

氣體電漿的動力理論

吳大猷 原著
陳金泉 譯著

引言：

本文中所論及的氣體是由中性原子或分子所組成的系統。通常我們對氣體宏觀特性的討論輒止於氣體的輸運特性 (Transport Properties)，亦即熱傳導，黏滯性及擴散等等，分別有各種不同的現象性定律 Phenomenological law 來討論這些過程，如傅立葉 (Fourier) 牛頓 (Newton) 及非克 (Fick) 等。然而要導出這些現象性定律須要有基本的動力理論為基礎才行。第一個基本理論便是波茲曼方程式 (Boltzmann equation)。波茲曼方程式是用以描述在不平衡狀態下的氣體；事實上就是描述宏觀的氣體趨近平衡狀態的不可逆過程的方法。波茲曼方程式於 1876 年提出，於 1912 - 16 年間 S. Chapman 及 Enskog 正提出了一種含意深遠的解法；引致 Bogoliubov 於 1946 年建立了一個較一般性的理論，對問題獲得較深入的瞭解。波茲曼方程式的確成功地應用於許多實際的問題上。

電漿，簡言之，是一種由帶電質點 (亦即電子或負離子，及正離子) 所組成的系統。例如：

- (1) 金屬中的電子，在常溫下為一種簡併氣體 (degenerate gas)。
- (2) 在電解液中之正、負離子。
- (3) 在氣體放電管中之正離子及電子。
- (4) 在星雲間某區域中之電子及正離子，由氣體原子 (大多為氫) 吸收其他星球之輻射能游離而成，密度很低約為 $10^3/\text{cm}^3$ ，溫度為 10^4K 。
- (5) 在星球內部由熱核融合過程所致的高溫 (約 10^8K) 所產生之游離。此高溫又轉而維持核融合過程的繼續進行。

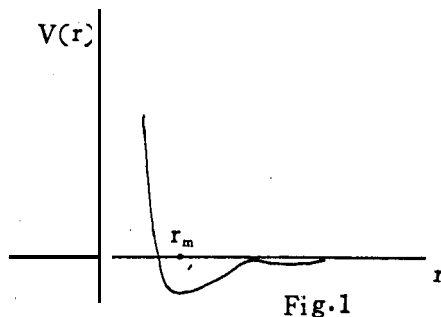
討論中性氣體時我們必須以波茲曼理論為基礎。如果我們要討論所謂高溫電漿 (亦即除了上列之例(1)外) 我們自然要有對非平衡電漿的基本理論。但單純以一個波茲曼方程式討論電漿，則有很基本的原因，是不正確的。以下我們將推導出一套普通的動力與統計理論 (Kinetic-Statistical Theory) 來討論氣體及電漿，同時也強調他們之間的差別。

在電漿許多的實際問題上，我們的目的不同，故處理情況就比氣體複雜多了！例如，我們想在實驗室內產生核融合反應。在這種情況下，我們所面臨的問題是如何產生高溫及高質點濃度的電漿來維持核融合反應，同時如何將高溫電漿圍控在遠離容器壁的有限區域內。在此實驗中，我們所需要的並不是波茲曼型的理論，而是在特殊的幾何條件下，交流電磁場中帶電質點的軌道 (orbital) 或軌跡 (trajectory) 理論。

以下，我們不討論關於帶電質點的軌跡力學理論或實驗，也不討論金屬中電子的問題，我們將討論的問題集中於氣體及電漿的統計—運動理論。

I 氣體及電漿之特徵參數

中性氣體和電漿（完全游離化的氣體）間明顯的區別，是在兩者中，兩粒子間之相互作用所循的定律。中性氣體粒子間之作用位能 $V(r)$ 為粒子間之距離 r 的函數。如圖 1 所示，在 r 值很小時有一很强的排斥力， r 值漸大則轉為弱的吸引力（即凡得瓦爾力）（Van der Waals） $V \propto \frac{1}{r^6}$ ，在 $r_m \sim 10^{-8}$ cm 處有極小值 V_{min} 。在另一方面電漿粒子間的相互作用所依循的定律為庫倫定律（Coulomb Law）， $\frac{z_1 z_2 e^2}{r}$ ， $z_1 e$ ， $z_2 e$ 為相互作用之兩粒子的電荷量，兩者之作用力可能為排斥力，亦可能為吸引力。氣體和電漿二者的 $V(\Omega_u)$ 的區別相當重要，然其主要係由於作用距離而非由於符號，因為一質點系統的特性長度大小（Characteristic lengths）係決定於質點間相互作用距程（range）的大小。在位能 V 中，中性氣體的短距程和帶電質點的長距程使得一個氣體和電漿在性質上差異甚大，也使它們在理論的處理上甚為不同。



(1) 中性氣體：

中性氣體的特性長度為：

①分子半徑 a ，②相關長度 γ_{corr} （correlation length），在此距程範圍內兩粒子間之相關效應，從分佈函數 $F_2(r_1, p_1, r_2, p_2)$ 觀點言，是重要的，③兩分子間之平均距離，即 $d = \sqrt[3]{V} = (n)^{-1/3}$ ， n 為氣體之密度，④平均自由程 λ （mean-free-path）， $\lambda \sim \frac{1}{na^2}$ 。在平常密度下的氣體，我們可得下列的關係：

$$a = \gamma_{corr} \ll d \ll \lambda \dots\dots\dots(1)$$

在室溫一大氣壓下的氣體 $a = \gamma_{corr} = 3 \times 10^{-8}$ cm， $d = 2 \times 10^{-7}$ cm， $\lambda = 4 \times 10^{-5}$ cm。

根據這些特性長度，我們可定義出下列的特性時間：

$$t_0 = \frac{a}{u} = \frac{\gamma_{corr}}{u}, \quad t_1 = \frac{\lambda}{u} \dots\dots\dots(2)$$

此處 u 為分子的平均速率， t_0 稱為二元碰撞時間（time of binary collision）， t_1 稱為平均自由時間（mean-free-time）或兩次碰撞之時間間隔。由式(2)我們得

$$\frac{t_0}{t_1} = \frac{a}{\lambda} = na^3 = \left(\frac{a}{d}\right)^3 \dots\dots\dots(3)$$

$$\frac{t_0}{t_1} \ll 1 \dots\dots\dots(3')$$

由式(1)我們可得式(3')，式(3')是所有中性氣體（尤其是較低密度的氣體）的一種特性。在推導動力理論的過程中，此式是一重要基礎。（請參考吳大猷著，氣體和電漿的運動學方程式（Kinetic Equation of Gases and Plasmas），第三章。以下簡稱吳著，前書。

