

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

具雙軸對稱系統之土壤～結構互制分析

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC93-2211-E-002-018-

執行期間：93年08月01日至94年07月31日

執行單位：國立臺灣大學土木工程學系暨研究所

計畫主持人：陳正興

計畫參與人員：柯永彥

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中華民國 94 年 11 月 1 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

具雙軸對稱系統之土壤~結構互制分析

Dynamic Analysis for Biaxial Symmetry Soil-Structure System

計畫編號：NSC 93-2211-E-002-018

執行期限：93年8月1日至94年7月31日

主持人：陳正興 國立臺灣大學土木工程學研究所

壹、中文摘要

在從事土壤~結構互制之問題時，常用邊界元素法模擬半無限遠域之阻抗矩陣，但利用傳統邊界元素法(Collocation BEM)所建構之系統矩陣為非對稱且不一定為正定，不但使得要將邊界元素法與有限元素法連接使用(FEM-BEM coupling)時整個系統的對稱性會被破壞，且對數值運算亦有不利影響。對稱葛勒金邊界元素法(Symmetric Galerkin BEM, SGBEM)以對偶邊界積分方程為架構，利用對偶式中各基本解核函數間之對稱關係，配合加權剩餘法中的 Galerkin method，而可獲致對稱且正定之系統矩陣，且數值穩定性與收斂行為較傳統 Collocation BEM 為佳，在近年來被廣泛應用在各領域之邊界元素法分析上。本研究將針對均質等向材料之三維問題建立 SGBEM 分析模式，其中利用座標轉換與積分域投影技巧處理邊界積分中的奇異積分問題。經由範例驗證可知本研究建立之模式能得到相當良好的分析結果。

關鍵詞：對稱邊界元素法、葛勒金法、奇異積分

Abstract

For soil-structure interaction problems, it is very often to adopt the Boundary Element Method (BEM) to the semi-infinite far-fields. However, the conventional BEM (collocation BEM) has disadvantage because

the formulated stiffness-like matrix is asymmetric and is not always positive definite. Therefore, the symmetric virtue of the system matrix is ruined in FEM-BEM coupling and some ill effects are brought to the numerical processes. Symmetric Galerkin BEM, based on dual boundary integral equations, using the symmetry properties of kernel functions in the DBIEs, can produce symmetric and positive-definite stiffness-like matrices and owns better numerical stability and divergence behavior. Hence, SGBEM is widely applied in BEM analysis of many fields in recent years. This paper deals with the regularization of the singular integrals of SGBEM in the case of 3D elastic problems for isotropic homogeneous solids by techniques of coordinate transformation and mapping of the integration domains. In current study, the developed method is used to solve two problems with known analytical solution. The accuracy of the developed method is verified.

Keywords: Symmetric BEM, Galerkin BEM, Singular integrals.

貳、前言

在從事土壤~結構互制之問題時，常用邊界元素法模擬半無限遠域之阻抗矩陣，但利用傳統邊界元素法(Collocation BEM)所建構之系統矩陣為非對稱且不一定為正定，不但使得要將邊界元素法與有限元素法連接使用(FEM-BEM coupling)時整個系統的對稱性會被破壞，且對數值運算亦有不利影響。欲使邊界元素法能夠獲得對稱

之系統矩陣，在近年最常用的方法為對稱葛勒金邊界元素法(SGBEM)[1]，其為一直接邊界元素法(direct BEM)，以對偶邊界積分方程[2]為架構，利用對偶式中各基本解核函數間之對稱關係，配合由能量觀點出發之加權剩餘法中的Galerkin method，而得到雙重積分式，亦可獲致對稱且正定之系統矩陣。SGBEM的優點除了對稱的矩陣能減少儲存空間、減少解未知數所需的成本並易於與FEM結合使用以及正定的矩陣能避免數值運算的誤差之外，還包括：自由項(free term)係數易於決定而不受角隅或邊緣之影響；因加權剩餘法的應用而較傳統BEM更容易處理奇異積分，且較傳統BEM更容易收斂[3]。

針對上述問題，本研究將應用 SGBEM 到均質等向線彈性材料之三維問題中，並將利用一特殊的座標轉換技巧處理邊界積分中的奇異積分問題，其最早由 Andrä and Schnack (1997) (採三角形元素) [4] 與 Sauter and Schwab (1997) (採四邊形元素) [5] 提出，並已經有許多應用[6, 7, 8]。此處將利用基本解核函數的特性配合座標轉換技巧處理奇異積分問題，建立一套能利用四邊形元素分析均質等向線彈性材料之三維靜力問題之 SGBEM 模式。

