

異向性材料半平面問題之熱應力解析

薛明憲*

馬劍清**

中華民國 台北市

國立台灣大學

機械工程研究所

摘 要

本文主要探討二維半無窮域異向性熱傳與熱應力之平面應變與平面應力問題，由於本問題中熱與力為非耦合的狀況，故可先將溫度場分佈求出，再利用此溫度場作為求解應力場中的熱負荷，並藉由邊界條件來解析應力場全場解。在溫度場中，本文將採用線性座標轉換法，首先將二維異向性熱傳控制方程式轉換成相關之二維等向性熱傳問題，並利用此簡化之控制方程式解析在新座標系中之溫度場，再藉由線性座標逆轉換，便可獲得在原座標系之下的溫度場。而應力場則是採用位移場待定係數法，配合溫度場之熱負荷條件以及應力邊界條件，便可解析在此溫度負荷下的應力場全場分佈。文中將針對不同的材料係數，以數值計算來探討異向性材料對溫度以及應力場的影響。

關鍵詞：線性座標轉換法、異向性材料、熱傳導、熱應力、半無窮域。

一、前 言

複合材料在工程上的應用，在近數十年來已經有相當的成果，因為其具有質輕强度高之優點，舉凡在國防工業、航太工業、半導體工業，甚至民生工業等等都已開始大量使用。早期的複合材料受限於製造技術問題與應用發展的限制，不但價格過高，而且發展性不大，對於其相關之科學研究造成很大的阻礙。但是在眾多學者的努力研究及發展下，複合材料的相關理論與實驗，或者是其應用與推廣上都已漸漸成熟，使得複合材料的相關理論已成為許多學者致力研究的對象。壓電材料在精密工業的應用上是不可缺的元件，而在重複使用的過程中亦常伴隨著元件溫度升高的問題，尤其在高頻振動時十分嚴重，不僅對壓電元件造成損傷，亦對其精密定位的功能影響甚巨。而近十幾年來電腦業的發展迅速，例如在封裝及表面塗層中，由於在加工中必須以高溫進行，因此在高溫環境下容易造成破壞或是裂痕的產生，並且在製成後可能會有殘留應力的存

在，對於組件或是機件上會造成不可預知的破損問題，故須針對溫度分佈所造成的熱應力問題作深入之探討，並計算出在受熱情況下材料的溫度及應力分佈，再針對其應力分佈來分析在此溫度負載下對材料會造成何種的損傷，以解決在製造過程中可能會遇到之熱應力問題。然而針對複合材料以及壓電材料，大都以異向性材料作為分析模型，因此本文將針對異向性材料承受熱負載作為分析重點。

針對異向性材料熱應力問題的解析方式，在理論上大都是採用溫度場以及應力場非耦合(uncouple)的理論作探討，先由熱傳分析中藉由熱傳問題之邊界條件解出全場的溫度分佈，然後再藉由此溫度分佈作為應力場中之外加負荷，再配合力學邊界條件，就可求得此熱負荷下之熱應力全場解。然而在異向性理論的探討中，溫度場之控制方程式並不是所謂的標準式，在解決這種問題上往往需要進行繁雜的運算公式，甚至有時候得到其數學解析，但不易得知其物理現象之狀況。故為了簡化異向性問題的複雜度，必須針對

* 研究生 ** 教授

控制方程式作適當的處理，以期將異向性控制方程式能簡化成爲一般標準式，便可以配合一般偏微分方程式的解析方式來處理問題。至於應力場解析方面，由於是異向性材料，故其分析方式與一般等向性問題差異頗大，故解析方式比較複雜。

在固體力學理論中之等向性問題已經發展成熟，但對於異向性材料的分析則猶未完備，不僅是控制方程式的複雜度增加，在數學解析上也必須經過特殊的處理，才能達到顯著的效果，因此在早期時對於異向性問題的分析往往遭遇相當多的困難。但在最近幾十年來，已經有不少針對異向性熱傳與熱應力問題作較深入研究。在異向性熱傳問題上，Carslaw 與 Jaeger [1] 早在 1950 年就已經探討相關的理論，其中針對異向性材料的基本理論多所著墨。Ozisik [2] 乃針對等向性以及異向性熱傳問題作整體性的整理，並且舉出一些問題作相關的解析。1972 年 Padovan [3] 則是考慮暫態情況下，求解在邊界給定一溫度負載時之二維異向性半無窮域之熱傳問題，在文中是採用傅立葉 (Fourier) 以及拉普拉斯 (Laplace) 轉換來解析。1973 年 Chang, *et al.* [4] 求解出異向性熱傳問題之格林 (Green) 函數解。1977 年 Mulholland 與 Gupta [5] 處理三維異向性穩態熱傳問題，並利用簡單的座標轉換，將複雜的三維異向性控制方程式轉換成困難度較低的相關等向性控制方程式，並舉出一全無窮域的問題來說明。Chang [6] 利用傅立葉轉換求解三維異向性暫態熱傳問題，並且利用分離變數法簡化控制方程式中之變數複雜度，以解得其格林函數解。1979 年 Poon, *et al.* [7] 採用座標轉換的方式，針對三維直角座標系以及圓柱座標系暫態熱傳問題作廣泛性的討論，並且舉出實例來應證座標轉換的優點。Poon [8] 針對複合層板之熱傳問題利用座標轉換方法，使異向性問題經由座標轉換後成爲等向性或是正交性 (orthotropic) 問題，並且也提出在層板之間的座標轉換時爲了配合邊界之間不能因座標轉換而導致分離，故修正了座標轉換的形式。1986 年 Zhang [9] 則利用不同區域採用不同座標的分割接合技術 (partition-matching technique)，求解二維異向性單層板的溫度場。1995 年 Mindolin 與 Uzdalev [10] 把重點放在二維異向性單層板受點熱源的問題上，文中利用傅立葉轉換的方式，求得在層板表面受熱狀態下的溫度分佈全場解。

另外在異向性熱應力問題上，早在 1958 年 Sharma [11] 就針對異向性半無窮域做過探討，文中先求解溫度場，利用邊界給定已知的溫度分佈狀態來求得全場溫度，而在應力場探討中則利用位移勢能函數 (displacement potential function) 代入應力控制方程式中，並配合先前所得之溫度全場解與自由邊界的條件來解得應力場分佈。1966 年 Baker [12] 則是利用傅立葉轉換，概略描述正交性層板在層板表面上受熱後的應力求解方法，並且利用複變方式表示其應力場。1972 年 Akoz 與 Tauchert [13] 則採用傅立葉積分法來研究正交性材料在半無窮域表面受分段式均佈溫度載荷時，其溫度分佈以及熱應力的全場解，在文中先討論在半無窮域下的格林函數解，包括溫度與應力場，之後再利用此解進一步獲得在邊界表面上給定任意的溫度負載下之溫度場及應力場。1974 年 Akoz 與 Tauchert [14] 同樣採用傅立葉積分法，針對正交性單層板表面受熱問題作解析，並針對平面應變與平面應力兩方面作討論。Padovan [15] 則是以位移場出發，利用待定係數法的方式，解得在半無窮域下之二維穩態異向性應力全場解，在此文中的溫度場也是採用待定係數法列出，而溫度及應力問題都是利用傅立葉轉換的求解方式，並且以不同的複合材料來說明材料異向性會導致相當明顯的應力分佈改變。1975 年 Tauchert 與 Akoz [16] 則是採用複變解析法來研究異向性層板中之溫度場與應力場之穩態分佈，並根據不同的溫度邊界給定來表達溫度場通解，以及在此邊界條件下所得到的應力場通解，由文中結果顯示在不同材料係數組合下，其溫度與應力場的分佈會有急遽的改變。1991 年 Thangjitham 與 Choi [17] 則是利用傅立葉轉換，來分析異向性多層板的熱應力問題，文中的重點是放在利用剛性矩陣法 (stiffness matrix method) 求出複合層板之應力場分佈，以便能簡化其控制方程式以及變數上的複雜度。

1992 年 Ma [18] 針對異向性雙層楔形體之反平面問題討論中，提出異向性材料與等向性材料在極座標系統中轉換關係式。1996 年 Ma [19] 進一步從二維反平面問題中建立了異向性材料跟等向性材料全場解析之間的關係與轉換。由於觀察二維異向性熱傳控制方程式與二維異向性反平面控制方程式，可知兩者的表示式除了係數不同以外，其偏微分方程式的形式是相同的，因此可

以利用座標轉換來解決異向性溫度場的問題，也就是將異向性熱傳問題經由適當的轉換公式，將其轉換成等向性熱傳問題，不僅可以簡化控制方程式，也可同時得到相關的邊界條件表示式。

在異向性熱傳問題中最難處理的就是處理其控制方程式，但是藉由上述的概念，如果能利用相關的轉換公式將原本的異向性控制方程式改變成等向性控制方程式，由於等向性控制方程式為拉普拉斯方程式，此控制方程式具有材料係數較少、困難度低、發展成熟之特點，因此分析上比較方便且迅速。在本文中將針對二維異向性問題的解析為主體，分成兩部分作探討，首先藉由非耦合的分析方式，先討論溫度場之全場解析，再將此溫度場代入應力控制方程式中求得應力全場解。文中先將探討利用線性座標轉換的方式，將異向性熱傳控制方程式轉換成相關的等向性熱傳控制方程式，再利用傅立葉轉換法求得在此等向性熱傳問題上的溫度場，然後經由座標轉換的方式轉回原先的異向性材料溫度全場解，同時利用此溫度場分佈當作應力問題中的外力負載，在此採用位移待定係數法的方式求得應力全場解。本文之結果為正交性材料，但其分析方法亦可以推廣解析一般二維之平面異向性材料問題。在本文中將針對半無窮域問題，先求出溫度之格林函數解以及應力場解，然後再討論給定一段式均佈溫度之邊界情況下的全場解，並且針對不同的熱傳及材料係數來探討異向性材料的材料係數對溫度以及應力場的影響。