(2) 電漿：

帶電粒子系統的特性長度是：①藍道長度（Landau length）， $A_L = \frac{e^2}{KT}$ ，此為溫度 T 兩帶電粒子間（電荷量 e ）的最近距離，此值取代中性氣體中之 a 值，②平均距離 $d = (n)^{-1/3}$ ，③德拜-赫克耳屏蔽長度（Debye-Hückel screening length r_D ），

$$r_D = \left[\frac{KT}{4\pi ne^2} \right]^{1/2} \dots\dots\dots(4)$$

此 r_D 的意義，可由下式見之：在溫度 T ，密度 n 下正負電荷平衡分佈時，距離帶 ze 電荷 r 處

的位能 $V(r)$ 爲

$$V(r) = \frac{ze}{r} e^{-r/r_D} \dots\dots\dots (5)$$

方程式(4)和(5)可由解位能 $V(r)$ 的波意森方程式 (poisson equation) 再加上考慮熱力平衡得之, 由此可視 r_D 爲電漿之相關長度 (correlation length)。

Λ 平均自由程 λ 則可定義爲

$$\lambda = \frac{1}{\pi A_L^2 \ln \Lambda} \frac{\lambda'}{\ln \Lambda} \dots\dots\dots (6)$$

$$\text{此處 } \Lambda = \frac{r_D}{A_L}, \lambda' = \frac{1}{n A_L^2} \dots\dots\dots (7)$$

不同密度之電漿的各種長度值可舉例如下：

$KT = 1 \text{ eV}$	$A_L = 1.4 \times 10^{-7} \text{ cm}$				
$n = 10^8$	10^{10}	10^{12}	10^{14}	$/\text{cm}^3$	
$d = 2.5 \times 10^{-3}$	5×10^{-4}	10^{-4}	2×10^{-5}	cm	$\dots\dots\dots (8)$
$r_D = 10^{-1}$	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	cm	

$KT = 100 \text{ eV}$, $A_L = 1.4 \times 10^{-9} \text{ cm}$ 時, r_D 值爲上表所列之值的 10 倍, 在上面的密度範圍內我們所定之 KT 皆滿足 $\Lambda >> 1$ 。從它們的定義, 我們可得下列的關係：

$$\frac{A_L}{r_D} = \frac{1}{4\pi r_D^3 n} << 1, \frac{4\pi r_D}{\lambda^1} = \frac{1}{4\pi r_D^3 n} << 1, \frac{d}{\lambda^1} = \left(\frac{A_L}{d}\right)^2 << 1, \dots\dots\dots (9)$$
$$\frac{4\pi r_D}{\lambda^1} = \frac{1}{4\pi r_D^3 n} \ln \Lambda = \frac{A_L}{r_D} \ln \left(\frac{r_D}{A_L}\right) << 1,$$

$$\text{及 } A_L << d << r_D << \lambda \dots\dots\dots (10)$$

$$\text{或 } A_L << d << r_{corr} << \lambda \dots\dots\dots (10^1)$$

此式與方程式(1)有明顯的差別。在中性氣體中因爲凡得互爾 (Van der Waals) 力是短距程的作用力, 所以 $r_{corr} < d$ 。

質點間相對距離 r 在(10)式中各項距離範圍內之意義可明示如下：設 σ 爲符合 $A_L << \sigma << d$ 關係的一距離, 則①在 $A_L < r < \sigma$ 範圍中的 r 處, 屏蔽 (Screening) 不重要了, 我們可直接處理兩個質點的碰撞問題；②在 $\sigma < r < r_D$ 範圍中的 r 處, 則我們須處理多質點的碰撞或一連串的小角度散射問題。多質點效應, 可以屏蔽位能 (Screened Potential) 取代庫倫位能 (Coulomb Potential) 來處理之。另一種可行的方法是在 $r = r_D^*$ 處切斷 (cut off) 庫倫場。由理論上的計算, (用 Fokker-Planck 方程式), 在不引用 r_D 的觀念下, 處理多質點相關效應時, 上述的兩個方法, 確引致相同的結論, (參考吳著, 前書 PP198-203 ; 240-244), ③若 $r_D < r$, 質點間之相互作用非常弱, 此時的質點彼此間可視爲沒有相互作用, 雙質點的分佈函數 $F_2 (r_1, P_1, r_2, P_2, t)$ 即可寫成 $F_1 (r_1, P_1, t) ; F_1 (r_2, P_2, t)$ (注意 $F_2 = F_1 \cdot F_{1L}$ 是引進弗拉索夫 (Vlasov) 方程式的近似作法, 但是如果使用庫倫作用的話, 則弗拉索夫方程式即有不收斂的困難, 因此又心須再使用屏蔽位能)。

相當於式(10)中的各種長度, 我們須再找出各種特性時間。式(2)中, 中性氣體的時間 t_0 和 t_1 在此已無意義了。唯一有意義的是一個電子走過 r_D 距離所需的時間

$$\frac{\gamma_D}{V} = \sqrt{\frac{KT}{4\pi ne^2}} \times \sqrt{\frac{m}{KT}} = \sqrt{\frac{m}{4\pi ne^2}} \dots\dots\dots (11)$$

此值正好是電漿的振盪週期 T_0 。

* (8)式方程式的 $\ln \Lambda$ ，即為演算散射截面時將 γ 在 γ_D 處截斷而導出者。參閱吳著 PP159-160

$$T_0 = \frac{1}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{4\pi ne^2}} \dots\dots\dots (11')$$

此處 ω 為電漿震盪頻率 (Plasma oscillation frequency)。

在物理學上有意義的時間是衰減時間 (relaxation time)，即從一起初已知的速度分佈衰減至馬克斯威爾平衡分佈 (Equilibrium Maxwell Distribution) 所需的時間。衰減時間 T_{relax} ，不像式(2)中之 t_0 ， t_1 及式(11)(11')中之 T_0 的預先即知道的，而是需要一個理論的。在此我們只提它的理論結果，對我們所感興趣的電漿而言：

$$T_{relax} = C \frac{1}{\epsilon} T_0 \dots\dots\dots (12)$$

此處依式(8)及式(9)知 $\epsilon = \frac{1}{n\gamma_D^2} \ll 1$ ， C 值的數量級可由 1 至 10^2 ，因此 $T_{relax} \gg T_0$ 。

