

※
 ※
 ※
 ※
 ※

執行期間： 90 年 08 月 01 日至 91 年 07 月 31 日

共同主持人：丁肇隆 副教授

- ☐赴國外出差或研習心得報告一份
- ☐赴大陸地區出差或研習心得報告一份
- ☐出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
- ☐國際合作研究計畫國外研究報告書一份

中 華 民 國 91 年 10 月 22 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

國科會專題研究計畫成果報告撰寫格式說明

Preparation of NSC Project Reports

計畫編號：NSC 90-2611-E-002-019

執行期限：90 年 8 月 1 日至 91 年 7 月 31 日

主持人：林銘崇

台灣大學工程科學及海洋工程學系

共同主持人：丁肇隆

台灣大學工程科學及海洋工程學系

計畫參與人員：黃遠芳

台灣大學工程科學及海洋工程學系

一、中文摘要

本文目的在解析波浪通過透水底床之變形特性，藉由 Cruz[1]所推導出適用於透水底床，相對水深限制為 0.5 之布斯尼斯克方程式 (Boussinesq equation)，以 Wei and Kirby[2]提出的方法進行數值模擬計算。考慮波浪通過一平坦透水底床，波高及流速會隨水深與透水底床性質不同而有所變化，在相對水深小於 0.5 的情況下，將孔隙率固定，則波高與流速均會隨著滲透性增大而有所衰減，且將其波浪變形與線性理論所得結果相比較，其結果亦大致符合。

關鍵詞：波浪、水流、阻尼層

Abstract

The purpose of this paper is to study the properties of wave transformations over porous beds. We used the Boussinesq equations derived by Cruz[1] for the porous bed, the relative depth is limits to 0.5. According to the numerical scheme used by Wei and Kirby[2] for numerical calculations. Consider a wave pass through a even porous beds, the wave height and velocity would be changed by the different depth and the property of porous beds. In the condition of relative depth is smaller than 0.5, if porosity is fixed, the wave height and velocity would decrease by the increase of permeability. And the results are in good agreement compared with linear theory.

Keywords: Waves, Current, Damping Layer

二、緣由與目的

一般處理表面重力波問題時，通常以表面波理論來描述，但是除了等水深情況外，波浪受水深變化影響後，此時表面波方程式則難以描述此一複雜問題，再加上底床變化或結構物之存在，則會產生極複雜之波況。而波浪在行進過程中，若進入相對水深較小的區域內，底床性質必然會影響波浪行為，然而在波浪理論中一般皆假設底床為不透水，但在實際海床中，底床多為具透水性之介質，因此波浪與透水底床間之關係實有必要做一深入探

討。有關波浪與透水介質的分析，根據 Sollitt and Cross[3]所提出的理論，考慮孔隙慣性阻力以及流體因黏滯性所造成的阻力，提出線性非穩態伯努力方程式 (linearized unsteady Bernoulli equation) 作為孔隙介質中流體之運動方程式，之後學者亦多引用其理論，如 Dalrymple et al.[4]、Cruz[1]等。

布斯尼斯克方程式 (Boussinesq equation) 可解析波浪在變水深時之淺化、折射、繞射、部分反射及有限振幅且可處理方向性與不規則性等現象。此方程式對於非線性與分散性之效應同時考慮，在處理不同問題時，其速度變數表示有一些不同型式，如表面速度、水底速度、水深平均速度與水深積分速度等不同型態。其次由於非線性與分散性等項都是高次項，所以可以配合線性長波方程式求解。傳統布斯尼斯克方程式在應用上之限制主要是必須滿足淺水條件。而布斯尼斯克方程式是由 Boussinesq[5]首先提出，之後許多學者陸續對此方程式進一步推導改善並應用，Peregrine[6]以微小振幅波理論為基礎，推導水深平均速度型式的 Boussinesq 方程式，為日後發展布斯尼斯克方程式之原始型式。Witting[7]推導以不同水深速度表示之一維布斯尼斯克方程式，其限制為等水深情況。Madsen et al.[8]改善布斯尼斯克方程式之分散關係式，使其適用於較大之相對水深，利用 [2,2] Padé approximation 將線性長波方程式推導所得三階微分項加入動量方程式中推導而得，其限制仍為等水深，Madsen and Sørensen [9]改善了等水深的限制並將布斯尼斯克方程式的適用範圍延伸至相對水深 $h/L_0 = 0.5$ 。Nwogu [10]推導以任意水深速度形式表示之二維布斯尼斯克方程式，並可有效的降低線性化後與原方程式之間的相位差異，其改善之分散關係式形式與 Madsen[8]所提出一致。Wei and Kirby[2]以 Nwogu[10]所推導出之方程式為基礎，並利用 Fourth-order Adams-Bashforth-Moulton predictor-corrector scheme 求解布斯尼斯克方程式，可有效降低計算時所產生之誤差，其所提出之模式稱為 WKGS 模式。Schäffer and Madsen[11]結合 Madsen and Sørensen [9]及 Nwogu[10]概念，利用 [4,4] Padé approximation 於線性化 Stokes wave，並改善布斯尼斯克方程式線性化分散關係式，將其相對水深之限制 h/L_0 延伸至 1.0。之後 Madsen et al.[12]又根據 Schäffer and Madsen[11]所