二、線性座標轉換之基本理論

考慮一均質之異向性材料具有不隨溫度改變之材料係數特性。針對二維異向性材料域內承受一熱源強度 $q(x_i, t)$ ，其熱傳導控制方程式可表示為

$$K_{ij} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{k_{22}} q(x_i, t) = \frac{\rho c_p}{k_{22}} \frac{\partial T}{\partial t} \quad i=1, 2 \quad j=1, 2 \quad (1)$$

式中 $\mathbf{K}$ 為熱傳導係數矩陣

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{22} & k_{22} \\ k_{12} & 1 \\ k_{22} & \end{bmatrix} \quad K_{ij} = K_{ji} \quad (2)$$

而 T 為溫度場， k_{ij} 為熱傳導係數， ρ 與 c_p 分別代表材料密度與比熱。基於熱力學第二定律中所述，熱能與機械能之互換不是永遠可逆的，可以獲得 $k_{11}k_{22} > k_{12}^2$ 之條件，並且 $k_{11}, k_{22} > 0$ 。為了簡化此異向性控制方程式之複雜性，本文藉由線性座標轉換的方式，將異向性控制方程式轉換成相關之等向性控制方程式，而此線性座標轉換的形式可寫為

$$\begin{cases} X = x + q_1 y \\ Y = q_2 y \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{或表示為} \quad \xi = \mathbf{Q} \chi \quad (4)$$

$$\text{其中} \quad \xi = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad \chi = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & q_1 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

式(4)中之 $\mathbf{Q}$ 稱為線性座標轉換矩陣，此線性座標轉換矩陣的優點有下列幾項：

- (1) 可將二維異向性控制方程式轉換成為二維等向性控制方程式。
- (2) 可維持座標轉換之前後狀態下，兩者之水平方向各個位置不會因為座標轉換而改變或是扭曲，平面仍能保持平面，這種特性尤其在解決直線且平行之平面問題尤其有其優越性。
- (3) 在座標轉換後，水平方向只有等比例的增大或是縮小，並不會造成整體系統分開或是旋轉。

藉由線性座標轉換矩陣 (式(3)或式(4))，在新的座標系統下的控制方程式可改寫為

$$K_{ij} Q_{ki} Q_{sj} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_k \partial \xi_s} + \frac{1}{k_{22}} g(\xi_i, t) = \frac{\rho c_p}{k_{22}} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6)$$

為了得到相關的等向性控制方程式，則線性座標轉換矩陣需滿足式(7)之特性

$$K_{ij} Q_{ki} Q_{sj} = Q_{ki} K_{ij} Q_{js}^T = c \delta_{ks} \quad (7)$$

其中 c 為待定係數。則式(6)在新座標 (X, Y) 系統下可改寫為一標準之等向性熱傳控制方程式

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + \frac{1}{ck_{22}} g(X, Y, t) = \frac{\rho c_p}{ck_{22}} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (8)$$

另外藉由式(7)之條件，線性座標轉換矩陣 $\mathbf{Q}$ 與待定係數 c 可決定如下

$$q_1 = -\frac{k_{12}}{k_{22}} \quad q_2 = \frac{\sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}}{k_{22}} \quad c = \frac{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}{k_{22}^2} \quad (9)$$

三、溫度場與熱應力場之理論分析

3.1 溫度場之全場解析

考慮一穩態問題之半無窮域異向性材料，承受一表面分佈溫度負載 $f(x)$ 之邊界條件， x - y 座標系統及幾何形狀如圖 1 所示，半無窮域是在 $y \geq 0$ 之範圍。針對此穩態異向性問題的熱傳控制方程式，可表示如下

$$k_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2k_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + k_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (10)$$

邊界條件為

$$T(x, 0) = f(x) \quad (11)$$

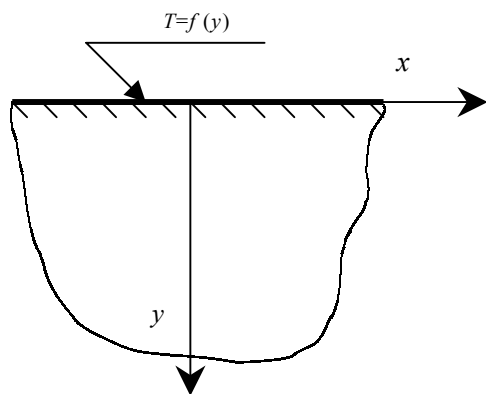


圖 1 在座標系 (x, y) 下半無窮域之幾何分佈與邊界條件

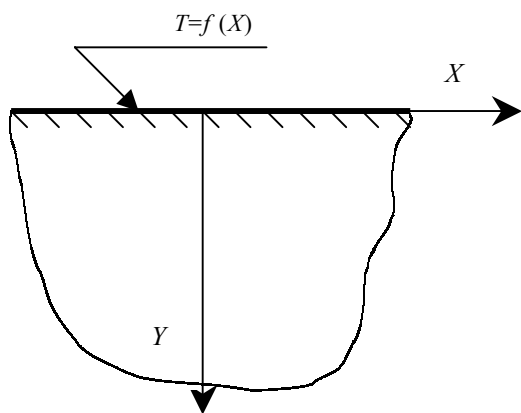


圖 2 在座標系 (X, Y) 下半無窮域之幾何分佈與邊界條件圖

另外為了符合物理現象，可假設在遠離表面之無窮遠處溫度場不能出現發散的不合理現象，即

$$T(x, \infty) \rightarrow \text{有限值} \quad (12)$$

為了簡化解題之複雜度，在此利用式(4)的線性座標轉換，可將式(10)之異向性控制方程式以及邊界條件轉換成下式

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} = 0 \quad (13)$$

$$T(X, 0) = f(X) \quad (14)$$

$$T(X, \infty) \rightarrow \text{有限值} \quad (15)$$

在此座標轉換下之幾何形狀如圖 2 所示。利用傅立葉轉換，可將式(13)~(15)轉換成

$$\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial Y^2} - \omega^2 \hat{T} = 0 \quad (16)$$

$$\hat{T}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega) \quad (17)$$

$$\hat{T}(\omega, \infty) \rightarrow \text{有限值} \quad (18)$$

在此所使用之傅立葉轉換方程式為

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega, Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(X, Y) e^{-i\omega X} dX \\ f(X, Y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega, Y) e^{i\omega X} d\omega \end{aligned} \quad (19)$$

式(16)之傅立葉域下的通解可表示為

$$\hat{T}(\omega, Y) = H_1 e^{-\omega Y} + H_2 e^{\omega Y} \quad (20)$$

如表面分佈溫度負載 $f(x)$ 為集中溫度負載，可以表示為

$$f(x) = T_0 \delta(x) \quad (21)$$

其中 $\delta(x)$ 代表脈衝函數。將式(17)(18)之邊界條件代入通解後，再經由傅立葉逆轉換即可得到在新座標下之半無窮域溫度場全場解為

$$T(X, Y) = \frac{T_0}{\pi} \frac{|Y|}{X^2 + Y^2} \quad (22)$$

再利用線性座標轉換的關係，就可得到在 (x, y)

座標系的格林函數溫度全場解

$$T(x, y) = \frac{T_0}{\pi} \frac{|q_2 y|}{(x + q_1 y)^2 + (q_2 y)^2} \quad (23)$$

如考慮在 $y = 0$ 之邊界給定溫度分佈為分段式均佈溫度如下

$$T(x, 0) = \begin{cases} T_0 & |x| \leq d \\ 0 & |x| > d \end{cases} \quad (24)$$

利用上述相同的方法，則可得到在此溫度負載下的 (x, y) 座標系溫度全場解為

$$T(x, y) = \frac{T_0}{\pi} \left[\tan^{-1} \frac{d + (x + q_1 y)}{q_2 y} + \tan^{-1} \frac{d - (x + q_1 y)}{q_2 y} \right] \quad (25)$$

3.2 熱應力場之全場解析

對於二維異向性應力場平面問題，本文同時針對平面應力與平面應變兩種情況作為探討。因為在 3.1 節中，二維溫度場的溫度分佈與 z 軸無關，所以應力場可根據半無窮域在 z 軸的狀態來做分類。若此半無窮域在 z 軸方向為無限延伸，則屬於平面應變問題。如果此半無窮域在 z 軸方向分佈平均但是厚度很小，則屬於平面應力問題。二維平面應變問題中，其位移場可表示為式 (26) 之形式

$$u = u(x, y) \quad v = v(x, y) \quad w = 0 \quad (26)$$

在此 u 與 v 分別表示在 x 與 y 方向的位移， w 則為 z 方向之位移，正交性材料 (orthotropic material) 平面應變問題之應力與應變之關係可寫為

$$\sigma_{xx} = C_{11} \varepsilon_{xx} + C_{12} \varepsilon_{yy} - \beta_1 T \quad (27)$$

$$\sigma_{yy} = C_{12} \varepsilon_{xx} + C_{22} \varepsilon_{yy} - \beta_2 T \quad (28)$$

$$\sigma_{xy} = C_{44} \varepsilon_{xy} \quad (29)$$

其中 C_{jk} 為異向性材料之彈性係數，或稱為材料勁度矩陣。 β_j 為應力-溫度係數，其與熱傳導係數 α_k 的關係為

$$\beta_1 = C_{11} \alpha_1 + C_{12} \alpha_2 + C_{13} \alpha_3 \quad (30)$$

$$\beta_2 = C_{12} \alpha_1 + C_{22} \alpha_2 + C_{23} \alpha_3 \quad (31)$$

在不考慮體力 (body forces) 的情況下，平面 (正交性材料) 熱彈性問題的控制方程式可由其位移場表示為

$$C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (C_{12} + C_{44}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \beta_1 \frac{\partial T}{\partial x} \quad (32)$$

$$C_{44} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (C_{12} + C_{44}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \beta_2 \frac{\partial T}{\partial y} \quad (33)$$