(參考吳著，前書 P. 202； E_e (6.130))

§ II 動力方程式

我們的旨趣在於氣體及電漿的宏觀現象，其特點是觀察上的不可逆性 (就熱力學而言)。有不少的理論可以描述觀察的過程，例如擴散，流體的黏滯流動及熱傳導等。這些討論宏觀特性的理論及方程式，是建立在現象性的基礎上，對時間變數 t 的逆轉，沒有不變性。例如黏滯流體的 Navier-Stokes 運動方程式

$$\frac{Du}{Dt} = a - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \dots\dots\dots (1)$$

此處 $P_{ij} = P \delta_{ij} - 2\mu (D_{ij} - \frac{1}{3} D_{kk} \delta_{ij})$ ， $\frac{\partial p}{\partial r} = \sum_j \frac{\partial P_{ij}}{\partial r_j}$

$$D_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \text{ , } x_i = x, y, z \text{ , } i = 1, 2, 3$$

$$D_{kk} = D_{11} + D_{22} + D_{33}$$

u 是流體平均速度， a 是由外力作用而產生的加速度， ρ 是流體平均密度， μ 是黏滯係數。方程式(1)中最重要而或許並不顯眼的特性是：由於含有黏滯效應的項，使得方程式不是時間逆轉操作下的不變式，此特性描述流體在觀察上的不可逆現象—例如，由於黏滯性的存在，使得流體流動時，能量轉為熱能。但我們想建立一個較基本的理論—一個處理個別流體質點的動力理論—由之導出式(1)的宏觀方程式，這是整個氣體及電漿之動力理論的目的。

氣體 (及電漿) 的動力方程式有很多，最早且研究最多及應用最廣的要算是波茲曼方程式 (1876)，然後是 Fokker-Planck 氏方程式 (1914-17) Pauli 氏的 Master 方程式 (1928)，Vlasov 氏方程式 (1938)，及較近的由 Liouville 方程式出發導出來的理論 (1946)。我們將各種理論歸類如下：

(1) 以統計及動力學為基礎的理論：

以氣體 (或電漿) 系集分佈函數 $D (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$ 的 Liouville 方程式為起點，可導出與其完全等效的一個系統 (或層系) 的方程式。此稱為 B-B-G-K-Y 體系 (

以 Bogoliubov, Born, Green, Kirkwood 及 Yvon 定名)。由此體系，我們可以以各種近似法來建立方程式。自 1950 年代末年後，有許多理論工作，沿此方向進展。

(2) 以普遍機率假設為基礎的理論：

① Fokker-Planck 方程式。② Pauli 之 Master 方程式。

這些理論僅作些機率性的假設，例如 Markovian 過程的性質及 Smoluchowski " 定律 " 等。應用這些理論於氣體或電漿時，必須要應用到物理的一些觀念。這些由於假設 Smoluchowski 定律而成立的方程式，對時間逆轉是沒有不變性的，此點作者曾於 1961 年明晰指出。(參考吳著，前書 PP19-28)。

(3) 以特殊假設為基礎的理論：

① 波茲曼方程式中含有 " Stosszahlansatz " — 在碰撞積分中的機率假設，使得此方程式成為對時間逆轉沒有不變性。

② 電漿的 Vlasov 方程式是逆時不變的，應不適用於由一起初速度分佈到平衡分佈的研究。在 B-B-G-K-Y 體系中，Vlasov 方程式可證明其為最低次的近似結果。

③ 根據其他假設的理論。

下文將依次處理下列的主題：

A. 中性氣體的波茲曼方程式。

Chapman-Enskog 氏方法。

B. B-B-G-K-Y 體系

① 無因次變數的方程式體系。② 對氣體及電漿，選擇作展開的參數之標準。③ 多時形式論 (Many-time formalism) — Frieman 和 Sandri 之理論。④ Gurnsey 的雙展開 (Double-expansion)。⑤ Vlasov 方程式。

C. 均勻電漿的 Lenard-Balescu-Gurnsey 方程式。

D. 無 " 不收斂 " 困難 (Divergence-free) 的動力方程式。

§ II 波茲曼方程式，H 定理及其評論

就歷史上而言，波茲曼方程式是最早的動力方程式 (1876)。它是以單一質點的分佈函數 $f(r, v, t)$ 開始，對氣體 (多質點系統) 作假設步驟的描述，亦即：

$f(r, v, t) d^3r d^3v =$ 在 r, v, t 處，座標及速度在體積素 $d^3r d^3v$ 內的粒子數。

且 $\int f(r, v, t) d^3v = n(r, t) =$ 在位置 r 時間 t 之分子個數密度 (1)

f 的因次為 $(L^3 T^{-1})^{-1}$

在六維座標速度空間內，沿著質點的軌跡， f 的變率可由質點碰撞效應所導致的變率得出

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial}{\partial r} + a \cdot \frac{\partial}{\partial v} \right] f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{collision}} \dots \dots \dots (2)$$

波茲曼作了 " 有關碰撞次數的假設 " (the Stosszahlansatz)：即一質點在與另一質點 1 (速度 V_1) 碰撞時， $f(r, v, t)$ 值減少；但經 " 回復碰撞 " 後，碰撞之兩質點速度由 V', V_1' 改變成為 V, V_1 (即 $V + V_1' \rightarrow V + V_1$)， $f(r, v, t)$ 值又補足了。

由此假設可得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}} = \int d^3v_1 \int d\omega |V - V_1| \sigma(\theta, |V - V_1|) \{ f(r, v', t) f(r, v_1', t) - f(r, v, t) f(r, v_1, t) \} \dots \dots \dots (3)$$

此處 σ 為橫截面 (cross-section)， θ 為散射角， $d\omega$ 立體角之基元。在此必須強調的是式 (3)

不能由力學定律導出，而是一種經合理考慮的假設，它也不是一個普遍性的“碰撞項”，因為此式只包含二元碰撞 (binary collision)。

(1)逆時 (Time-reversal) 及逆速 (velocity-reversal) 式(2)+(3)波茲曼方程式最重要的特徵是對時間變速 $t \rightarrow -t$ 言，沒有不變性。經 t 的變號可得：

$$V \rightarrow -V, a \rightarrow a, f(r, v, t) \rightarrow f(r, -v, -t) = \bar{f}(r, v, t) \text{ 等}$$