參、對稱邊界元素法

對一均質等向之彈性體 Ω ，如圖 1 所示，令其邊界 $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ (with Dirichlet BCs on Γ_u , Neumann BCs on Γ_t)，而 \mathbf{b} 為徹體力向量，在 Γ_u 上 $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ ，在 Γ_t 上 $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}$ 。

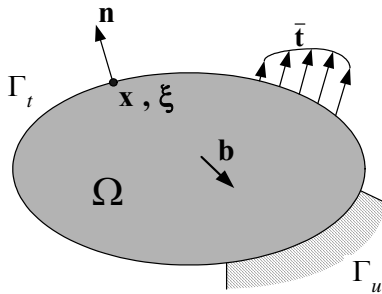


圖 1 線彈性靜力問題

若忽略徹體力，此問題可以用以下的強奇異邊界積分方程(u-BIE)來描述：

$$c_{ij}(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \xi)t_j(\xi)d\Gamma_{\xi} + \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \xi)u_j(\xi)d\Gamma_{\xi} = 0 \quad (1)$$

其中， $\mathbf{x} \in \Gamma$ ， $\xi \in \Gamma$ ， $u_j(\mathbf{x})$ 、 $t_j(\mathbf{x})$ 分別為 \mathbf{x} 位置在 j 方向的位移與曳引力； $U_{ij}(\mathbf{x}, \xi)$ 、 $T_{ij}(\mathbf{x}, \xi; \omega)$ 分別為均質等向彈性無限域中位移與曳引力之靜力基本解(Kevin fundamental solution)，表示在源點(source point) \mathbf{x} 處有一作用方向在第 i 方向之單位作用力時，在場點(field point) ξ 處所引致之第 j 方向位移與曳引力； $i = 1 \sim 3, j = 1 \sim 3$ ，表示座標軸的三個方向(x, y, z)； $c_{ij}(\mathbf{x})$ 為 \mathbf{x} 位置之自由項(Free Term)係數，與邊界之幾何形狀有關，對於平滑的邊界， $c_{ij}(\mathbf{x}) = 1/2\delta_{ij}$ 。

上述問題亦可用超奇異邊界積分方程(t-BIE)來描述：

$$\bar{c}_{ij}(\mathbf{x})t_j(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \bar{U}_{ij}(\mathbf{x}, \xi)t_j(\xi)d\Gamma_{\xi} + \int_{\Gamma} \bar{T}_{ij}(\mathbf{x}, \xi)u_j(\xi)d\Gamma_{\xi} = 0 \quad (2)$$

其中， $\bar{U}_{ij}(\mathbf{x}, \xi)$ 、 $\bar{T}_{ij}(\mathbf{x}, \xi)$ 分別為位移與曳引力之基本解對源點之微分；對於平滑的邊界， $\bar{c}_{ij}(\mathbf{x}) = 1/2\delta_{ij}$ 。而由以下之等式[4]：

$$\int_{\Gamma} \bar{T}_{ij}(\mathbf{x}, \xi)d\Gamma_{\xi} = 0 \quad (3)$$

可將式(2)藉由減去一剛體運動項將奇異性降階，而改寫為以下之強奇異形式：

$$\bar{c}_{ij}(\mathbf{x})t_j(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \bar{U}_{ij}(\mathbf{x}, \xi)t_j(\xi)d\Gamma_{\xi} + \int_{\Gamma} \bar{T}_{ij}(\mathbf{x}, \xi)[u_j(\xi) - u_j(\mathbf{x})]d\Gamma_{\xi} = 0 \quad (4)$$

欲建立邊界元素，必須經過離散化的過程。若以第 e 個元素中各節點之位移及曳引力利用形狀函數內插，可得第 e 個元素中任意位置之位移及曳引力為：

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{NNE} N^{em}(\mathbf{x})\hat{u}_i^{em}; \quad t_i(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{NNE} N^{em}(\mathbf{x})\hat{t}_i^{em} \quad (5)$$

其中， $\mathbf{x} \in \Gamma_e$ ； Γ_e 為第 e 個元素之表面積

$e = 1 \sim NE$; $NE =$ 元素之數目; $NNE =$ 每個元素之節點數目; \hat{u}_i^{em} 、 \hat{t}_i^{em} 為第 e 個元素之第 m 個節點之位移與曳引力向量; $N^{em}(\mathbf{x})$ 為第 e 個元素之第 m 個節點之形狀函數。則第 e 個元素中之 u-BIE 可表為:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{NNE} c_{ij}(\mathbf{x}) N^{em}(\mathbf{x}) \hat{u}_j^{em} - \\ & \sum_{l=1}^{NE} \sum_{m=1}^{NNE} \left[\int_{\Gamma_l} U_{ij}(\mathbf{x}, \xi) N^{lm}(\xi) \hat{t}_j^{lm} d\Gamma_\xi - \right. \\ & \left. \int_{\Gamma_l} T_{ij}(\mathbf{x}, \xi) N^{lm}(\xi) \hat{u}_j^{lm} d\Gamma_\xi \right] = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

