行政院國家科學委員會專題研究計畫　成果報告

提升債券組合凸性之研究：考慮時間經過效果與殖利率非平行移動

計畫類別： 個別型計畫
計畫編號： NSC92-2416-H-002-029-
執行期間： 92 年 08 月 01 日至 93 年 07 月 31 日
執行單位： 國立臺灣大學財務金融學系暨研究所

計畫主持人： 李賢源

計畫參與人員： 萬怡灼

報告類型： 精簡報告

處理方式： 本計畫可公開查詢

中　華　民　國 93 年 12 月 6 日

提升債券組合凸性之研究：考慮時間經過效果與殖利率曲線非平行移動

On Improving Bond Portfolio's Convexity: Consider Time Passage Effect and Non-Parallel Shift of Yield Curve

計劃編號：NSC 92-2416-H-002-029

執行期間：92 年 8 月 1 日至 93 年 7 月 31 日

主持人：李賢源 國立台灣大學財務金融系(所)

一、 中英文摘要

存續期間與凸性是長久以來廣為應用的衡量殖利率變動對於債券價格變動的敏感度的指標。前者是一階線性的指標、後者則是二階非線性的衡量。由於凸性乃是二階的衡量指標，因此不論殖利率是升或是降，凸性永遠是使債券價格升值；也由於這個特性，顯示出債券的凸性是有價值的，因此長久以來即有致力於提升債券組合凸性的研究。

本研究首先在時間固定與殖利率係平行移動的假設下，設法重組債券組合藉以提高金額式凸性。由於 Christensen and Sorensen(1994)指出提升債券的凸性是要犧牲債券的時間價值，故本研究考慮時間經過的效果，亦即本研究接著在時間變動與殖利率係平行移動的假設下，再探討如何提高債券組合的金額式凸性，並且不損失債券的時間價值。

本研究最後考慮殖利率非平行移動的因素，探討在時間固定與時間經過狀況下，如何建構提高債券組合金額式凸性的『靜態模型』與『動態模型』。

Abstract：

Duration and Convexity have long been used as risk indices which measure the sensitivity of bond price change due to the change of bond's yield to maturity. Duration represents the first order risk index which is linear whereas convexity is the second order risk index which is non-linear. Since convexity is the second order risk index, the convexity has always the positive impact on bond price change in spite of the up or down change of bond's yield to maturity. Due to this positive impact of convexity on bond's price, convexity is worth picking up and there do exist a lot of researches doing how to pick up bond's convexity.

This project is to try to pick up the bond portfolio's convexity under the assumptions that time is fixed and yield curve is parallely shifted at the first stage. Due to the result done by Christensen and Sorensen(1994), however, picking up bond's convexity is at the cost of losing time value because of the time passage effect of interest bearing bond. It implies that the time passage effect cannot be ignored when picking up bond's convexity. In other words, this project has to study how to pick up bond portfolio's convexity without losing time value and conduct this research under the environment that time is changing and yield curve is parallely shifted.

Duration and Convexity are static risk

indices which means they must be measured under the assumption that yield curve is parallely shifted. Since yield curve is perhaps not parallely shifted, however, there is a need to explore how to picking up bond's convexity with the assumption that yield curve is not parallely shifted. Therefore, this project lastly constructs both static model and dynamic model to pick up bond portfolio's convexity by taking both time passage effect and non-parallel shift of yield curve into account.

Keywords：

Duration, Convexity, Yield to Maturity, Bond Portfolio, Time Passage Effect, Yield Curve Parallel Shift, Static Model, Dynamic Model

緣由與目的

從債券價值與殖利率的關係可知，金額式凸性(Dollar Convexity)較高的債券組合，當殖利率下降時，其價值上漲的幅度較高；當殖利率上升時，其價值下跌的幅度較低，所以在債券組合價值相等、一階風險(Duration Risk)相等的條件下，投資人應該慎選債券組合的內容，設法提高債券組合的金額式凸性，使債券組合在殖利率波動時會有較好的績效表現，此乃提升債券組合凸性(pick up convexity)的意義。

傳統提升債券組合凸性的理論，都是在時間固定與殖利率平行移動的設定下進行，透過重組債券組合來提高金額式凸性；但是，這種做法並非沒有缺點，顯而易見的，時間變動與殖利率非平行移動都應該會影響傳統提升債券組合凸性的結果。本研究即是要改善傳統提升債券組合凸性的理論，將其拓展至時間變動與殖利率非平行移動的設定，並比較本研究的結果與傳統提升債券組合凸性的結果。

影響債券組合價值之因素，除了殖利率以外，尚有時間因素也會影響債券組合的價值。如果只考慮殖利率因素、而忽略時間因素，即是傳統提升債券組合凸性的理論只考慮存續期間(Duration)與凸性(Convexity)對債券組合價值的影響、而忽略時間因素。但是，Christensen and Sorensen (1994)指出，債券的金額式凸性與時間價值為反向關係，亦即投資人若要提升金額式凸性則必須犧牲利息的時間價值，反之亦然。因此，傳統提升債券組合凸性的理論因為沒有考慮時間因素，所以可能犧牲的時間價值會高過於凸性提升所得到的好處。為了避免上述「債券的金額式凸性與時間價值不可兼得」的現象，本研究拓展傳統提升債券組合凸性的理論，考慮在時間經過下，以線性規劃模型建構債券組合，使債券組合金額式凸性極大化；亦即，藉由出售原本持有的債券組合，以自我融資不再額外投入半毛錢的方式，重新建構另一組與原債券組合價值相等、一階風險相等、時間價值相等的債券組合，且新建構之債券組合的金額式凸性比原債券組合者大，並達到極大化。