波茲曼方程式即寫成

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial}{\partial r} + a \cdot \frac{\partial}{\partial v}\right) \bar{f} = \int d^3v_1 \int d\omega |v - v_1| \sigma \{ \bar{f}(r, v', t) \bar{f}(r, v_1', t) - \bar{f}(r, v, t) \bar{f}(r, v_1, t) \} \dots \dots \dots (4)$$

上式與 f 的方程式之不同點是在一端差一負號。可以看出式(4)不像原來方程式一樣具有可懂的意義。這也就是說波茲曼方程式有固定的時間方向，不像動力學及電磁學定律是逆時不變的。

但 $f(r, v, t)$ 的波茲曼方程式(2)+(3)，對速度的逆轉，却是有效的。譬如，某一氣體 B 中的所有分子速度均為另一氣體 A 的分子之負值時，即可由波茲曼方程式的逆速不變性表示出

$$V \rightarrow -v \equiv u, f(r, v, t) \rightarrow f(r, -v, t) \equiv \bar{f}(r, u, t)$$

及

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial}{\partial r} + a \cdot \frac{\partial}{\partial u}\right) \bar{f} = \int d^3u \int d\omega |u - u_1| \sigma \{ \bar{f}(r, u', t) \bar{f}(r, u_1', t) - \bar{f}(r, u, t) \bar{f}(r, u_1, t) \}$$

我們因此必須分辨“逆時”($t \rightarrow -t$)及“逆速”($v \rightarrow -v$)兩個操作的差別，這兩種運算，只有在方程式 (或物理定律) 是逆時不變時，在數學上等效。但如波茲曼方程式不是逆時不變的方程式，則此這兩種操作是不同的，不可混淆的。

(2)H定理及不可逆性

波茲曼方程式的沒有逆時不變性，有很重要的結果。

首先，由波茲曼方程式，可證明按下式定的H函數。

$$H(t) = \int \int f(r, v, t) \ln f(r, v, t) d^3r d^3v \dots \dots \dots (5)$$

滿足下述關係

$$\frac{dH}{dt} = \int \int \left(1 + \ln f\right) \frac{df}{dt} d^3r d^3v \leq 0 \dots \dots \dots (6)$$

接熱力學第二定律，熵與時間的關係為

$$\frac{ds}{dt} \geq 0$$

由統計力學和上式(5)，可獲得統計力學中的S與上述的H函數間的關係：

$$S = K \ln \omega = -KH + \text{常數}$$

故第(6)式H定理，似與熱力學第二定律有關。

其次，在沒有外場的作用下，氣體達到平衡 ($\frac{dH}{dt} = 0$) 的充分且必要條件，可證明為

$$f_0 = n \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2KT}\right) \dots \dots \dots (7)$$

此處 n = 個數密度 (number density) , f_0 為Maxwell分布函數。

式(6)(7)的證明，可看 ter Haar , Elements of Statistical Mechanics , PP 18-20

(3) Loschmidt和Zermelo之批評波茲曼給了H定理一個較普遍的形式，設

$f(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n, t) dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$ 為在時間 t , 體積素 $dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$ 中的分子數且設 $H(t)$ 定義如下：

$$H(t) = \int \dots \int f \ln f dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n \dots \dots \dots (8)$$

波茲曼取 H 一定理乃成下的形式

$$\frac{dH}{dt} \leq 0 \dots\dots\dots (9)$$

H 一定理一直受到廣泛的討論，而最有名的二個批判是 1876 年 Loschmidt 氏的“可逆性矛盾論” “reversibility paradox” 及 1896 年 Zermelo 氏的“復現矛盾論” (recurrence paradox)。前者認為：若有兩個氣體中，其中一個氣體中的分子的速度是其它一個氣體中分子的速度的負值，則 $H_A(t_1) = H_B(t_1)$ 如果

$$\frac{dH_A(t)}{dt} \leq 0 \dots\dots\dots (10)$$

則不應有 $\frac{dH_B(t)}{dt} \geq 0$ 嗎？

後者 (Zermelo) 的論據是引用了 Poincare 氏的 ergodic 定理：即經一段足夠長的時間後，在 Γ 相位空間—氣體的相位點的軌跡，可無限的接近 Γ 空間中任何一個指定點，彼認為氣體在時間 $t_1 < t_2 < t_3 \dots$ 且 $H(t_1) > H(t_2) > H(t_3) \dots$ 通過相位點 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \dots$ 。按 Poincare 定理，經過一準週期 (quasiperiod) T 後，氣體通過之點 $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \Gamma'_3 \dots$ 無限地接近 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \dots$ ，且 $H'(t_1+T), H'(t_2+T), H'(t_3+T) \dots$ 也無限地接近 $H(t_1), H(t_2), H(t_3) \dots$ ，則得到一個自相矛盾的理論： $H(t_1)$ 既大於 $H(T+t_1)$ 且又無限近於 $H(T+t_1)$ 。

這兩種“矛盾論”曾在吳氏一文 (Intern'l J. Theor. Phys. 14, 289 (1975)) 中以簡單的方法澄清。

現將幾個論點簡述於下：

對於 Loschmidt 的可逆性矛盾批評，其解答如下：

(a) 如果 f 遵守的方程式

$$\frac{df}{dt} = I(f) \dots\dots\dots (11)$$

是一個對逆時有不變性的方程式，則我們很容易證明下關係

$$\frac{dH}{dt} = \int \dots \int (1 + \ln f) \frac{df}{dt} dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n = 0 \dots\dots\dots (12)$$

(Liouville 方程式是這種方程式的一個例子) 在此情況下， $H = \text{常數}$ ，則 Loschmidt 所指的矛盾即不存在，但同時亦不能望 H 函數與熱力學第二定律有任何關係了。

(b) 如果 f 所遵守的方程式 (11)，不是逆時不變，但對所有速度的逆轉有不變性，亦即

$$V_k \rightarrow -V_k, f(q_k, p_k, t) \rightarrow f(q_k, -p_k, t) = \bar{f}(q_k, p_k, t) \\ \frac{df}{dt} = I(f) \rightarrow \frac{d\bar{f}}{dt} = I(\bar{f})$$

則

$$H(t) = \int f \ln f dq_k dp_k \rightarrow \int \bar{f} \ln \bar{f} dq_k dp_k = H(t) \dots\dots\dots (13)$$

