

中國笛的音準、音域與音色：笛膜的 Duffing 振子模型

蔡振家 (Chen-Gia Tsai)^[1]、Wolfgang Auhagen^[2]

^[1] 國立臺灣大學醫學院耳鼻喉科博士後研究

^[2] Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Institut für Musikwissenschaft, Germany

摘要

在全世界的笛類樂器中，只有中國笛與韓國的大笊貼有笛膜，這類笛子可以稱為「膜笛」。在笛孔上貼膜的發明，可以追溯到唐代的劉系，這個發明豐富了笛子的音色，導致了演奏手法與笛樂審美的演化。笛膜的非線性振動賦予笛音明亮的音色，此音色源自於 4–7 kHz 的泛音，此外，笛膜會讓音色變得不均勻，隨音高而變化。依笛音頻譜特徵的不同，本文中將笛子的音域分為五個音區。笛膜的鬆緊與皺紋對膜笛的音準、音域、音色有重大的影響，從物理學的觀點來看，這些現象都可以由笛膜的 Duffing 振子模型來解釋。音色不均勻是膜笛與生俱來的特質，雖然許多笛子音樂家並不喜歡笛音不均勻的明亮度，但這個特性在某些笛曲中被妥善運用，製造出有趣的空間效果。本文將從東、西方音樂美典的角度，探討數十年來針對笛子所作的樂器改良。

關鍵詞

膜笛：在笛孔上貼膜的笛類樂器，如中國笛與韓國的大笊。

Duffing 振子：簡諧振動系統的回復力中添加了一個立方項，這種非線性振動系統稱為 Duffing 振子。

音色：據以區分兩個同音高、同音量之聲音的性質，如頻譜 (spectrum) 與起音 (attack) 等特徵。

樂器演化：樂器隨著音樂文化的發展，在型制上與演奏技法上的逐漸變化。

Intonation, Tone Range and Timbre of the Chinese Flute (*Dizi*): a Duffing Oscillator Model of the *Dizi* Membrane

Abstract

Among the flute-type instruments all over the world, only the Chinese flute (*dizi*) and the Korean *taegum* have a membrane. Such flutes could be termed ‘membrane flutes’. The invention of membrane-sealing could be attributed to Liu Xi in the Tang dynasty. This invention enriched *dizi* timbre, leading to evolution of performance techniques and *dizi* music aesthetics. Nonlinear vibration of the *dizi* membrane endows *dizi* tones with a bright quality, which is due to harmonics in the frequency range of 4–7 kHz. Furthermore, the membrane results in an inhomogeneity of timbre. According to different spectral features, the tone range of the *dizi* can be subdivided into five registers. Tension and wrinkles of the membrane have dramatic impacts on *dizi* timbre, intonation, and tone range. From a viewpoint of physics, these phenomena can be explained by a Duffing model of the membrane. Timbre inhomogeneity is an inherent property of membrane flutes. Although the majority of *dizi* musicians dislike brightness inhomogeneity of the *dizi*, it is appropriately exploited in several solo pieces to introduce interesting ‘spatial effects’ into *dizi* music. Attempts to improve the *dizi* in the past decades are discussed in the light of Western/Eastern music aesthetics.

Keywords

Membrane flutes, Duffing oscillator, timbre, evolution of musical instruments

一、前言

笛類樂器是人類最早發明的旋律性樂器之一，在歐洲 Slovenia 所發現的一根骨笛，被鑑定為是 35,000 至 50,000 年前的人類遺物 (Kunqej and Turk 2000)。雖然世界上大部份的民族都使用笛類樂器，但其型制與演奏方式卻有些差異，值得作深入的比較研究。以中國笛而言，它的最大特色就是貼有笛膜，因而具有與眾不同的音色。在古今中外的笛類樂器中，似乎只有中國笛與韓國的大琴 (taegum，一種低音大笛) 貼有笛膜，這類笛子可以稱為膜笛 (membrane flute)。

笛膜的發明可以追溯到唐代，北宋陳暘的《樂書》記載，唐人劉系首創在笛孔上貼笛膜「以助其聲」，稱為七星管。一片小小的笛膜，看起來似乎微不足道，但實際上卻使笛子的物理性能產生了根本的變化。笛膜的發明不但豐富了笛子的音色，導致演奏手法與笛樂審美的長足發展，笛子更因此在戲曲的興起過程中扮演著重要的角色。由於無笛膜的笛子僅能發出柔和的聲音，故在戲曲演出中容易被歌聲與鑼鼓聲所遮蔽，效果不彰，反之，笛膜可以產生豐富的高頻泛音 (harmonic)，因此膜笛的聲音具有強大的穿透力。所謂的「笛膜音」，其特色就是在 4–7 kHz 的頻率範圍有較強的泛音，這個頻率範圍可以視為膜笛的專屬頻道 (channel)，其它的樂器聲或歌聲在此頻道的強度都遠比膜笛弱，因此，膜笛的脆亮音色能夠突破各種聲音的重重包圍，在戲曲演出時可將曲調清楚地傳送到演員、樂師、觀眾的耳中，非常適合當作領奏樂器。崑劇的演出有賴主奏笛子的強大穿透力，崑劇的興盛則促使了膜笛的普及，無笛膜的笛子乃漸漸遭到淘汰。明清戲曲主奏笛子的語法與裝飾音，對於南、北派笛樂風格有著深遠的影響。諸如「崑劇、紹興亂彈 vs 曲笛」、「梆子戲 vs 梆笛」的共同演化 (co-evolution) 痕跡，至今依然歷歷可見。

除了穿透力強之外，膜笛還有一些重要的特性，如：音色隨音高而變化、音準與音域隨著笛膜的鬆緊與皺紋而變化，這些特性雖然廣為笛樂演奏家所熟知，但有關笛膜的科學研究卻十分有限。筆者的博士論文《中國膜笛的物理與笛音的感知》(Tsai 2004a) 是第一篇探討笛膜與笛音的科學論文，該文分為兩大部份，前半部以物理學理論與實驗方法來探討笛膜的振動與笛子的發聲原理，後半部則從心理聲學 (psychoacoustics) 與認知科學的角度來探討笛子的音色。本文為筆者博士論文的中文精簡版本，由於篇幅所限，重點將放在笛膜的振動與笛子的發聲機制，至於笛音的音色分析與認知，未來將另外撰文探討。以下將先介紹笛膜所造成的幾個樂器特性，然後提出一個笛膜的物理模型以解釋這些特性，最後將舉出一些笛曲的例子，討論現代笛樂中如何發揚膜笛的音色特性。

二、膜笛的特性

有許多人以為，中國笛的脆亮笛音是來自於它的材質：竹子，這其實是個錯誤的觀念，中國笛的特殊音色完全是笛膜所造成的，以下舉兩個簡單的例子以為佐證。德國柏林市有一家由日本人開設的樂器行，裡面販售貼有笛膜的金屬製長笛，這種新型樂器的音色近似於中國笛而非西洋長笛。反之，由物理學家丁西林所發明的新笛（又稱律笛）雖然是竹子所製，但因為沒有笛膜，所以音色近似於長笛而非中國笛。

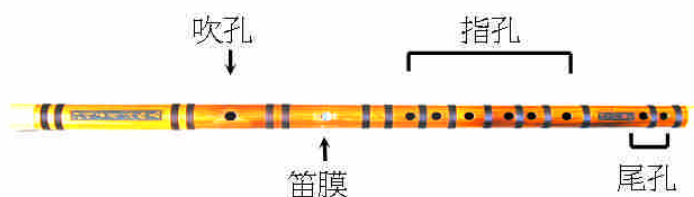


圖1：笛子的型制

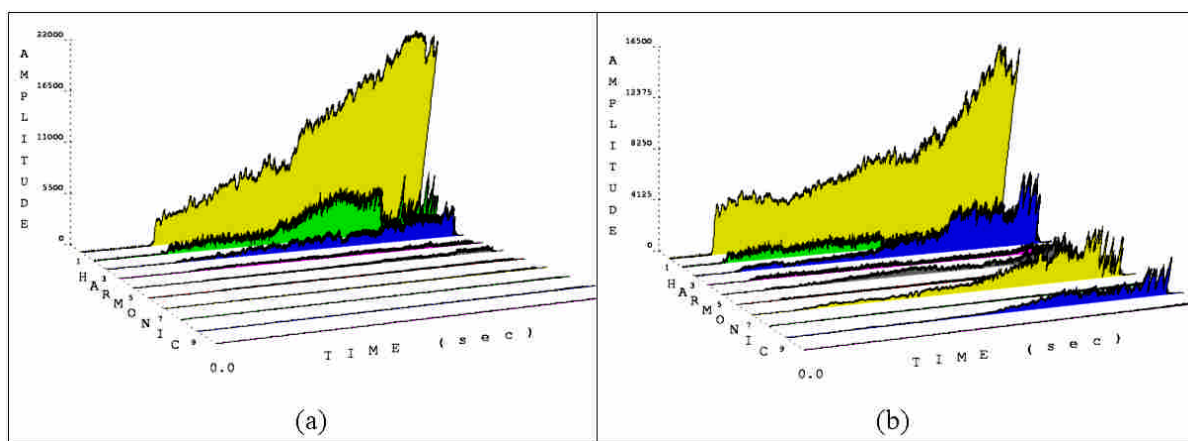


圖 2：¹兩個漸強笛音的泛音列強度變化圖，由 D 調曲笛以 ●○○○○ 指法吹奏。(a)笛膜無振動情形下的笛音（笛膜被手掌蓋住），此漸強音的音高從 733 Hz 逐漸增加到 751 Hz，力度的增強僅反映在最低三個泛音的強度變化。(b)笛膜自由振動情形下的笛音，此漸強音的音高從 725 Hz 逐漸增加到 735 Hz。力度增強後，高頻泛音也顯著增強。