提出之方法，強調布斯尼斯克方程式線性化分散關係式在深水時的特性，但其所推導出之布斯尼斯克方程式含有五次高階微分項，在數值上求解較為不易。Gobbi and Kirby[13]將 Nwogu[10]所推導出之布斯尼斯克方程式，利用 [4,4] Padé approximation 於線性化微小振幅波分散關係式求解，並提高準確度為 $O(\mu^4)$ 。但其所推導出之方程式同樣含有五次高階微分項，在數值上不易求解。Gobbi and Kirby[14]推導含五次高階微分項之一維布斯尼斯克方程式，並探討其通過潛堤之後波浪之分散性的現象，並與實驗結果進行比較，得到相當理想之結果。之後 Wei and Kirby[15]改善了深水狀況下，布斯尼斯克方程式線性化內流場動能(Linear internal flow kinematics)的問題。Agonon and Madsen[16]提出一新近似法求得高階之布斯尼斯克方程式，利用非線性自由液面邊界條件(Nonlinear free-surface boundary conditions)求解，並討論淺化及分散性的問題，但若以一般方式表示，方程式本身將包含太多項，在數值上不易求解。本文即以此模式作為數值計算方法，求解 Cruz[1]所提出適用於透水底床之布斯尼斯克方程式，探討不同之波浪及底床特性下，波浪的衰減以及變化。

三、理論推導

在理論方面，主要依據Cruz[1]所推導之 Boussinesq 方程式為基礎，將其理論概略描述如下：假設波浪進入一均勻水深 h 之區域中，不透水底床上有一厚 h_s 之透水介質，其座標表示如圖 1 所示，將所要解析區域分為區域(1)、區域(2)。

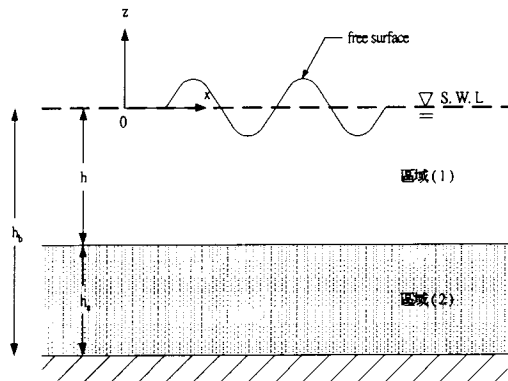


圖 1 座標表示圖

區域(1)為水體部分，假設此區域內流體為無黏性、無旋、不可壓縮流，存在一勢流函數 Φ (potential function)；區域(2)為透水層，假設此區域內流體為無旋、不可壓縮流，存在一勢流函數 Ψ ，兩區域內勢流函數均滿足 Laplace 方程式，分別為兩區域內之控制方程式：

$$\nabla_3^2 \Phi = 0, \quad -h < z < \eta \quad (1)$$

$$\nabla_3^2 \Psi = 0, \quad -h_b < z < -h \quad (2)$$

其中為 $\nabla_3 = (\partial/\partial x + \partial/\partial y + \partial/\partial z)$ 三維梯度運算子，根據勢流理論可知速度向量及滲流速度向量分別為：

$$\nabla_3 \Phi = U = (u, v, w) \quad (3)$$

$$\nabla_3 \Psi = U_s = (u_s, v_s, w_s) \quad (4)$$

其中 u 、 v 、 w 分別為水分子速度分量， u_s 、 v_s 、 w_s 分別為滲流速度分量。

在區域 (1)，其運動方程式為

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla_3(p + \rho g z) = 0 \quad (5)$$

假設區域 (2) 之孔隙介質具有均質 (homogeneous)、等向性 (isotropic)，Sollitt and Cross[3]提出之運動方程式：

$$c_r \frac{dU_s}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla_3(p_s + \rho g z) + \left(\frac{\nu \lambda}{k_p} + \frac{c_f \lambda^2}{\sqrt{k_p}} |U_s| \right) U_s = 0 \quad (6)$$

其中 p_s 為孔隙水壓， ρ 為流體密度， g 為重力加速度， λ 為孔隙率， k_p 為滲透性， ν 為動黏滯性係數， c_f 為紊流阻抗係數， c_r 為慣性力係數：

$$c_r = \lambda + (1 - \lambda)(1 + c_m) \quad (7)$$

其中 c_m 為附加質量係數。

令 α 為孔隙阻抗係數，表示如下：

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 |U_s| = \frac{\nu \lambda}{k_p} + \frac{c_f \lambda^2}{\sqrt{k_p}} |U_s| \quad (8)$$

