 5-22 實驗三中 TPF=513Hz 時的頻譜圖，顫振頻率為 1910Hz

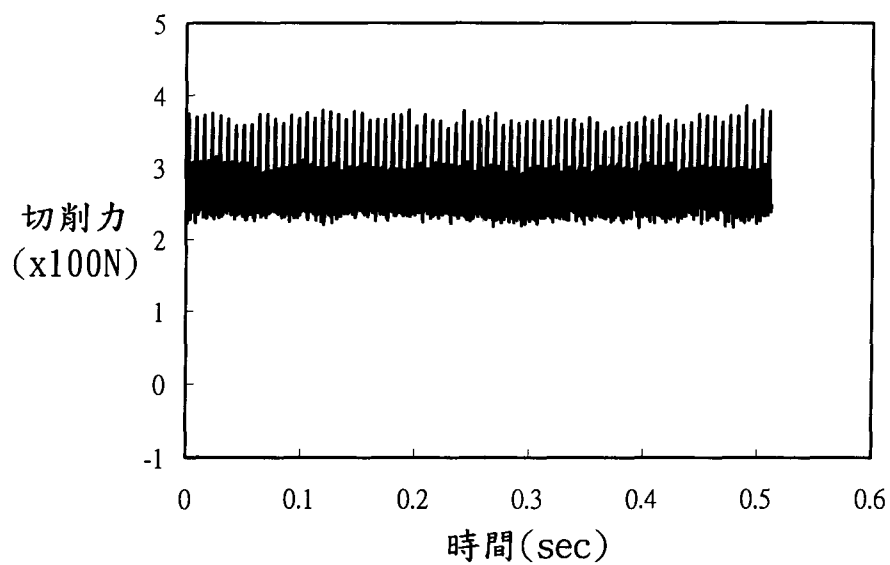


圖 5-23 實驗三中將 TPF 調整為 582Hz 時的切削力訊號

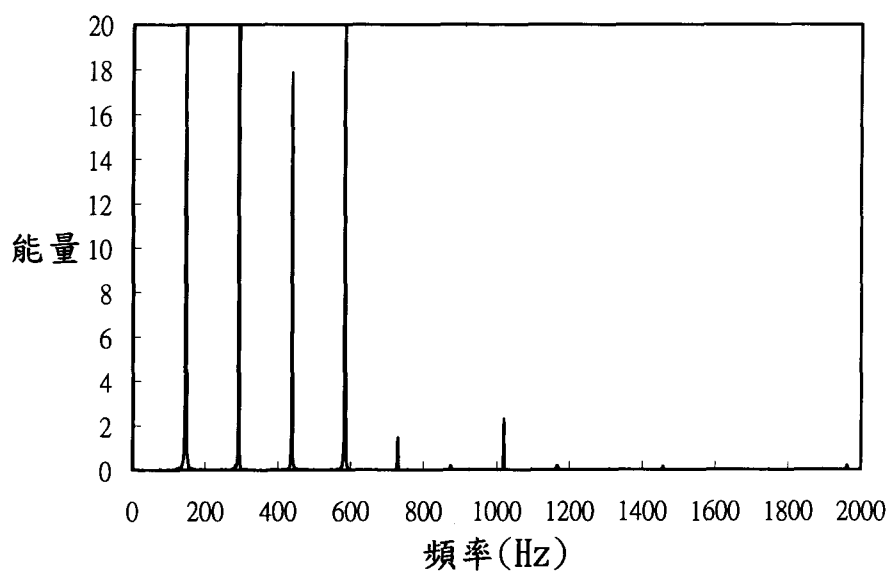


圖 5-24 實驗三中 TPF=582 時的頻譜圖

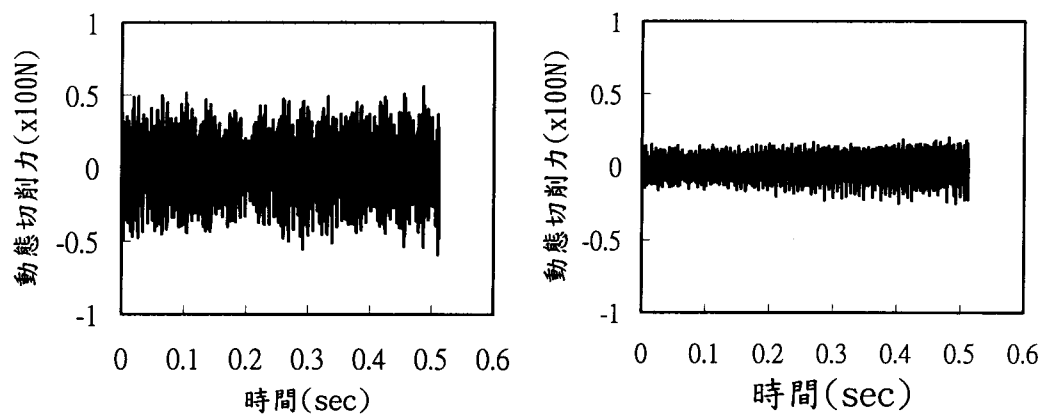


圖 5-25 實驗三的動態切削力比較圖 (a) 調整前 (b) 調整後

5-2 實驗結果分析

以上的數項實驗除了針對本文所提出的主軸轉速調整方法做試驗之外，亦有使用 $v=0$ 的方法作為對照。由實驗的結果發現，以 $v=0$ 的調整方式會發生無法一次將顫振抑制下來的情形，而本文所提出的方法則可以達到此一目標。究其原因，吾人認為是因為主軸轉速改變時，也會同時造成顫振頻率改變，所以利用 $v=0$ 方式來調整主軸轉速不一定能夠使系統的相位差達到期望的零相位差關係，反而有可能產生不穩定的相位差而激發另一個顫振頻率。而本文提出的方法，從實驗結果上來看，可以順利將系統穩定。

在文獻【23】中採用 $v=0.25$ 的主軸轉速調整方法，曾發生無法一次將系統調整至穩定的現象，但在本實驗過程中並沒有發現此一現象，因此無法直接對兩者作比較。而以本文提出的調整方法，也沒有發現類似的現象。