笛膜可以帶來什麼樣的樂器特性？這可以用一個簡單的實驗來證明。筆者曾經用同一支笛子，以同樣的指法 ●○○○○ 連續吹奏兩個漸強音，在吹第一個音時，筆者以手掌蓋住笛膜，使其無法振動，在吹第二個音時，將手掌從笛膜上移開，讓它自由振動。圖 2 比較了這兩個笛音的泛音列強度變化。從圖 2a 可以看到，在笛膜不振動的情況下，笛音中幾乎沒有第五泛音以上的高頻泛音，即使是將力度增強，高頻泛音也不會出現。反之，在笛膜振動的情況下，高頻泛音會隨著力度的增強而出現，尤其以第七與第九泛音最為突出（圖 2b）。

笛膜除了可以增強高頻泛音，它的另一個效應是會降低音高。圖 2 所示的漸強笛音，在無笛膜振動的情形下，音高從剛開始的 733 Hz 增加到 751 Hz。在有笛膜振動的情形下，音高則從 725 Hz 增加到 735 Hz。一般而言，從無笛膜振動到有笛膜振動，大部份的笛音可以下降 20–60 音分 (cent)，笛膜貼得越鬆，音高的下降就越明顯，不過，有少數幾個音的音高不受笛

¹ 此圖以 Beauchamp 的 spectral analysis and display package SNDAN 繪成。此軟體可在以下網站下載 <http://ems.music.uiuc.edu/~beaucham/software/sndan/>

膜影響。

笛膜還有另一個效應，是使音色變得不均勻，隨音高而變化。依笛音頻譜特徵的不同，本文中將笛子的音域分為五個音區，每個音區約為半個八度，如表 1 所示。

表1：本文中所定義的笛子音區，以C調曲笛為例

Play mode	指法	音高	音區
First mode (第一八度)	● ● ● ● ● ●	G4	第一音區
	● ● ● ● ● ○	A4	
	● ● ● ● ○ ○	B4	
	● ● ● ○ ○ ○	C5	
	● ● ○ ○ ○ ○	D5	第二音區
	● ○ ○ ○ ○ ○	E5	
	○ ● ● ○ ○ ○	F5	
	○ ○ ○ ○ ○ ○	F#5	
Second mode (第二八度)	○ ● ● ● ● ●	G5	第三音區
	● ● ● ● ● ○	A5	
	● ● ● ● ○ ○	B5	
	● ● ● ○ ○ ○	C6	
	● ● ○ ○ ○ ○	D6	第四音區
	● ○ ○ ○ ○ ○	E6	
	○ ● ○ ● ○ ●	F6	
	○ ○ ○ ○ ○ ○	F#6	
Fourth mode (第三八度)	○ ● ● ● ● ●	G6	第五音區
	● ● ○ ● ● ○	A6	

比較了各音區笛音的頻譜之後可以發現，笛音的三個主要頻譜特徵：位於 4-7 kHz 的第一共振峰 (formant)、奇數倍泛音優勢 (predominance of odd-numbered harmonics)、高頻的次泛音 (subharmonic)，在五個音區的強度都不同，所以這五個音區的音色都不一樣。笛音的三個主要頻譜特徵可以視為笛子音色的三個向度 (dimension)，此議題在筆者的博士論文中有較詳細的討論 (Tsai 2004a)。

除了改變音色與音高之外，笛膜的鬆緊對於笛子的可演奏度 (playability) 與音域也有重要的影響。笛膜貼得越鬆，高音就越不容易吹奏。當笛膜貼得太鬆時，甚至連中音域也會吹不出聲音來，或只能吹奏強音而無法吹奏弱音，樂器變得難以控制。

在以上這些笛膜所造成的效應裡面，音高與音域的影響可以由笛膜的線性振動來解釋，而有關音色不均勻與中音域可演奏度的影響，則必須考慮到笛膜的非線性振動，以下分別討論之。

三、笛子的輸入阻抗與笛膜的線性振動

(一)、理論

管樂器的物理研究，通常從輸入阻抗 (input impedance) 的計算與測量開始。在聲學領域中，阻抗的定義是 $Z = \text{空氣聲壓 (acoustic pressure)} / \text{空氣聲波流量 (acoustic flow volume)}$ 。管樂器的吹孔 (或吹嘴) 處的阻抗，稱為該樂器的輸入阻抗。笛類樂器在吹奏時，吹孔附近的空氣聲波流量極大、聲壓極小，因此輸入阻抗達到一個最小值，每個笛音都對應到阻抗曲線上的一個低谷。反之，簧片樂器在吹奏時，吹嘴附近的空氣聲波流量極小、聲壓極大，因此輸入阻抗達到一個最大值，每個簧片樂器的音都對應到阻抗曲線上的一個高峰。管樂器在每個指法下都可以測到一個阻抗曲線，它可以用來量化音高與可演奏度。音高由阻抗曲線「低谷 (笛) / 高峰 (簧片樂器)」所在的頻率決定，可演奏度則由「谷值 / 峰值」決定。

考慮一個理想的圓柱管，膜孔位於管身的正中央，這樣的系統可以大致模擬笛子在指孔全開時的性能。²筆者曾經計算過此一圓柱管在「無膜孔 / 有笛膜」兩種情形下的輸入阻抗，在這個計算中，笛膜的振動被簡化為活塞的上下振動，因此只需要一個變數 z 即可描述笛膜的位移 (圖 3)。為了簡化計算，此處先假設活塞的彈簧遵守虎克定律 (Hook's law)，這個假設僅適用於笛膜的振幅很小時。由於笛膜被視為「質量—彈簧」系統，因此本身具有固有振動頻率。在圖 4 中，固有振動頻率被設定為 3.5 kHz。

圖 4 所示的曲線是 $\text{admittance} = 1/Z$ ，每個尖峰代表可吹奏的音，因此音高由尖峰的橫座標代表。由於此曲線的縱座標顯示的是阻抗的倒數，笛音的可吹奏度便由尖峰的高度來表示。我們首先觀察無膜孔圓柱管的 admittance 曲線，此曲線由黑色虛線表示，它具有等距分佈的尖峰，這表示了吹奏此圓柱管時，依照所吹氣流從慢到快的速度變化，可以吹出一系列頻率比為 1:2:3:4:5... 的音。圖 4 中，有笛膜圓柱管的 admittance 曲線由黑色實線表示，我們可以觀察到，笛膜對原本的 admittance 曲線造成了顯著的影響。笛膜的存在與否，並不會影響偶數倍的尖峰，只會影響奇數倍的尖峰。位於笛膜的固有振動頻率以下的奇數倍尖峰被往下推，位於笛膜的固有振動頻率以上的奇數倍尖峰則被往上推。在 3.5 kHz 附近的圓柱管 admittance 尖峰，因為笛膜的存在而被分裂為兩個尖峰。除了奇數倍尖峰的位置被改變之外，其峰值也因笛膜的存在而變小。笛膜對於奇數倍尖峰所在頻率與峰值的影響，影響幅度隨著尖峰遠離笛膜固有振動頻率而變小。

從 admittance 曲線看來，笛膜對於圓柱管振動行為的影響，就跟絃樂器發音板 (soundboard) 對於琴弦的影響差不多。一根理想琴弦的固有振動頻率呈整數比 1:2:3:4:5...，但若琴弦所繫的發音板具有一個固有振動頻率的話，則在共振曲線上可以發現，發音板的固有振動頻率會將琴弦的固有振動頻率往外推，就像我們在圖 4 看到的一樣。當發音板的固有振動頻率接近於琴弦的某個固有振動頻率時，該共振尖峰會被分裂為二，這個現象在大提琴較容易發生，此即狼音 (wolf tone) 生成的原因 (Gough 1981)。狼音的特徵是振幅忽大忽小，這是因為琴弦的振動

² 這是因為笛膜大約位於吹孔與最高指孔的正中間。

頻率與發音板的固有振動頻率十分接近，琴弦的固有振動頻率被分裂為二。由於兩個固有振動態同時被激發，而產生了「拍」(beating)的現象。在物理世界中，與此類似的現象為複擺(coupled pendulum)：兩個固有振動頻率相近的單擺以彈簧相連的話，振動能量會在兩個擺之間傳來傳去，兩個擺的振幅便會忽大忽小。