在邊界條件方面，由於所描述對象為波浪通過透水底床，除了自由水面邊界外以及底床不透水邊界外，另須考慮水體與孔隙介質之邊界，分述如下：自由液面動力邊界條件DFSBC(dynamic free surface boundary condition)，在自由水面 $z = \eta(x, y, t)$ ，令 $p = p_a = 0$ ，則伯努力方程式(Bernoulli's equation)表示成：

$$\Phi_t + \frac{1}{2} (\nabla_3 \Phi)^2 + g \eta = 0 \quad (9)$$

自由液面運動邊界KFSBC(kinematic free surface boundary condition)，水粒子運動速度等於其表面速度：

$$\frac{d}{dt} (z - \eta) = w - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \vec{u} \cdot \nabla \eta = 0 \quad (10)$$

其中為 $\nabla_3 = (\partial/\partial x + \partial/\partial y + \partial/\partial z)$ 三維梯度運算子，式 (10) 以勢流函數 Φ 可表示為：

$$\Phi_z = \eta_t + \nabla \Phi \cdot \nabla \eta \quad (11)$$

水體與透水層交界面 $z = -h(x, y)$ ，滿足質量連續：

$$\vec{u} \cdot \nabla h + w = \lambda (\vec{u}_s \cdot \nabla h + w_s) \quad (12)$$

以勢流函數 Φ 、 Ψ 表示為

$$\Phi_z + \nabla \Phi \cdot \nabla h = \lambda (\Psi_z + \nabla \Psi \cdot \nabla h) \quad (13)$$

水體與透水層交界面亦滿足壓力連續 $p = p_s$ ，由式 (3)、(4)、(5)、(6) 可得到動力邊界條件：

$$\begin{aligned} & c_r [\Psi_t + \frac{1}{2} (\nabla_3 \Psi)^2] + \alpha \Psi \\ & = \Phi_t + \frac{1}{2} (\nabla_3 \Phi)^2 \end{aligned} \quad (14)$$

在不透水底床邊界 $z = -h_b$ 處，並無法線速度存在，即

$$U_{zm} = 0 \quad (15)$$

引入勢流函數可表為

$$\Psi_z = -\nabla\Psi \cdot \nabla h_b \quad (16)$$

將控制方程式以邊界條件無因次化，定義無次變數如下：

$$(x', y') = k(x, y) \quad , \quad h'_b = h_b / h_0$$

$$z' = z / h_0 \quad , \quad \eta' = \eta / a_0 \quad , \quad h' = h / h_0 \quad t' = k\sqrt{gh_0}t \quad (17)$$

其中 k 為波數， x 、 y 為水平長度尺度， h_0 為特徵水深， z 為垂直長度尺度， a_0 為特徵振幅， $k\sqrt{gh_0}$ 為時間尺度。並定義 $\varepsilon = a_0/h_0$ 為非線性參數 (nonlinear parameter)， $\mu^2 = (kh_0)^2$ 為頻散參數 (dispersion parameter) 將以上定義之變數代入控制方程式及自由液面邊界條件、水體與孔隙介質邊界條件、不透水底床邊界條件中，可得無因次化之控制方程式及邊界條件，將其上標(prime)拿掉，分別表示如下：控制方程式：

$$\mu^2 \nabla^2 \Phi + \Phi_{zz} = 0, \quad -\eta < z < \eta \quad (18)$$

$$\mu^2 \nabla^2 \Psi + \Psi_{zz} = 0, \quad -h_b < z < -h \quad (19)$$

自由液面動力邊界條件：

$$\mu^2(\Phi_t + \eta) + \varepsilon \frac{1}{2}[\mu^2(\nabla\Phi)^2 + \Phi_z^2] = 0, \quad z = \varepsilon\eta \quad (20)$$

自由液面運動邊界條件：

$$\Phi_z = \mu^2(\eta_t + \varepsilon \nabla\Phi \cdot \nabla\eta), \quad z = \varepsilon\eta \quad (21)$$

不透水底床邊界條件：

$$\Psi_z = -\mu^2 \nabla\Psi \cdot \nabla h_b, \quad z = -h_b \quad (22)$$

水體—透水層界面運動邊界條件：

$$\Phi_z + \mu^2(\nabla\Phi \cdot \nabla h) = \lambda[\Psi_z + \mu^2(\nabla\Psi \cdot \nabla h)], \quad z = -h \quad (23)$$

水體—透水層界面動力邊界條件(壓力連續)：

$$\mu^2(c_r \Psi_t + \alpha \Psi) + \varepsilon \frac{1}{2} c_r [\mu^2(\Psi_x^2 + \Psi_y^2) + \Psi_z^2]$$

$$= \mu^2 \Phi_t + \frac{1}{2} \varepsilon [\mu^2(\Phi_x^2 + \Phi_y^2) + \Phi_z^2], \quad z = -h \quad (24)$$

為簡化原方程式，使其由三維轉為二維空間，根據 Lin and Clark[17]，將勢流函數以 $(z + h)$ 之級數展開：

$$\Phi(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [z + h(x, y)]^n \phi_n(x, y, t) \quad (25)$$

$$\Psi(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [z + h_b(x, y)]^n \psi_n(x, y, t) \quad (26)$$

