

```

\title{ {\zc 彈塑性之閔氏時空群論與模式識別實驗} \\\
\small
{\bf Elastoplasticity: group action on Minkowski spacetime and experimentation
for model identification
}\\
\normalsize
        {\zb 計劃編號：}
\small
        { NSC 87-2211-E-002-035} \\
\normalsize
        {\zb 執行期限：}
\small
        { 86.08.01---87.07.31}}
\normalsize
\author{ {\zb 計劃主持人： 洪宏基\,\,，教授} \\\
{\zb 博士後研究：劉進賢\,\,，博士} \\\
{\zb 研究助理：蕭雅柏} \\\
{\zb 執行機構： 臺灣大學土木工程學研究所} }
\date{}
\begin{document}
\maketitle
%\baselineskip=0.79cm

\zb
\baselineskip=0.3cm
\section{中文摘要}
\vspace{-0.7cm}

```

\noindent

關鍵詞：塑性、微分動態系統、閔氏時空、
Lorentz 群、Poincaré 群、因果群、共形群、廣義哈密爾頓系統。

本計畫利用閔氏時空群論研究彈塑性組成模式。

在前一系列有關固體材料的力學行為研究中 [2-6]，我們將固體材料的力學性質演化視為一種帶塑性不可逆開關的微分動態系統，並發展固態系統彈塑性行為的現代非線性動態系統分析方法，論證闡明固態系統在外加載重下的行為特質。根據這些思想，本研究 [1] 承繼非線性動態系統的分析方法，深入分析幾種固態系統模式

的力學行為，及其內在對稱性與時空結構。

報告 [1] 中特別對彈性完全塑性模式、雙線性模式、等向硬軟化模式、混合硬軟化模式及雙內時走動模式給與非常詳細的分析。

我們引進閔氏時空結構，推導在閔氏時空上的各種作用群的彈塑性動態系統。從而發展固態系統彈塑性行為的閔氏時空上作用群的研究方法。在此，

我們嘗試以內部對稱性來刻劃組成模式的層級組織架構，並滿足閔氏時空的因果關係。其作用群包括

Lorentz 群、Poincaré 群、因果群、共形群。

我們進一步探討 Lorentzian 系統與廣義哈密爾頓系統的關係，引進 Lie-Poisson 括號及 Poisson 括號，作為耗散動態系統，因此開啟廣義哈密爾頓系統的研究方法。

本報告[1]在實驗方面使用國立台灣大學工學院固體力學聯合實驗室的 MTS809 軸扭試驗機，配合實心圓棒及中空薄壁試桿進行鋁 6061 的單軸及軸扭雙軸循環棘齒行為實驗，對於不同條件下的棘齒行為有完整的觀察及詳盡的描述，特別是環向應變在循環負載下亦有棘齒行為的發生。

\section{英文摘要}

\vspace{-0.45cm}

\noindent

Keywords : Plasticity, differential dynamic system, Minkowski spacetime, Lorentz group, Poincaré group, causal group, conformal group, generalized Hamiltonian system.

The project employed a group-theoretical approach to investigate constitutive models of elastoplasticity. In a series of researches [2-6], we have been viewing the evolution of mechanical properties of a solid material as a differential dynamic system with an on-off switch for plasticity mechanism, examining phenomenological characteristics of behavior of the system subjected to external loading. Continuing this line of thought, the project [1] investigated theoretically the mechanical behavior from the viewpoint of dynamic systems induced by group actions on Minkowski spacetime, and experimentally studied a few related topics of cyclic plasticity of solid

materials, in particular the aluminum alloy Al-6061. The emphases were placed on the global analyses of internal symmetries in the constitutive models. The models analyzed are perfect elastoplasticity, bilinear elastoplasticity, isotropic-hardening, mixed-hardening, and kinematic hardening with two intrinsic times.

It is amazing that the inclusion of action groups on Minkowski spacetime in the frame of dynamic systems of plasticity is very natural. With the new concept of ``space'' and ``time'' in plasticity a core connection between the causality in Minkowski spacetime, the time arrow direction and the irreversibility of plasticity was built up. Internal symmetry groups classify the models of elastoplasticity and simultaneously fulfill the requirement of causality. The groups under study included Lorentz group, Poincaré group, causal group, and conformal group.

We further developed a generalized Hamiltonian dynamic-system-theoretic technique to construct elastoplastic models. Generalized Hamiltonians of constitutive models were formulated through brackets, for example, a perfect elastoplastic model through the Lie-Poisson bracket and a non-normality flow model through the Poisson bracket. It is found that the yield function just plays a role of the Hamiltonian function, and the plastic potential can be used to determine the non-canonical metric.