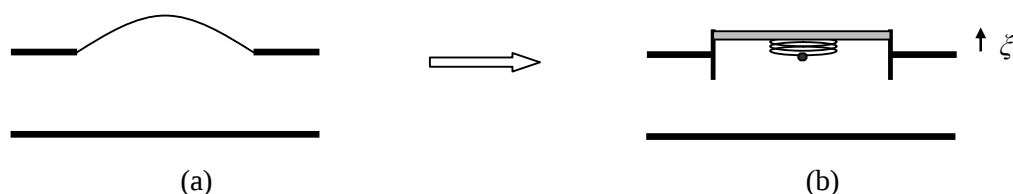


圖3：笛膜的物理模型。(a)振動中的笛膜。(b)振動中的活塞。

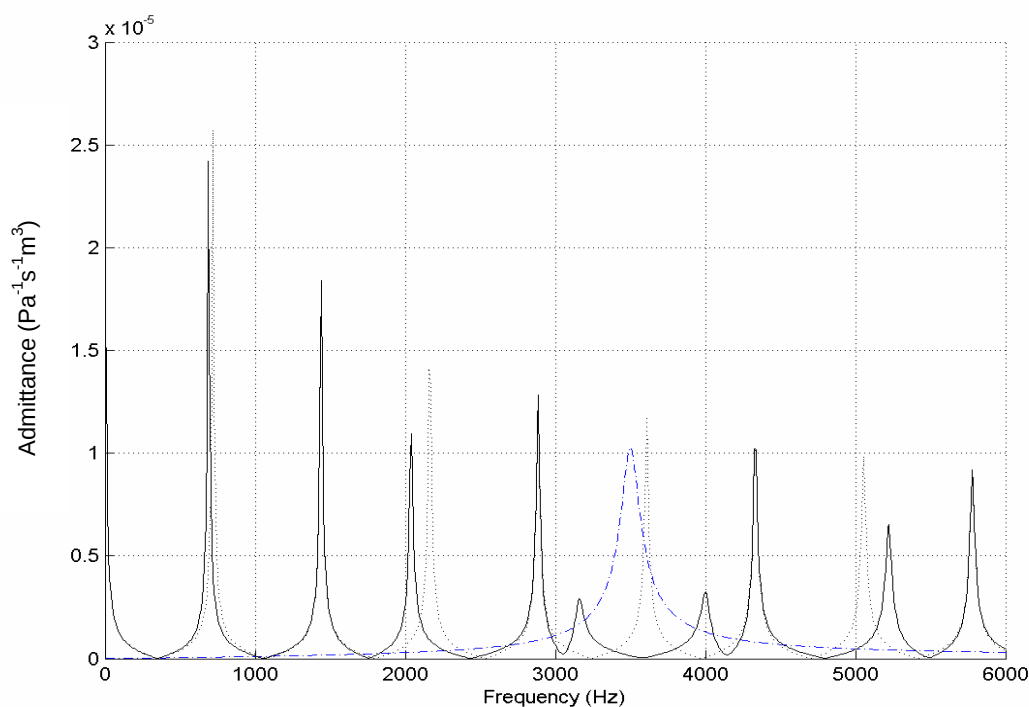


圖4：理論算出的圓柱管（兩端皆開口）之 admittance 曲線。笛膜的固有振動頻率為 $f_m = \omega_m/2\pi = 3.5$ kHz、質量為 $m = 8 \times 10^{-7}$ kg、阻尼係數為 $rm = 6 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-1}\text{kg}$ 。圓柱管的長度為 $2L = 240$ mm、圓柱管的半徑為 $r_0 = 9$ mm、膜孔半徑為 $a = 5$ mm。這樣的圓柱管設計是用來模擬 G 調低音大笛在指法 ○○○○○○ 下的幾何形狀。本圖表示了三個 admittance 曲線：無笛膜圓柱管（由 --- 表示）、中央有膜孔並貼膜的圓柱管（由 — 表示）、笛膜（由 —• 表示）。

（二）、實驗

筆者曾於 2002 年一月至二月，在澳洲雪梨的新南威爾斯大學物理系「音樂聲學實驗室」

中，作了一系列的笛子輸入阻抗測量。此實驗的主要的目在於比較「笛膜振動／笛膜不振動」兩種情形下的阻抗曲線，詳細的實驗方法參見筆者的博士論文(Tsai 2004a，另參見 Tarnopolsky et al. 2005)。

由於笛子有許多指孔與尾孔，與圓柱管相較之下，幾何形狀太過複雜，無法直接拿來驗證理論，因此，我們以不鏽鋼製作了一個中央有膜孔的圓柱管，測量它的輸入阻抗曲線，並與理論值作比較。圖 5 即是在笛膜貼得較鬆時所測得的阻抗曲線，可以發現，在 3 kHz 以下的頻率範圍中，實驗數據點與理論所預測的曲線十分吻合，奇數倍的共振峰確實因笛膜而偏移。

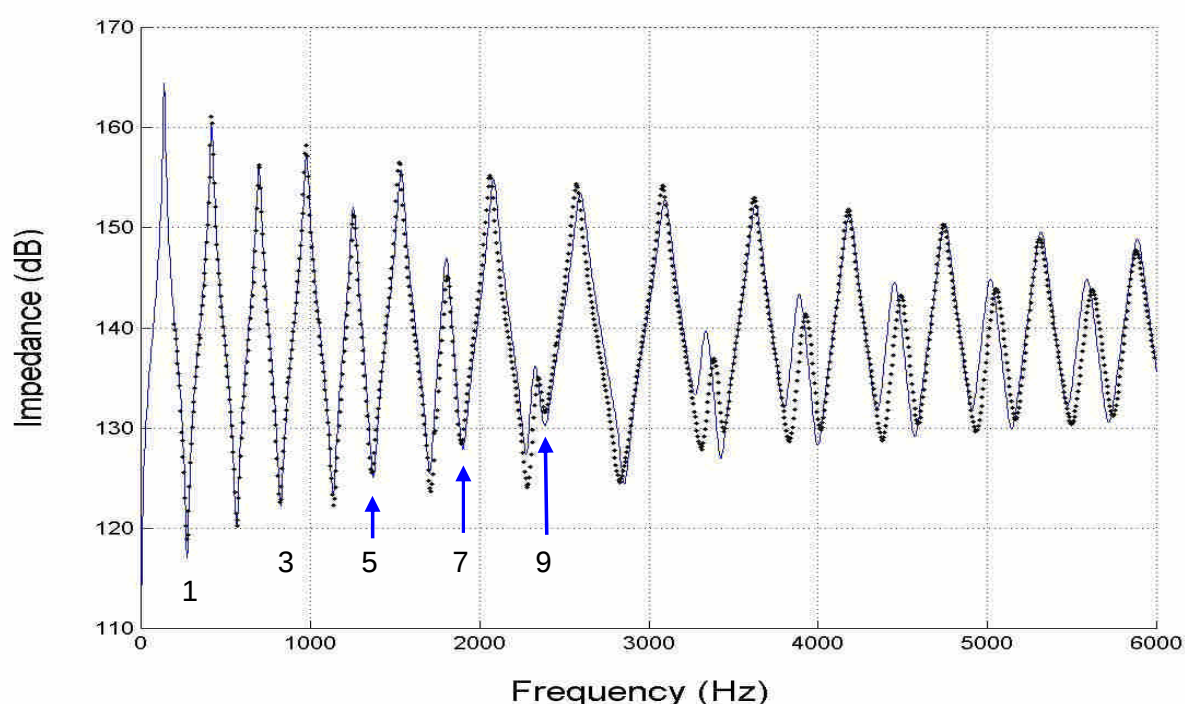


圖 5：一根中央有膜孔的不鏽鋼管的阻抗曲線，實驗數據（·）與理論值（—）的比較。縱座標為 $20\log(|Z|)$ ，即以分貝（decibel）為單位。笛膜的固有振動頻率為 $f_m = \omega_m/2\pi = 2.7$ kHz、質量為 $m = 5 \times 10^{-7}$ kg、阻尼係數為 $rm = 6 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-1}\text{kg}$ 。第五、七、九阻抗極小值有較顯著的移動，與圖 4 的預測相符。

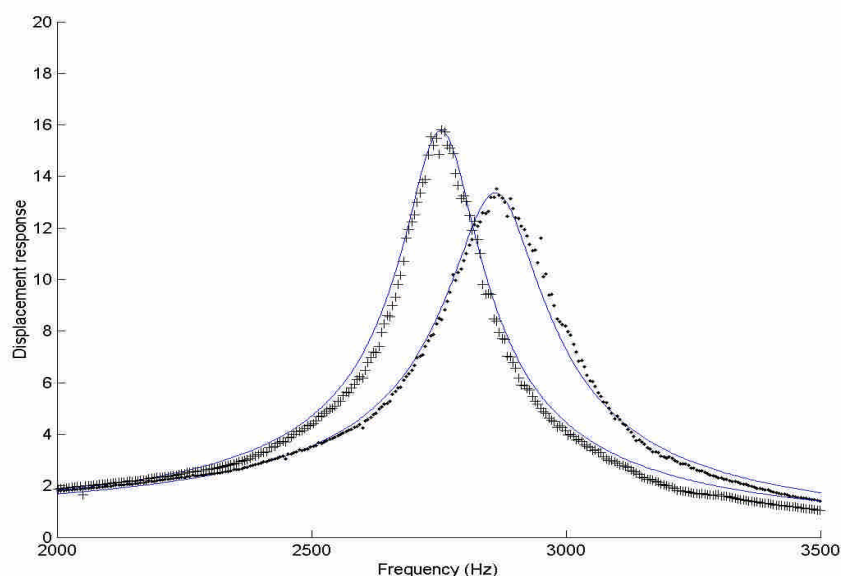


圖 6：笛膜的位移響應曲線，實驗數據（由·與+表示）跟理論曲線（由—表示）的比較。第一次測量（由·表示）的笛膜固有振動頻率 $f_m = 3000$ Hz、質量 $m = 6 \times 10^{-7}$ kg、阻尼係數 $rm = 7 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-1} \text{ kg}$ 。第二次測量（由+表示）的笛膜固有振動頻率 $f_m = 2750$ Hz、質量 $m = 6 \times 10^{-7}$ kg、阻尼係數 $rm = 5.7 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-1} \text{ kg}$ 。

在測量笛子的輸入阻抗時，由於所有指法都要測量，因此耗時較久，共約一小時。為了確認笛膜的粘彈性質在實驗進行期間是否保持恆定，在測量笛子輸入阻抗之前與之後，我們測量了笛膜本身的阻抗，這可以用來估計笛膜的固有振動頻率、質量、阻尼係數。圖 6 是這兩次測量所得到的結果，以笛膜的位移響應曲線（displacement response curve）來表示。從此圖可以發現，笛膜的「質量—彈簧」模型所預測的曲線，與實驗數據相當吻合，但是，這兩次測量所得到的曲線卻不一樣，這意味著笛膜的粘彈性質似乎很容易受到外界溫濕度影響，隨時間變化，換言之，在實驗進行時，笛子各個指法的輸入阻抗並不是在同樣的笛膜狀態下被測量。由於我們難以將笛膜的粘彈性質維持在一個定值，所以，笛子各指法輸入阻抗的測量值雖然具有相當的參考價值，卻無法達到科學實驗「嚴謹控制變因」的要求。³