上述建構債券組合的方式已經針對既存文獻做了拓展與修正，但是上述的方法仍是在殖利率曲線平行移動的前提下運作。若要使上述建構債券組合的方式更符合實務應用，有必要進一步修正殖利率曲線平行移動的設定。由於殖利率曲線可能做一般性的變動，包括平行移動以及斜率改變移動，因此本研究對殖利率曲線做一般化的描述並假設其形狀不變，將這種殖利率曲線一般化的變動融入上述建構債券組合的模型裏，使得債券組合無論是在時間固定或是時間經過的狀況下，無論殖利

率曲線是平行移動或是斜率變動，只要殖利率曲線的形狀維持不變，都能提升債券組合的凸性。因此，本文的模型與做法可說是提升債券組合凸性最一般性的模型。

二、 結果與討論

1、 靜態模型--傳統模型、時間固定不變、殖利率曲線平行移動

假設目前持有 T 債券資產組合，T 組合內的債券種類與張數為已知條件，現在以自我融資的方式，出售 T 組合內的債券，利用此資金重新在債券市場選取 S 債券組合，而且不需額外的資金支出，使得：

(1) S 組合的總價值等於 T 組合，即自我融資；
(2) S 組合的總金額式存續期間等於 T 組合，即利率一階風險相等；
(3) S 組合的總金額式凸性會大於 T 組合；

目標式：極大化 S 組合的總金額式凸性

則 S 組合內所選取的各種債券張數必須符合底下的模型一。(見方程式附錄)

2、 動態模型--時間變動、殖利率曲線平行移動

假設目前持有 T 債券資產組合，T 組合內的債券種類與張數為已知條件，現在以自我融資的方式，出售 T 組合內的債券，利用此資金重新在債券市場選取 S 債券組合，而且不需額外的資金支出，使得：

(1) S 組合的總價值等於 T 組合，即自我融資；
(2) S 組合的總金額式存續期間等於 T 組合者，即利率一階風險相等；
(3) S 組合的總一階金額式時間經過效果等於 T 組合者，即時間價值相等；
(4) S 組合的總金額式凸性會大於 T 組合；

目標式：極大化 S 組合的總金額式凸性；

則 S 組合內所選取的各種債券張數必須符合下列的模型二。(見方程式附錄)

3、提升債券組合凸性的一般化模型

3.1 模型介紹

由於上述模型一與模型二建構債券組合的方式要求「殖利率曲線必須為平行移動」，這種假設太過強烈，也降低了上述兩模型的實用性。本節針對殖利率曲線可能做一般性的變動，包括平行移動以及斜率改變的移動。因此，本節對殖利率曲線做一般化的描述並假設其形狀不變，發展出另一套提升債券組合凸性的理論模型。

由於殖利率曲線會受到兩項因素的影響，一是時間點，另一是債券的到期期間（Time to maturity）。因此，將殖利率曲線定義為時間點（t）與到期期間（T）的函數：

$$YieldCurve = Y(t,T)$$

假設殖利率曲線可以用下面的數學式來表示：

$$Y(t,T) = a(t) + b(t) * F(T)$$

其中 a(t)與 b(t)是兩個與時間點 t 有關的參數，F(T)是用來描述殖利率曲線的形狀的任意函數。[1]

---

[1]由於 F(T)所定義的 T，是 Time to Maturity，因此可將其設定為一般在做 Yield Curve Fitting 時所使用的函數，如 Diament （1993）所建議的函數：$F(T) = \dfrac{a_1(T)^{a2} + a_3}{a_4(T)^{a2} + 1}$ 及 Nelson and Siegel（1987）所建議的函數：

假設現在市場上有三種債券，將到期期間最短的債券設為債券 A，其餘兩種分別設為債券 B 與債券 C，其到期日分別為 T_A、T_B 與 T_C。現在假設隨著時間變動，時間點從 t_0 變成了 t_1，而殖利率曲線也產生了變化。假設在殖利率曲線的變化過程中，只有 a(t)與 b(t)改變，描述形狀的 F(T)不變[2]。其中，調整 a(t)如同是做殖利率曲線的平行移動, 調整 b(t)則如同是做殖利率曲線斜率改變的移動。換言之，提升債券組合凸性的一般化模型，只能適用於殖利率曲線做平行移動(Level Change)或斜率改變的移動(Slope Change)，並不能涵蓋殖利率曲線做形狀改變的變動(Curvature Change)。所幸，根據既存文獻的實證研究，平行移動與斜率改變的移動，可以解釋實務上 90%以上殖利率曲線的變動情形，所以此處的一般化模型在實務應用上應可發揮效果。各種債券的殖利率的標記方式如下：

$$Y(t_0,T_A)\equiv Y_A$$
$$Y(t_1,T_A)\equiv Y_A^{'}$$
$$Y(t_0,T_B)\equiv Y_B$$
$$Y(t_1,T_B)\equiv Y_B^{'}$$
$$Y(t_0,T_C)\equiv Y_C$$
$$Y(t_1,T_C)\equiv Y_C^{'}$$
$$a(t_0)\equiv a$$
$$a(t_1)\equiv a^{'}$$
$$b(t_0)\equiv b$$
$$b(t_1)\equiv b^{'}$$