一般發生顫振時，都是採取將主軸轉速降低的方式來避免顫振，但這也同時造成了材料移除率的降低，因此在實驗二與實驗三中，吾人嘗試以提高轉速的方式來避免顫振。結果顯示，本文提出的方法可以順利將系統調整到穩定的區間。而由實際加工經驗知，當主軸轉速在越高的範圍時，穩定的區間也會變得越加狹窄，因此，若希望能將工具機性能充分發揮，有效率的主軸轉速調整方式，便顯得更加重要了。

第六章 結論與建議

本文主要針對利用調整主軸轉速來控制顫振的方法做一探討，對於先前他人所提出的調整方法無法順利將系統調整至穩定的現象，在文中提出一解釋，認為主軸轉速改變會同時造成系統振動頻率的改變，因此若使用不適當的 U 值來調整主軸轉速，會使調整後的主軸轉速無法有預期的相位差而失效。因此本文在主軸轉速調整方法上提出一修正，利用顫振發生時的刀刀與工件表面波紋之間的相位差，將顫振時的落後關係調整為領先關係，如此可減少調整前後系統振動頻率的變動，使調整後的主軸轉速能有效接近預期的相位差以穩定系統。由電腦模擬與實驗的結果來看，本文所提出的主軸轉速調整方法對線上顫振的抑制，有相當好的調整效率。此外，由於不需要精確的系統參數，而是以顫振時的頻率作為調整依據，因此在實際工業應用上，可以有相當高的實用性。

在未來研究方向上，本文提出兩點建議：

一、 穩定區間存在的判斷：

在單自由度系統中，若切削深度過大而超過了條件穩定的深度範圍，那麼無論如何調整主軸轉速，都將無法使系統穩定。因此，判斷切削深度是否超出條件穩定的深度範圍，可以說是調整主軸轉速以抑制顫振之前的第一個課題。在本文的實驗中是以試誤法將切削深度設定在可以穩定的深度範圍內。