雖然笛膜的粘彈性質並不穩定，但比較笛子在「笛膜振動／笛膜不振動」情形下的阻抗曲線，仍然有一定的意義。為了瞭解笛子音域的上限如何受到笛膜的影響，我們可以觀察 C 調曲笛在指法 ●○○●●● 下所測得的阻抗曲線（圖 7）。此指法應可吹出 B6，但實際上這個音已經接近 C 調曲笛的音域上限，在笛膜貼得較鬆的情況下並不容易吹出。從圖 7 可以看到，B6 所對應的阻抗極小值位於 2 kHz 附近（以三角形符號標示），從笛膜不振動到笛膜振動，B6 的音高從 2026 Hz 降為 1951 Hz，而阻抗值也變大許多。阻抗值變大，意味著可演奏度變低，這可以解釋笛膜的振動使高音難以吹出的現象。

³ 笛膜粘彈性質的不穩定性，最後也成了本研究無法寫為論文在國際聲學期刊發表的一大原因。

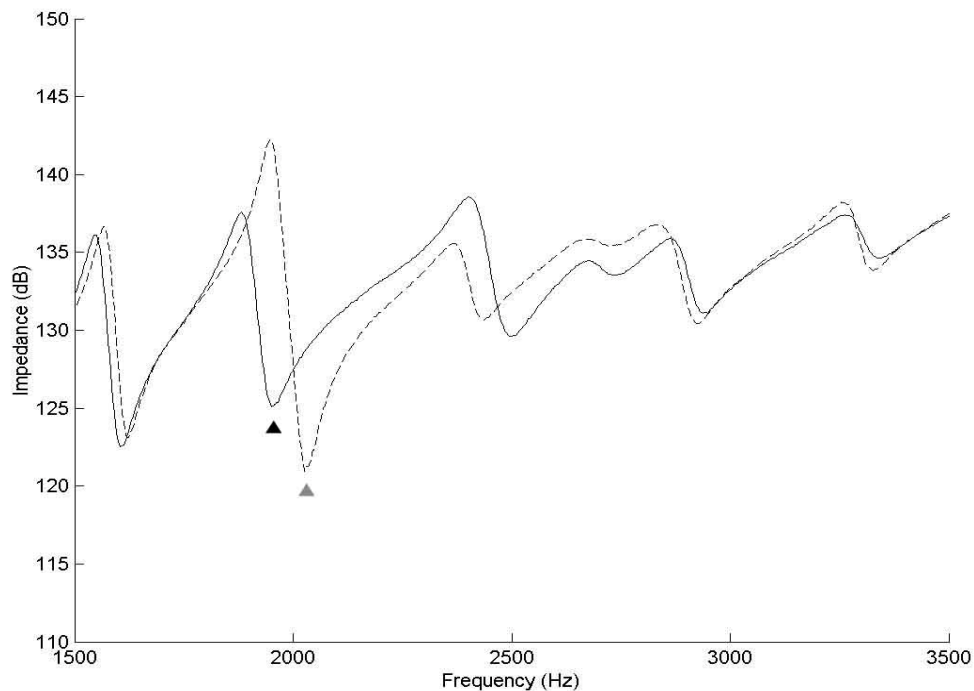


圖 7：C 調曲笛在指法 ●○●●● 下所測得的阻抗曲線，比較笛膜不振動（---）與振動（—）的情形。在笛膜不振動的情形下，此指法可吹出的 B6 音，對應於 2026 Hz 處的阻抗曲線最低點（由灰色三角形所示），在笛膜振動的情形下，此最低點則降為 1951 Hz（由黑色三角形所示）。

總結本節中的理論與實驗研究，我們瞭解到，笛膜接近於一個理想的簡諧振盪系統（「質量—彈簧」模型），依照貼膜的鬆緊不同，其固有振動頻率 f_m 通常在 2 kHz 至 3 kHz 之間變動。基本上， f_m 設下了膜笛音域的上限，因為音高接近 f_m 的笛音，其阻抗值會由於笛膜的振動而變大，可演奏度很低。此外，笛音音高因為笛膜振動而下降的現象，也可以由耦合原理來解釋。笛子的「管—膜」耦合系統，與絃樂器的「絃—發音板」耦合系統，有許多共通的物理原理。

四、笛膜的 Duffing 振子模型

（一）、運動方程式

在上一節裡面，我們假設笛膜是一個線性的「質量—彈簧」系統，也就是說，彈簧的回復力（restoring force）與其位移成正比（線性關係）。這個假設適用於笛膜的振幅很小時，例如在測量笛子的輸入阻抗時，笛膜因為輸入的聲波而振動，此時的振幅很小，故笛膜的振動行為與線性系統十分接近（這可以在圖 6 中得到證實）。

一般而言，笛膜的回復力 $F_{restoring}$ 與位移 ξ 的關係，可以由泰勒展開式（Taylor's expansion）來表示：

$$F_{restoring} = m(\omega_m^2 \xi + \alpha \xi^2 + \beta \xi^3 + \dots) \quad (1)$$

此式右方的第一項為線性項，即表示虎克定律。接下來有平方項與立方項等非線性項，顯示回復力並不像理想的彈簧一樣與位移成正比。當 ξ 很小時，上式右方的非線性項皆可忽略，但當 ξ 逐漸增加時，我們就必須要考慮平方項、立方項…等。由於吹奏笛子時，笛膜的位移比在測量輸入阻抗時大得多，因此，(1)式的非線性項在吹奏笛子時具有不可忽略的重要性。

筆者曾在 2002 年 4 月至 10 月，於家中進行了一系列有關笛膜非線性振動行為的實驗，詳細的實驗方法參見筆者的博士論文 (Tsai 2004a)。此實驗的第一個部份是觀察 ξ 逐漸增加時，比較平方項與立方項的效應。初步發現，笛膜上無皺紋時，平方項與立方項皆不可忽略，但當笛膜上有適當的皺紋時（就像一般笛子上的笛膜），平方項的效應可以忽略。

在以下的討論中，我們僅考慮笛膜的線性項與立方項，笛膜的運動方程式可以寫為：

$$\ddot{\xi} + r\dot{\xi} + \omega_m^2\xi + \beta\xi^3 = \frac{F_{ext}}{m} \quad (2)$$

此處的 m 是笛膜的質量， ω_m 是它的固有角頻率（因此 $\omega_m/2\pi$ 為固有振動頻率），由上一節的實驗可知，當笛膜的張力與皺紋分布適中時，笛膜的固有振動頻率通常落在 2 kHz 與 3 kHz 之間， m 約為 10^{-6} kg，阻尼係數 r 約為 10^3 sec^{-1} 。(2)式所示的振盪系統，物理學上一般稱為 Duffing 振子，為最簡單的非線性振動系統。以下我們將證明，在吹奏笛子時，笛膜的振動行為可以用 Duffing 振子模型來描述，立方非線性項係數 β 約為 $10^{17} \text{ m}^2\text{sec}^{-2}$ ，主要由笛膜上皺紋的多寡所決定 (Tsai 2004a)。

（三）、笛膜的跳躍現象

Duffing 振子有兩個重要的特徵，第一是固有振動頻率隨外力強度而變化（稱為 frequency-pulling effect），第二是跳躍現象（jump phenomenon），其中後者與笛子的性能有關，以下略作探討。

筆者曾經以較強的聲波來驅動笛膜，所輸入的聲波的頻率為逐漸上升或逐漸下降，以便觀測笛膜的共振行為。圖 8 是三種不同強度的變頻聲波所造成的笛膜振幅曲線圖，由此圖可以發現，輸入的聲波越強，共振頻率（曲線的尖峰所在）越往高處移動，這是因為此 Duffing 振子的彈性屬於 hardening spring，所以外力越強，共振頻率就越高。圖 8(a)是有皺紋笛膜的振幅曲線圖，其尖峰的形狀局部上大約是左右對稱的。反之，圖 8(b)所示的無皺紋笛膜振幅曲線圖，當振幅較大時其尖峰並不對稱，而是呈現海浪般的形狀。根據 Duffing 振子的相關理論，有皺紋笛膜的立方非線性項係數 β 應該比無皺紋笛膜來得小，換言之，在笛膜上製造出適當的皺紋，可以有效降低 β 。

當 Duffing 振子的立方非線性項係數較大時，若外力超過某個強度，此振子將會產生跳躍現象，也就是說，它的振幅曲線會有不連續的變化。圖 9 是一個無皺紋笛膜在兩個變頻聲波驅動下的振幅曲線，當聲波還不算太強時，振幅曲線是連續的。當變頻聲波夠強時，笛膜的振幅會產生突然的變化，此即跳躍現象。更有趣的是，較強的輸入聲波是升頻或是降頻，會造成不

同的跳躍方式：升頻聲波使 Duffing 振子的跳躍發生在較高頻的地方，降頻聲波使跳躍發生在較低頻的地方。在這兩個跳躍點之間的頻率範圍內（約為 2185–2215 Hz），振幅曲線有三個值，分別對應於穩定態（stable state）、類穩定態（meta-stable state）、不穩定態（unstable state）。此振子在的瞬間行為並非由該瞬間的位移與速度所決定，而是跟其運動的“歷史”有關，這也是非線性系統的特色之一（參見 Valette 1995：167-169）。