The axial-torsional test equipment MTS809 of the NTU College of Engineering was used to study the cyclic and ratchetting behavior of solid bar and tubular specimens of Al-6061. The ratchetting effect was observed in various loading conditions, in particular, in hoop strain under cyclic axial-torsional loading[1].

\vspace{-0.5cm}

\section{計劃緣由與目的}

\vspace{-0.5cm}

我們一直在思索什麼是固態系統宏觀力學性質的本質？特別是固體材料為什麼有彈塑性這樣的性質？為什麼個別的材料又性質殊異難以一爐冶之？它們的共性何在？特殊處又在那裡？可有什麼分類法則可以調和其共性又務實而不失其特異？答案就在怎麼建立它們的層級組織架構。經由多年的研究，輪廓已漸趨明朗，這個本質應該就是一種真善美的對稱性『滿足因果律的時空結構，有界耗散的狀態空間』。

彈塑性模式是一種極為複雜的非線性微分動態系統，兼具可逆機制與不可逆機制，其中可逆機制經常存在，而不可逆機制並不是經常存在。

在以前的研究中我們已深刻體會

彈塑性作為微分動態系統之研究的重要性，並得出一些重要結果。

根據我們的研究，彈塑性動態系統蘊涵非常豐富的動態行為 [2,3]。

在我們對彈性完全塑性模式及雙線性彈塑性模式，做過深入

研究分析後，發現以上兩種模式的響應空間竟然內稟 Lorentz 群、Poincaré 群及流形的結構。

這些關於彈塑性微分動態系統、耗散動態系統、

閔氏時空、Lorentz 群及 Poincaré 群的探討具有非凡之意義，有可能是目前最具有潛力並結合近代數學物理架構可深入探討的研究方向。

譬如，閔氏時空及 Lorentz 群是相對論及近代相對性場論中最重要的架構。

若從現象學之角度推估，凡涉及不可逆

現象層次描述的領域，可能都有閔氏這種時空不可分之架構存在，並也應當內稟存有時間之矢。

事實上，Zeeman 早在 1964 年就已證明在閔氏時空中存有因果律之關係，並論證變換群就是 Lorentz 群。應用閔氏時空群理論可以深刻地描述彈塑性系統的本質，使其在表達形式上展現完美的內部對稱性。

有理由相信彈塑性系統的閔氏時空具有本質性的作用，並和不可逆性熱力學理論有密切之關係。

組成律可以在能的層次研究。如 Lagrange 及 Hamilton 力學即需表明體系中 Lagrangian 或 Hamiltonian 的組成關係，正確的推導出力學體系的運動方程式。

我們也曾從泛函熱力學的觀點由 Helmholtz 及

Gibbs 自由能泛函的構造，輔以熱力學的定律作為設基部分，推導出應力、應變、熵、熱流、溫度梯度等的響應算子，並建構耗散的泛函。

亦曾探討自由能及耗散的位勢性質及其狀態變量的表達式 [4-6]。

在分析力學的領域中，Lagrange 及 Hamilton 力學的要點是給定一個刻劃系統的構形空間及 Lagrange 或 Hamilton 函數，力學系統的求解歸結為在相應的座標領域中求

Lagrange 方程或 Hamilton 正則方程的初值問題解。近幾年來，已將上述力學方法納入辛幾何的結構中，並推廣至無限自由度的連續介質力學系統，但在強非線性的彈塑性系統，類似 Lagrange 或 Hamilton 的構造方法則尚未發展。根據本報告[1]的初步推導，對彈性完全塑性模式可以建立 Lagrange 泛函，並推出正確的 Euler-Lagrange 方程。

材料微元作為一系統，其材料性質有演化，顯然是動態系統。所謂動態並不是指涉慣性力，而是表示演化。主導演化的參數是 ``時間'' 與/或 ``類時間'' (如塑性應變當量 $\bar{\epsilon}^p$ 或 $\bar{e}^p$ 或耗散 L 或熵)，所以其狀態方程顯然是以微分動態系統來描述。因此可引入系統理論、動態系統理論、微分動態系統理論，並對其做適當修正以適合彈塑性這種高度複雜的系統。修正的方向主要是彈塑性材料具有 ``互補三元'' 的機制以及 ``誰是主導演化的參數'' 問題。放在動態系統的框架來看，下述目標中的 (A)，(B)，(C) 及 (D) 等重要課題的研究可以大為深化。