若進一步考慮多自由度系統，由於工具機為一均佈系統，實際上會有多個振動模態，也就是存在有多個自然共振頻率，因此穩定性圖

會有重疊的現象發生。圖 6-1 為考慮兩個模態時的穩定性圖，此時系統的穩定區域為兩者的交集，即圖中深色的範圍。假設加工的初始主軸轉速落在不穩定狀態 a 點，此時顫振的發生主要是受模態一的影響；經過調整後狀態可能移至 b，雖然落在模態一的穩定區間內，卻會激發出模態二的顫振。因此，若能判斷在此一切削深度下，是否存在使系統穩定的主軸轉速，如圖 6-1 中的 c 點，則可以提高主軸轉速調整的效率。

切削深度

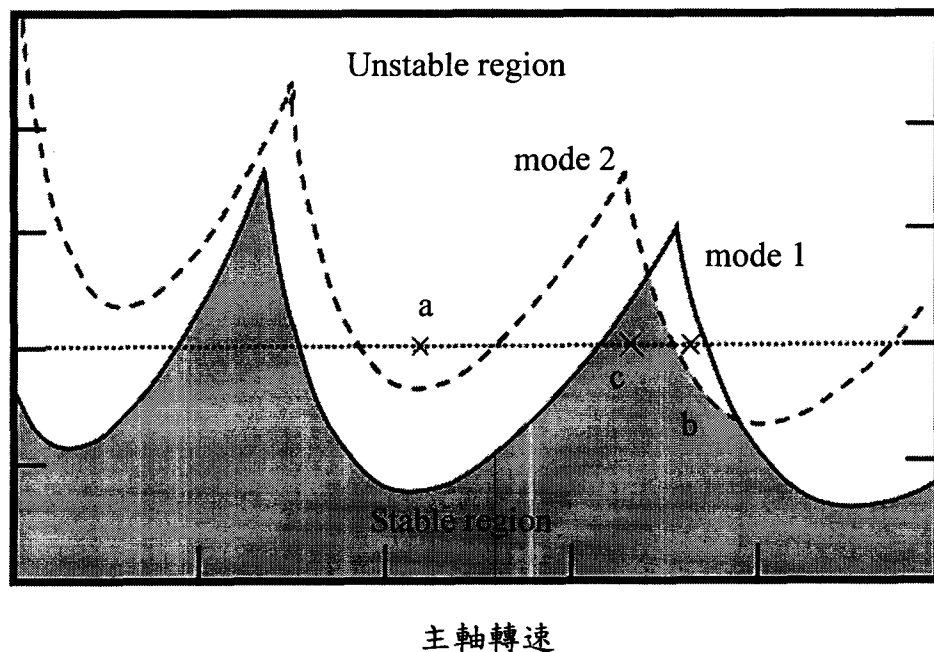


圖 6-1 考慮兩個模態時的系統穩定性圖

二、 顫振的預測：

若在顫振發生後才執行抑制顫振的動作，則由於顫振已經發生，對於工件表面也已造成傷害。因此若在顫振未發生之前就能預知顫振的發生，便可減小由顫振所造成的損失。所以對於顫振的預測，吾人認為是相當值得研究的一個方向。