$F(T)=\theta_0+(\theta_1+\theta_2)\dfrac{1-e^{-\frac{T}{\lambda}}}{\frac{T}{\lambda}}+\theta_2 * e^{\frac{T}{\lambda}}$。因此，Y(t，T)=a(t)+b(t)*F(T)可說是描述殖利率曲線的一般化數學式。

[2]描述形狀的 F(T)不變亦表示如果殖利率曲線變動，則所有債券的殖利率會一起變動，不會有單獨變動的情形。

三種債券的殖利率差距的變化可以用數學式描述如下[3]：

(見方程式附錄的註一)

由此可知，無論債券的到期期間為多少，其與債券 A 的殖利率差距的變化比率固定為 1+ds，而其意義如同是斜率的變化比率。利用上式，可以求出三種債券殖利率的變化幅度的關係：

(見方程式附錄的註二)

由此可知，無論債券的到期期間為多少，殖利率的變化幅度都可以用債券 A 的殖利率的變化幅度 dY_A 及斜率變化率 dS 兩個因素來描述；即一般化的關係為：

$$Y_i^{'}-Y_i\equiv dY_i=dY_A+ds*(Y_i-Y_A)$$

由上式便能推導出提升債券組合金額式凸性的一般化模型，其中又依是否考慮時間因素而可分成「靜態模型」與「動態模型」，分別在下面兩小節敘述。

3.2、靜態模型--時間固定不變、殖利率曲線非平行移動

假設市場上有五種債券，分別是債券 A、債券 B、債券 C、債券 D 與債券 E，其中債券 A 為到期期間最短者。

假設目前持有 T 債券資產組合，其全部由債券 C 所組成，張數為 Nc，現在欲以

---

[3] 假設時間經過的天數 t_1-t_0，對債券的到期期間而言來說很小，小到可以忽略，因此在 t_1 時間點債券 i 的殖利率原本應該為 $[a^{'}+b^{'}*F(T_i-t_1+t_0)]$，而可以用 $[a^{'}+b^{'}*F(T_i)]$來代替。

自我融資的方式，出售 T 組合，並以此資金重新在市場選購由債券 A、債券 B、債券 D 與債券 E 所組成的 S 債券組合，如果欲使 S 組合的價值變動優於 T 組合的價值變動，並使變動差距最大，則可用下面的數學式來表示：

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & dV_A + dV_B + dV_D + dV_E - dV_C \\ S.T. \quad & V_A + V_B + V_D + V_E = V_C \\ & dV_A + dV_B + dV_D + dV_E - dV_C > 0 \end{aligned}$$

其中 dVi 表示債券 i 的價值變化，Vi 表示債券 i 的價值。

假設時間固定不變，則債券價格變動因殖利率改變的關係式如下[4]：

$$dV_i = -N_i * D_i^{\$} * dY_i + N_i * C_i^{\$} * (dY_i)^2$$

其中N_i為債券 i 的張數

將 $Y_i^{'} - Y_i \equiv dY_i = dY_A + ds * (Y_i - Y_A)$ 代入上式，則會變成：

(見方程式附錄的註三)

將上式代入 $dV_A + dV_B + dV_D + dV_E - dV_C$，則會變成

(見方程式附錄的註四)

傳統模型由於只考慮殖利率曲線平行移動，因此如同是將上式的 ds 設為 0，此時上式變成

(見方程式附錄的註五)

根據上式，若將「dY_A」項的係數調整成 0，而且將 $(dY_A)^2$ 項的係數調整成大於 0，則無論平行移動的幅度為何（即無論 dY_A 為多少），$dV_A + dV_B + dV_D + dV_E - dV_C$ 都能夠大於 0。這兩項限制式的含意等同：S 組合的總金額式存續期間等於 T 組合（利率一階風險相等），且 S 組合的總金額式凸性會大於 T 組合。如果再加上自我融資的概念，即 S 組合的總價值等於 T 組合的限制式，那麼結果便是傳統提升債券組合凸性的模型。

很明顯的，本小節的一般化模型除了考慮殖利率曲線平行移動的情況外，亦將殖利率曲線斜率改變的情況納入考慮，因此比傳統模型多了 ds 項，導致 $dV_A + dV_B + dV_D + dV_E - dV_C$ 的展開有五項式子，比傳統模型多了三項。仿效傳統模型提升債券組合凸性的做法，除了加入『「dY_A」項的係數等於 0、「$(dY_A)^2$」項的係數大於 0』這兩項限制式外，多加入『「ds」、「dY_A*ds」兩項的係數等於 0，且「ds^2」項的係數大於 0』這三項限制式，則可以確定：無論殖利率曲線平行移動的幅度為何、以及無論殖利率曲線斜率變動的幅度為何，$dV_A + dV_B + dV_D + dV_E - dV_C$ 都能夠大於 0；換言之，多加入這三項限制式以後，便可將提升債券組合凸性的理論，由原本只能涵蓋殖利率曲線平行移動的情形，擴展到殖利率曲線斜率亦能改變的情形，因此可以將傳統模型納為本小節一般化模型的一個特例。