本研究計劃定位在材料微元及微結構，識別其性質並研究其動態性能。為更精確地描述材料的力學性能逐步探討

- (A) 彈塑性材料的動態系統分析：
 - (1) 彈性完全塑性模式的動態分析；
 - (2) 雙線性彈塑模式的動態分析；
 - (3) 等向硬化彈塑模式的動態分析；
 - (4) 混合硬軟化模式的動態分析；
- (B) 循環彈塑性的探討：
 - (1) 雙內時走動硬化模式；
 - (2) 單雙軸循環負載實驗。
- (C) 彈塑性系統的時空探討：
 - (1) 閔氏時空；
 - (2) Lorentz 群；
 - (3) Poincaré 群；
 - (4) 因果群
 - (5) 共形群。
- (D) 循環負載棘齒實驗：
 - (1) 單軸循環實驗； (2) 軸扭雙軸循環實驗。

\vspace{-0.5cm}
\section{研究方法}
\vspace{-0.5cm}

理論研究的方法採取

- (1) 公設法，
- (2) 非線性動態系統分析方法，
- (3) Lyapunov 直接穩定性分析方法。

本計劃進行的實驗包括

- (1) 單軸非對稱循環應力實驗，
- (2) 單軸對稱循環應力實驗，
- (3) 單軸張應力循環應力實驗，
- (4) 軸扭應力及應變混合控制實驗，
- (5) 環向應變在循環負載的棘齒行為實驗。

研究過的模式包括

- (1) 彈性完全塑性模式，
- (2) 雙線性彈塑模式，
- (3) 等向硬化彈塑模式的動態分析，
- (4) 混合硬化模式，
- (5) 雙內時走動硬化模式，
- (6) 斜交彈塑模式，
- (7) 耗散動態系統。

相關的計算公式亦製備成軟體程式，作出大量數值的分析成果。

為驗證理論的適用性本計劃亦進行有關的

實驗，特別以鋁合金 6061 作為實驗研究對象[1]。

\vspace{-0.5cm}
\section{結論與討論}
\vspace{-0.5cm}

根據理論分析、數值模擬及實驗之結果[1]，本研究之結論如下：

\renewcommand{\theenumi}{\Roman{enumi}}
\begin{enumerate}
\item

彈性完全塑性模式內稟閔氏時空結構，

作用群是 Lorentz 群。

利用 Lorentz 群的性質，發展保持一致性的數值算法，用在固體力學的初邊值問題計算上精度非常高。

\item

提出塑性的兩個基本原理：(1) 閔氏時空未來截錐的因果律，(2) 可達有界狀態空間的可控性與保守或耗散性。並由以上兩個基本原理導出塑性組成模式。

\item

考慮 Bauschinger 效應 的 Prager 規則，彈性完全塑性模式推廣為雙線性彈塑模式，則閔氏時空的作用群由 Lorentz 群推廣為 Poincaré 群。

我們提出雙線性彈塑性模式的兩相兩階段的線性表示。

\item

彈塑性模式會非常自然地引入不可逆變數（或不可逆測度，或材料時間，或系統時間，或塑性應變當量 ϵ ，或 γ ，或 ϵ_0 ，或 γ ，或 λ ，或 X^0 ；其同胚關係見報告 [1]），這正是有別於簡單材料之所在。事實上，其扮演塑性模式之精髓，並主控塑性材料演化之進程。所以無論是何種表示，求解不可逆變數成為瞭解材料塑性響應之最關鍵。對於常用的混合硬軟化模式，本報告 [1] 推導出不可逆變數 γ 的非線性 Volterra 積分方程。對直線應變控制路徑，可以求出 γ 的正確解，並發展保持一致性的應力響應數值算法，可用在工程上的計算。指出常用的彈性預估徑向回復法無法給出正確的應力方向，需要多次迭代才能收斂到降伏面上。本方法保證應力點一定自動落在降伏面上，根本不要迭代。證明在正規化主動應力空間，直線應變控制路徑的應力響應存在有漸進穩定不動點，且此應力響應均發生在二維子空間（(2+1) 維閔氏時空）內，只需用兩個座標來描述，所以計算量更節省。

\item

將閔氏時空結構推廣到混合硬軟化模式，證明出作用群是局部的 Poincaré 群。因為有等向硬軟化的作用，在此時空結構是局部平坦的，事實上是一個膨漲的時空結構。主動應力及塑性應變當量的直積空間是一個 Robertson-Walker 時空，與主動增廣應力空間共形。

\item

彈性完全塑性模式的時空點在塑性狀態時是落在零錐 (null cone) 上，本報告 [1] 將此模式推廣至整個時空，允許塑性狀態時的時空點落在零錐內，零錐上或零錐外，形成一個等向硬軟化模式，對周期控制路徑可以求出正確解。但微分方程理論表明增廣狀態方程 $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\mathbf{X})$ ，當 $\mathbf{A}$ 是一個周期函數時，會有周期解，因此嚴重違反塑性不可逆性。經過深入分析，我們發現降伏及加應變這兩個條件（塑性的充分必要條件）會把周期解完全排除掉，因此不合理的現象並不存在。