參考文獻

1. H. E. Merrit, "Theory of Self-Excited Machine-Tool Chatter, Contribution to Machine-Tool Chatter Research-1", Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, Nov 1965, pp.447-454.
2. N. H. HANNA, S. A. TOBIAS, "A Theory Nonlinear Regenerative Chatter", Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, Feb 1974, pp.247-225.
3. J. Tlusty, F. Ismail, "Basic Non-Linearity in Machining Chatter", Annals of the CIRP, Vol.30, Jan 1981, pp.299-304.
4. J. Tlusty, F. Ismail, "Special Aspect of Chatter in Milling", Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, Vol.105, Jan 1983, pp.24-32.
5. J. Tlusty, "Dynamics of High -Speed Milling", Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, Vol.108, May 1986, pp.59-61.
6. D. Montgomer, Y. Altintas, "Mechanism of Cutting Force and Surface Generation in Dynamic Milling", Journal of Engineering For Industry, Trans. ASME, Vol.113, May 1991, pp.160-168.
7. J. Tlusty, W. Zaton, F. Ismail, "Stability Lobes in Milling", Annals of the CIRP, Vol.32, Jan 1983, pp.309 - 313.
8. Minis, R. Yanushevsky, "A New Theoretical Approach for the Prediction of Machine Tool Chatter in Milling", Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, Vol. 115, Feb 1993, pp.1-8.
9. Y. Altinaş, E. Budak, "Analytical Prediction of Stability Lobes in Milling", Annals of the CIRP, Vol.44, Jan 1995, pp.357-361.
10. Y. Altinaş, S. Engin, E. Budak, "Analytical Stability Prediction and Design of Variable Pitch Cutters", Jouranl of Manufacturing Science and Engineering, Trans. ASME, Vol.121, May 1999, pp.173 - 178.

11. Y. Altinaş, E. Shamoto, P. Lee, E. Budak, “Analytical Prediction of Stability Lobe in Ball End Milling”, *Journal of Manufacturing Science and Engineering, Trans. ASME*, Vol. 121, Nov 1999, pp. 586 – 592.
12. S. A. Jensen, Y. C. Shin, “Stability Analysis in Face Milling Operations, Part 1: Theory of Stability Lobe Prediction”, *Journal of Manufacturing Science and Engineering, Trans. ASME*, Vol.121, Nov 1999, pp.600-605.
13. Jifang Tian, Stanley G. Hutton, “Chatter Instability in Milling System with Flexible Rotating Spindle—A New Theoretical Approach”, *Journal of Manufacturing Science and Engineering, Trans. ASME*, Vol.123, Feb 2001, pp.1-9.
14. M. A. Davies, B. Dutterer, J. R. Pratt, A. J. Schaut, “On the Dynamics of High-Speed Milling with Long, Slender Endmills”, *Annals of the CIRP*, Vol.47, Jan 1998, pp 55-60.
15. M. D. Tsai, S. Takata, M. Inui, F. Kimura, T. Sata, “Operation Planning Based on Cutting Process Models”, *Annals of the CIRP*, Vol.40, Jan 1991, pp.95-98.
16. 王土權、陳彥毓、王欣仁、林清安, “高速 NC 加工之自動化進給率調整 (Automatic feed rate adjustment for high-speed NC machining)”, *中國機械工程學會第十八屆全國學術研討會*, 民國九十年十二月.
17. K. J. Liu, K. E. Rouch, “Optimal passive vibration control of cutting process stability in milling”, *Journal of Materials Processing Technology 7th International Conference on Computer-Aided Production Engineering* Aug 13-14 1991, v 28 n 1-2, Sep 1991, pp. 285-294.
18. M. Shiraishi, K. Yamanaka, H. Fujita, “Optimal Control of Chatter in Turning”, *Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol.31, 1991, pp.31-43.