推論至此，已知

$dV_A + dV_B + dV_D + dV_E - dV_C > 0$ 的條件，即是 $(dY_A)^2$ 與 ds^2 項的係數大於 0、而且 dY_A、ds、dY_A*ds 這三項的係數為 0。接著是找尋

[4] 此處所定義的金額式凸性

$$C^{\$} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(i-t)(i-t-1)\frac{CF_i}{(1+y)^{i-t+2}}$$

。

Max $dV_A + dV_B + dV_D + dV_E - dV_C$ 的條件？比較「$(dY_A)^2$」、「ds^2」兩項，可以發現由於「ds^2」項的係數，其中每個細項都比「$(dY_A)^2$」項多乘了（Yi-Y_A）^{2}，故在一般情況下，「ds^2」項的係數會遠小於「$(dY_A)^2$」項的係數，亦即「ds^2」項的係數是較不敏感的；換言之，使「$(dY_A)^2$」項的係數最大即可使 $dV_A + dV_B + dV_D + dV_E - dV_C$ 最大，即達到 Max $dV_A + dV_B + dV_D + dV_E - dV_C$ 的目的。[5]

綜合以上的推論，可得一般化模型提升債券組合金額式凸性的靜態模型(模型三)。(見方程式附錄)

3.3、動態模型--時間變動、殖利率曲線非平行移動

拓展 3.2 小節的靜態模型至動態模型，即同時考慮時間經過與殖利率變動的情況，則債券組合價值的變化如下：

$$dV_i = -N_i * D_i^{\$} * dY_i + N_i * C_i^{\$} * (dY_i)^2 + N_i * \Theta_i^{\$} * dt$$

N_iˆ×ÂŒĩ“I’£É

將 $Y_i' - Y_i \equiv dY_i = dY_A + ds * (Y_i - Y_A)$ 代入上式，並仿照 3.2 小節的靜態模型的推導過程，則可得一般化提升債券組合金額式凸性的動態模型(模型四)。(見方程式附錄)

三、 計劃成果自評

1、數值例子

本小節以我國公債市場上的資料，實際操作一般化模型與傳統模型，並模擬殖利率曲線的平行移動與斜率改變的移動，進行「出售原本持有的債券組合（假設為 T 債券組合），以自我融資不再額外投入半毛錢的方式，重新建構另一個債券組合（假設為 S 債券組合）」的操作策略的損益測試。[6]

假設持有的 T 債券資產組合如下：

債券組合T	90央債甲三	91央債甲四
張數	815.0916	124.5215

2、靜態模型實證結果--一般化模型 vs 傳統模型

根據持有的 T 債券組合、以及 2002 年 4 月 8 日仍然流通的央債 86 期以後的各年期央債，代入一般化模型與傳統模型中以線性規劃模型計算，選取的 S 債券組合分別為：

一般化模型的結果				
債券組合S	86央債甲二	88央債甲一	89央債甲二	90央債甲二
張數	75.7001	175.6041	50.3395	576.1860

[5]透過實證，可以證明此處推論成立。因為最大化「$(dY_A)^2$」項係數所選取的債券組合，與最大化「$(dY_A)^2$」項的係數加上「ds^2」項的係數所選取的債券組合，兩者完全相同。這表示「ds^2」項的係數是不敏感的。

[6] 下面模型選取的 S 債券組合，無論是靜態模型或動態模型，皆在債券張數不能為負值的限制下。

傳統模型的結果		
債券組合S	87央債甲二	90央債甲五
張數	382.0907	688.6983

本小節模擬的殖利率曲線變動，可分為「平行移動」、「斜率變動」、「同時有平行移動幅度與斜率變動」三種情況，用一般化模型中的數學式來表示，即為「ds＝0，各種的 dY_A」、「dY_A＝0，各種的 ds」及「各種的 dY_A，各種的 ds」。

經過損益測試，發現無論殖利率曲線的平行移動與斜率變動幅度為何，一般化模型所選取的結果一定可以產生利潤；但是，傳統模型所選取的結果，在斜率增加時會有損失、但斜率減少時會有收益。傳統模型所選取的組合之所以在斜率增加與減少時會有損失與收益，其理由是：傳統模型的 S 債券組合是以蝶型策略組成，集中在極長券與極短券，而 T 債券組合是以彈型策略組成，集中在中期券。當斜率變動時，長天期殖利率變動值會較中期券與短期券來得大，也就是說長天期債券的價值損益會超過中、短期債券，因此進行「出售 T 債券組合，以自我融資不再額外投入資金的方式，建構 S 債券組合」的策略，便會產生損益。如下圖所示：

（見數值例子圖形一）

3、動態模型實證結果--一般化模型 vs 傳統模型

根據持有的 T 債券組合、以及 2002 年 4 月 8 日仍然流通的央債 86 期以後的各年期央債，代入一般化模型與傳統模型中以線性規劃模型計算，選取的 S 債券組合分別為[7]：

一般化模型的結果				
債　券組合S	86央債甲二	88央債甲一	89央債甲二	90央債甲二
張數	75.7001	175.6041	50.3395	576.1860