若利用加權剩餘法之觀念改寫上式, 且基於 Galerkin Method 之精神, 採用形狀函數作為加權剩餘法中之權重函數, 並將將元素積分領域投影至元素之區域座標系統 (如圖 2 所示), 以方便積分之操作, 可改寫式(7)為則可得新的 u-BIE 為:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{NNE} \left\{ \int_{R_e} N^{em}(\zeta) \mathbf{x}(\zeta) N^{em}(\zeta) [J^e(\zeta) d\zeta_1 d\zeta_2] \hat{u}_i^{em} \right\} \\ & + \sum_{l=1}^{NE} \sum_{m=1}^{NNE} \left\{ \int_{R_l} \int_{R_l} N^{en}(\zeta) T_{ij}(\mathbf{x}(\zeta), \xi(\eta)) N^{lm}(\eta) \right. \\ & \quad \cdot [J^l(\eta) d\eta_1 d\eta_2] [J^e(\zeta) d\zeta_1 d\zeta_2] \hat{u}_j^{lm} \\ & \quad \left. - \sum_{l=1}^{NE} \sum_{m=1}^{NNE} \left\{ \int_{R_l} \int_{R_l} N^{en}(\zeta) U_{ij}(\mathbf{x}(\zeta), \xi(\eta)) N^{lm}(\eta) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \cdot [J^l(\eta) d\eta_1 d\eta_2] [J^e(\zeta) d\zeta_1 d\zeta_2] \hat{t}_j^{lm} \right\} = 0 \right. \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $n=1 \sim NNE$, $J^l(\eta)$, $J^e(\zeta)$ 為因元素積分領域投影而產生之 Jacobian。引入加權剩餘法後, 在進行外層積分之時, 元素邊緣之 $c_{ij}(\mathbf{x})$ 事實上對積分並無貢獻, 故可以將上式中之 $c_{ij}(\mathbf{x})$ 直接用 $\frac{1}{2}\delta_{ij}$ 代換之[7]。

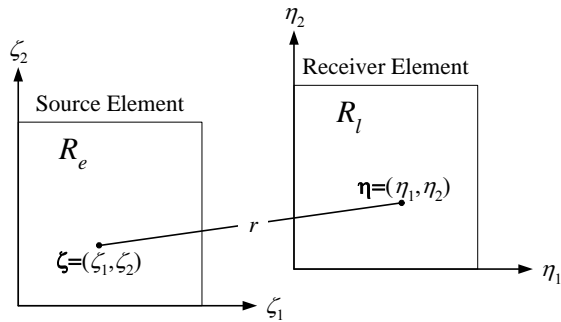


圖 2 元素區域座標系統之示意圖

若對式(4)做同樣的操作, 可得:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{NNE} \left\{ \int_{R_e} N^{em}(\zeta) \mathbf{x}(\zeta) N^{em}(\zeta) [J^e(\zeta) d\zeta_1 d\zeta_2] \hat{t}_i^{em} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{l=1}^{NE} \sum_{m=1}^{NNE} \left\{ \int_{R_l} \int_{R_l} N^{en}(\zeta) \bar{T}_{ij}(\mathbf{x}(\zeta), \xi(\eta)) [N^{lm}(\eta) \hat{u}_j^{lm} - N^{em}(\zeta) \hat{u}_j^{em}] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \cdot [J^l(\eta) d\eta_1 d\eta_2] [J^e(\zeta) d\zeta_1 d\zeta_2] \right\} \right. \\ & \quad \left. - \sum_{l=1}^{NE} \sum_{m=1}^{NNE} \left\{ \int_{R_l} \int_{R_l} N^{en}(\zeta) \bar{U}_{ij}(\mathbf{x}(\zeta), \xi(\eta)) N^{lm}(\eta) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \cdot [J^l(\eta) d\eta_1 d\eta_2] [J^e(\zeta) d\zeta_1 d\zeta_2] \hat{t}_j^{lm} \right\} = 0 \right. \end{aligned} \quad (8)$$

為了得到對稱的 BEM 系統矩陣, 將利用基本解核函數之對稱特性:

$$U_{ij}(\mathbf{x}, \xi) = U_{ji}(\xi, \mathbf{x}) = U_{ij}^T(\mathbf{x}, \xi) \quad (9)$$

$$\bar{T}_{ij}(\mathbf{x}, \xi) = \bar{T}_{ji}(\xi, \mathbf{x}) = \bar{T}_{ij}^T(\mathbf{x}, \xi) \quad (10)$$

$$\bar{U}_{ij}(\mathbf{x}, \xi) = T_{ji}(\xi, \mathbf{x}) = T_{ij}^T(\mathbf{x}, \xi) \quad (11)$$