或以較簡潔矩陣形式表示熱彈性問題之控制方程式如下式

$$\mathbf{A}_1 \boldsymbol{\eta}_{,xx} + \mathbf{A}_2 \boldsymbol{\eta}_{,yy} + \mathbf{A}_3 \boldsymbol{\eta}_{,xy} = \mathbf{B} \boldsymbol{\varphi}(x, y) \quad (34)$$

其中

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} + C_{44} \\ C_{12} + C_{44} & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (40)$$

對於平面應力問題，所限制的力學條件是針對應力部分，可表示為

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (41)$$

利用式 (41) 的關係，可以證明出，只要將式 (26)~(32) 中的係數利用表 1 的關係式，就可轉換

成平面應力下的各項相關應力應變方程式。因此，只要能求出在平面應變情況下之應力場分佈，則可以利用表 1 將係數轉換，就可以得到平面應力狀態下相同外力及邊界條件下之應力場分佈。因此在本文僅針對平面應變做解析及計算，平面應力部分的數值計算就不再詳述。

在平面應變問題上，經由傅立葉轉換方程式 (19)，應力場控制方程式(34)可轉換成

$$\mathbf{A}_2 \frac{\partial^2 \hat{\boldsymbol{\eta}}}{\partial y^2} + i\omega \mathbf{A}_3 \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}}{\partial y} - \omega^2 \mathbf{A}_1 \hat{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{B} \hat{\boldsymbol{\phi}}(\omega, y) \quad (42)$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix} \hat{u}(\omega, y) \\ \hat{v}(\omega, y) \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \begin{bmatrix} i\omega \hat{T}(\omega, y) \\ \frac{\partial \hat{T}(\omega, y)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (44)$$

表 1 平面應變與平面應力控制方程式係數互換表

在平面應變問題下之係數	在平面應力問題下轉換相關之係數
C_{11}	$C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}$
C_{22}	$C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}}$
C_{12}	$C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}$
C_{44}	C_{44}
β_1	$\beta_1 - \frac{C_{13}}{C_{33}}\beta_3$
β_2	$\beta_2 - \frac{C_{23}}{C_{33}}\beta_3$ ($\beta_3 = C_{13}\alpha_1 + C_{23}\alpha_2 + C_{33}\alpha_3$)

由 3.1 節中已知溫度場全場解為式(23)之格林函數，在傅立葉轉換域中可得

$$\hat{T}(\omega, y) = T_0 e^{-\omega(q_2 + iq_1)y} \quad (45)$$

為了解決式(42)之非齊次式解，在此我們假設位移場表示為下列矩陣式

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}(\omega, y) = \sum_{k=1}^2 \psi_k \mathbf{D}_k e^{\lambda_k y} + \mathbf{R} e^{-\omega(q_2 + iq_1)y} \quad (46)$$

其中 λ_k 與 $\mathbf{D}_k$ 為與材料係數相關的特徵值與特徵向量， ψ_k 與 $\mathbf{R}$ 為待定係數與矩陣。將式(46)代入式(42)後可得

$$\sum_{k=1}^2 \psi_k [\mathbf{A}_2 \lambda_k^2 + i\mathbf{A}_3 \omega \lambda_k - \omega^2 \mathbf{A}_1] \mathbf{D}_k e^{\lambda_k y} + [\mathbf{A}_2 (q_2 + iq_1)^2 - i\mathbf{A}_3 (q_2 + iq_1) - \mathbf{A}_1] \omega^2 \mathbf{R} e^{-\omega(q_2 + iq_1)y} = \mathbf{B} \hat{\boldsymbol{\phi}}(\omega, y) \quad (47)$$

$$\text{若令 } \sum_{k=1}^2 \psi_k [\mathbf{A}_2 \lambda_k^2 + i\mathbf{A}_3 \omega \lambda_k - \omega^2 \mathbf{A}_1] \mathbf{D}_k e^{\lambda_k y} = 0 \quad (48)$$

則

$$[\mathbf{A}_2 (q_2 + iq_1)^2 - i\mathbf{A}_3 (q_2 + iq_1) - \mathbf{A}_1] \omega^2 \mathbf{R} e^{-\omega(q_2 + iq_1)y} = \mathbf{B} \hat{\boldsymbol{\phi}}(\omega, y) \quad (49)$$

在式(48)中，由於 ψ_k ， $\mathbf{D}_k$ 不能為 0，故必須使得式中的 $\mathbf{A}_2 \lambda_k^2 + i\mathbf{A}_3 \omega \lambda_k - \omega^2 \mathbf{A}_1$ 之行列式必須為零，即

$$\det [\mathbf{A}_2 \lambda_k^2 + i\mathbf{A}_3 \omega \lambda_k - \omega^2 \mathbf{A}_1] = 0 \quad (50)$$

整理以後可得到以 λ_k 為變數之一元四次方程式

$$C_{44} C_{22} \lambda_k^4 + (2C_{12} C_{44} - C_{11} C_{22} + C_{12}^2) \omega^2 \lambda_k^2 + C_{11} C_{44} \omega^4 = 0 \quad (51)$$

為了計算 λ_k 之方便，在此先令

$$\lambda_k = i\omega \hat{\lambda}_k \quad (52)$$

代入式(51)可得

$$C_{44} C_{22} \hat{\lambda}_k^4 - (2C_{12} C_{44} - C_{11} C_{22} + C_{12}^2) \hat{\lambda}_k^2 + C_{11} C_{44} = 0 \quad (53)$$

式(53)為一實係數一元四次方程式，可求得兩組共軛複數根 $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3, \hat{\lambda}_4$ ，其中 $\hat{\lambda}_3 = \bar{\hat{\lambda}}_1$ ， $\hat{\lambda}_4 = \bar{\hat{\lambda}}_2$ 。如令

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_1 &= \gamma_1 + i\delta_1 & \hat{\lambda}_2 &= \gamma_2 + i\delta_2 \\ \hat{\lambda}_3 &= \gamma_1 - i\delta_1 & \hat{\lambda}_4 &= \gamma_2 - i\delta_2\end{aligned}\quad (54)$$

其中 $\delta_1 > \delta_2 > 0$ 。將式(54)代回式(52)後可得特徵值為 $\lambda_k = \omega \hat{\lambda}_k$ ，其中

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_1 &= -\delta_1 + i\gamma_1 & \hat{\lambda}_2 &= -\delta_2 + i\gamma_2 \\ \hat{\lambda}_3 &= \delta_1 + i\gamma_1 & \hat{\lambda}_4 &= \delta_2 + i\gamma_2\end{aligned}\quad (55)$$

但爲了配合 y 在逼近無窮遠處時其位移場 η 必須收斂，則 λ_k 之實部須爲負值的根，也就是 λ_1 與 λ_2 。分別將 λ_1 與 λ_2 代入式(48)中就可以求得特徵向量 $\mathbf{D}_i$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i(C_{12} + C_{44})\hat{\lambda}_1}{\sqrt{[C_{44}\hat{\lambda}_1^2 - C_{11}]^2 - [(C_{12} + C_{44})\hat{\lambda}_1]^2}} \\ \frac{C_{44}\hat{\lambda}_1^2 - C_{11}}{\sqrt{[C_{44}\hat{\lambda}_1^2 - C_{11}]^2 - [(C_{12} + C_{44})\hat{\lambda}_1]^2}} \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i(C_{12} + C_{44})\hat{\lambda}_2}{\sqrt{[C_{44}\hat{\lambda}_2^2 - C_{11}]^2 - [(C_{12} + C_{44})\hat{\lambda}_2]^2}} \\ \frac{C_{44}\hat{\lambda}_2^2 - C_{11}}{\sqrt{[C_{44}\hat{\lambda}_2^2 - C_{11}]^2 - [(C_{12} + C_{44})\hat{\lambda}_2]^2}} \end{bmatrix} \quad (57)$$

至於 $\mathbf{R}$ 的求法，可由式(49)中求出

$$\mathbf{R} = \frac{T_0}{\omega} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \quad (58)$$

其中

$$\begin{aligned}r_1 &= \frac{1}{\Delta} \{ -\{2q_1q_2C_{22}\vartheta_1 - [C_{44} - (q_2^2 - q_1^2)C_{22}]\vartheta_2\} \beta_1 \\ &\quad + (C_{12} + C_{44})[2q_1q_2\vartheta_1 + (q_2^2 - q_1^2)\vartheta_2] \beta_2 \} \\ &\quad + \frac{i}{\Delta} \{ -\{2q_1q_2C_{22}\vartheta_2 + [C_{44} - (q_2^2 - q_1^2)C_{22}]\vartheta_1\} \beta_1 \\ &\quad + (C_{12} + C_{44})[2q_1q_2\vartheta_1 - (q_2^2 - q_1^2)\vartheta_2] \beta_2 \}\end{aligned}\quad (59)$$

$$\begin{aligned}r_2 &= \frac{1}{\Delta} \{ -(C_{12} + C_{44})(q_2\vartheta_1 - q_1\vartheta_2) \beta_1 \\ &\quad + \{ [C_{11} - (q_2^2 - q_1^2)C_{44}](\vartheta_1q_2 - \vartheta_2q_1) \\ &\quad + 2q_1q_2C_{44}(\vartheta_1q_1 + \vartheta_2q_2) \} \beta_2 \} \\ &\quad + \frac{i}{\Delta} \{ -(C_{12} + C_{44})(q_1\vartheta_1 + q_2\vartheta_2) \beta_1 \\ &\quad + \{ [C_{11} - (q_2^2 - q_1^2)C_{44}](\vartheta_1q_1 + \vartheta_2q_2) \\ &\quad + 2q_1q_2C_{44}(\vartheta_2q_1 - \vartheta_1q_2) \} \beta_2 \}\end{aligned}\quad (60)$$

$$\Delta = \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 \quad (61)$$

$$\begin{aligned}\vartheta_1 &= [(q_2^4 - 6q_1^2q_2^2 + q_1^4)C_{22} + 2(q_2^2 - q_1^2)C_{12} + C_{11}]C_{44} \\ &\quad + (q_2^2 - q_1^2)(C_{12}^2 - C_{11}C_{22})\end{aligned}\quad (62)$$

$$\vartheta_2 = 2q_1q_2\{-(q_2^2 - q_1^2)C_{22} + C_{12}\}C_{44} - (C_{12}^2 - C_{11}C_{22})\quad (63)$$