\item

利用 Poincaré 群的變換性質，本報告 [1] 推導出含有兩個內稟時間的走動硬化彈塑性模式。因此塑性機制除了一個總開關外，還有一個局部開關。以前提出的走動硬化模式只有一個塑性應變當量，我們在理論研究上發現在閔氏時空 Poincaré 群的架構下存在兩個內稟時間是極自然的結論，因此統合以前的走動硬化模式，並加以推廣。

\item

根據我們的研究，微分方程組 $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\mathbf{X})$ ， $\mathbf{A} \in \mathfrak{so}(n,1)$ ， $\mathbf{X} \in \mathbb{M}^{n+1}$ ，對刻劃塑性的不可逆行為非常重要。本報告 [1] 初步提出四種非線性的推廣：

(1) 哈密爾頓架構：引進非線性向量勢，

利用 Euler-Lagrange 方程導出非線性哈密爾頓方程。

(2) 廣義哈密爾頓架構：在 $\mathbb{R}^n$ 空間直接將塑性方程組寫成廣義哈密爾頓方程，度量矩陣 $\mathbf{J}$ 是非正則的，因此得出 Lie-Poisson 括號或 Poisson 括號，作為耗散動態系統的流場。在此，降伏函數正是廣義哈密爾頓系統的哈密爾頓函數。

(3) 導出非線性 Lorentzian 系統的一般型式，並證出此系統是 Lorentzian 不變的。

(4) Lorentzian-Hamiltonian 架構：在 $\mathbb{M}^{2n+2}$ 空間引進正則的 Lorentzian-symplectic 度量矩陣 $\mathbf{\Gamma}$ ，得出非線性 Lorentzian-Hamiltonian 系統的一般型式，並證出此系統是 Lorentzian-symplectic 不變的。

\item

棘齒行為是循環負載下（無論應力或應變或混合控制），隨著循環圈數增加而應變逐漸累積的一種現象。對循環失穩破壞的瞭解非常重要。

我們發現除了一般文獻所描述的單軸非對稱循環應力會發生棘齒行為外；

即使對稱循環應力，若加大

應力振幅，由於殘餘應變的關係，也會出現棘齒現象（圖一）；若減小振幅則

是呈現飽和安定的現象。在軸扭應力

及應變混合控制實驗中，我們特別在環向貼上應變規，觀察環向應變在循環負載（固定軸向應力，扭向循環應變）下的

影響，結果顯示（圖二）環向應變和軸向應變有相同的行為反應，只是其值較小，且隨著軸向張應變的增加而產生環向壓應變，也就是說環向並未施加任何應力但是仍然有棘齒行為的發生；較值得注意的是環向應變與軸向應變的關係曲線呈現直線的反應。另外在軸扭應變控制比例及非比例循環負載實驗中，我們也發現環向應變的棘齒行為（圖三）。

\end{enumerate}

\vspace{-0.5cm}
\section{參考文獻}
\vspace{-0.4cm}

\begin{tabbing}

1. ~~~\=\parbox[t]{70mm}{

洪宏基，劉進賢，

蕭雅柏，彈塑性之閔氏時空群論與模式識別實驗，

國科會專題研究計劃成果報告，NSC 87-2211-E-002-035，1998。}\\[1ex]

2. \> \parbox[t]{70mm}{

洪宏基，劉進賢，

蕭雅柏，彈塑性動態系統分析實驗與識別（二），

國科會專題研究計劃成果報告，NSC 85-2211-E-002-001，1997。}\\[1ex]

3. \> \parbox[t]{70mm}{

洪宏基，劉進賢，

蕭雅柏，王智睿，陳俊佑，彈塑性動態系統分析實驗與識別，

國科會專題研究計劃成果報告，NSC 84-2211-E-002-026，1996。}\\[1ex]

4. \> \parbox[t]{70mm}{

洪宏基，劉進賢，

彈塑材料力熱耦合的穩定與破壞研究，

國科會專題研究計劃成果報告，NSC 83-0410-E-002-041，1994。

}\\[1ex]

5. \> \parbox[t]{70mm}{

洪宏基，劉進賢，鄧宏達，蕭雅柏，

構造鋼受循環負載與衝擊熱之反應，

國科會專題研究計劃成果報告，NSC 82-0410-E-002-104，1993。

}\\[1ex]

6. \> \parbox[t]{70mm}{

洪宏基，劉進賢，蕭雅柏，

彈塑性材料之應變率效應與溫度效應研究（二），

國防科技發展推行委員會學術合作協調小組

委託專題研究計劃成果報告，
NSC 82-0405-D-002-024，1995。

}\\[1ex]

\end{tabbing}

\vspace{-1.0cm}

\section{ 圖表}

\end{document}