亦即, 弱奇異與超奇異核函數為對稱, u-BIE 與 t-BIE 中之強奇異核函數互為轉置。若元素 e 在 Γ_u 上, 則採用 u-BIE, 在 Γ_t 上則採用 t-BIE, 以矩陣形式表示, 可得:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -\mathbf{U}_u^u & \mathbf{T}_t^u \\ \bar{\mathbf{U}}_u^t & -\bar{\mathbf{T}}_t^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_u \\ \mathbf{u}_t \end{Bmatrix} \\ & = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \mathbf{N} \mathbf{u}_u - \mathbf{T}_u^u \mathbf{u}_u + \mathbf{U}_t^u \mathbf{t}_t \\ \frac{1}{2} \mathbf{N} \mathbf{t}_t + \bar{\mathbf{T}}_u^t \mathbf{u}_u - \bar{\mathbf{U}}_t^t \mathbf{t}_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_u \\ \mathbf{R}_t \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

其中, \mathbf{u}_t 與 \mathbf{t}_u 分別表未知的位移與曳引力, \mathbf{u}_u 與 \mathbf{t}_t 分別表已知的位移與曳引力; \mathbf{U} 、 \mathbf{T} 、 $\bar{\mathbf{U}}$ 與 $\bar{\mathbf{T}}$ 分別為 U_{ij} 、 T_{ij} 、 \bar{U}_{ij} 與 \bar{T}_{ij} 各核函數在邊界積分式中對應之雙重積分項; \mathbf{R}_u 與 \mathbf{R}_t 代表所有已知節點位移與曳引力值之貢獻。由核函數之對稱性質, 可知 $(\mathbf{U}_u^u)^T = \mathbf{U}_u^u$ 、 $(\bar{\mathbf{T}}_t^t)^T = \bar{\mathbf{T}}_t^t$ 、 $(\mathbf{T}_t^u)^T = \bar{\mathbf{U}}_u^t$, 則以上由邊界積分所得之系統矩陣將具有對稱之形式, 此即所謂之 SGBEM。

肆、奇異積分

4.1 SGBEM 之奇異積分

在 SGBEM 中, 包含以下的邊界積分:

$$\int_{R_e} \int_{R_l} N^{en}(\zeta) K_{ij}(\mathbf{x}(\zeta), \xi(\boldsymbol{\eta})) N^{lm}(\boldsymbol{\eta}) \cdot [J^l(\boldsymbol{\eta}) d\eta_1 d\eta_2] [J^e(\zeta) d\zeta_1 d\zeta_2] \quad (13)$$

其中， $K_{ij} = \begin{cases} U_{ij}, T_{ij} & \text{(For u - BIE)} \\ \bar{U}_{ij}, \bar{T}_{ij} & \text{(For t - BIE)} \end{cases}$

而在以下的元素連接情況下，在進行邊界積分時必須處理奇異積分的問題：

- (1) $e = l$ (coincident case, 如圖 3(a))；
- (2) $R_e \cap R_l = \text{an edge}$ (edge-adjacent case, 如圖 3(b))；
- (3) $R_e \cap R_l = \text{an vertex}$ (vertex-adjacent case, 如圖 3(c))；

邊界積分式中各核函數之奇異性分別為：
 u - BIE: $U_{ij} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$, $T_{ij} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$ ；
 t - BIE: $\bar{U}_{ij} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$, $\bar{T}_{ij} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-3})$ 。故需處理弱奇異、強奇異與超奇異積分。此處所用之方式，係整合 Novati and Frangi (2002) 提出之四邊形元素利用座標轉換技巧處理弱奇異積分的方法，以及 Andrä and Schnack (1997) 與 Haas and Kuhn (2002) 所提出利用基本解核函數的對稱性與力學特性，配合座標轉換技巧處理強奇異與超奇異積分的方法。其步驟包含：

- (1) 引入一相對座標系統，亦即定義一差值向量(difference vector) $\mathbf{u}^d = \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}$ ；
- (2) 利用相對座標系統與特殊座標投影關係，將該四維度之邊界積分式的積分領域分為幾個對稱的三角形子積分領域；
- (3) 對於各個三角形子積分領域，利用 Duffy's triangular coordinate[9]，產生一 jacobian 項，其可處理弱奇異積分；
- (4) 對於平面元素(元素各節點在同一平面上)，可綜合前三項步驟，配合式(4)，並利用核函數(K_{ij})之對稱特性，處理強奇異與超奇異積分。