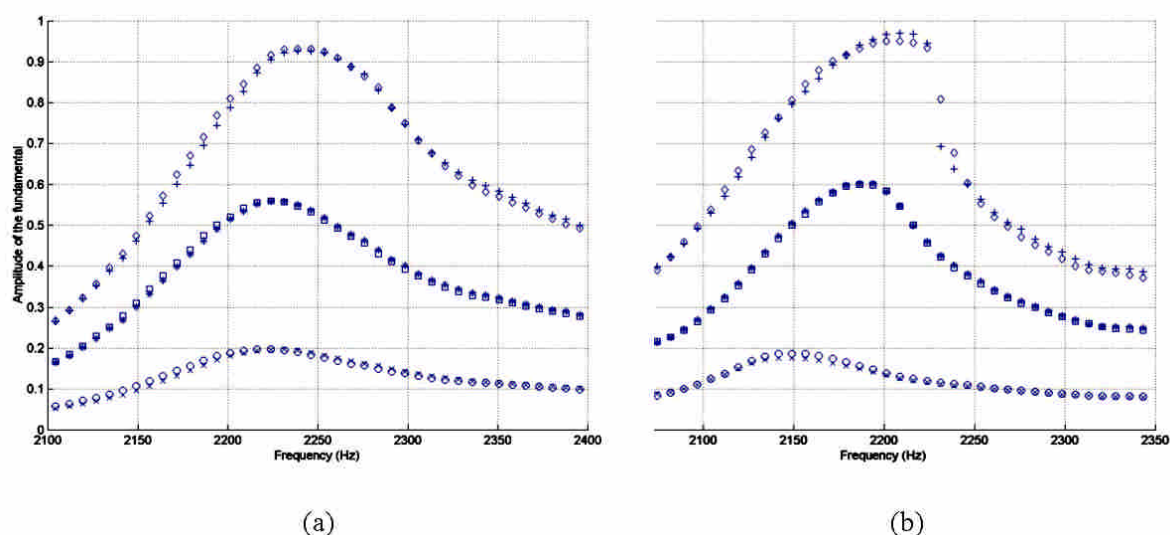


圖 8：笛膜在升頻聲波（由 *x· 所示）與降頻聲波（由 ◇□○ 所示）驅動下的振幅曲線圖。(a)有皺紋的笛膜。(b)無皺紋的笛膜。

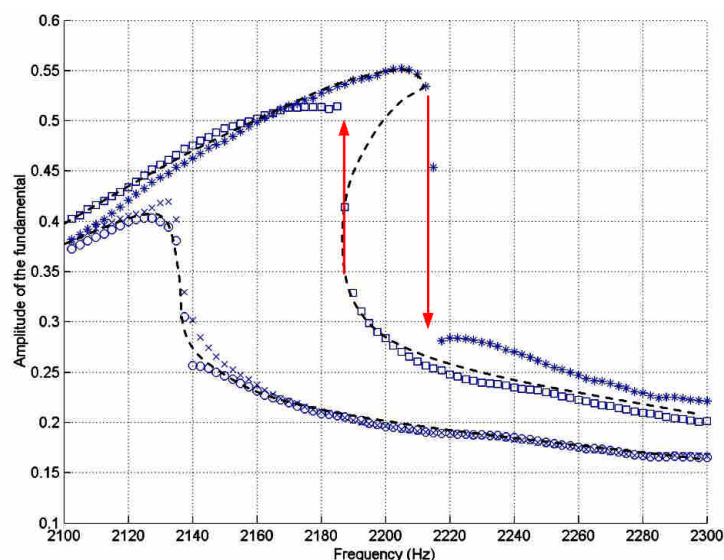


圖 9：笛膜的跳躍現象，升頻聲波（由 *x· 所示）與降頻聲波（由 ◇□○ 所示）驅動下的笛膜振幅曲線圖。箭頭指出了振幅的跳躍式變化，升頻聲波使跳躍發生在較高頻的地方，降頻聲波使跳躍發生在較低頻的地方。在這兩個跳躍點之間的頻率範圍內，振幅曲線有三個值。

Duffing 振子的跳躍現象固然有趣，但對於笛子演奏家而言，一個更為切身的問題是：此現象如何影響笛子的性能。當笛子的笛膜貼得太鬆或缺乏皺紋時，本來很容易吹奏的中音域會變得難以控制：有時候吹不出任何聲音，而一旦吹出了聲音，笛音卻又異常響亮，無法吹弱音。這種情況下的笛子，發聲狀態有種“固執”的行為（persistent behavior）：假如吹不出聲音的話，變換許多指法也都同樣吹不出聲音，但假如忽然吹出了聲音，則可以變換指法讓旋律級進，吹出一系列的笛音。從物理學的觀點來看，這是一種遲滯現象（hysteresis），它強烈暗示著笛子的非線性行為。

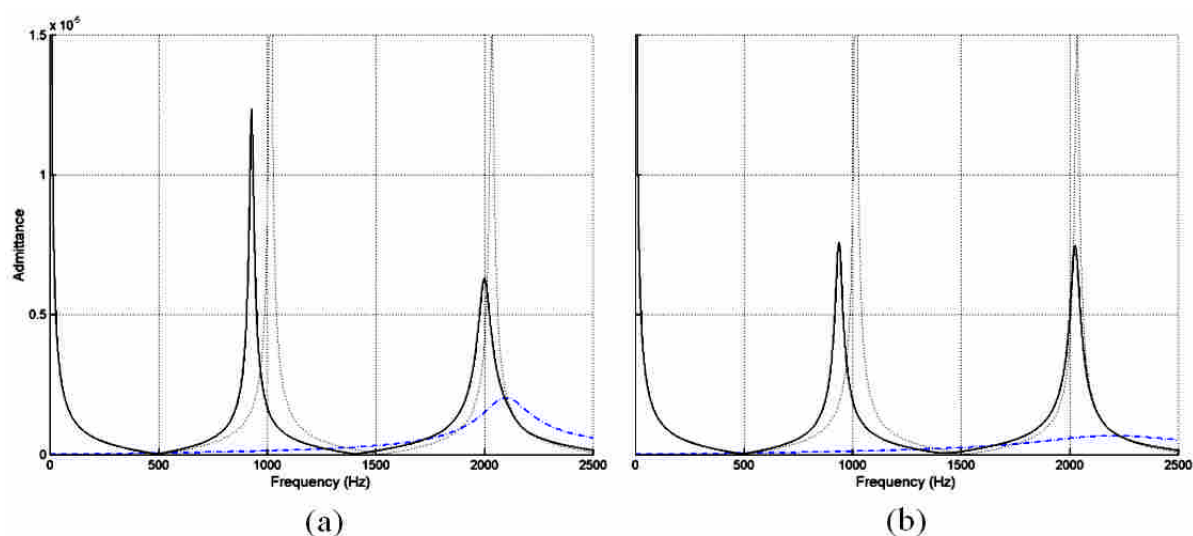


圖 10：理論所估計的笛子 admittance 曲線，比較無笛膜振動（---）與有笛膜振動（—）的情形，以及笛膜的聲學 admittance 曲線（—·）。笛膜的質量 $m = 1.4 \times 10^{-6}$ kg，笛管半徑 $r_0 = 8$ mm、膜孔半徑 4.5 mm，吹孔到膜孔之距離 $L_1 = 90$ mm、指孔的第一開孔到膜孔的距離 $L_2 = 80$ mm，此管形狀模擬 ●○○○○○ 指法下的 C 調曲笛。(a) 笛膜的固有振動頻率 $f_m = 2.1$ kHz、阻尼係數 $rm = 2 \times 10^{-3} \text{ sec}^{-1} \text{ kg}$ ，此值模擬於低頻處跳躍的笛膜狀態（降頻聲波驅動）。(b) 笛膜的固有振動頻率 $f_m = 2.2$ kHz、阻尼係數 $rm = 6 \times 10^{-3} \text{ sec}^{-1} \text{ kg}$ ，此值模擬於高頻處跳躍的笛膜狀態（升頻聲波驅動）。

筆者發現，笛膜貼得太鬆或缺乏皺紋時中音域變得難以控制，這個現象的確可以用 Duffing 振子的跳躍現象來解釋。由於笛膜的阻抗曲線有跳躍現象，笛子的阻抗曲線會變成兩條，分別對應於輸入聲波為「升頻／降頻」的情形。筆者以一個簡化的理論估計了 C 調曲笛在笛膜立方非線性項較大時的 admittance 曲線，如圖 10 所示，此圖所考慮指法為 ●○○○○○，這個指法可以吹奏中音域的 E5 與高音域的 E6，這兩個音分別對應於 admittance 曲線的兩個尖峰。圖 10(a) 為以降頻聲波驅動的情形，圖 10(b) 則為以升頻聲波驅動的情形。可以觀察到，在以降頻聲波驅動的情形下，E5 很容易吹奏，因為第一尖峰的峰值很高。但在以升頻聲波驅動的情形下，由於第一尖峰比第二尖峰略低，所以 E6 反而比 E5 容易吹奏。這個現象對於笛子演奏家而言

並不陌生：當笛膜貼得太鬆或缺乏皺紋時，明明是要吹第一個八度的最高幾個音，卻會吹成高八度，這是因為第一個八度最高幾個音的 *admittance* 變得太小（即為圖 10(b)的情形），可演奏度低於第二個八度的音。但另一方面，在同樣的笛膜鬆緊狀態下，偶而也可以吹出第一個八度的最高幾個音，這是因為笛膜的振動行為切換到以降頻聲波驅動的情形（相當於圖 10(a)的情形）。問題是：笛子究竟會處於圖 10(a)或圖 10(b)所顯示的振動行為？從物理學的角度來看，這大半要靠運氣，並不容易藉由控制此系統的初始條件來操縱，因為這是一種由高度非線性所導致的混沌行為（*chaotic behavior*）。