傳統模型的結果			
債券組合	87央債甲二	89央債甲五	90央債甲五
張數	309.3301	105.2138	642.4798

經過損益測試，發現無論殖利率曲線平行移動與斜率變動幅度為何、無論時間經過的天數為何，一般化模型選取的結果一定可以產生利潤；但是傳統模型選取的結果，在斜率增加時，會有損失、但在斜率減少時，會有收益產生。傳統模型選取的結果，在斜率增加或減少時，會有損失或是收益的理由與靜態模型一樣，就不再贅述。動態模型損益分析之實證結果如下圖所示：

（見數值例子圖形二）

4、成果與貢獻

(1)在時間固定與殖利率曲線是平行移動的環境下，推導提升債券組合金額式凸性的『靜態模型一、二、三』，並且分別應用個別債券的殖利率、設定買入債券組合

[7] 其中一般化的動態模型在進行規劃求解以後，找不到能完全符合限制條件的解。茲以一般化的靜態模型的解來代替，因該解符合其他的限制條件，僅一階之金額式時間經過效果為 3889，些微大於 T 組合的 3860。

的殖利率等於賣出債券組合的殖利率、讓買入債券組合的殖利率內生產出，分別用數值例子代入這三個靜態模型，並比較其凸性的成效。

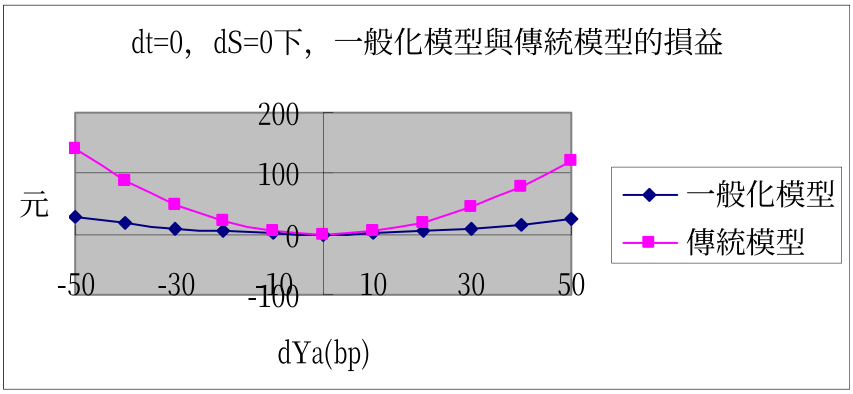
(2)在時間變動、但殖利率曲線是平行移動的環境下，重組債券組合藉以提高金額式凸性，並且重組債券組合提高金額式凸性時，避免『債券組合的金額式凸性與時間價值的相斥關係』。

(3)在殖利率曲線不是平行移動的環境下，推導提升債券組合金額式凸性的一般化模型之『靜態模型』與『動態模型』。

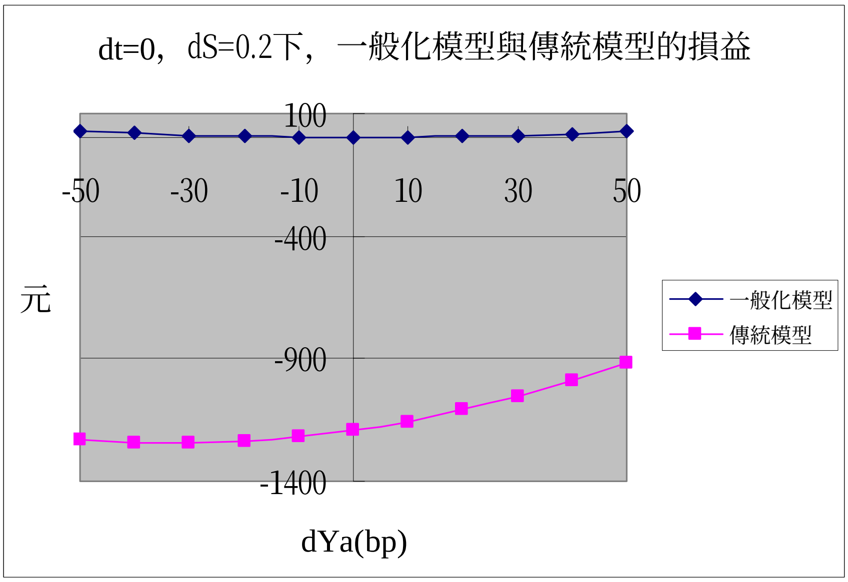
參考文獻

1. Christensen, P.O. and B.G. Sorensen〝Duration , Convexity ,and Time Value：Implications of Bond Portfolio Management〞*Journal of Portfolio Management* , winter 1994.
2. Douglas, L.G. 〝Bond Risk Analysis：A Guide to Duration and Convexity〞New York Institute of Finance, 1990.
3. Grantier, B.J. 〝Convexity and Bond Performance：The Benter The Better〞*Financial Analysts Journal*, Vol.44 1988.
4. Heiko Leschhorn，Managing Yield-Curve Risk with Combination Hedges，Financial Analysts Journal，2001 May&June.