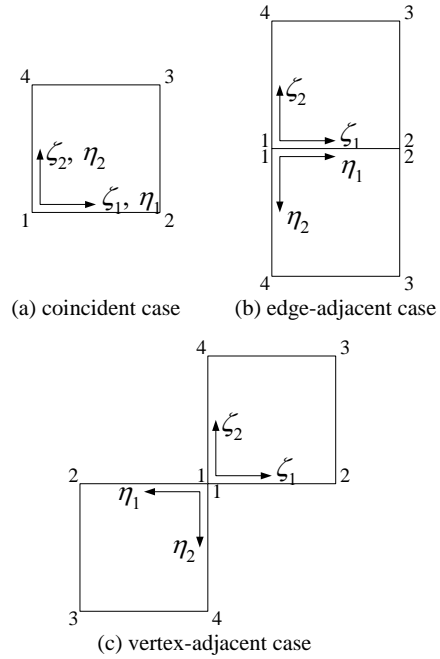


圖 3 會產生奇異積分問題之各種情況

4.2 各種情況之奇異積分操作

1. coincident case

區域座標系統 $\boldsymbol{\eta}$ 與 $\boldsymbol{\zeta}$ 之方向定義如圖 3

(a) 所示，則邊界積分式為：

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_e} \int_{\Gamma_l} N^{en}(\zeta) K_{ij}(\mathbf{x}(\zeta), \xi(\boldsymbol{\eta})) \Phi^{lm}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) [J^l(\boldsymbol{\eta}) d\eta_1 d\eta_2] [J^e(\zeta) d\zeta_1 d\zeta_2] \\ &= \sum_{a=1}^4 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K_{ij}(\boldsymbol{\zeta}^a, \boldsymbol{\eta}^a) [N^{en}(\boldsymbol{\zeta}^a) \Phi^{lm}(\boldsymbol{\eta}^a, \boldsymbol{\zeta}^a) \pm N^{en}(\boldsymbol{\eta}^a) \Phi^{lm}(\boldsymbol{\zeta}^a, \boldsymbol{\eta}^a)] \\ & \quad \cdot J(\boldsymbol{\zeta}^a) J(\boldsymbol{\eta}^a) \omega(1-\omega)(1-\xi_1\omega) d\omega d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \end{aligned} \quad (14)$$

其中，

$$\Phi^{lm}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) = \begin{cases} N^{lm}(\boldsymbol{\eta}) & \text{for } K_{ij} = U_{ij}, T_{ij} \text{ and } \bar{U}_{ij} \\ N^{lm}(\boldsymbol{\eta}) - N^{lm}(\boldsymbol{\zeta}) & \text{for } K_{ij} = \bar{T}_{ij} \end{cases} \quad (15)$$

其中，”+”號對 $K_{ij} = U_{ij}, \bar{T}_{ij}$ 時成立，”-”號對 $K_{ij} = T_{ij}, \bar{U}_{ij}$ 時成立。式中各變數的定義如表 1 所示，其中

$$\begin{cases} v_1 = \omega \\ v_2 = \xi_1 \omega \end{cases} \text{ and } \begin{cases} v_3 = \xi_2(1-\omega) \\ v_4 = \xi_3(1-\xi_1\omega) \end{cases} \quad (16)$$

表 1 各變數之定義：coincident case

a	1	2	3	4
ζ_1^a	v_3	v_3	v_4	$v_2 + v_4$
ζ_2^a	v_4	$v_2 + v_4$	v_3	v_3
η_1^a	$v_1 + v_3$	$v_1 + v_3$	$v_2 + v_4$	v_4

η_2^a	$v_2 + v_4$	v_4	$v_1 + v_3$	$v_1 + v_3$
------------	-------------	-------	-------------	-------------

對於 $K_{ij} = T_{ij}, \bar{U}_{ij}$ 之情況，

$$\begin{aligned}
& N^{en}(\zeta) \Phi^{lm}(\eta, \zeta) - N^{en}(\eta) \Phi^{lm}(\zeta, \eta^a) \\
&= N^n(\zeta) N^m(\mathbf{u}^d + \zeta) - N^n(\mathbf{u}^d + \zeta) N^m(\zeta) \\
&= N^n(\zeta) [N^m(\mathbf{u}^d + \zeta) - N^m(\zeta)] - N^m(\zeta) [N^n(\mathbf{u}^d + \zeta) - N^n(\zeta)] \\
&= \mathbb{F}(\varepsilon) = \mathbb{F}(\omega)
\end{aligned} \tag{17}$$

對於 $K_{ij} = \bar{T}_{ij}$ 之情況

$$\begin{aligned}
& N^{en}(\zeta) \Phi^{lm}(\eta, \zeta) + N^{en}(\eta) \Phi^{lm}(\zeta, \eta^a) \\
&= N^n(\zeta) [N^m(\mathbf{u}^d + \zeta) - N^m(\zeta)] + N^n(\mathbf{u}^d + \zeta) [N^m(\zeta) - N^m(\mathbf{u}^d + \zeta)] \\
&= [N^n(\zeta) - N^n(\mathbf{u}^d + \zeta)] \cdot [N^m(\mathbf{u}^d + \zeta) - N^m(\zeta)] \\
&= \mathbb{F}(\varepsilon^2) = \mathbb{F}(\omega^2)
\end{aligned} \tag{18}$$