因此便可得到平面應變在轉換域中之位移跟應力通解如下

$$\begin{aligned}\hat{\eta} &= \begin{bmatrix} \hat{u}(\omega, y) \\ \hat{v}(\omega, y) \end{bmatrix} = \psi_1 \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{bmatrix} e^{\hat{\lambda}_1 \omega y} + \psi_2 \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \end{bmatrix} e^{\hat{\lambda}_2 \omega y} \\ &\quad + \frac{T_0}{\omega} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} e^{-\omega(q_2 + iq_1)y}\end{aligned}\quad (64)$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{xx} &= [iC_{11}d_{11} + \hat{\lambda}_1C_{12}d_{21}]\psi_1\omega e^{\hat{\lambda}_1\omega y} \\ &\quad + [iC_{11}d_{12} + \hat{\lambda}_2C_{12}d_{22}]\psi_2\omega e^{\hat{\lambda}_2\omega y} + T_0\hat{\sigma}_{xx}^{(0)}e^{-\omega(q_2 + iq_1)y}\end{aligned}\quad (65)$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{yy} &= [iC_{12}d_{11} + \hat{\lambda}_1C_{22}d_{21}]\psi_1\omega e^{\hat{\lambda}_1\omega y} \\ &\quad + [iC_{12}d_{12} + \hat{\lambda}_2C_{22}d_{22}]\psi_2\omega e^{\hat{\lambda}_2\omega y} + T_0\hat{\sigma}_{yy}^{(0)}e^{-\omega(q_2 + iq_1)y}\end{aligned}\quad (66)$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{xy} &= [iC_{44}d_{21} + \hat{\lambda}_1C_{44}d_{11}]\psi_1\omega e^{\hat{\lambda}_1\omega y} \\ &\quad + [iC_{44}d_{22} + \hat{\lambda}_2C_{44}d_{12}]\psi_2\omega e^{\hat{\lambda}_2\omega y} + T_0\hat{\sigma}_{xy}^{(0)}e^{-\omega(q_2 + iq_1)y}\end{aligned}\quad (67)$$

其中

$$\hat{\sigma}_{xx}^{(0)} = iC_{11}r_1 - (q_2 + iq_1)C_{12}r_2 - \beta_1 \quad (68)$$

$$\hat{\sigma}_{yy}^{(0)} = iC_{12}r_1 - (q_2 + iq_1)C_{22}r_2 - \beta_2 \quad (69)$$

$$\hat{\sigma}_{xy}^{(0)} = C_{44}[-(q_2 + iq_1)r_1 + ir_2] \quad (70)$$

式(64)~(67)中的 ψ_1 與 ψ_2 仍爲未定係數，需由應力場的邊界條件決定。由於在半無窮域的表面上並沒有任何施力，也就是所謂的自由邊界，因此可以得知邊界條件爲在 $y = 0$ 處的應力場應滿足下式之條件

$$\sigma_{xy}(x, 0) = 0 \quad \sigma_{yy}(x, 0) = 0 \quad (71)$$

對式(71)之邊界條件作傅立葉轉換後，並將式(66)及(67)代入此傅立葉轉換域下之邊界條件，便可求得 ψ_1 與 ψ_2

$$\psi_1 = \frac{T_0}{\omega} \hat{\psi}_1 \quad (72)$$

$$\psi_2 = \frac{T_0}{\omega} \hat{\psi}_2 \quad (73)$$

其中 $\hat{\psi}_1$ 與 $\hat{\psi}_2$ 為兩複數

$$\hat{\psi}_1 = \frac{1}{\zeta} [(iC_{44}d_{22} + \hat{\lambda}_2 C_{44}d_{12})\hat{\sigma}_{yy}^{(0)} - (iC_{12}d_{12} + \hat{\lambda}_2 C_{22}d_{22})\hat{\sigma}_{xy}^{(0)}] \quad (74)$$

$$\hat{\psi}_2 = -\frac{1}{\zeta} [(iC_{44}d_{21} + \hat{\lambda}_2 C_{44}d_{11})\hat{\sigma}_{yy}^{(0)} - (iC_{12}d_{11} + \hat{\lambda}_2 C_{22}d_{21})\hat{\sigma}_{xy}^{(0)}] \quad (75)$$

$$\zeta = C_{44}(d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12})(C_{22}\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2 + C_{12}) + iC_{44}(C_{12}d_{11}d_{12} - C_{22}d_{21}d_{22})(\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2) \quad (76)$$

因此便可以得到在傅立葉域下之應力全場解

$$\hat{\sigma}_{xx} = T_0[iC_{11}d_{11} + \hat{\lambda}_1 C_{12}d_{21}]\hat{\psi}_1 e^{\hat{\lambda}_1 \omega y} + T_0[iC_{11}d_{12} + \hat{\lambda}_2 C_{12}d_{22}]\hat{\psi}_2 e^{\hat{\lambda}_2 \omega y} + T_0\hat{\sigma}_{xx}^{(0)} e^{-\omega(q_2 + iq_1)y} \quad (77)$$

$$\hat{\sigma}_{yy} = T_0[iC_{12}d_{11} + \hat{\lambda}_1 C_{22}d_{21}]\hat{\psi}_1 e^{\hat{\lambda}_1 \omega y} + T_0[iC_{12}d_{12} + \hat{\lambda}_2 C_{22}d_{22}]\hat{\psi}_2 e^{\hat{\lambda}_2 \omega y} + T_0\hat{\sigma}_{yy}^{(0)} e^{-\omega(q_2 + iq_1)y} \quad (78)$$

$$\hat{\sigma}_{xy} = T_0[iC_{44}d_{21} + \hat{\lambda}_1 C_{44}d_{11}]\hat{\psi}_1 e^{\hat{\lambda}_1 \omega y} + T_0[iC_{44}d_{22} + \hat{\lambda}_2 C_{44}d_{12}]\hat{\psi}_2 e^{\hat{\lambda}_2 \omega y} + T_0\hat{\sigma}_{xy}^{(0)} e^{-\omega(q_2 + iq_1)y} \quad (79)$$

利用傅立葉逆轉換公式

$$F^{-1}[e^{-\omega|y|}] = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (80)$$

$$F^{-1}[ie^{-\omega|y|}] = \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (81)$$

因此可求得在 (x, y) 域下之應力全場解

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y) = & \frac{T_0}{\pi} \text{Re}\{[iC_{11}d_{11} + \hat{\lambda}_1 C_{12}d_{21}]\hat{\psi}_1\} \frac{\delta_1 y}{(x + \gamma_1 y)^2 + (\delta_1 y)^2} \\ & + \frac{T_0}{\pi} \text{Im}\{[iC_{11}d_{11} + \hat{\lambda}_1 C_{12}d_{21}]\hat{\psi}_1\} \frac{x + \gamma_1 y}{(x + \gamma_1 y)^2 + (\delta_1 y)^2} \\ & + \frac{T_0}{\pi} \text{Re}\{[iC_{11}d_{12} + \hat{\lambda}_2 C_{12}d_{22}]\hat{\psi}_2\} \frac{\delta_2 y}{(x + \gamma_2 y)^2 + (\delta_2 y)^2} \\ & + \frac{T_0}{\pi} \text{Im}\{[iC_{11}d_{12} + \hat{\lambda}_2 C_{12}d_{22}]\hat{\psi}_2\} \frac{x + \gamma_2 y}{(x + \gamma_2 y)^2 + (\delta_2 y)^2} \\ & + \frac{T_0}{\pi} \text{Re}\{\hat{\sigma}_{xx}^{(0)}\} \frac{q_2 y}{(x + q_1 y)^2 + (q_2 y)^2} \\ & + \frac{T_0}{\pi} \text{Im}\{\hat{\sigma}_{xx}^{(0)}\} \frac{x + q_1 y}{(x + q_1 y)^2 + (q_2 y)^2} \end{aligned} \quad (82)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, y) = & \frac{T_0}{\pi} \text{Re}\{[iC_{12}d_{11} + \hat{\lambda}_1 C_{22}d_{21}]\hat{\psi}_1\} \frac{\delta_1 y}{(x + \gamma_1 y)^2 + (\delta_1 y)^2} \\ & + \frac{T_0}{\pi} \text{Im}\{[iC_{12}d_{11} + \hat{\lambda}_1 C_{22}d_{21}]\hat{\psi}_1\} \frac{x + \gamma_1 y}{(x + \gamma_1 y)^2 + (\delta_1 y)^2} \\ & + \frac{T_0}{\pi} \text{Re}\{[iC_{12}d_{12} + \hat{\lambda}_2 C_{22}d_{22}]\hat{\psi}_2\} \frac{\delta_2 y}{(x + \gamma_2 y)^2 + (\delta_2 y)^2} \\ & + \frac{T_0}{\pi} \text{Im}\{[iC_{12}d_{12} + \hat{\lambda}_2 C_{22}d_{22}]\hat{\psi}_2\} \frac{x + \gamma_2 y}{(x + \gamma_2 y)^2 + (\delta_2 y)^2} \\ & + \frac{T_0}{\pi} \text{Re}\{\hat{\sigma}_{yy}^{(0)}\} \frac{q_2 y}{(x + q_1 y)^2 + (q_2 y)^2} \\ & + \frac{T_0}{\pi} \text{Im}\{\hat{\sigma}_{yy}^{(0)}\} \frac{x + q_1 y}{(x + q_1 y)^2 + (q_2 y)^2} \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(x, y) = & \frac{T_0}{\pi} \text{Re}\{[iC_{44}d_{21} + \hat{\lambda}_1 C_{44}d_{11}]\hat{\psi}_1\} \frac{\delta_1 y}{(x + \gamma_1 y)^2 + (\delta_1 y)^2} \\ & + \frac{T_0}{\pi} \text{Im}\{[iC_{44}d_{21} + \hat{\lambda}_1 C_{44}d_{11}]\hat{\psi}_1\} \frac{x + \gamma_1 y}{(x + \gamma_1 y)^2 + (\delta_1 y)^2} \\ & + \frac{T_0}{\pi} \text{Re}\{[iC_{44}d_{22} + \hat{\lambda}_2 C_{44}d_{12}]\hat{\psi}_2\} \frac{\delta_2 y}{(x + \gamma_2 y)^2 + (\delta_2 y)^2} \\ & + \frac{T_0}{\pi} \text{Im}\{[iC_{44}d_{22} + \hat{\lambda}_2 C_{44}d_{12}]\hat{\psi}_2\} \frac{x + \gamma_2 y}{(x + \gamma_2 y)^2 + (\delta_2 y)^2} \\ & + \frac{T_0}{\pi} \text{Re}\{\hat{\sigma}_{xy}^{(0)}\} \frac{q_2 y}{(x + q_1 y)^2 + (q_2 y)^2} \\ & + \frac{T_0}{\pi} \text{Im}\{\hat{\sigma}_{xy}^{(0)}\} \frac{x + q_1 y}{(x + q_1 y)^2 + (q_2 y)^2} \end{aligned} \quad (84)$$