（四）、為什麼笛膜上要有皺紋？

總結以上的討論，我們可以瞭解笛膜上為何要有皺紋。沒有適當皺紋的笛膜，其回復力的平方非線性項不可忽略，這對於笛音的音色將造成不良的影響。反之，有適當皺紋的笛膜，其平方非線性項可以忽略，因此笛膜的非線性振動由立方項所決定，這可以讓笛子的中音域有甜美的音色。下節中將指出，這種甜美的音色來自於奇數倍泛音優勢。

除了音色的考量之外，笛膜的皺紋還有助於在維持彈性係數不變的情況下，降低立方非線性項係數，以避免跳躍現象造成中音域發音困難。無皺紋的笛子立方非線性項係數較大，必須貼很緊才不會產生跳躍現象，但這樣一來，笛膜的振幅太小，產生不了豐富的泛音。筆者曾經以力學理論證明，要讓笛膜在等強聲波下有同樣的振幅，無皺紋笛膜的張力必須為有皺紋笛膜的 $1/4$ (Tsai 2004a: 65–68, 另參見 Cerda and Mahadevan 2003)，而笛膜張力太小的話，立方非線性項係數將會過大，造成中音域可演奏度過低的問題。

五、笛膜產生泛音的原理

（一）、管內駐波驅動下的笛膜

笛類樂器的泛音通常遠不如簧片類樂器來得豐富，但膜笛的笛音卻有很強的高頻泛音，這是因為膜笛有兩個聲音發射源：管內駐波、笛膜。管內駐波所發射的聲波並沒有豐富的泛音，但笛膜所發射的聲波卻以高頻泛音為主，基音（*fundamental*）反而較弱。

笛膜的振動是由管內的壓力聲波所驅動的，在管內的聲波以基音為主，所以，笛膜通常可視為受到簡諧外力驅動，尤其在中音域（第二、第三音區）更是如此。為什麼笛膜明明只受到基音所驅動，但卻不是發射基音，反而發射出豐富的泛音呢？這是因為笛膜是非線性的 *Duffing* 振子。

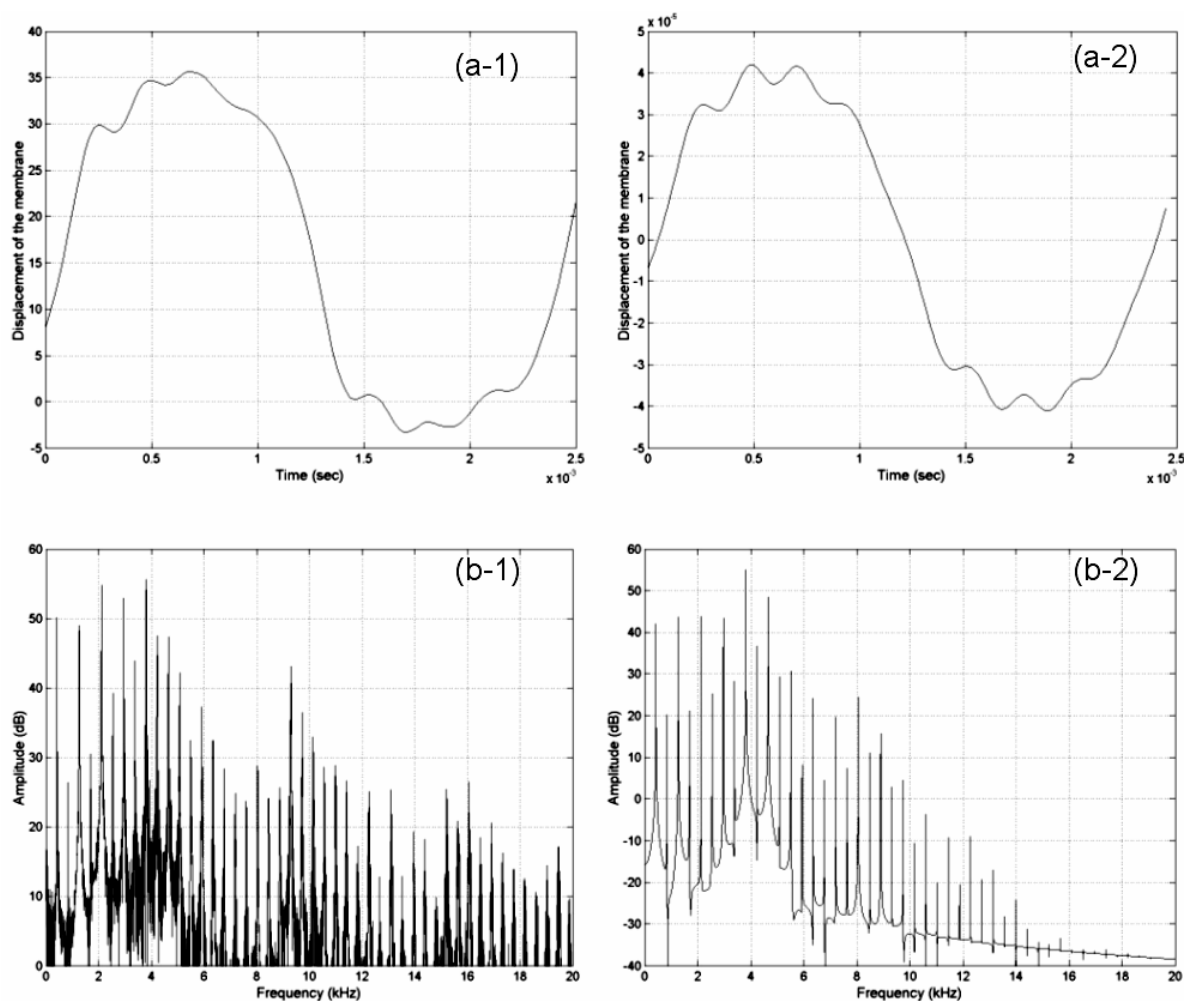


圖 11：實驗（左圖）與理論（右圖）所得的笛膜等效位移曲線（圖 a）與笛膜發射聲波頻譜（圖 b），所探討的笛音為 G 調低音大笛在指法 ●●○○○○ 下吹出的 A4 音。理論的模擬根據(2)式與(3)式，各參數值如下： $r = 1700 \text{ sec}^{-1}$, $f_m = 2500 \text{ Hz}$, $m = 5 \times 10^{-7} \text{ kg}$, $\beta = 10^{17} \text{ m}^{-2} \text{ sec}^{-2}$, $G_0 = 8 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$, $G_1 = .02G_0$, $G_2 = 0$, $\omega/2\pi = 424 \text{ Hz}$, $\varphi_0 = \varphi_2 = 0$, $\varphi_1 = 1$

筆者曾經根據(2)式來模擬笛膜在中音域的振動行為，並與實驗所測得的笛膜發射聲波作比較，兩者大致吻合。圖 11(a)比較了實驗與理論所得的笛膜等效位移曲線 $\zeta(t)$ ，可以發現，笛膜的振動行為有個明顯的特徵：振動到每個週期的最高點與最低點時，笛膜會快速抖動，這樣的抖動會產生高頻泛音。圖 11(b-1)是實驗所測得的笛膜發射聲波頻譜，可以發現，中音域的笛音在 5 kHz 以下的偶數倍泛音遠比相鄰的奇數倍泛音來得弱，這個現象在本文中稱為「奇數倍泛音優勢」，且笛音的頻譜包絡 (spectral envelop) 在 4 kHz 附近有個突起，這在本文中稱為「第一共振峰」。奇數倍泛音優勢與第一共振峰，在理論所預測的頻譜圖中（圖 11(b-2)）也可以觀察得到。

笛膜所產生的奇數倍泛音較強，這是因為非線性項中以立方項為主，平方項可忽略。假如笛膜的皺紋不足，平方非線性項不可忽略，那麼笛音中將不會有奇數倍泛音優勢的頻譜特徵，

也就會失去甜美的音色。

兩相比較圖 11(c)(d)，我們可以發現理論與實驗不吻合的地方，主要是 10 kHz 以上的泛音分布。(1)式無法預測笛音中 10 kHz 以上的泛音，這個問題在筆者的博士論文中有較詳細的討論 (Tsai 2004a)。

(二)、膜笛音色隨音高變化的原因

膜笛的特色之一是音色會隨著音高而變化，這可以由 Duffing 振子模型來解釋。前面提到，中音域的笛音具有奇數倍泛音優勢，因為此時驅動笛膜的管內聲波以基頻為主。一般而言，管內聲波還有其他的聲波，例如我們可以考慮頻率最低的三個波：基頻（頻率為 $\omega/2\pi$ ）、第二泛音（頻率為 ω/π ）、第一次泛音（頻率為 $\omega/4\pi$ ），如此一來，驅動笛膜的外力可寫為：

$$F_{ext} = G_0 \cos(\omega t + \varphi_0) + G_1 \cos(2\omega t + \varphi_1) + G_2 \cos\left(\frac{\omega t}{2} + \varphi_2\right) \quad (3)$$

這個運動方程式可以解釋笛子音色隨著音高變化的現象。笛膜的振動是因為笛膜受到管中的聲波壓所驅動，管中的三個聲波在(3)式的右方分別以三個項來表示，各項的係數 G_0 、 G_1 、 G_2 對於笛音的頻譜有重大的影響，它們主要取決於笛膜與各駐波的相對位置。