且

$$\frac{dH}{dt} \text{ 對逆速有不變性。}$$

任一有意義的理論對於任一種速度都必須成立，因此， f 的方程式對 $-V_k$ 或 V_k 都應成立，所以我們應有式 (13) 的而非式 (10) 的條件。

對 Zermelo 復現批評的解答乃如下：

(a) 如果 f 係遵守對逆時不變的方程式，則我們得式 (12) 及 $H = \text{常數}$ ，因此復現矛盾論也消失，而且 H 函數與第二熱力學定律間，亦不能有何關係的。

(b) 若 f 遵守一個時間不可逆的方程式 (例如，波茲曼方程式，則 f 依時作不可逆的轉變，因之

f 將沒有準週期的特性，故對“復現”的困難，亦不發生了。

(4) 起伏現象 (Fluctuations)

一個波茲曼方程式，確有真正正確的批判。在統計力學中，我們知道熵S有起伏現象；同樣地我們亦希望H函數有起伏現象，然而在(6)式中可看出由波茲曼方程式 f 函數所得的H函數，却係單調地隨時間減小的函數。這種單調現象是式(3) Stosszahlansatz 的結果，波茲曼在他較晚的研究工作中，完全認識式(3)的性質，且給予H隨時遞減作一機率的解釋，不再絕對地排除起伏現象，例如（在其漸近線之極小值上，H值可以增加）。惟他未對此機率性考慮作明顯的數學理論。

Fox 與 Uhlenbeck 二氏由合理的推斷，在波茲曼方程式中介入一項，以表示起伏現象。這項可解釋 Landau 和 Lifchitz 在流體力學方程中所引入的起伏項。最近李述忠和作者由 Liouville 方程式（以 B-B-G-K-Y 體系的形式）出發，研究多質點的相關函數的統計討論中可導出一個有起伏項的改正波茲曼方程式，予 Fox 與 Uhlenbeck 二氏假設以一個根據。由此方程式我們可得到一個主要是隨時遞減但却有起伏現象的H函數。（參考 Paul S. Lee and T. Y. Wu, Inter'l J. Th. Phys. 7, 267 (1973)）。

(5) 波茲曼方程式對氣體及電漿的應用

波茲曼的“碰撞數假設”的要點是①二元碰撞，②相關效應的不存在。以乘積 $f(r, v, t) f(r, v_1, t)$ 計算兩個質點在 r 處撞碰的機率，隱含了②的假設。

但只有二元性碰撞之假設，僅能適用於低密度的氣體而不能適用於高密度的氣體，因為高密度的，三個或多個分子撞碰的機會便漸感重要了。相關效應視質點交互作用的距離而定，在中性氣體中，因為凡得瓦爾作用是一種短距離的作用（ $\sim 10^{-8} \text{ cm}$ ），忽略相關效應比較無所謂，但是在電漿中，庫倫作用是長距離的作用，忽略相關效應可就不適當了。又此長距離特性，同時使祇考慮二質點而忽略三質點或多質點碰撞的作法，成為無意義。

由這些考慮後，足見波茲曼方程式祇適用於密度不甚高的中性氣體，而絕不適用於電漿。後一結論，更可由下面的觀點見之：對庫倫相互作用力言，式(3)中碰撞積分的總橫截面，是無限大的，故積分是不收斂的。

所以對電漿而言，我們必須另尋適當的理論（或動力方程式）來處理庫倫作用力的長距離特性。這是下文所要作的（§ v, 3, (31) 式）。

在 § IV，我們將詳細地討論中性氣體的波茲曼方程式。

§ IV 波茲曼方程式的解

波茲曼方程式是時間的一次微分方程式，通常解這類問題，都是解一個初值問題，亦即由 $t = 0$ 時的已知 f 值，求 $f(r, v, t)$ 。但 f 的方程式，是一個非線性積分微分方程，是甚難解的。Chapman-Enskog 二氏的方法（1913-16）。此法係將波茲曼方程式中六維（ r, v 或 r, p ）空間的函數，代以另一系列的三維空間的函數。這個方法除在技巧外，更有很深的含意，且後來在 Bogoliubov（1946年）理論中擔任一個很基本的角色。在討論完 Chapman-Enskog 方法與 B-B-G-K-Y 體系間的關係後，我們再回過頭來看此點。

我們定義下列幾個矩元（moments）：

個數密度 $n(r, t) = \int f(r, v, t) d^3v \dots\dots\dots(1)$

平均密度 $\rho(r, t) = nm \dots\dots\dots(2)$
 平均速度 $u(r, t) = \frac{1}{n} \int v(r, v, t) d^3v \dots\dots\dots(3)$
 特殊速度 $U_i(r, t) = v_i - \mu, \quad i = x, y, z \dots\dots\dots(4)$
 應力張量 (Stress tensor) $P_{ij}(r, t) = m \int U_i U_j f(r, v, t) d^3v \dots\dots\dots(5)$
 靜液壓 $P(r, t) = m \int U^2 f(r, v, t) d^3v \dots\dots\dots(6)$
 平均能量密度 $E(r, t) = \frac{1}{n} \int \frac{1}{2} m U^2 f(r, v, t) d^3v \equiv \frac{3}{2} KT(r, t) \dots\dots\dots(7)$
 平均能量通量 $J_i(r, t) = \int \frac{1}{2} m U^2 U_i f(r, v, t) d^3v \quad (\text{能量/面積-秒}) \dots\dots\dots(8)$
 波茲曼方程式 $(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial}{\partial r} + a \cdot \frac{\partial}{\partial v}) f(r, v, t) = \int d^3v_1 \int da, |v - v_1| \sigma \times \{ f(r, v_1, t) f(r, v'_1, t) - f(r, v, t) f(r, v'_1, t) \} \dots\dots(9)$

可表示成下面形式

$$\frac{Df}{Dt} + U \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + (a - \frac{Du}{Dt}) \cdot \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u} U : \frac{\partial}{\partial r} U = (\frac{\partial f}{\partial t})_{coll} \dots\dots\dots(10)$$

此處

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial}{\partial r} \dots\dots\dots(11)$$