若針對式(25)的溫度場分佈，則利用上面所述的方式，可得在式(24)的分段式邊界均佈溫度分佈下，異向性材料半無窮域的應力全場解為

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y) = & \frac{T_0}{\pi} \text{Re}\{[iC_{11}d_{11} + \hat{\lambda}_1 C_{12}d_{21}]\hat{\psi}_1\} \\ & \cdot \left[\tan^{-1} \frac{d + (x + \gamma_1 y)}{\delta_1 y} + \tan^{-1} \frac{d - (x + \gamma_1 y)}{\delta_1 y} \right] \\ & + \frac{T_0}{\pi} \text{Im}\{[iC_{11}d_{11} + \hat{\lambda}_1 C_{12}d_{21}]\hat{\psi}_1\} \left[\ln \frac{[d + (x + \gamma_1 y)]^2 + (\delta_1 y)^2}{[d - (x + \gamma_1 y)]^2 + (\delta_1 y)^2} \right] \\ & + \frac{T_0}{\pi} \text{Re}\{[iC_{11}d_{12} + \hat{\lambda}_2 C_{12}d_{22}]\hat{\psi}_2\} \\ & \cdot \left[\tan^{-1} \frac{d + (x + \gamma_2 y)}{\delta_2 y} + \tan^{-1} \frac{d - (x + \gamma_2 y)}{\delta_2 y} \right] \\ & + \frac{T_0}{\pi} \text{Im}\{[iC_{11}d_{12} + \hat{\lambda}_2 C_{12}d_{22}]\hat{\psi}_2\} \left[\ln \frac{[d + (x + \gamma_2 y)]^2 + (\delta_2 y)^2}{[d - (x + \gamma_2 y)]^2 + (\delta_2 y)^2} \right] \\ & + \frac{T_0}{\pi} \text{Re}\{\hat{\sigma}_{xx}^{(0)}\} \left[\tan^{-1} \frac{d + (x + q_1 y)}{q_2 y} + \tan^{-1} \frac{d - (x + q_1 y)}{q_2 y} \right] \\ & + \frac{T_0}{\pi} \text{Im}\{\hat{\sigma}_{xx}^{(0)}\} \left[\ln \frac{[d + (x + q_1 y)]^2 + (q_2 y)^2}{[d - (x + q_1 y)]^2 + (q_2 y)^2} \right] \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}(x,y) = & \frac{T_0}{\pi} \operatorname{Re}\{[iC_{12}d_{11} + \hat{\lambda}_1 C_{22}d_{21}] \hat{\psi}_1\} \\
& \cdot \left[\tan^{-1} \frac{d+(x+\gamma_1 y)}{\delta_1 y} + \tan^{-1} \frac{d-(x+\gamma_1 y)}{\delta_1 y} \right] \\
& + \frac{T_0}{\pi} \operatorname{Im}\{[iC_{12}d_{11} + \hat{\lambda}_1 C_{22}d_{21}] \hat{\psi}_1\} \left[\ln \frac{[d+(x+\gamma_1 y)]^2 + (\delta_1 y)^2}{[d-(x+\gamma_1 y)]^2 + (\delta_1 y)^2} \right] \\
& + \frac{T_0}{\pi} \operatorname{Re}\{[iC_{12}d_{12} + \hat{\lambda}_2 C_{22}d_{22}] \hat{\psi}_2\} \\
& \cdot \left[\tan^{-1} \frac{d+(x+\gamma_2 y)}{\delta_2 y} + \tan^{-1} \frac{d-(x+\gamma_2 y)}{\delta_2 y} \right] \\
& + \frac{T_0}{\pi} \operatorname{Im}\{[iC_{12}d_{12} + \hat{\lambda}_2 C_{22}d_{22}] \hat{\psi}_2\} \left[\ln \frac{[d+(x+\gamma_2 y)]^2 + (\delta_2 y)^2}{[d-(x+\gamma_2 y)]^2 + (\delta_2 y)^2} \right] \\
& + \frac{T_0}{\pi} \operatorname{Re}\{\hat{\sigma}_{yy}^{(0)}\} \left[\tan^{-1} \frac{d+(x+q_1 y)}{q_2 y} + \tan^{-1} \frac{d-(x+q_1 y)}{q_2 y} \right] \\
& + \frac{T_0}{\pi} \operatorname{Im}\{\hat{\sigma}_{yy}^{(0)}\} \left[\ln \frac{[d+(x+q_1 y)]^2 + (q_2 y)^2}{[d-(x+q_1 y)]^2 + (q_2 y)^2} \right]
\end{aligned} \quad (86)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}(x,y) = & \frac{T_0}{\pi} \operatorname{Re}\{[iC_{44}d_{21} + \hat{\lambda}_1 C_{44}d_{11}] \hat{\psi}_1\} \\
& \cdot \left[\tan^{-1} \frac{d+(x+\gamma_1 y)}{\delta_1 y} + \tan^{-1} \frac{d-(x+\gamma_1 y)}{\delta_1 y} \right] \\
& + \frac{T_0}{\pi} \operatorname{Im}\{[iC_{44}d_{21} + \hat{\lambda}_1 C_{44}d_{11}] \hat{\psi}_1\} \left[\ln \frac{[d+(x+\gamma_1 y)]^2 + (\delta_1 y)^2}{[d-(x+\gamma_1 y)]^2 + (\delta_1 y)^2} \right] \\
& + \frac{T_0}{\pi} \operatorname{Re}\{[iC_{44}d_{22} + \hat{\lambda}_1 C_{44}d_{12}] \hat{\psi}_2\} \\
& \cdot \left[\tan^{-1} \frac{d+(x+\gamma_2 y)}{\delta_2 y} + \tan^{-1} \frac{d-(x+\gamma_2 y)}{\delta_2 y} \right] \\
& + \frac{T_0}{\pi} \operatorname{Im}\{[iC_{44}d_{22} + \hat{\lambda}_1 C_{44}d_{12}] \hat{\psi}_2\} \left[\ln \frac{[d+(x+\gamma_2 y)]^2 + (\delta_2 y)^2}{[d-(x+\gamma_2 y)]^2 + (\delta_2 y)^2} \right] \\
& + \frac{T_0}{\pi} \operatorname{Re}\{\hat{\sigma}_{xy}^{(0)}\} \left[\tan^{-1} \frac{d+(x+q_1 y)}{q_2 y} + \tan^{-1} \frac{d-(x+q_1 y)}{q_2 y} \right] \\
& + \frac{T_0}{\pi} \operatorname{Im}\{\hat{\sigma}_{xy}^{(0)}\} \left[\ln \frac{[d+(x+q_1 y)]^2 + (q_2 y)^2}{[d-(x+q_1 y)]^2 + (q_2 y)^2} \right]
\end{aligned} \quad (87)$$

表 2 材料常數表

	熱傳導係數 (W/m · K)			異向性材料彈性常數 (GPa)				應力－溫度係數 (GPa/K)	
	k_{11}	k_{12}	k_{22}	c_{11}	c_{22}	c_{12}	c_{44}	β_1	β_2
1	23.7	11.7	22.3	120.0	30.0	19.5	7.5	1.3	1.0
2	237.0	11.7	22.3	120.0	30.0	19.5	7.5	1.3	1.0
3	23.7	-11.7	22.3	120.0	30.0	19.5	7.5	1.3	1.0
4	23.7	11.7	22.3	240.0	30.0	24.0	7.5	1.6	1.0

四、數值討論

爲了探討線性座標轉換對異向性熱傳與熱應力問題的關係，在本文中以四種不同材料係數組合作數值分析，以提供比較之依據。由表 2 中可發現此四項不同材料常數中，第二種材料的熱傳導係數 k_{11} 比 k_{22} 大十倍左右，而第三種材料的熱傳導係數 k_{12} 爲負值，至於第四種材料則是在力學彈性係數上有明顯不同，我們藉由數值計算的方式來探討不同材料在溫度與應力方面的差異性。在文中先從點熱源施於表面之問題開始，之後再針對分段式均佈溫度問題來研究其特性。