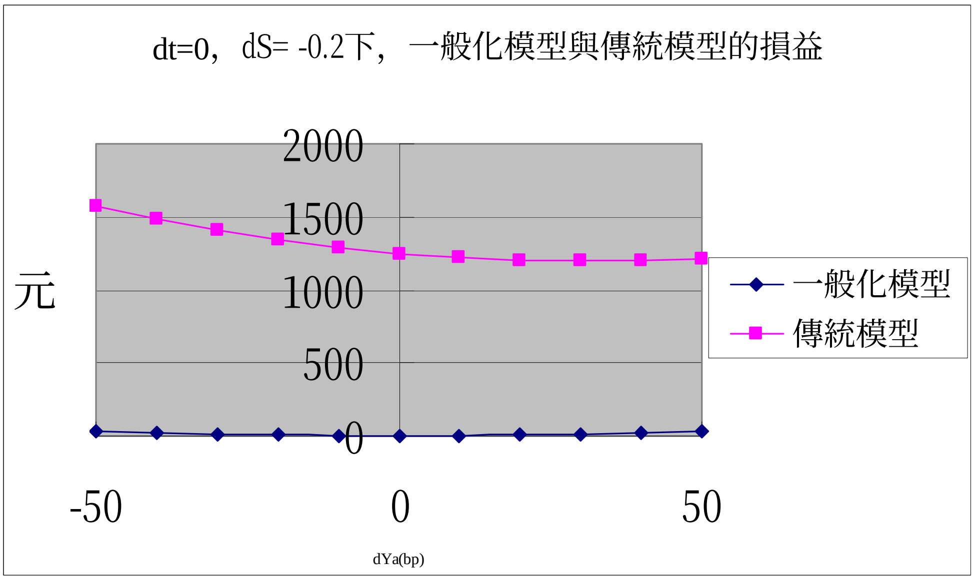
數值例子圖形一



dt=0，dS=0下，一般化模型與傳統模型的損益
200
100
0
-100
元
-50
-30
-10
10
30
50
dYa(bp)
一般化模型
傳統模型

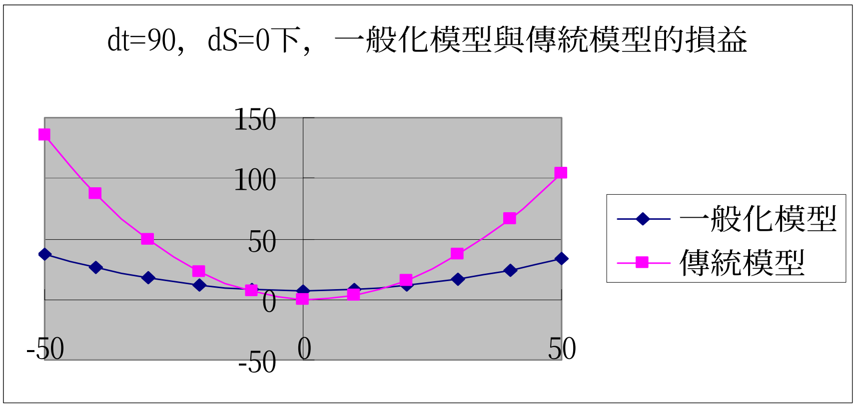


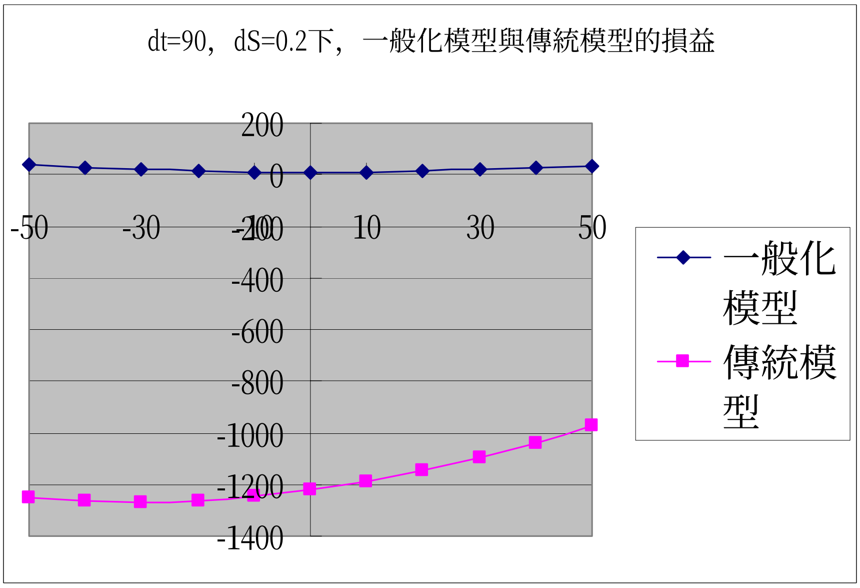
dt=0，dS=0.2下，一般化模型與傳統模型的損益
100
-400
-900
-1400
元
-50
-30
-10
10
30
50
dYa(bp)
一般化模型
傳統模型