其中 $\phi_n(x, y, t)$ ， $\psi_n(x, y, t)$ 為勢流函數之水平分布函數。將式(25)代入式(18)及式(23)，式(26)代入式(19)及式(22)，依據遞迴關係(recursive relation)，並以水體底部勢流函數 ϕ_0 代替 ϕ_n ，底床勢流函數 ψ_0 代替 ψ_n ，忽略高階項 $O(\mu^4)$ ，則得

$$\Phi = \phi_0 - \frac{\mu^2}{2} \{2(z+h)[\nabla h \cdot \nabla \phi_0 + \lambda \nabla \cdot (h_s \nabla \psi_0)] + (z+h)^2 \nabla^2 \phi_0\} + O(\mu^4) \quad (27)$$

$$\Psi = \psi_0 - \frac{\mu^2}{2} [2(z+h_b) \nabla h_b \cdot \nabla \psi_0 + (z+h_b)^2 \nabla^2 \psi_0] + O(\mu^4) \quad (28)$$

將 $z = \varepsilon\eta$ 代入式(27)，再代入自由表面動力邊界條件做梯度運算，且速度 $u_0 = \nabla\phi_0$ ， $u_{s0} = \nabla\psi_0$ ，可得到下式：

$$u_{0t} + \varepsilon u_0 \cdot \nabla u_0 + \nabla\eta - \frac{\mu^2}{2} [\nabla(h^2 \nabla \cdot u_{0t} + 2h \nabla h \cdot u_{0t} + \lambda h \nabla(h_s \cdot u_{s0t}))] = O(\varepsilon\mu^2, \mu^4) \quad (29)$$

將 $z = -h$ 代入式(28)，再代入水體—透水層壓力連續邊界條件做梯度運算，可得：

$$c_r(u_{s0t} + \varepsilon u_{s0} \cdot \nabla u_{s0}) + \nabla\eta + \alpha u_{s0} - \frac{\mu^2}{2} [C_r(2h_s \nabla h_b \cdot u_{s0t} + h_s^2 \nabla \cdot u_{s0t}) + \alpha(2h_s \nabla h_b \cdot u_{s0} + h_s^2 \nabla \cdot u_{s0}) + h^2 \nabla \cdot u_{0t} + 2h \nabla h \cdot u_{0t} + 2\lambda \nabla \cdot (h_s u_{s0t})] = O(\varepsilon\mu^2, \mu^4) \quad (30)$$

將勢流函數從水體底部 $z = -h$ 到自由液面 $z = \varepsilon\eta$ 以及從不透水底床 $z = -h_b$ 到水體底部 $z = -h$ 做積分並對水深做平均可得水深平均速度及平均滲流速度：

$$\bar{u} = \frac{1}{h + \varepsilon\eta} \int_{-h}^{\varepsilon\eta} \nabla\phi dz \quad (31)$$

$$\bar{u}_s = \frac{1}{h_b - h} \int_{-h_b}^{-h} \nabla\psi dz \quad (32)$$

分別將式(27)代入式(31)，式(28)代入式(32)可得：

$$u_0 = \bar{u} + \frac{\mu^2}{2} \left[\frac{h^2}{3} \nabla(\nabla \cdot \bar{u}) + h \nabla(\nabla h \cdot \bar{u}) + 2 \nabla h \nabla h \cdot \bar{u} \right] + \frac{\mu^2}{2} \lambda \{h \nabla[\nabla \cdot (h_s \bar{u}_s)] + 2 \nabla h \nabla \cdot (h_s \bar{u}_s)\} + O(\mu^4) \quad (33)$$

$$u_{s0} = \bar{u}_s + \frac{\mu^2}{2} \left[\frac{h_s^2}{3} \nabla(\nabla \cdot \bar{u}_s) + h_s \nabla(\nabla h_b \cdot \bar{u}_s) + h_s \nabla h_b \cdot \bar{u}_s + 2 \nabla h_b \nabla h_b \cdot \bar{u}_s \right] + O(\mu^4) \quad (34)$$

再將上兩式分別代入式(29)、(30)進行轉換，得以水深平均速度及平均滲流速度表示之布斯尼斯克方程式：

$$\bar{u}_t + \varepsilon \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} + \nabla\eta + \frac{\mu^2}{2} \left\{ \frac{h^2}{3} \nabla(\nabla \cdot \bar{u}_t) - h \nabla[\nabla \cdot (h \bar{u}_t)] - \lambda h \nabla[\nabla \cdot (h_s \bar{u}_{st})] \right\} = O(\varepsilon\mu^2, \mu^4) \quad (35)$$

$$c_r(\bar{u}_{st} + \varepsilon \bar{u}_s \cdot \nabla \bar{u}_s) + \nabla\eta + \alpha \bar{u}_s + \frac{\mu^2}{2} \left(C_r \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \right) \times \left[-\frac{2}{3} h_s^2 \nabla(\nabla \cdot \bar{u}_s) - h_s \nabla(\nabla h_b \cdot \bar{u}_s) + h_s \nabla(h - h_s) \cdot \bar{u}_s + 2 \nabla h \nabla h_b \cdot \bar{u}_s \right] - \frac{\mu^2}{2} \nabla[\nabla \cdot (h^2 \bar{u}_t) + 2 \lambda h \nabla \cdot (h_s \bar{u}_s)] = O(\varepsilon\mu^2, \mu^4) \quad (36)$$