以下的數據計算皆以平面應變的條件來進行。圖 3~5 分別爲材料 1 在半無窮域之表面 $x = 0$ 與 $y = 0$ 處受到一點熱源作用下所得到的溫度場以及應力場 σ_{yy} 與 σ_{xy} 之全場解。由圖中可以發

現每個等值線圖形都呈現不對稱的分佈，尤其是圖 3 的等溫線圖之偏斜現象乃是受到熱傳係數的異向性所造成，如果針對等向性材料而言，在受到點熱源之負荷情況下，溫度場之等溫線應該會以圓形分佈方式向 y 軸方向逐漸對稱地擴大，但是在異向性材料中，此等溫線就會因爲異向性材料係數的因素而成為橢圓分佈，藉由等溫線之性質與式(22)可得知，此橢圓之長軸與 x 軸所夾之角度 ϕ 可表示爲

$$\phi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2q_1}{1-(q_1^2 + q_2^2)} \quad (88)$$

其中 ϕ 之正負依右手定則，由 x 軸以順時鐘方向所旋轉之角度爲正值。由於 $\tan^{-1} \frac{2q_1}{1-(q_1^2 + q_2^2)}$ 爲多值函數，若定義 ϕ 之範圍在 $-\pi$ 到 π 之間，則 ϕ 會出現兩

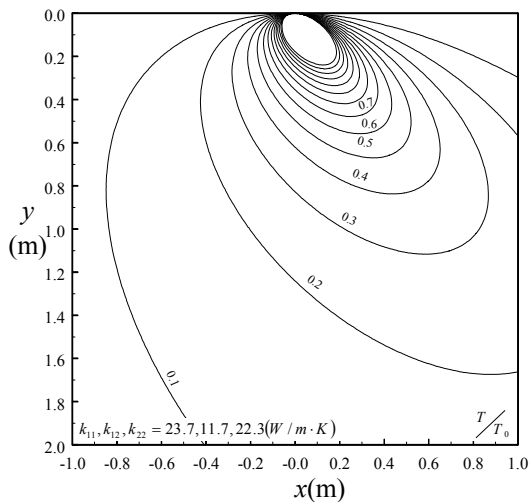


圖 3 在點熱源負荷下之半無窮域全場解等溫線圖

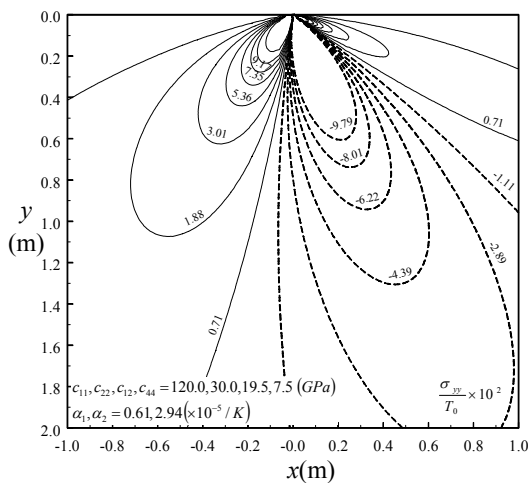


圖 4 在點熱源負荷下之半無窮域應力 σ_{yy} 全場解等應力線圖

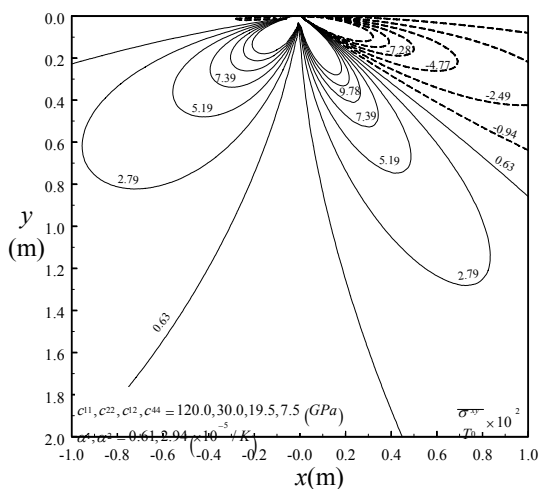


圖 5 在點熱源負荷下之半無窮域應力 σ_{xy} 全場解等應力線圖

個值，並且兩值為同值異號，但是由等溫線跟式(22)之關係，得知 ϕ 之正負可由 q_1 決定，若 q_1 為負值，則 ϕ 取正值；相對的，若是 q_1 為正值，則 ϕ 取負值。因此在材料 1 中的 q_1 為負，故整個橢圓之長軸與 x 軸之夾角可觀察得知為正，而此角度可由式(88)得知。圖 4 與圖 5 分別為應力場 σ_{yy} 與 σ_{xy} 等應力線圖，其應力最大值在施熱源附近，而應力會隨著遠離原點處而漸漸趨近於零。如果在等向性材料中受此相同之負載下，則應力場 σ_{yy} 相對於 y 軸將為對稱性分佈，而 σ_{xy} 則會相對於 y 軸作反對稱的分佈，但如今由於是異向性材料的原因，所以其應力分佈已經不再會針對某一座標軸作對稱或是反對稱的分佈。另外觀察在 $y = 0$ 之處的應力場為零，符合表面為自由邊界的條件。

圖 6~8 為材料 2 在半無窮域之原點處施以一點熱源後，所得之溫度與應力全場分佈。由於材料 2 與材料 1 不同是在於在熱傳導係數中 k_{11} 比 k_{22} 大十倍左右，根據此材料情況來探討其對溫度以及應力場的變化及影響。比較圖 3 與圖 6 時可發現，在 k_{11} 增大的情況下，整個橢圓等溫線分佈變得更集中分佈在熱源處，並且集中在 x 軸附近處，表示在此處溫度變化比材料 1 所得溫度變化更大。在數學上的觀點來看， k_{11} 的增大直接會增加 q_2 ，由式(88)以及先前的討論得知，此橢圓長軸與 x 軸的夾角是由 q_1 決定其正負值，因此由材料係數可以得知 ϕ 一定為正，但在 q_2 漸漸增大情況下， ϕ 值會漸漸減少，所以橢圓之長軸會平行 x 軸；而從物理觀點來看，因為 k_{11} 增加，導致熱

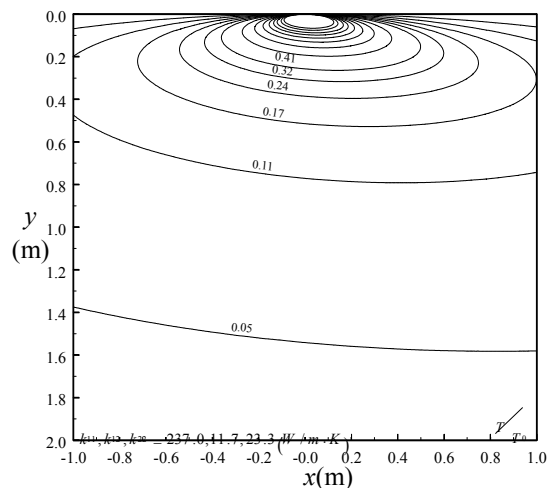


圖 6 在點熱源負荷下之半無窮域全場解等溫線圖 ($k_{11}/k_{22} \approx 10$)

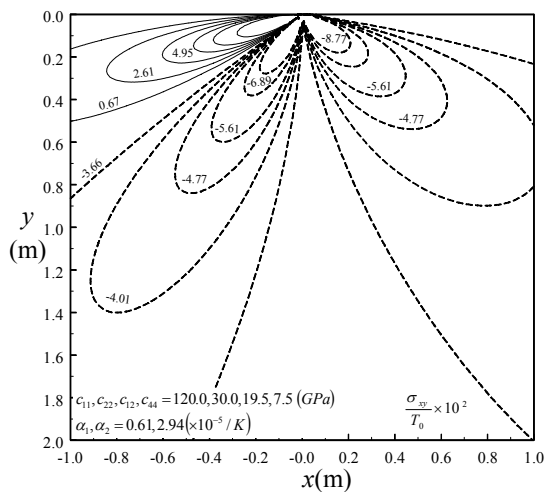


圖 11 在點熱源負荷下之半無窮域應力 σ_{xy} 全場解等應力線圖 ($k_{12} < 0$)