兩張量之：乘積的定義為

$$A : B = \sum_{ij} A_{ij} B_{ij}, \quad i, j = x, y, z \dots\dots\dots(12)$$

我們利用 § III 式(3) $(\frac{\partial f}{\partial t})_{coll}$ 之表示法計算

$$\frac{1}{n} \int Q (\frac{\partial f}{\partial t})_{coll} d^3v$$

 在此 $Q = Q(r, v)$ 是一個質點的任何 r, v 函數。如果兩個質點的 Q 的和，在二元碰撞中不變，亦即，

$$Q(v) + Q(v_1) = Q(v') + Q(v'_1) \dots\dots\dots(13)$$

 (Q 稱為總和不變式)，則可證明

$$\int Q (\frac{\partial f}{\partial t})_{coll} d^3v = 0 \dots\dots\dots(14)$$

顯然， $Q=1, mU, \frac{1}{2}mU^2$ 滿足(13)(14)式，在式(13)的二元碰撞中，這三種情況正好相當於質點數守恆；動量守恆，及能量守恆的關係。

將式(9)依次以 $1, mU, \frac{1}{2}mU^2$ 乘之，且對整個速度空間積分，我們可得下列諸方程式：

$$\frac{Dn}{Dt} + n \operatorname{div} u = 0, \text{ 或 } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho U) = 0 \dots\dots\dots(15)$$

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} - \rho a_i + \frac{\partial}{\partial r_i} P_{ij} = 0, \text{ 或 } \frac{\partial u_i}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u_i = a_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r_i} P_{ij} \dots\dots\dots(16)$$

$$\frac{DT}{Dt} + \frac{2}{3nk} (\operatorname{div} J + P : D) = 0 \quad D_{ij} = \frac{1}{2} (\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}) \dots\dots\dots(17)$$

在此 A_x 是因外力而產生的 x 方向之加速度。較高矩元如 J, P 的方程式，可以 $\frac{1}{2}mU^2U, U_i U_j$ 乘(9)式對 V 積分而得。依此作法可得更高矩元的方程式。惟高矩元之 Q 之和在二元碰撞中不守恆，故式(14)積分不等於零，故它們的方程式，乃變成很繁長了。(參考前書 P.45)

Chapman-Enskog 的解法在 Chapman-Cowling 二氏所著『非均勻氣體的數學理論』(The Mathematical Theory of Non-uniform Gases)中，有清晰的討論，在吳著的前書中也簡要地提了一些參考資料，在此僅做重點提示：

(1) 假設一氣體系統已達到接近局部平衡的狀態時，亦即沒有震激 (shock) 或激烈的擾動狀態時，我們可引進一參數 δ 來量度距離平衡態的偏差 (deviation) (δ 可視為在平均自由程

數量級) 距離中宏觀物理量的相對改變量, 例如 $\lambda \frac{1}{T} \nabla T$ 在推展的形式過程中, 我們將以視 n, u, T 的一次偏導數為 ϵ 的一級數量, 它們的二次導數及一次導數中的二次項為 ϵ 的二級數量,

(2) 展開

$$f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \dots \quad (20)$$

$$= f^{(0)} [1 + \epsilon \phi + \epsilon^2 \psi + \dots]$$

在此

$$f^{(0)} = n(r, t) \left(\frac{m}{2\pi KT(r, t)} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mU^2(r, t)}{2KT(r, t)} \right) \quad (21)$$

$f^{(0)}$ 是局部平衡的分佈函數, 注意 n, u, T 皆為 r 和 t 的函數。

(3) 將式(20)代入式(9)之波茲曼方程式, U, P, J 的定義方程式(14), (15), (16)及流體力學方程式(15)(16)(17)中, 再依 $\epsilon^0, \epsilon^1, \epsilon^2 \dots$ 之幂將各量析出!

數量級 (order) 為 ϵ^0 者:

由波茲曼方程式得

$$f^{(0)} = n \left(\frac{m}{2KT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mU^2}{2KT} \right) \text{ 如式(21)}$$

$$U^{(0)} = 0$$

$$P_{ij}^{(0)} = nKT \delta_{ij} = p, \text{ 靜流壓力 (純量)} \quad (22)$$

$$J^{(0)} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{Du}{Dt} + n \operatorname{div} u = 0 \text{ 連續方程式} \quad (24)$$

$$\frac{Du}{Dt} - a + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \text{ 理想流體的 Euler 方程式} \quad (25)$$

$$\frac{D}{Dt} (nT^{-3/2}) = 0, \text{ (即 } \frac{DT}{Dt} = -\frac{2}{3} T \operatorname{div} u \text{)} \quad (26)$$

屬於這種數量級 (ϵ^0) 的方程式, 對時間而言是可逆的。

(4) 數量級為 ϵ 者:

由波茲曼方程式得 (在 $a=0$, 即沒有外場存在情況下)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) f^{(0)} = \int d^3 v_1 \int d\omega |v - v_1| \sigma f^{(0)} f_1^{(0)} [\phi' + \phi'_1 - \phi - \phi_1] \quad (27)$$

此處

$$\phi' \equiv \phi(r, v', t), \phi_1 \equiv \phi(r, v_1, t), f_1^{(0)} \equiv f^{(0)}(r, v, t) \text{ 等}$$

利用式(21), 可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) f^{(0)} = \left[\left(\frac{mU^2}{2KT} - \frac{5}{2} \right) U \cdot \frac{\partial \ln}{\partial r} + \frac{m}{KT} (U_i U_j - \frac{1}{2} U^2 \delta_{ij}) D_{ij} \right] f^{(0)} \quad (28)$$

因此

$$\int d^3 v_1 \int da, |v - v_1| \sigma f^{(0)} f_1^{(0)} (\phi' + \phi'_1 - \phi - \phi_1) = [\ln(28)] f^{(0)} \quad (29)$$

方程式(27)是函數 $\phi(r, v, t)$ 的非齊次積分方程式, 這類方程式有解存在的條件, 是齊次方程式的解

$$\int d^3 v_1 \int da, |v - v_1| \sigma f^{(0)} f_1^{(0)} (\phi' + \phi'_1 - \phi - \phi_1) = 0 \quad (30)$$

與 $\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) f^{(0)}$ 正交 (orthogonal) 但這條件中, 正為 $\phi = 1, v, v^2$ 所滿足, 因為方程式

$$\int \left(\frac{1}{v^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) f^{(0)} d^3 v = 0 \quad (31)$$

正是方程式(24)，(25)，(26)因此式(27)有解 ϕ 存在。

式(28)的完全積分分解是

ϕ = 補助函數 (complementary function) + 式(28)的特別積分
 $= C_1 + \vec{C}_2 \cdot \vec{U} + C_3 U^2 - \frac{1}{n} A U \frac{\partial \ln T}{\partial r} - \frac{1}{n} B_{ij} D_{ji} \dots \dots \dots$ (32)