式(27)再代入式(21)且勢流函數以水深平均速度及平均滲流速度做轉換，可得連續方程式：

$$\eta_t + \nabla \cdot [(h + \varepsilon\eta) \bar{u}] + \lambda \nabla \cdot (h_s \bar{u}_s) = 0 \quad (37)$$

重新改寫式(35)、(36)、(37)為有因次型式並忽略高

階項 $O(\varepsilon\mu^2, \mu^4)$ ，為使方程式適用範圍擴大至相對水深 $h/L_0 = 1/2$ ，一般處理不透水底床布斯尼斯克方程式時，會引入一微小參數 γ 到動量方程式內，Madson and Sørensen[9]提出當 $\gamma = 1/15$ 時，可在相對水深 $h/L_0 \leq 1/2$ 情況下，將相位誤差控制在 5% 以內。但在透水底床情況下，須引入另一微小參數 β 至針對透水底床所提出的動量方程式，Cruz[1]提出當 $\beta = 1/18$ 時，可將透水底床 Boussinesq 方程式適用至 $h/L_0 = 1/2$ 。引入兩微小參數 γ 、 β ，則布斯尼斯克方程式為以下型式：

$$\eta_t + \nabla \cdot [(h + \eta)\bar{u}] + \lambda \nabla \cdot (h_s \bar{u}_s) = 0 \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & \bar{u}_t + \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} + g \nabla \eta + \frac{h^2}{6} \nabla (\nabla \cdot \bar{u}_t) \\ & - \left(\frac{1}{2} + \gamma \right) h \nabla [\nabla \cdot (h \bar{u}_t)] - \gamma g h \nabla [\nabla \cdot (h \nabla \eta)] \\ & - \frac{\lambda}{2} h \nabla [\nabla \cdot (h_s \bar{u}_{st})] = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & c_r (\bar{u}_{st} + \bar{u}_s \cdot \nabla \bar{u}_s) + g \nabla \eta + \alpha \bar{u}_s + \frac{1}{2} (C_r \frac{\partial}{\partial t} + \alpha) \\ & \times [-\frac{2}{3} h_s^2 \nabla (\nabla \cdot \bar{u}_s) - h_s \nabla (\nabla h_b \cdot \bar{u}_s) \\ & + h_s \nabla (h - h_s) \nabla \cdot \bar{u}_s + 2 \nabla h \nabla h_b \cdot \bar{u}_s] \\ & - \frac{1}{2} \nabla [\nabla \cdot (h^2 \bar{u}_t) - (1 + \beta) \lambda \nabla [h \nabla \cdot (h_s \bar{u}_s)]] \\ & - \frac{\beta g}{c_r} \lambda \nabla [h \nabla \cdot (h_s \nabla \eta)] - \frac{\beta \alpha}{c_r} \lambda \nabla [h \nabla \cdot (h_s \nabla \bar{u}_s)] \\ & = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

四、數值方法

本文將以 Cruz[1]所推導之布斯尼斯克方程式為基礎，利用有限差分法(Finite Differences Method)進行數值離散。Madsen et al.[8]及 Nwogu[10]將高階分散項帶回原方程式，提高數值模式之準確性及穩定性，卻增加了分散性之影響，而 Wei and Kirby[2]使用高階 Fourth-order Adams-Bashforth-Moulton predictor-corrector scheme，在一階之時間微分項及空間微分項，使用有限差分中之四階準確計算後，可有效地解決此一問題，並且也提供一穩定的計算方法。

Zheng[18]以 Wei and Kirby[2]所提出之方法為基礎，將計算網格改以交錯網格(Staggered grid)進行計算，其次將三階之空間微分項的計算上，提高為有限差分中之二階準確。並且將動量方程式中之對流項(Convective terms)，利用 Second-order upwind scheme 求解，以增加數值計算上之穩定性。

綜合以上所述，使用 Fourth-order Adams-Bashforth-Moulton predictor-corrector scheme 計算，提供了一較為方便且有效之計算方式。其次使用交錯網格計算，可避免數值計算上數值振盪(Pseudo-oscillation)產生的誤差及鋸齒狀波形(Zigzag wave profile)的產生。因此，本研究選擇上述所提出之數值計算方法求解布斯尼斯克方程式，並提出各種適當之計算邊界條件，以符合波浪傳遞的現象。首先將一維布斯尼斯克方程式改寫如下：

$$\eta_t = E(\eta, u, u_s) \quad (41)$$

$$U_t = F(\eta, u) + [F_1(u_s)]_t \quad (42)$$

$$U_{st} = G(\eta, u_s) + [G_1(u)]_t \quad (43)$$

$$\text{其中 } E = -[(h + \eta)\bar{u}]_x - \lambda(h_s \bar{u}_s)_x \quad (44)$$

$$U = u + \frac{h^2}{6} \bar{u}_{xx} - \left(\frac{1}{2} + \gamma \right) h(h \bar{u})_{xx} \quad (45)$$