配合 Duffy's triangular coordinate，則 coincident case 之奇異積分即可處理之。

2. edge-adjacent case

區域座標系統 η 與 ζ 之方向定義如圖

3(b)所示，則邊界積分式為：

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_e} \int_{\Gamma_e} N^{en}(\zeta) K_{ij}(\mathbf{x}(\zeta), \xi(\eta)) \Phi^{lm}(\eta, \zeta) [J^l(\eta) d\eta_1 d\eta_2] [J^e(\zeta) d\zeta_1 d\zeta_2] \\
&= \sum_{a=1}^6 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 [N^{en}(\zeta^a) K_{ij}(\zeta^a, \eta^a) N^{lm}(\eta^a)] \\
&\quad \cdot J^e(\zeta^a) J^l(\eta^a) J_a d\omega d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3
\end{aligned} \tag{19}$$

其中，

$$J_1 = J_3 = J_5 = \omega^2(1 - \omega); J_2 = J_4 = J_6 = \omega^2(1 - \xi_1\omega)$$

式中各變數的定義如表 2 所示，其中

$$\begin{cases} v_1 = \omega \\ v_2 = \xi_1\omega \\ v_3 = \xi_2\omega \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} v_4 = \xi_3(1 - \omega) \\ v_5 = \xi_3(1 - \xi_1\omega) \end{cases} \tag{20}$$

表 2 各變數之定義：edge-adjacent case

a	1	2	3	4	5	6
ζ_1^a	v_4	v_5	v_5	$v_1 + v_4$	$v_2 + v_5$	$v_2 + v_5$
ζ_2^a	v_2	v_1	v_3	v_2	v_1	v_3
η_1^a	$v_1 + v_4$	$v_2 + v_5$	$v_2 + v_5$	v_4	v_5	v_5
η_2^a	v_3	v_3	v_1	v_3	v_3	v_1

3. vertex-adjacent case

區域座標系統 η 與 ζ 之方向定義如圖

3(c)所示，則邊界積分式為：

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_e} \int_{\Gamma_e} N^{en}(\zeta) K_{ij}(\mathbf{x}(\zeta), \xi(\eta)) \Phi^{lm}(\eta, \zeta) [J^l(\eta) d\eta_1 d\eta_2] [J^e(\zeta) d\zeta_1 d\zeta_2] \\
&= \sum_{a=1}^4 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 [N^{en}(\zeta^a) K_{ij}(\zeta^a, \eta^a) N^{lm}(\eta^a)] \\
&\quad \cdot J^e(\zeta^a) J^l(\eta^a) \omega^3 d\omega d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3
\end{aligned} \tag{21}$$

式中各變數的定義如表 3 所示

表 3 各變數之定義：vertex-adjacent case

a	1	2	3	4
ζ_1^a	ω	$\xi_1\omega$	$\xi_1\omega$	$\xi_1\omega$
ζ_2^a	$\xi_1\omega$	ω	$\xi_2\omega$	$\xi_2\omega$
η_1^a	$\xi_2\omega$	$\xi_2\omega$	ω	$\xi_3\omega$
η_2^a	$\xi_3\omega$	$\xi_3\omega$	$\xi_3\omega$	ω

伍、案例分析

為了驗證本研究所推導具對稱性邊界元素法之正確性，下面將分析兩個具理論解之彈性力學問題。

5.1 單位立方體受單軸拉力

考慮一邊長為 1m 之立方體（如圖 4 所示），其邊界條件為：在 $x_1=0$ 面上 $u_1=0$ 、在 $x_2=0$ 面上 $u_2=0$ 、在 $x_3=0$ 面上 $u_3=0$ 、以及在 $x_3=0$ 面上 $t_3=10^6 \text{ N/m}^2$ 。此處建立兩個模型來分析，分別由 6 個邊界元素（如圖 4(a)）與 24 個邊界元素（如圖 4(b)）所建立。

圖 5 為在 $x_3=1\text{m}$ 之面上四個角隅之 u_3 數值解與理論解之誤差比較。圖 4(a)中之模型而言，隨著每個維度的高斯積分點增加，誤差會越來越小，當積分點為 6 個時，誤差可以降到約 2×10^{-6} 左右；而對於圖 4(b)中之模型而言亦有類似趨勢，且誤差更小，當積分點為 6 個時，誤差可以降到約 5×10^{-7} 左右。由於分析結果與理論解相當符合，且數值分析之精確度會隨積分點之增加以及元素切割之數目增加而升高，故可證明本研究提出之方法有良好的行為。