19. S. Smith, W. R. Winfough, J. Halley, "The Effect of Tool Length on Stable Metal Removal Rate in High Speed Milling", *Annals of the CIRP* Vol. 47, Jan 1998, pp.307-310.
20. S. Smith, J. Tlustý, "Update on High-Speed Milling Dynamics", *Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME*, Vol.112, May 1990, pp.142-149.
21. S. Smith, J. Tlustý, "Stabilizing Chatter by Automatic Spindle Speed Regulation", *Annals of the CIRP*, Vol.41, Jan 1992, pp.433-436.
22. N. Kasahara, H. Sato, Y. Tani, "Phase characteristic of self-excited chatter in cutting ", *Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME*, Vol.114, Nov 1992, pp.393-399.
23. Y. S. Liao, Y. C. Young, "A New on – line Spindle Speed Regulation Strategy for Chatter Control", *Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol.31, No.5, 1996, pp. 651 - 660.
24. 蔡志成、林明良, "以最大材料移除率為目標之高速銑削參數配置", *機械月刊*第二十七卷第八期, 民國八十九年八月, pp.246-252.
25. J. S. Sexton, B. J. Stone, "The Stability of Machining With Continuously Varying Spindle Speed", *Annals of the CIRP*, Vol.27, Jan 1978, pp.321-326.
26. F. Yang, B. Zhang, J. Yu, "Chatter Suppression via an Oscillating Cutter", *Journal of Manufacturing Science and Engineering, Trans. ASME*, Vol.121, Feb 1999, pp.54-60.
27. A. Yilmaz, E. AL-Regib, Jun Ni, "Machine Tool Chatter Suppression by Multi-Level Random Spindle Speed Variation", *Journal of Manufacturing Science and Engineering, Trans. ASME*, Vol.124, May 2002, pp.208-216.
28. F. Ismail, R. Ziaei, "Chatter suppression in five-axis machining of flexible parts", *Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. 42, 2002, pp.115 – 122.

29. 稻崎一郎, "Machine Tool Dynamics and Control – Analysis and Control of Machine Tool Chatter", 1985.
30. Richard A. Roberts, Clifford T. Mullis, "Digital Signal Processing", Addison Wesley Publishing Company, 1987.
31. Y. S. Trang, Y. W. Hsieh, T. C. Li, "Automatic Selection of Spindle for Suppression of Regenerative Chatter in Turning", Journal of Advanced Manufacturing Technology, Vol.11, 1996, pp.12-17.
32. Y. S. Trang, E. C. Lee, "A Critical Investigation of the Phase Shift Between the Inner and Outer Modulation for the Control of Machine Tool Chatter", Journal of Machine Tools and Manufacture, Vol.37, No.12, 1997, pp.1661-1672.
33. T. Delio, J. Thusty, S. Smith, "Use of Audio Signals for Chatter Detection and Control", Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, May 1992, pp.146-157.
34. S. A. Jensen, Y. C. Shin, "Stability Analysis in Face Milling Operations, Part 2: Experiment Validation and Influencing Factors", Journal of Manufacturing Science and Engineering, Trans. ASME, Vol.121, May 1999, pp.606-614.
35. T. Takemura, T. Kitamura, T. Hoshi, K. Okushima, "Active Suppression of Chatter by Programmed Variation of Spindle Speed", Annals of the CIRP, Vol.23, Jan 1974, pp.121-122.
36. J. Thusty, S. Smith, C. Zamudio, "New NC Routines for Quality in Milling", Annals of the CIRP, Vol.39, Jan 1990, pp.517-521.
37. S. Smith, D. Dvorak, "Tool Path Strategies for High Speed Milling Aluminum Workpieces with Thin Webs", Mechatronics, Vol.8, 1991, pp.291-300.

38. S. Smith, J. Tlusty, "Efficient Simulation Programs for Chatter in Milling",
Annals of the CIRP, Vol.42, Jan 1993, pp.463-466.
39. S. Smith, J. Tlusty, "An Overview of Modeling and Simulation of the
Milling Process", Journal of Engineering for Industry, Vol.113, May
1991, pp.169-175.
40. J. Tlusty, S. Smith, W.R. Winfough, "Techniques for the Use of Long
Slender End Mills in High-Speed Milling", Annals of the CIRP, Vol.45, Jan
1996, pp.393-396.
41. Sridhar Sastry, Shiv G. Kapoor, Richard E. Devor, "Floquet Theory Based
Approach for Stability Analysis of the Variable Speed Face-Milling
Process ", Journal of Manufacturing Science and Engineering, Trans.
ASME, Vol.124, Feb 2002, pp.10-17.
42. 張耀祖、白煌朗、方偉平, "數值分析(Numerical Methods for Engineers)",
松崗電腦圖書資料有限公司, 民國七十六年三月.