在笛管內，各聲波會形成駐波，駐波的特色是有波節與波腹。在壓力波波節處，聲壓的振幅最小；在壓力波波腹處，聲壓的振幅最大。圖 12 顯示了笛膜與管內駐波的相對位置，此圖僅為示意圖，讓駐波波長不變、改變笛膜的位置，實際上的情形應該是笛膜位置不變、改變駐波波長。當笛膜位於基頻壓力波的波腹附近時，因為 G_0 值較大，其振動最為劇烈，笛膜音也最明顯，這種情形發生於第二、第三音區。反之，當笛膜位於基頻壓力波的波節附近時， G_0 值很小，笛膜的振動也小，笛音變得晦暗縹緲，這種情形發生於第四音區。到了第五音區，笛膜又接近基頻壓力波的波腹， G_0 值變大，於是笛音變得很亮。

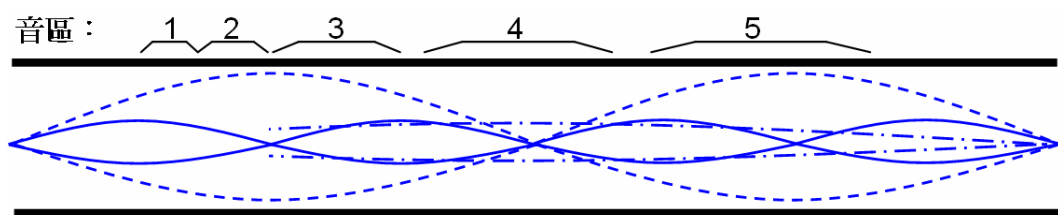


圖 12：笛膜與管內駐波的相對位置示意圖，包括基頻(---)、第二泛音(—)、第一次泛音(-·-)。

除了 G_0 值之外， G_1 、 G_2 對笛音的頻譜也有很大的影響，而它們的值亦隨著音高而變。在第一音區， $G_1 \sim G_0$ ，因此笛音中沒有奇數倍泛音優勢，這也是低音的笛音具有鬆軟音色的原因。第二、第三音區的笛音具有奇數倍泛音優勢，音色與低音不同，這是因為笛膜位於第二泛音壓力波的波節附近， $G_0 \gg G_1$ 值。至於 G_2 所對應的次泛音，只有可能存在於第二、第三個八度

的笛音（第三至第五音區）。次泛音的產生，是因為比該笛音低八度的駐波也被激發，無笛膜的笛子不可能發出高頻的次泛音，但有笛膜的笛子可以產生具有高頻的次泛音，造成一種幽咽的音色，這類笛音在低音大笛的音樂中扮演重要的角色（蔡振家 2001）。

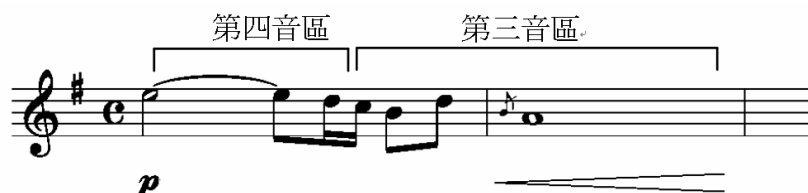
膜笛的不均勻音色，最顯著的就是笛音的明暗變化。(3)式的 G_0 值決定了笛音的明亮度，當笛膜位於基頻壓力波波節附近時， G_0 值最小，無論怎麼樣都吹不出明亮的音色，這種情形在第四音區，尤其是第二個八度的最高兩個音最為明顯。從物理的觀點來看，膜笛的不均勻音色是與生俱來的，無法去除。

近年有笛樂專家發明了雙膜孔的笛子，試圖解決膜笛不均勻音色的問題，由於兩個笛膜不可能同時位於基頻壓力波的波節，因此笛音的音色應該都能保持明亮。不過實際上，雙笛膜會造成新的問題。由於兩個笛膜不可能同時位於第二泛音壓力波的波節，所以笛音不會具有奇數倍泛音優勢的頻譜特徵，於是笛子的中音域就不再具有甜美、空靈的音色，反而變得有點像簧片樂器。

五、膜笛音色的明亮度變化在笛樂中的運用

前面提到，膜笛有些音特別暗，這是因為笛膜剛好位於基頻壓力波的波節，所以不會振動、製造泛音。由此看來，音色不均勻乃是膜笛與生俱來的特質，有些笛樂工作者不但能夠坦然接受此一事實，而且在笛曲中妥善運用音色明亮度的變化，充份發揮了笛子的樂器特性，遂能開創出有別西洋笛樂的美感境界。以下，將舉出幾個現代笛曲的例子來作說明。

（一）、趙松庭《早晨》

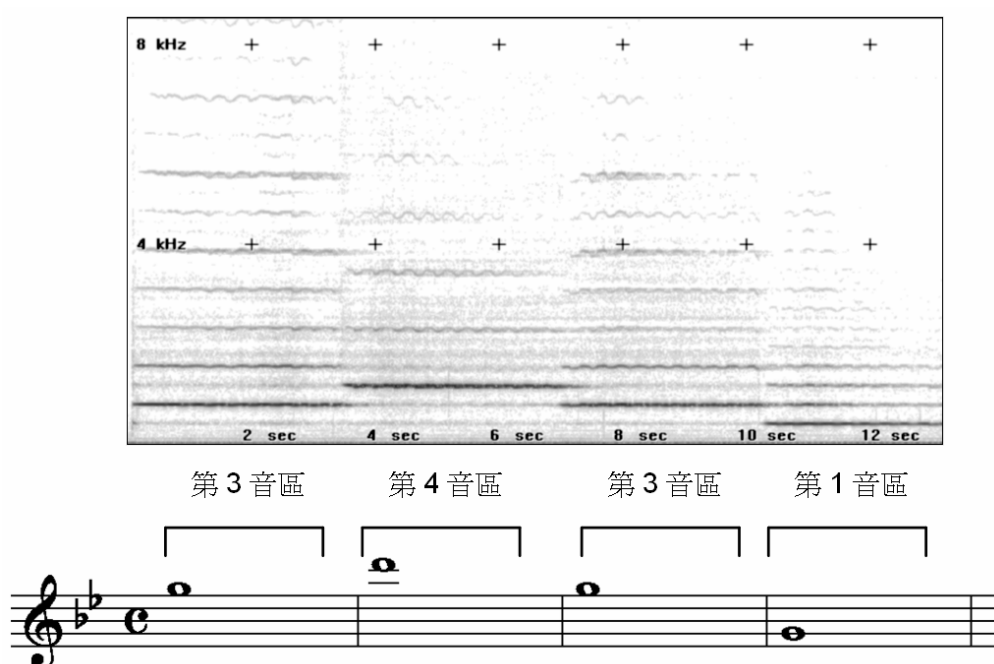


例 1：趙松庭的笛子獨奏曲《早晨》，開頭部份（低八度記譜）

第一個例子是有關笛音對於日光的描寫。在西洋古典音樂裡面，多半以上行旋律來描寫日出，趙松庭的笛曲《早晨》卻另闢蹊徑，以下行旋律來描寫日出。以上行旋律來描寫日出，是利用了聽覺認知上「音高／空間高度」的聯想，而笛曲《早晨》卻是利用了「音色明亮度／視覺明亮度」的聯想。樂曲一開始，旋律從笛子的第四音區下行至第三音區，其用意是對比出「暗→亮」的音色變化。在此樂句最後的長音 A4 音上，以漸強來描寫逐漸變亮的陽光，此時的笛音不但音量漸強，明亮度也會顯著增加（可參考圖 2）。無論是音區改變或力度改變所導致的明亮度變化，這些效果都來自於笛膜的非線性特質，無笛膜的笛子不可能製造出這樣的效果。

（二）、俞遜發《瑯琊神韻》

俞遜發的《瑯琊神韻》，是現代笛曲中將笛音的空間效應發揮得淋漓盡致的重要例子。在此曲中，俞遜發以四個連續的長音表現出置身於瑯琊山中的空間感受。從 G5 到 D6，音色忽然變暗，這是因為頻譜上高於 4 kHz 的泛音消失了。雖然 G5 與 D6 用同一個指法演奏，但音色忽然變暗並不是因為所謂的“吹泛音”的緣故，而是因為 G5 屬於第三音區、D6 屬於第四音區。音色忽然變暗會造成一種音源遠離的錯覺，這就是美學家經常提到的「笛樂的空間效應」（林谷芳 1997）。筆者曾經根據聲學理論計算過笛音音色變暗所對應的距離變化，當笛子的旋律從第三音區移至第四音區時，明亮度的變化約相當於音源遠離了數百公尺（Tsai 2004a：125-126，另參見 Bass et al. 1995）。