此處 A 及 B_{ij} 是 n, U, T 的函數，(32)式中最後兩項的形式由式(28)而得，五個常數係數 $C_1, \vec{C}_2, C_3$ 可由下列條件

$\int f^{(1)} d^3 v = \int f^{(1)} \vec{v} d^3 v = \int f^{(1)} v^2 d^3 v = 0 \dots \dots \dots$ (33)

確定之

由式(32)中的 ϕ ，次數為 ϵ^1 ，我們得

$P_{ij(1)} = m \int U_i U_j f^{(1)} d^3 v = -2\mu (D_{ij} - \frac{1}{3} D_{ss} \delta_{ij}) \dots \dots \dots$ (34)

$J_{(1)} = \frac{1}{2} \cdot m \int U^2 U f^{(1)} d^3 v = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \dots \dots \dots$ (35)

此處

$\mu = \frac{m}{10} \int (U_i U_j - U^2 \delta_{ij}) f^{(0)} d^3 v \dots \dots \dots$ (36)

$\lambda = \frac{K}{3n} \int A(n, U, T) (\frac{m U^2}{2KT} - \frac{5}{2}) U^2 f^{(0)} d^3 v \dots \dots \dots$ (37)

在所有這些式中，對於任一重複指標皆表對 x, y, z 之和，A 和 B 可由式(9)波茲曼之碰撞積分中之橫截面 σ 決定之。式(34)，(35)中， μ 為黏滯係數， λ 為傳導係數。

利用式(22)，(23)的 $P_{i(0)}$ 及 $J_{(0)}$ 和式(34)(35)的 $P_{ij(1)}$ ， $J_{(1)}$ 代入方程式(15)，(16)，(17)，我們可得數量級為 ϵ^1 的流體力學方程式。

$\frac{Dn}{Dt} = -n \text{div } \vec{u} \dots \dots \dots$ (38)

$\frac{D\vec{u}}{Dt} = a - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} P, P_{ii} = P \delta_{ii} - 2\mu (D_{ij} - \frac{1}{3} D_{ss} \delta_{ij}) \dots \dots \dots$ (39)

$\frac{3Kn}{2} \frac{DT}{Dt} = -\text{div } J_{(1)} - (P D_{ij} + P_{ij(1)} D_{ij}) \dots \dots \dots$ (40)

式(39)是黏滯流體的 Navier-Stokes 方程式，而式(39)(40)對逆時，皆沒有不變性了。這種不可逆性是由(27)式的碰撞積分產生的，在物理上，這種不可逆的性質，相當於流體中的動能，在動量傳送過程中的黏滯現象而轉換成熱能。

進一步分析係數 λ, μ 可得：

$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{15K}{4m}$ ，與 T 及 n 無關 $\dots \dots \dots$ (41)

$\mu = \frac{\frac{5}{2} (\pi m K T)^{1/2}}{\int_0^\infty dG e^{-G^2} Q(G)}$ 與 n 無關 $\dots \dots \dots$ (42)

此處 $g = |\vec{v} - \vec{v}_1|$ 為兩個分子的相對速度

$Q(G) = 2\pi \int_0^\pi \sigma(v, g) \sin^3 \theta d\theta \quad (\text{截面積}) \dots \dots \dots$ (43)

G 為一無因次的相對速度

$G = \sqrt{\frac{m}{4kT}} g \dots \dots \dots$ (44)

兩個分子的交互作用為 g 負五次方定律的氣體 (稱為 Maxwell 氣體) 的力學問題 (碰撞截面) 已被 Maxwell 所解。在此情形下，式(42)中的 μ 是 T 的函數而不是 n 的函數，與低壓或適度高壓的實驗數據相吻合。

(5) 數量級為 ϵ^2 者

由式(9)波茲曼方程式，數量級為 ϵ^2 的項，我們可得一個非齊次的積分方程式：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) f^{(1)} = \int d^3 v_1 \int d\omega |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| \sigma f^{(1)} f_1^{(1)} (\Psi^1 + \Psi_1' - \Psi - \Psi_1) \dots\dots\dots (45)$$

由式(20)可得 $f^{(1)} = f^{(0)} \phi$ ， $f^{(2)} = f^{(0)} \Psi$ ，這個方程式可以和解(29)式同樣的方法求解。 P_{ij} ， J 算至數量級為 ϵ^2 ，

$$P_{ij} = P \delta_{ij} + P_{ij(1)} + P_{ij(2)} \dots\dots\dots (46)$$

$$J = J_{(1)} + J_{(2)}$$

代入(45)，(46)，(47)各式，所得流體力學方程式仍包含 n, u, T 的二次導數，及一次導數的二次方項。這個理論由 Burnett 完成，(參 Chapman-Enskog 書)。

(6) Echapman-Enskog 方法的注釋：

(a)此方法並不是解一個分子在六維相空間 (μ -Space) 波茲曼方程式的初值問題，而是解三維 r 空間中 $n(r, t)$ ， $u(r, t)$ 及 $T(r, t)$ 的流體動力學方程式。這些量是時間的緩慢變化函數，其特性時間常數 (Characteristic time constant) 為

$$t_2 = \frac{L}{u_s} \dots\dots\dots (47)$$

L 是一宏觀的長度， u_s 是在氣體中的音速。由於和時間有關， $f(r, v, t)$ 可改變成 n, u, T 函數的函數，如式(2)，(32)，或表為

$$f(r, v | n(r, t), u(r, t), T(r, t)) \dots\dots\dots (48)$$

$f(r, v, t)$ 對時間 t 的函數關係，係透經三個大不相同的標度 (scale) 的時間與當碰撞時，在時間常數為 $t_0 \approx \frac{\alpha}{u}$ 之中， $f(r, v, t)$ 變化非常快；在時間常數為 $t_1 = \frac{\lambda}{u}$ 中，變化較慢，其中 λ 為平均自由程；而當其以時間常數 $t_2 \approx \frac{L}{u_s} \approx \frac{L}{u}$ 接近平衡時，變化最慢。在考慮接近平衡的過程中，我們對上述的較快的變化，便不感興趣了。在考慮慢變化中，我們取 f 為 n, u, T 的函數。