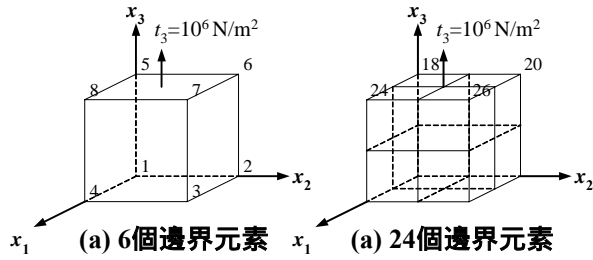
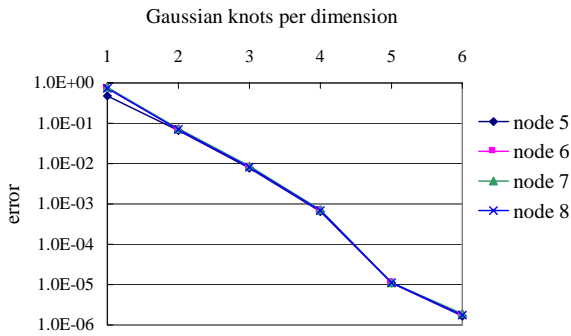
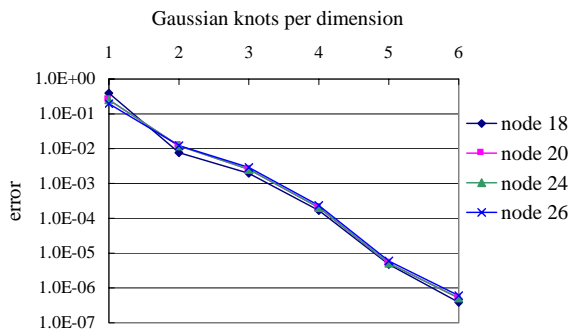


圖 4 單位立方體受單軸拉力之模型示意圖



(a) 6個邊界元素解



(a) 24個邊界元素解

圖 5 數值解與理論解之比較

5.2 Leon Problem

本問題為一受單軸均勻張力之均質等向無限介質中，含有一球形空洞，如圖 6 所示。介質中各點之各應力分量之理論解係由 Leon(1908)[10]提出。

由於 Leon problem 之對稱性，故建立一 1/8 模型來模擬之，如圖 7 所示，由球心至模型邊界之距離 h 為 5 倍球徑 ρ 。其邊界條件為：對稱面上法向之位移為 0，即在 $x=0$ 之面上 $u_1=0$ 、在 $y=0$ 之面上 $u_2=0$ 、在 $z=0$ 之面上 $u_3=0$ ，球面與模型邊界上之 $x=h$ 與 $y=h$ 平面為 traction free，模型邊界上之 $z=h$ 平面則受 $p=t_3=10^8 \text{ N/m}^2$ 。

此處將比較沿 x 軸之 $\sigma_{\phi\phi}$ 與 σ_{rr} 應力分量之理論解與數值解，如圖 8 所示。由圖 8 可知，理論解與數值解相當符合，除了在接近球面處 ($r \approx \rho$) 由於應力變化梯度很大，以及在接近模型邊界處 traction free 的假設與實際上無限空間的條件不同，出現略大的差異。

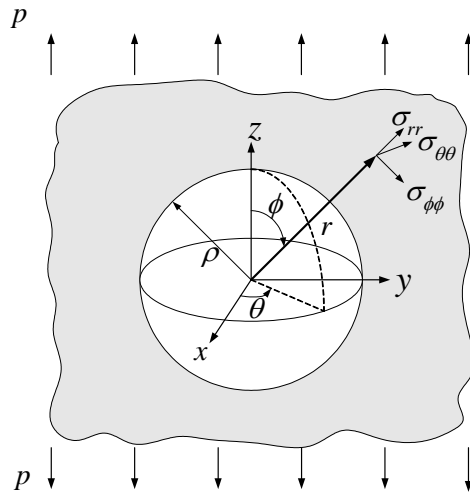
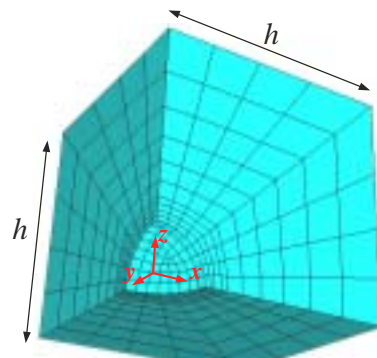
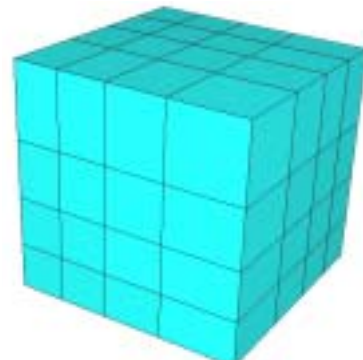