$$F = -\bar{u} \bar{u}_x - g \eta_x + \gamma g h(h \eta_x)_{xx} \quad (46)$$

$$F_1 = \frac{h}{2} (\lambda h_s \bar{u}_s)_{xx} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} U_s = u_s + & -\frac{1}{3} h_s^2 h_{xxx} - \frac{1}{2} (h_{bx} \bar{u}_s)_x \\ & + \frac{1}{2} h_s (h - h_s)_x \bar{u}_{sx} + h_s h_{bx} \bar{u}_s \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} G = & -\bar{u}_s \bar{u}_{sx} - \frac{g}{C_r} \eta_x - \frac{\alpha}{C_r} \bar{u}_s \\ & + \frac{1}{3} \frac{\alpha}{C_r} h_s^2 \bar{u}_{sxx} + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{C_r} h_s (h_{bx} \bar{u}_s)_x \\ & - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{C_r} h_s (h - h_s)_x \bar{u}_{sx} - \frac{\alpha}{C_r} (h_s h_{bx} \bar{u}_s) \\ & + \frac{1 + \beta}{C_r} [h (\lambda h_s \bar{u}_s)_x]_x + \frac{\beta g}{C_r^2} [h (\lambda h_s \eta_x)_x]_x \end{aligned} \quad (49)$$

$$G_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{C_r} (h^2 \bar{u})_{xx} \quad (50)$$

在時間上數值離散分為兩階段。採用 Hoffman(1992)所提出之方法為基礎，分列如下：

預測項 - third order Adams-Bashforth scheme：

$$\eta_i^{(n+1)*} = \eta_i^n + \frac{\Delta t}{12} [23E_i^n - 16E_i^{n-1} + 5E_i^{n-2}] \quad (51)$$

$$\begin{aligned} U_{i+\frac{1}{2}}^{(n+1)*} = & U_{i+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{12} [23F_{i+\frac{1}{2}}^n - 16F_{i+\frac{1}{2}}^{n-1} + 5F_{i+\frac{1}{2}}^{n-2}] \\ & + 2F_{i+\frac{1}{2}}^n - 3F_{i+\frac{1}{2}}^{n-1} + F_{i+\frac{1}{2}}^{n-2} \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} U_{i+\frac{1}{2}}^{(n+1)*} = & U_{i+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{12} [23G_{i+\frac{1}{2}}^n - 16G_{i+\frac{1}{2}}^{n-1} + 5G_{i+\frac{1}{2}}^{n-2}] \\ & + 2G_{i+\frac{1}{2}}^n - 3G_{i+\frac{1}{2}}^{n-1} + G_{i+\frac{1}{2}}^{n-2} \end{aligned} \quad (53)$$

修正項 - fourth order Adams-Moulton corrector schemes：

$$\begin{aligned} \eta_i^{n+1} = & \eta_i^n \\ & + \frac{\Delta t}{12} [9E_i^{(n+1)*} + 19E_i^n - 5E_i^{n-1} + E_i^{n-2}] \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} U_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = & U_{i+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{24} [9F_{i+\frac{1}{2}}^{(n+1)*} + 19F_{i+\frac{1}{2}}^n \\ & - 5F_{i+\frac{1}{2}}^{n-1} + F_{i+\frac{1}{2}}^{n-2}] + F_{i+\frac{1}{2}}^{(n+1)*} - F_{i+\frac{1}{2}}^n \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} U_{s, i+\frac{1}{2}}^{n+1} = & U_{s, i+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{24} [9G_{i+\frac{1}{2}}^{(n+1)*} + 19G_{i+\frac{1}{2}}^n \\ & - 5G_{i+\frac{1}{2}}^{n-1} + G_{i+\frac{1}{2}}^{n-2}] + G_{i+\frac{1}{2}}^{(n+1)*} - G_{i+\frac{1}{2}}^n \end{aligned} \quad (56)$$

將所得之修正值與預測值進行比較，兩者是否同時滿足收斂條件。倘若不滿足收斂條件，預測值後求解修正值；若滿足收斂條件，此計算結果即為下一時階之計算之初值。而收斂條件表示如下：

$$\Delta f = \frac{\sum_{i,j} |f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{(n+1)*}|}{\sum_{i,j} |f_{i,j}^{n+1}|} < 0.001 \quad (57)$$

在整個計算域中，需依照不同之狀況，分別給定不同的計算邊界條件。當波浪傳遞至開放邊界時，消波邊界條件必須有效地吸收波浪之能量，並且避免數值反射波之產生，一般在邊界上常使用輻射邊界條件(Sommerfeld radiation condition)。由於在實際之計算例中，相位速度並非均能準確的估計，因此在給定輻射邊界條件之後，仍然會產生波浪能量反射的現象。為減少此一波浪反射現象，根據 Wei and Kirby[2]利用 Orszag[20]所提出之方法，在計算邊界加入一阻尼項(Damping terms)或加入海綿消波層(Sponge layer)，稱為「Newtonian cooling」，可使此一現象獲得改善。式(42)、(43)加入阻尼項後可改寫如下：

$$U_t = F(\eta, u) + [F_1(u_s)]_t - w_1(x)u \quad (58)$$

$$U_{st} = G(\eta, u_s) + [G_1(u)]_t - w_2(x)u_s \quad (59)$$

式中 $w_1(x)u$ 、 $w_2(x)u_s$ 可表示如下：

$$w_j(x) = \begin{cases} 0; & x < x_s \\ \exp\left(\frac{x-x_s}{x_l-x_s}\right) - 1 & \\ m_j \omega \left[\frac{\exp(1) - 1}{\exp(1) - 1} \right]; & x > x_s \end{cases} \quad (60)$$