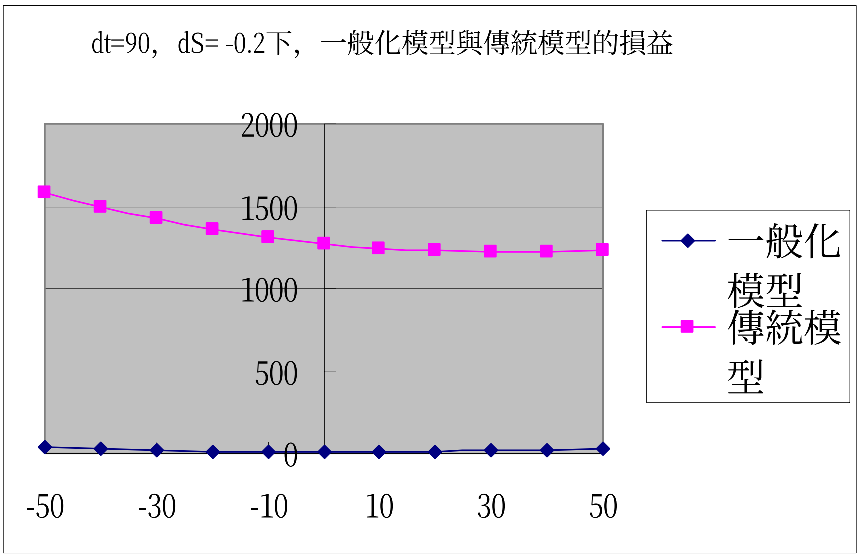


dt=0，dS= -0.2下，一般化模型與傳統模型的損益
2000
1500
1000
500
0
元
-50
0
50
dYa(bp)
一般化模型
傳統模型

數值例子圖形二


dt=90, dS=0下, 一般化模型與傳統模型的損益
150
100
50
0
-50
-50
0
50
一般化模型
傳統模型


dt=90, dS=0.2下, 一般化模型與傳統模型的損益
200
0
-400
-600
-800
-1000
-1200
-1400
-50
-30
10
30
50
一般化模型
傳統模型


dt=90, dS= -0.2下, 一般化模型與傳統模型的損益
2000
1500
1000
500
0
-50
-30
-10
10
30
50
一般化模型
傳統模型

模型一：傳統模型--時間固定不變、殖利率曲線平行移動

$$Max \sum_{i=1}^{k} N_i^S C_i^\$$$

$$S.T. \sum_{i=1}^{k} N_i^S P_i = \sum_{i=1}^{k} N_i^T P_i$$

$$\sum_{i=1}^{k} N_i^S D_i^\$ = \sum_{i=1}^{k} N_i^T D_i^\$$$

$$\sum_{i=1}^{k} N_i^S C_i^\$ > \sum_{i=1}^{k} N_i^T C_i^\$$$

模型中的 N_i^S，表示 S 組合內各債券的張數

模型中的 N_i^T，表示 T 組合內各債券的張數

模型中的 $D_i^\$$，表示第 i 種債券的金額式存續期間

模型中的 $C_i^\$$，表示第 i 種債券的金額式凸性

模型二：動態模型--時間變動、殖利率曲線平行移動

$$Max \sum_{i=1}^{k} N_i^S C_i^\$$$

$$S.T. \sum_{i=1}^{k} N_i^S P_i = \sum_{i=1}^{k} N_i^T P_i$$

$$\sum_{i=1}^{k} N_i^S D_i^\$ = \sum_{i=1}^{k} N_i^T D_i^\$$$

$$\sum_{i=1}^{k} N_i^S \Theta_i^\$ = \sum_{i=1}^{k} N_i^T \Theta_i^\$$$

$$\sum_{i=1}^{k} N_i^S C_i^\$ > \sum_{i=1}^{k} N_i^T C_i^\$$$

模型中的 N_i^S、N_i^T、$D_i^\$$、$C_i^\$$ 所代表的意義如同模型一

模型中的 $\Theta_i^\$$ 表示第 i 種債券的一階金額式時間經過效果

註一：

$$\frac{Y_B^{'}-Y_A^{'}}{Y_B-Y_A}=\frac{[a^{'}+b^{'}*F(T_B)]-[a^{'}+b^{'}*F(T_A)]}{[a+b*F(T_B)]-[a+b*F(T_A)]}=\frac{b^{'}[F(T_B)-F(T_A)]}{b[F(T_B)-F(T_A)]}=\frac{b^{'}}{b}\equiv 1+ds$$

$$\frac{Y_C^{'}-Y_A^{'}}{Y_C-Y_A}=\frac{[a^{'}+b^{'}*F(T_C)]-[a^{'}+b^{'}*F(T_A)]}{[a+b*F(T_C)]-[a+b*F(T_A)]}=\frac{b^{'}[F(T_C)-F(T_A)]}{b[F(T_C)-F(T_A)]}=\frac{b^{'}}{b}\equiv 1+ds$$

註二：

$$Y_A^{'}-Y_A\equiv dY_A$$

$$Y_B^{'}-Y_A^{'}=(1+ds)*(Y_B-Y_A)=(Y_B-Y_A)+ds*(Y_B-Y_A)$$

$$Y_B^{'}-Y_B\equiv dY_B=(Y_A^{'}-Y_A)+ds*(Y_B-Y_A)=dY_A+ds*(Y_B-Y_A)$$

$$Y_C^{'}-Y_C\equiv dY_C=dY_A+ds*(Y_C-Y_A)$$

註三：

$$\begin{aligned}dV_i&=-N_i*D_i^{\$}*[dY_A+ds*(Y_i-Y_A)]+N_i*C_i^{\$}*[dY_A+ds*(Y_i-Y_A)]^2\\&=-N_i*D_i^{\$}*[dY_A+ds*(Y_i-Y_A)]+N_i*C_i^{\$}*[(dY_A)^2+2*dY_A*ds*(Y_i-Y_A)+(Y_i-Y_A)^2*(ds)^2]\end{aligned}$$