圖 6 Leon Problem



(a) 由球心向分析邊界看



(b) 由分析邊界向球心看

圖 7 Leon Problem 之邊界元素模型

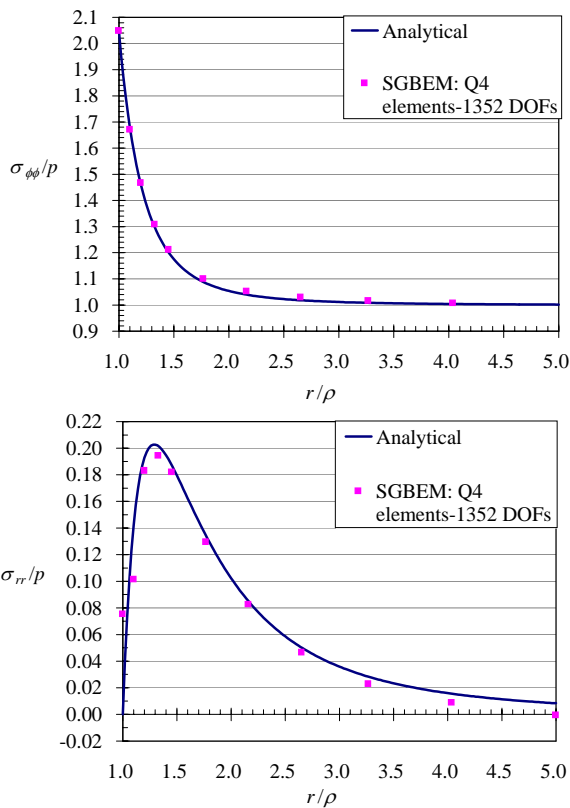


圖 8 沿 x 軸之 $\sigma_{\phi\phi}$ (上) 與 σ_{rr} (下) 理論解與數值解之比較

陸、結論

本研究採用能建構出具對稱形式系統矩陣的 Galerkin BEM，用以建立三維均質等向線彈性材料靜力問題之分析程式。對於在 Galerkin BEM 中所會遭遇到的弱奇異、強奇異與超奇異邊界積分問題，則是採用一特殊之座標轉換技巧，其引入相對座標系統以及一些特殊的積分領域幾何轉換關係，而能解決弱奇異積分問題，再配合基本解核函數之對稱關係與力學特性，則可解決強奇異與超奇異積分問題。

同時本研究亦利用具有理論解之範例來作驗證分析，顯示本研究所提出之方法能夠分析一般彈性力學問題，而得到相當正確之結果。

柒、參考文獻

- Bonnet, M., Maier, G., Polizzotto, C. (1998) "Symmetric Galerkin boundary element method." *Appl. Mech. Rev.* 51, 669-704.
- Hong, H. K., Chen, J. T. (1988) "Derivations of integral equations of elasticity." *J. Eng. Mech.*, ASCE, 114, 1028-1044.
- Wendland, W. L. (1981) "On the asymptotic convergence of boundary integral methods," In: Brebbia, C. A. (ed) *Boundary Element Methods*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, pp.412-430.
- Andrä, H., Schnack, E. (1997) "Integration of singular integrals for the Galerkin-type boundary element method in 3D elasticity." *Numer. Math.* 76, 143-165
- Sauter, S. A., Schwab, C. (1997) "Quadrature for hp-Galerkin BEM in R^3 ." *Numerische Mathematik* 78, 211-258.
- Frangi, A., Novati, G., Springhetti, R., Rovizzi, M. (2002) "3D fracture analysis by the symmetric Galerkin BEM." *Computational Mechanics* 28, 220-232.
- Haas, M., Kuhn, G. (2002), "A symmetric Galerkin BEM implementation for 3D elastostatic problems with an extension to curved elements." *Computational Mechanics* 28, 250-259.
- Novati, G., Frangi, A (2002) "Symmetric Galerkin BEM in 3D elasticity: computational aspects and applications to fracture mechanics," In: Kompiš, V. (ed) *Selected Topics in Boundary Integral Formulations for Solids and Fluids*, Springer-Wein, New York, pp.181-207.
- Duffy, MG (1982) "Quadrature over a pyramid or cube of integrals with a singularity at a vertex." *SIAM J. Numer. Anal.* 19, 1260-1262.
- Leon, A. (1908) Über die Störungen der Spannungsverteilung, die in elastischen Körpern durch Bohrungen und Bläsen entstehen, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*.