其變數定義如下： $j=1,2$ ， m_j 為依不同計算例給定不同常數； ω 為波浪角頻率； x_s 為計算域阻尼起點位置； x_l 為整個計算域距離。

穩定條件則使用 Nwogu[10]所提出的 C_r (Courant number)：

$$C_r = \sqrt{gh} \frac{\Delta t}{\Delta x} < 2 \quad (61)$$

五、計算結果與討論

本計算目前初步探討在固定孔隙率下，水深變化對波浪的影響，但使用之方程式受相對水深為深水與中間性水深之界限，一般波浪理論均以深水限制作為波浪是否會有觸底(feel bottom)現象產生之界限。入射波為週期 $T=2.53\text{sec}$ 之 $\sin$ 曲線線性波，通過一等水深之透水底床。圖 2 為水深 $h=1.0\text{m}$ ， $h_s=1.0\text{m}$ ，透水底床孔隙率 $\lambda=0.5$ 之區域， $R=1.0$ 。 L_1 為波浪進入計算域範圍內的波長， $U_{amp}=CH_{in}/2h$ 。由圖形可以看出波高、流速及滲流速度會隨著波浪之傳遞而呈現衰減之現象，此乃因透水底床造成波浪能量衰減。圖 3 為波浪通過一水深 $h=5.0\text{m}$ ， $h_s=5.0\text{m}$ 、透水底床孔隙率 $\lambda=0.5$ 之區域，其相對水深 $h/L_0=0.5$ ，由圖形可以看出其波高與流速均沒有衰減現象，亦即波浪不受底床性質所影響，此與林等[21]所提相對水深 0.5 透水底床之影響波浪傳遞的結果一致。

由上面之計算結果可知，波浪通過一透水底床時，當相對水深不小於 0.5 時，不會造成會造成能量之衰減，若相對水深小於 0.5 時，會造成波浪能量之衰減。

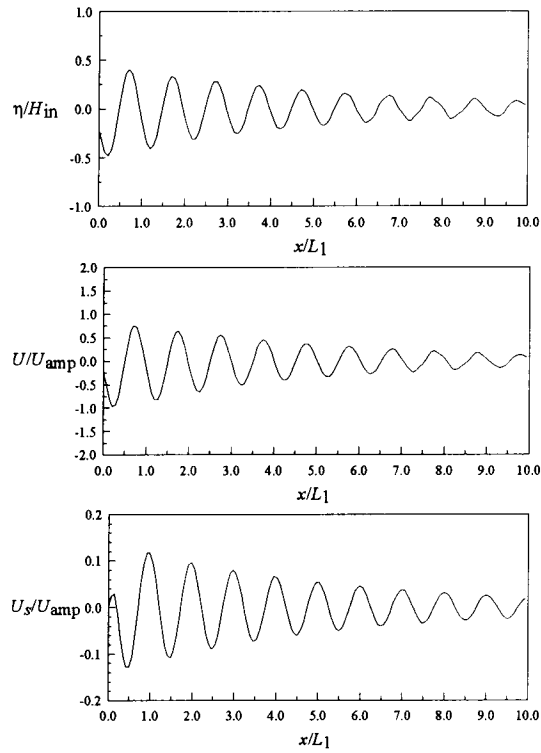


圖 2 波浪通過平坦透水底床之變($h_s/h=1.0$ ， $R=1.0$ ， $H_{in}/h=0.02$ ， $h/L_0=0.10$)

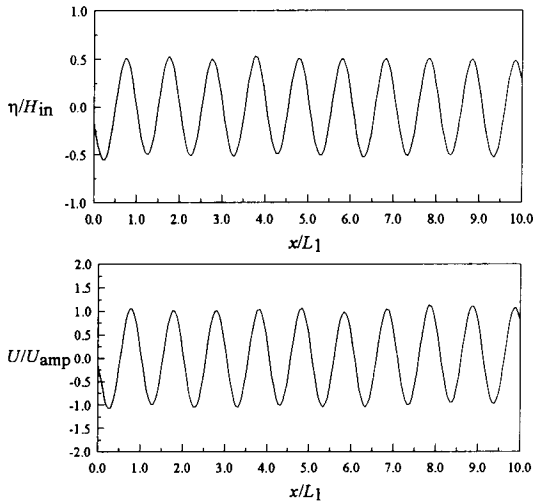


圖 3 波浪通過平坦透水底床之變形($h_s/h=1.0$ ， $R=1.0$ ， $H_{in}/h=0.02$ ， $h/L_0=0.50$)