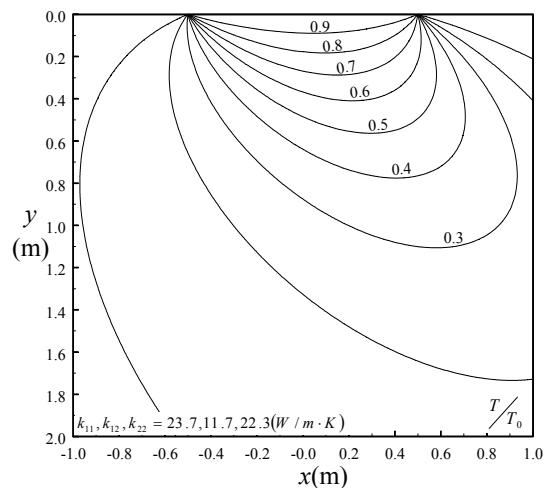


圖 14 在均佈溫度負荷下之半無窮域溫度全場解等溫線圖

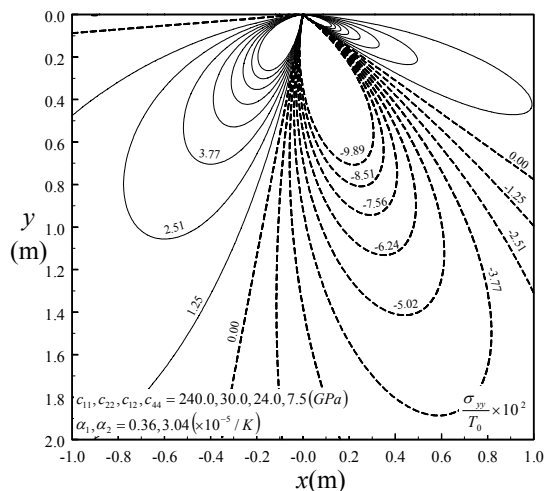


圖 12 在點熱源負荷下之半無窮域應力 σ_{yy} 全場解等應力線圖

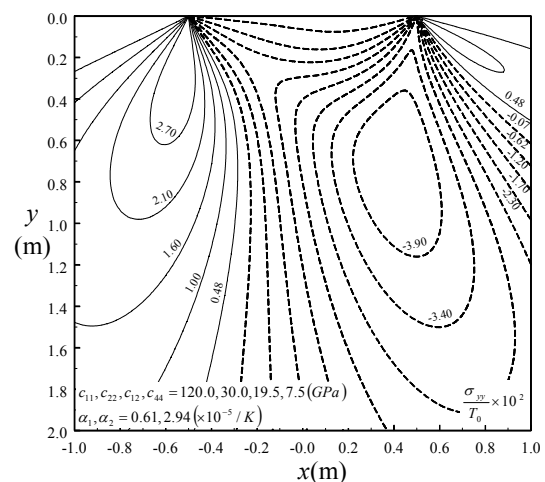


圖 15 在均佈溫度負荷下之半無窮域應力 σ_{yy} 全場解等應力線圖

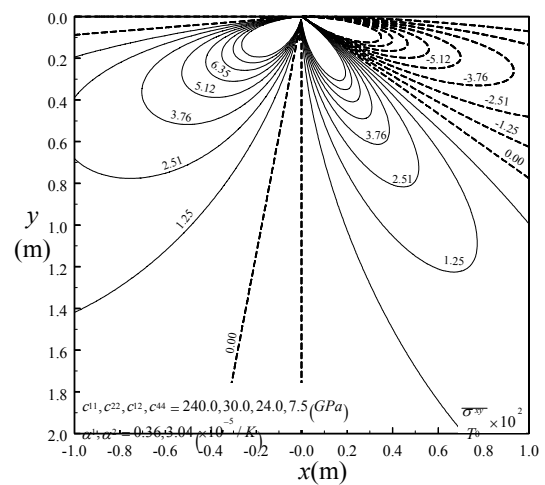


圖 13 在點熱源負荷下之半無窮域應力 σ_{yy} 全場解等應力線圖

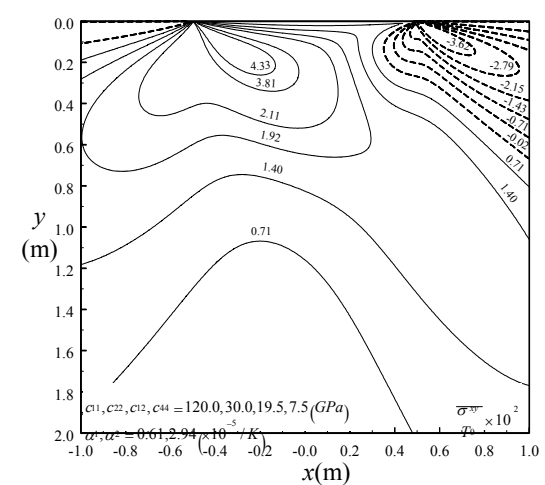


圖 16 在均佈溫度負荷下之半無窮域應力 σ_{xy} 全場解等應力線圖

差異是在於材料 4 的 c_{11} 比材料 1 為大，從圖 12 與圖 13 可發現應力值比材料 1 為大，而且此等應力線分佈也會往 x 軸方向集中，這種現象跟材料 2 的溫度場往 x 軸集中的現象相同，因此 c_{11} 的增加會導致應力場分佈往 x 軸方向作集中。

圖 3~13 之負載為點熱源施加於材料表面原點處，接下來探討的問題為在材料表面 $y = 0$ 與 $x = 0.5$ 到 $x = -0.5$ 之區間給定一分段式均佈溫度 T_0 ，在此乃針對四種不同材料的等溫線以及等應力線會有怎樣的改變。圖 14~16 為在表面給定分段式均佈溫度下所得到的溫度場以及應力場全場解，在溫度場上可以發現其等溫線分佈方向與圖 3 相似，同樣具有偏斜的現象；應力場上也發現偏斜的效應，而且在均佈熱源的兩端附近應力值會異常增大，同時應力值變化很大，之後隨著遠離溫度負荷範圍而逐漸變小，所以在均佈熱源的兩端點處很容易產生應力集中的效應，這是因為溫度不連續的原因所造成。而在應力分佈方面， σ_{yy} 之壓縮應力分佈在中間附近，拉伸應力分佈在兩側，但是在邊界 $y = 0$ 上的應力則都為 0。

圖 17~19 為材料 2 受到均佈溫度負載下所得到的溫度與應力場分佈圖，與前面點熱源負載的分佈作比較，可得到相同的趨勢，因為材料 2 的 k_{11} 增大，因此溫度分佈也是會集中在 x 軸處；在應力場上 σ_{yy} 和 σ_{xy} 與材料 1 所得到的應力分佈

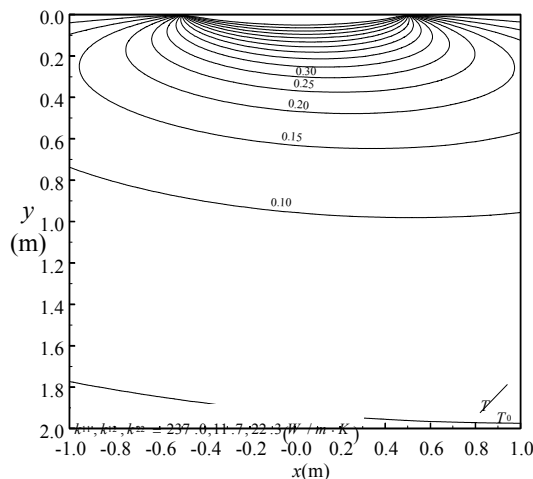


圖 17 在均佈溫度負荷下之半無窮域溫度全場解等溫線圖 ($k_{11}/k_{22} \approx 10$)

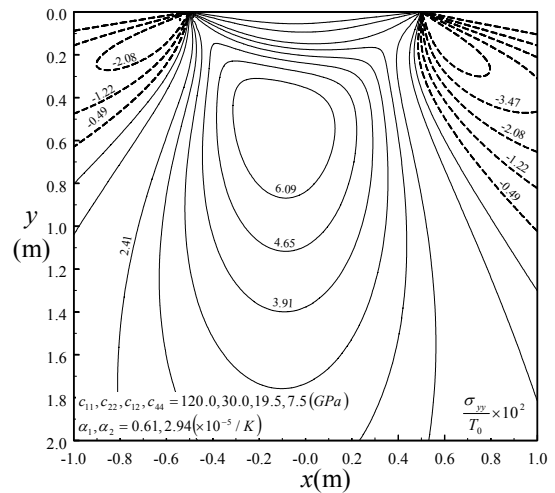


圖 18 在均佈溫度負荷下之半無窮域應力 σ_{yy} 全場解等應力線圖 ($k_{11}/k_{22} \approx 10$)

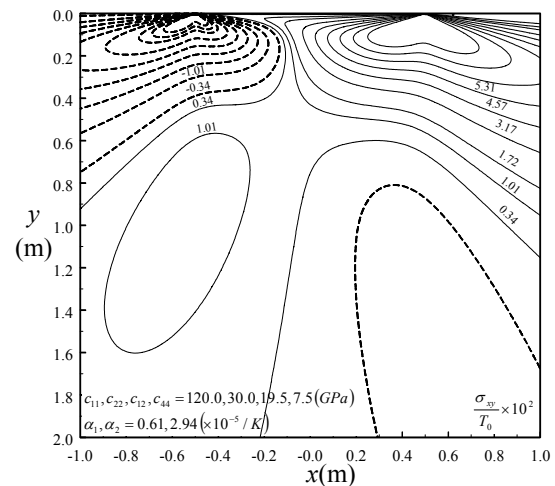


圖 19 在均佈溫度負荷下之半無窮域應力 σ_{xy} 全場解等應力線圖 ($k_{11}/k_{22} \approx 10$)

不同，但在分段均佈溫度兩端也是具有應力集中且變化很大的效應。圖 20~22 是材料 3 在受到均佈溫度負載下的溫度與應力場分佈圖，與前面討論相同，這邊所著重的變數是在於熱傳導係數 k_{12} 為負值對材料的影響，所以從圖中可以比較出與材料 1 分佈具有鏡射的現象，這個現象跟前面所述之點熱源問題所得之溫度與應力分佈現象相同。圖 23~24 是材料 4 在表面受到分段式均佈溫度負載下，所得到的應力場分佈圖，在 c_{11} 增大的情形下，除了應力值增大以外，整個等應力線也是會向 x 軸方向作集中，這現象跟前述之點熱源問題有相同的效應。

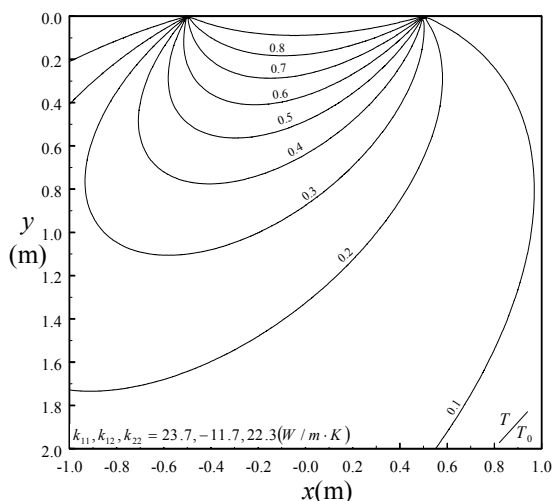


圖 20 在均佈溫度負荷下之半無窮域溫度全場解等溫線圖 ($k_{12} < 0$)