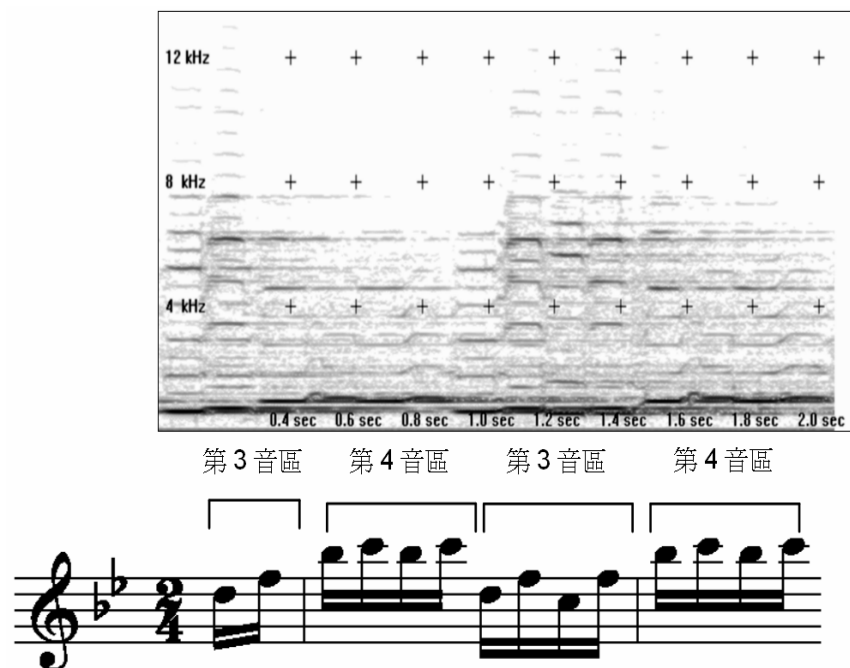


例 2：俞遜發的笛曲《瑯琊神韻》

（三）、王次恒《空山望月》

明亮度的快速變化，有時候可以用來描述快速運動的音源。在王次恒演奏的笛子獨奏曲《空山望月》中，十六分音符的音形在第四與第三音區之間游移，高於 5 kHz 的泛音也隨之忽隱忽顯。音高與明亮度的快速變化，似乎模擬出鳥兒上下翻飛的情景。

以笛類樂器的快速音形來描寫飛翔的鳥兒，在古今中外的音樂中時有所聞，而膜笛所能作出的額外效果是藉由笛音的忽然變暗，來模擬音源飛至上方、後方，或是被樹叢遮蔽的情形。高頻音的忽然減弱，有時是因為音源移至上方、後方的關係，因為高頻音容易被耳殼所遮蔽，而低頻音則可以經由繞射進入耳朵（Algazi et al. 2001）。另外，高頻音容易因為聽者與音源之間有障礙物而減弱，這也是因為高頻不易繞射的緣故。膜笛忽明忽暗的聲音，聽起來像是音源的行蹤飄忽，因此在模仿飛鳥時可以有特別好的效果。



例 3：王次恒的笛曲《空山望月》

六、結論

在這個有關笛子的物理學研究中，笛膜被當成一個 Duffing 振子來研究，此模型可以解釋許多膜笛的性能。依照貼膜的鬆緊不同，笛膜的固有振動頻率 f_m 在 2 kHz 至 3 kHz 之間變動，由於 f_m 設下了膜笛音域的上限，因此笛膜較鬆時笛子的音域較窄。此外，笛音音高會因為笛膜的振動而下降，此效應在笛膜越鬆時越明顯，這可以由笛子的「管—膜」耦合系統來解釋。經由簡單的物理分析，我們可以瞭解為何笛膜上要有皺紋。有適當皺紋的笛膜，其非線性振動由立方項所決定，這可以讓中音域的笛音具有奇數倍泛音優勢。除了音色的考量之外，笛膜的皺紋還有助於在維持彈性係數不變的情況下，降低立方非線性項係數，以避免跳躍現象造成中音域發音困難。

在笛管內，各聲波會形成駐波。當笛膜位於基頻壓力波的波腹附近時，其振動最為劇烈，笛膜音也最明顯，這種情形發生於第二、第三音區，這兩個音區的笛音通常具有奇數倍泛音優勢，能發出中國笛特有的音色。反之，當笛膜位於基頻壓力波的波節附近時，笛膜的振動極小，笛音變得晦暗縹緲，這種情形發生於第四音區。到了第五音區，笛膜又接近基頻壓力波的波腹，於是笛音變得很亮。⁴

雖然對於一些國樂工作者而言，音色不均勻乃是樂器的缺陷，但從物理學的觀點來看，音色不均勻是膜笛與生俱來的特質，即使是雙笛膜的笛子也無法擁有均勻的音色。有些笛曲中妥善運用音色明亮度的變化，充份發揮了笛子的樂器特性，這才是較合乎自然的發展方向。西方藝術音樂講究不同樂器間的音色對比與組合，反之，中國笛樂卻是在同一件樂器中作出音色的

⁴ 對於中國笛而言，中音域（第二、第三音區）的使用最為頻繁。而同樣貼有笛膜的韓國大笊，有時候反倒強調第五、第四音區的明暗對比。

變化，這樣的審美觀念也存在於古琴與韓國的大琴音樂裡面。⁵大琴音樂家認為，正由於這個樂器的音色多樣，所以是件理想的獨奏樂器 (Howard 1988)。東、西方音樂有著不同的美典、也使用著性能不同的樂器，傳統音樂工作者應正視中國樂器的特性，予以發揚光大。

1935 年，中國物理學家丁西林發明了無膜孔的新笛，它能夠準確奏出十二個半音、音域寬廣，且音色均勻、全無火氣，在大型樂團中不會太過突出，然而，新笛卻失去了極富特色的笛膜音，因此，一般的聽眾仍然偏好傳統的膜笛。對於西方人而言，最具中國味的音樂可能就是膜笛的聲音，那清脆、空靈的音色（此音色與奇數倍泛音優勢有關），大概就像桂林山水與竹林的景象，都是代表中國的符號。從新笛與雙笛膜笛子等例子看來，在國樂的發展與改革歷程中，假如作曲家與演奏家一味追求西方樂器的穩定音準、寬廣音域、均勻音色，則可能會在“改良”樂器的同時，廢掉了自身的武功。

誌謝

本研究中有關阻抗測量的實驗，承蒙澳洲新南威爾斯大學物理系「音樂聲學實驗室」的 Joe Wolfe 與 John Smith 教授的熱心協助。另外，林谷珍、林谷芳老師提供了許多有關笛子的寶貴意見與相關資料，在此一併致上最誠摯的謝意。

參考資料

陳暘（宋），《樂書》，清文淵閣四庫全書本。

趙松庭（1985），《笛藝春秋》，浙江：浙江人民出版社。

林谷芳（1997），《諦觀有情：中國音樂裡的人文世界》，台北：望月文化。

蔡振家（2001），〈中國笛笛音中的次泛音與嘈雜度〉，中華民國民族音樂學會青年學者學術研討會。

Algazi, V. R., Avendano, C., and Duda, R. O. (2001). Elevation localization and head-related transfer function analysis at low frequencies. *Journal of the Acoustical Society of America* 109(3), 1110–1122.

Bass, H. E., Sutherland, L. C., Zuckerwar, A. J. Blackstock, D. T., and Hester, D. M. (1995). Atmospheric absorption of sound: Further developments. *Journal of the Acoustical Society of America* 97(1), 680–683.

Cerda, E., and Mahadevan, L. (2003). Geometry and physics of wrinkling. *Physical Review Letters* 90, 074302.

Fletcher, N. H., and Rossing, T. D. (1991). *The Physics of Musical Instruments*. Springer-Verlag.

Gough, C. E. (1981). The theory of string resonances on musical instruments. *Acustica* 49, 124–141.

Horner, A., Ayers, L., and Law, D. (1999). Synthesis modeling of the Chinese *dizi*, *bawu*, and *sheng*.

⁵ 在西方藝術音樂中，也有少數樂曲強調了樂器音色不均勻的特性，一個較為著名的例子是 Wolfgang Amadues Mozart（1756–1791）的 A 大調單簧管協奏曲 K.622，此曲中有許多段落以音域的對比來凸顯單簧管最低音區（chalumeau register）的特殊音色，此音色來自於低頻奇數倍泛音優勢。

- Journal of the Audio Engineering Society* 47(12), 1076–1087.
- Howard, K. (1988). *Korean Musical Instruments: a Practical Guide*, Se-Kwang Music Publishing.
- Kunej, D., and Ivan, T. (2000). New perspectives on the beginnings of music: archeological and musicological analysis of a middle Paleolithic bone “flute”. In: *The Origins of Music* (edited by N.L. Wallin, B. Merker and S. Brown), MIT Press, 235–268.
- Rao, Y., Carterette, E. C., and Wu, Y. (1987). A comparison of the musical scales of the ancient Chinese bronze bell ensemble and the modern bamboo flute. *Perception and Psychophysics* 61(6), 547–562.
- Tarnopolsky, A., Fletcher, N. H., Hollenberg, L., Lange, B., Smith, J., and Wolfe, J. (2005). The vocal tract and the sound of a didgeridoo, *Nature* 436, 39.
- Thrasher, A. (2001). “Di” in *The New Grove Dictionary* (edited by S. Sadie), Macmillan, Vol. 7, 277–279.
- Tsai, C. -G. (2003). Relating the harmonic-rich sound of the Chinese flute (*dizi*) to the cubic nonlinearity of its membrane. Stockholm Music Acoustics Conference, 303–306, 2003.
- Tsai, C. -G. (2004a). *The Chinese Membrane Flute (dizi): Physics and Perception of its Tones*. PhD thesis, Humboldt University Berlin.
- Tsai, C. -G. (2004b). Helmholtz’s nasality revisited: physics and perception of sounds with predominance of upper odd-numbered harmonics. Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics, March 31–April 3, Nara, Japan.
- Tsai, C.-G. (2004c). Auditory grouping in the perception of roughness induced by subharmonics: empirical findings and a qualitative model. Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics, March 31–April 3, Nara, Japan.
- Tsai, C.-G. (2004d). The timbre space of the Chinese membrane flute (*dizi*): physical and psychoacoustical effects. 148th Meeting of the Acoustical Society of America, November 15–19, San Diego.
- Valette, C. (1995). The mechanics of vibrating strings. In: *Mechanics of Musical Instruments* (edited by A. Hirschberg, J. Kergomard and G. Weinreich), Springer-Verlag, 115–184.