註四：

$$\begin{aligned}&dV_A+dV_B+dV_D+dV_E-dV_C\\&=[-N_A*D_A^{\$}-N_B*D_B^{\$}-N_D*D_D^{\$}-N_E*D_E^{\$}+N_C*D_C^{\$}]*dY_A+\\&[-N_A*D_A^{\$}*(Y_A-Y_A)-N_B*D_B^{\$}*(Y_B-Y_A)-N_D*D_D^{\$}*(Y_D-Y_A)-N_E*D_E^{\$}*(Y_E-Y_A)+N_C*D_C^{\$}*(Y_C-Y_A)]*ds+\\&[N_A*C_A^{\$}+N_B*C_B^{\$}+N_D*C_D^{\$}+N_E*C_E^{\$}-N_C*C_C^{\$}]*(dY_A)^2+\\&[N_A*C_A^{\$}*(Y_A-Y_A)^2+N_B*C_B^{\$}*(Y_B-Y_A)^2+N_D*C_D^{\$}*(Y_D-Y_A)^2+N_E*C_E^{\$}*(Y_E-Y_A)^2-N_C*C_C^{\$}*(Y_C-Y_A)^2]*(ds)^2+\\&2[N_A*C_A^{\$}*(Y_A-Y_A)+N_B*C_B^{\$}*(Y_B-Y_A)+N_D*C_D^{\$}*(Y_D-Y_A)+N_E*C_E^{\$}*(Y_E-Y_A)-N_C*C_C^{\$}*(Y_C-Y_A)]*(dY_A*ds)\end{aligned}$$

註五：

$$\begin{aligned}&dV_A+dV_B+dV_D+dV_E-dV_C\\&=[-N_A*D_A^{\$}-N_B*D_B^{\$}-N_D*D_D^{\$}-N_E*D_E^{\$}+N_C*D_C^{\$}]*dY_A+\\&[N_A*C_A^{\$}+N_B*C_B^{\$}+N_D*C_D^{\$}+N_E*C_E^{\$}-N_C*C_C^{\$}]*(dY_A)^2\end{aligned}$$

模型三：靜態模型--時間固定不變、殖利率曲線非平行移動

$$Max \sum_{i=1}^{k} N_i^S C_i^{\$}$$

$$S.T. \sum_{i=1}^{k} N_i^S P_i = \sum_{i=1}^{k} N_i^T P_i$$

$$\sum_{i=1}^{k} N_i^S D_i^{\$} = \sum_{i=1}^{k} N_i^T D_i^{\$}$$

$$\sum_{i=1}^{k} N_i^S C_i^{\$} > \sum_{i=1}^{k} N_i^T C_i^{\$}$$

$$\sum_{i=1}^{k} N_i^S D_i^{\$}(Y_i - Y_A) = \sum_{i=1}^{k} N_i^T D_i^{\$}(Y_i - Y_A)$$

$$\sum_{i=1}^{k} N_i^S C_i^{\$}(Y_i - Y_A) = \sum_{i=1}^{k} N_i^T C_i^{\$}(Y_i - Y_A)$$

$$\sum_{i=1}^{k} N_i^S C_i^{\$}(Y_i - Y_A)^2 > \sum_{i=1}^{k} N_i^T C_i^{\$}(Y_i - Y_A)^2$$

模型中的 N_i^S、 N_i^T、 $D_i^{\$}$、 $C_i^{\$}$ 所代表的意義如同模型一、模型二

模型中的 Y_i 代表債券 i 的殖利率，Y_A 表示組合中，到期期間最短的債券的 YTM。

模型四：動態模型--時間變動、殖利率曲線非平行移動

$$Max \sum_{i=1}^{k} N_i^S C_i^\$$$

$$S.T. \sum_{i=1}^{k} N_i^S P_i = \sum_{i=1}^{k} N_i^T P_i$$

$$\sum_{i=1}^{k} N_i^S D_i^\$ = \sum_{i=1}^{k} N_i^T D_i^\$$$

$$\sum_{i=1}^{k} N_i^S \Theta_i^\$ = \sum_{i=1}^{k} N_i^T \Theta_i^\$$$

$$\sum_{i=1}^{k} N_i^S C_i^\$ > \sum_{i=1}^{k} N_i^T C_i^\$$$

$$\sum_{i=1}^{k} N_i^S D_i^\$(Y_i - Y_A) = \sum_{i=1}^{k} N_i^T D_i^\$(Y_i - Y_A)$$

$$\sum_{i=1}^{k} N_i^S C_i^\$(Y_i - Y_A) = \sum_{i=1}^{k} N_i^T C_i^\$(Y_i - Y_A)$$

$$\sum_{i=1}^{k} N_i^S C_i^\$(Y_i - Y_A)^2 > \sum_{i=1}^{k} N_i^T C_i^\$(Y_i - Y_A)^2$$

模型中的 N_i^S、N_i^T、$D_i^\$$、$C_i^\$$、$\Theta_i^\$$、Y_i 所代表的意義如同模型一、二、三模型中的 Y_A 表示組合中，到期期間最短的債券的 YTM。