六、計畫成果自評

參與人員經由理論研究與數值計算，將對於波浪通過透水底床之變形有初步了解，並且對於海洋工程設計與規劃重點得到更進一步的了解，同時對於理論方法的提升與數值技巧會有充份的訓練，有助於以後從事相關問題研究能力與創造性。與原先申請計劃之目的相符合，預估達到八成五之期望，此成果預定發表於國內第二十四屆海洋工程研討會。

七、參考文獻

- [1]. E.C. Cruz, M. Isobe, A. Watanabe (1997) "Boussinesq Equations for Wave Transformation on Porous Beds," *Coastal Eng.*, Vol. 30, pp.125-156.
- [2]. Wei, G., J.T. Kirby, S.T. Grilli and R. Subramanya (1995) "Time-Dependent Numerical Code for Extended Boussinesq Equations," *J. Fluid Mech.*, Vol. 294, pp. 71-92..
- [3]. Sollit, C.K. and R.H. Cross (1972) "Wave Transmission through Permeable Breakwaters," *Proce. 13th Conf. Coastal Eng., ASCE*, Vol. III, pp.1827-1846.
- [4]. Dalrymple, R. A., M.A. Losada and P.A. Martin (1991) "Reflection and Transmission from Porous Structures under Oblique Wave Attack," *J. Fluid Mech.*, Vol. 224, pp.625-644.
- [5]. Boussinesq, J. (1872) "Theorie des ondes et remous qui se propagent le long d'un canal rectangular horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au," *J. Math. Pure et. Appl.*, 2nd Series, Vol.17, pp. 55-108.
- [6]. Peregrine, D.H. (1967) "Long Waves on Beach," *J. Fluid Mech.*, Vol. 27, Part 4, pp.815-827.
- [7]. Witting, J.M., 1984, "A Unified Model for the Evolution of Nonlinear Water Waves," *J. of Computational Physics*. 56, pp.203-236.
- [8]. Madsen, P.A., R. Murray and O.R. Sørensen (1991) "A New Form of Boussinesq Equations with Improved Linear Dispersion Characteristics," *Coastal Eng.* Vol. 15, pp. 371-388.
- [9]. Madsen, P.A. and O.R. Sørensen (1992) "A New Form of Boussinesq Equations with Improved Linear Dispersion Characteristics Part2. A slowly-varying bathymetry," *Coastal Eng.* Vol.18, pp. 183-204. Vol. 21, pp.199-208.
- [10]. Nwogu, O. (1993) "An Alternative Form the Boussinesq Equation for Near Shore Wave Propagation," *J. Waterway, Port, Coast Ocean Eng. ASCE*, Vol. 119(6), pp.618-638.
- [11]. Schäffer, H.A. and Madsen, P.A., (1995) "Further Enhancements of Boussinesq-type Equations," *Coastal Eng.* Vol. 26, pp.1-14.
- [12]. Madsen, P.A., Banijamali, B., Schäffer, H.A. and Sørensen, O.R. (1996) "Boussinesq Type Equations with High Accuracy in Dispersion and Nonlinearity," *Proc. 25th Int. Conf. on Coastal Eng.*, pp.95-108.
- [13]. Gobbi, M.F. and Kirby, J.T., 1996, "A Forth Order Boussinesq-Type Wave Model," *Proc. 25th Int. Conf. on Coastal Eng.*, pp.1116-1129.
- [14]. Gobbi, M.F. and Kirby, J.T., 1999, "Wave Evolution over Submerged Sills: tests of a high-order Boussinesq model," *Proc. 25th Int. Conf. on Coastal Eng.*, pp.1116-1129.
- [15]. Wei, G., J.T. Kirby, Gobbi, M.F., 2000, "A Fully Nonlinear Boussinesq Model for Surface Waves, Part 2. Extended to $O(kh)^4$," *J. Fluid Mech.*, Vol.294, pp.71-92.
- [16]. Agnon, Y., Madsen, P.A. and Schäffer, H.A., 1999, "A New Approach to High-Order Boussinesq Models," *J. Fluid Mech.*, vol.399, pp.319-333.
- [17]. Lin, C. C. and Clark A., 1959, "On the Theory of Shallow Water Waves," *Tsing Hua J. of Chinese Studies*, Special 1, pp.54-62.
- [18]. Zheng Peixi, 1999, "A High-Order Numerical Model for Waves and Currents Based on Boussinesq equations," Ph. D. dissertation of the University of Tokyo, Japan.
- [19]. Hoffman, J.D. (1992) "Numerical Method for Engineers and Scientists," Mc-Graw-Hill, Inc., New York.
- [20]. Orszag, S. A., 1980, "Approximation of Radiation Boundary Conditions," *J. of Computational Physics*, pp.115-135.
- [21]. 林建宏、黃良雄、宋長虹 (1996) "通過硬多孔彈性底床之非線性淺水波", 第十八屆海洋工程研討會論文集, 25頁-37頁。