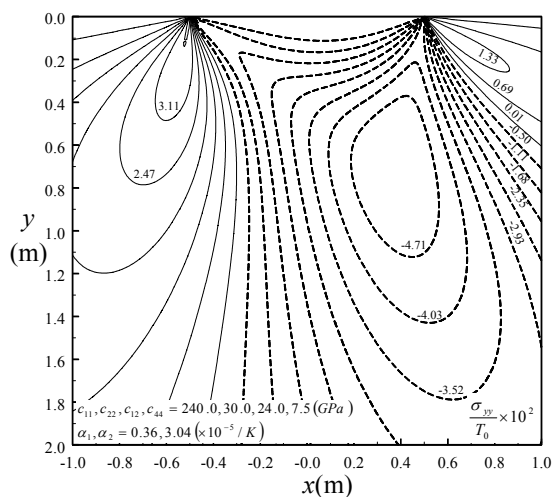


圖 23 在均佈溫度負荷下之半無窮域應力 σ_{yy} 全場解等應力線圖

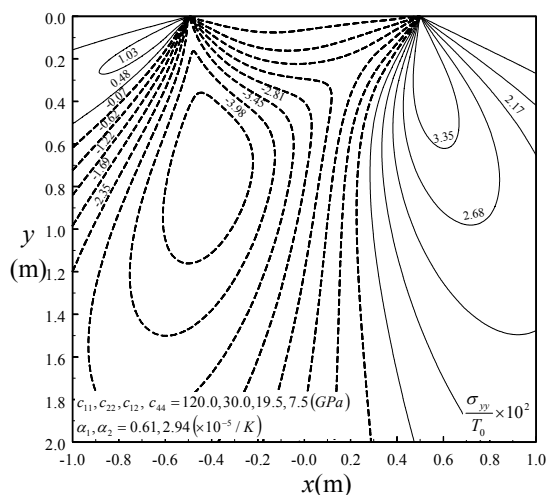


圖 21 在均佈溫度負荷下之半無窮域應力 σ_{yy} 全場解等應力線圖 ($k_{12} < 0$)

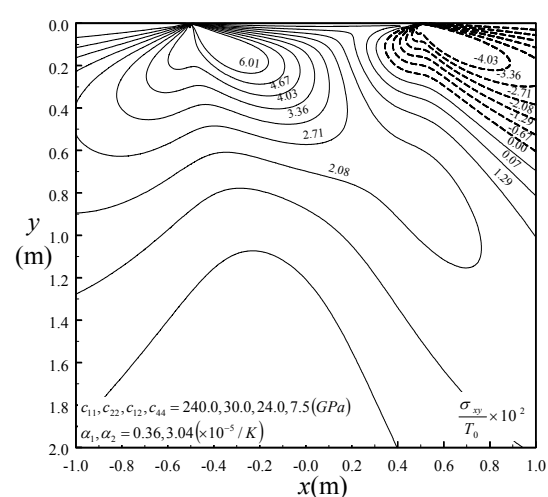


圖 24 在均佈溫度負荷下之半無窮域應力 σ_{xy} 全場解等應力線圖

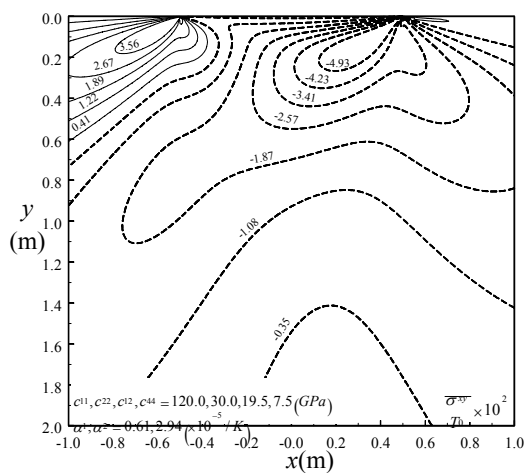


圖 22 在均佈溫度負荷下之半無窮域應力 σ_{xy} 全場解等應力線圖 ($k_{12} < 0$)

3、結 論

本文採用線性座標轉換以及傅立葉轉換的數學處理方式來解析二維異向性熱傳以及應力問題，利用此方法不僅可以簡化異向性熱傳控制方程式成為等向性熱傳控制方程式，以方便在求解時候的處理手續，另外在邊界為直線狀態下的異向性問題更具優越性，不會因為座標轉換以後邊界會產生扭曲或是歪斜的問題，在給定邊界條件時更為方便。因此只要在給定溫度以及應力邊界條件下，就可以利用線性座標轉換方式簡化計算流程，不需要繁雜的轉換以及代數替換。另外文中在不同材料係數的組合下，可觀察出各項係數

的改變對該溫度場或是應力場分佈所造成的影響，因此可從材料係數上便可以得知該材料在受溫度負載情況下，其溫度或是應力場的全場分佈特性，而這些特性在設計異向性材料於各種工程應用時將有所助益。

誌 謝

本研究成果由國科會計畫 NSC88-2212-E002-047 補助而完成。

參考文獻

1. Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., *Conduction of Heat in Solids*, Oxford, Landon (1959).
2. Ozisik, M. N., *Heat Conduction*, Wiley, New York (1980).
3. Padovan, J., "Transient Temperature Distribution of an Anisotropic Half Space," *AIAA J.*, 11, pp. 565–566 (1972).
4. Chang, Y. P., Kang, C. S. and Chen, D. J., "The Use of Fundamental Green's Functions for the Solution of Problems of Heat Conduction in Anisotropic Media," *Int. J. Heat Mass Transfer*, 16, pp. 1905–1918 (1973).
5. Mulholland, G. P. and Gupta, B. P., "Heat Transfer in a Three-Dimensional Anisotropic Solid of Arbitrary Shape," *ASME, J. Heat Transfer*, 99, pp. 135–137 (1977).
6. Chang, Y. P., "Analytical Solution for Heat Conduction in Anisotropic Media in Infinite Semi-Infinite, and Two-Place-Bounded Regions," *Int. J. Heat Mass Transfer*, 20, pp. 1019–1028 (1977).
7. Poon, K. C., Tsou, R. C. H. and Chang, Y. P., "Solution of Anisotropic Problems of First Class by Coordinate-Transformation," *ASME, J. Heat Transfer*, 101, pp. 340–345 (1979).
8. Poon, K. C., "Transformation of Heat Conduction Problems in Layered Composites from Anisotropic to Orthotropic," *Lett. Heat Mass Transf.*, 6, pp. 503–511 (1979).
9. Zhang, X. Z., "Steady-State Temperatures in an Anisotropic Strip," *ASME, J. Heat Transfer*, 112, pp. 16–20 (1990).
10. Mindolin, Y. I. and Uzdalev, A. I., "Anisotropic Plate Under Influence of Distributes and Point Heat Sources," *Mech. Solids*, 30, pp. 118–123 (1995).
11. Sharma, B., "Thermal Stresses in Transversely Isotropic Semi-Infinite Elastic Solids," *ASME, J. Appl. Mech.*, 25, pp. 86–88 (1958).
12. Baker, B. R., "Some Fundamental Thermoelastic Problems in Orthotropic Slabs," *ASME, J. Appl. Mech.*, 33, pp. 45–51 (1966).
13. Akoz, A. Y. and Tauchert, T. R., "Thermal Stresses in an Orthotropic Elastic Semispace," *ASME, J. Appl. Mech.*, 39, pp. 87–90 (1972).
14. Tauchert, T. R. and Akoz, A. Y., "Thermal Stresses in an Orthotropic Elastic Slab due to Prescribed Surface Temperatures," *ASME, J. Appl. Mech.*, 41, pp. 222–228 (1974).
15. Padovan, J., "Thermoelasticity of an Anisotropic Half Space," *ASME, J. Appl. Mech.*, 41, pp. 935–940 (1974).
16. Tauchert, T. R. and Akoz, A. Y., "Stationary Temperature and Stress Fields in an Anisotropic Elastic Slab," *ASME, J. Appl. Mech.*, 42, pp. 647–650 (1975).
17. Thangjitham, S. and Choi, H. J., "Thermal Stresses in a Multilayered Anisotropic Medium," *ASME, J. Appl. Mech.*, 58, pp. 1021–1027 (1991).
18. Ma, C. C., "Antiplane Problems of Monoclinic Material," *ASCE, J. Eng. Mech.*, 118, pp. 1765–1782 (1992).
19. Ma, C. C., "Relationship of Anisotropic and Isotropic Materials for Antiplane Problems," *AIAA J.*, 34, pp. 2453–2456 (1996).



THE ANALYSIS OF THERMAL STRESSES FOR AN ANISOTROPIC HALF-PLANE

Ming-Hsien Hsueh * Chien-Ching Ma **

*Department of Mechanical Engineering
National Taiwan University
Taipei, Taiwan 10617, R.O.C.*

ABSTRACT

The temperature and thermal stresses for two-dimensional plane-strain and plane-stress problems are investigated in this study. An anisotropic semi-infinite plane subjected to prescribed temperature on the boundary will be discussed in detail. Owing to the uncoupled feature of temperature and stresses, the analytical solution of temperature distribution is derived first, and the thermal stresses are then examined according to the predetermined temperature solution and the boundary condition. A linear coordinate transformation method is applied in the heat conduction problem to reduce the anisotropic heat conduction equation to an equivalent isotropic one. The analytical solution for the temperature is obtained in an explicit form. The thermal stresses are derived based on the displacement coefficient determination method for prescribed thermal loadings and boundary conditions. The influences of material properties on the temperature and stresses fields are discussed in this study by numerical calculations.

Keywords: Linear coordinate transform method,
Anisotropic material, Heat conduction,
Thermal stresses, Half-plane.

* Graduated student ** Professor

(Manuscript received July 31, 2001,
Manuscript revised Aug. 28, 2001,
Accepted for publication Sept. 5, 2001.)