(b)只有五個矩元 (moments) n, u, T 的改變，係隨時間標度 t_1 緩慢改變。按 H, Grad 對 Maxwell 氣體所作的計算，得知前引入的 P, J 函數，其改變乃係按

$$P \sim e^{-t/t_1}, \quad J \sim e^{-2t/t_1}$$

式，故這極快的。這顯示 n, u, T 之外的矩元，其衰減很快，這是因為較高矩元，在碰撞中不滿足式(4)的守恒關係也。

Bogoliubov 伸展式(49)所含的Chapman-Enskog方法的精義由 Liouville 方程式出發獲得一個新的動力方程式。下文將略述之 (參考吳著，前書)

(7)解波茲曼方程式的其他方法：

Grad 氏的 13 個矩元的方法 (參考吳著，前書 PP45~7)

§ V 氣體及電漿的 B-B-G-K-Y 體係

1946 年，蘇聯的 Bogoliubor 氏，英國的 Born 與 Green 氏美國的 Kirkwood 氏，及較早的法國 Yvon 氏，各自獨立的研究同一個問題；即將 Liouville 方程式，代以一集無限聯立方程式，再以一些近似法截斷該聯立方程式，來導出動力方程式。

設 N 個質點系統的 Hamiltonian 函數為：

$$H = \sum_i^N \left[\frac{p_i^2}{2m} + V(q_i) \right] + \sum_{i,j \neq i}^N \phi(|q_i - q_j|) \dots\dots\dots (1)$$

質點的運動方程式是

$$q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i=1 \dots N \dots \dots \dots (2)$$

考慮一個系集 (ensemble) (Gibbs 的意義), 且設

$$D(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n, t) dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n \dots \dots \dots (3)$$

為一個氣體於時間 t 在體積素 $dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$ 中的機率, D 符合 Liouville 方程式

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial D}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial D}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0 \dots \dots \dots (4)$$

這式是動力方程式(2)的一個直接結果。

我們假設 D 函數對所有質點的互換是對稱的

*如我們引入 Poisson 括號表示法

$$\{H, D\} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial D}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial D}{\partial q_i} \right) \dots \dots \dots (5)$$

則式(4)可寫成

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \{H, D\} \dots \dots \dots (6)$$

討論在一般的理論時 (不是討論特殊實驗問題), 我們通常假設所謂的熱力學極限 (thermodynamics limit) 即使

$$N, V \rightarrow \infty, \text{ 而保持 } n = \frac{N}{V} = \text{有限值} \dots \dots \dots (7)$$

這樣就可不去考慮體積 V 的邊界效應。

定義一系列一個質點, 二個質點, …… , S 個質點的函數如下:

$$F_S(q_1 \dots q_S, p_1 \dots p_S, t) \equiv V \int \dots \dots \int D dq_{S+1} \dots dq_n \dots \dots \dots (8)$$

$S = 1, 2, 3 \dots$

(F_S 的因次為 [動量] $^{-3S}$)。將式(4)連續地以 $dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n, dq_3 \dots dq_n dq_3 \dots dp_n, \dots dp_{S+1} \dots dp_n$ 乘之,

且分別對 q 及 p 積分, 我們可得

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_1}{m} \cdot \nabla_1 - \nabla_1 V(q_1) \cdot \frac{\partial}{\partial p_1} \right] F_1(q_1, p, t) \\ = n \int \int dq_2 dp_2 \nabla_1 \phi_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial p_1} F_2(q_1, q_2, p_1, p_2, t) \dots \dots \dots (9)$$

$$\frac{\partial F_S}{\partial t} = \{H_S, F_S\} + \frac{N-S}{V} \int \int dq_{S+1} dp_{S+1} \left\{ \sum_{i=1}^S \phi_{i, S+1} F_{S+1} \right\}, S = 1, 2, 3 \dots \dots \dots (10)$$

此處

$$H_S = \sum_{i=1}^S \left[\frac{p_i^2}{2m} + V(q_i) \right] + \sum_{i,j < i}^S \phi_{ij}(q_i - q_j) \dots \dots \dots (11)$$

{ } 大括號即是 Poisson 括號。這個系統 (或層系) 式(10)是個具有耦合的方程式系統, 它和式(4)的 Liouville 方程式相同, 是對逆時有不變性的方程式。

式(9)為式(10)層系的第一式。式(9)與波茲曼方程式有些相似, 但它則以包含兩個質點的函數 F_2 取代了波茲曼方程式裡的乘積 $F_1(q_1, p_1, t) F_2(q_2, p_2, t)$ 。式(9)可以稱為 “動力方程式”, 如我們引用這個名稱至任何由波茲曼方程式延伸得來的 $\frac{\partial F}{\partial t}$ 方程式。但式(9)與波茲曼方程式不同不含 Stosszahlansatz 之類的假設而係逆時不變的方程式。

式(9)是一個極為普遍的方程式, 不受低密度, 或短距程交互作用 $\phi(q_i - q_j)$ 的限制, 因此我們想以此式作為適用於中性氣體或電漿之動力方程式的起點。然而式(9)並不能馬上就使用, 因為它包含了二個質點的函數 F_2 此函數由式(10) $S=2$ 的方程式得來, 而此方程式包含 F_3 , 而 F_3 的方程式又包含 F_4 等等。

爲了想得到一個封閉系統，我們可以假設 $S = 3$ 時， $F_3 = 0$ 來切斷這種連鎖關係，但是因此而得的封閉系統仍是很複雜的，想求它的解還得經一番較深入的展開過程。

選擇爲展開的參數，必須考慮此理論成立的目的，亦即是爲了中性氣體抑或爲了電漿。

爲了解此點，我們可將(10)的層系以無因次的變數表示，將所有的長度 x ，以長度單位 r_0 表示（ r_0 的意義將於後敘），時間則以 $\tau_0 = r_0/u$ 表示，此處 $u = (\frac{kT}{m})^{1/2}$ 是質點的平均熱速度。設使

$$\phi(q_i - q_j) = \phi U_{ij}(x) \dots\dots\dots (12)$$

此處 ϕ 是一個常數，它的因次是能量， U_{ij} 是質點 i 和 j 間無因次距離的無因次函數。我們定義一系列無因次函數 $F_1, F_2 \dots F_n$ 如下：

$$\int F_N (\frac{r_0^3}{V})^N (dx dv)^N = 1$$

$$F_s = \int F_N (\frac{r_0^3}{V})^{N-s} (dx dv)^{N-s} \dots\dots\dots (13)$$

$$F_1 = \int F_n (\frac{r_0^3}{V})^{N-1} (dx dv)^{N-1} = \int F_2 (\frac{r_0^3}{V}) dx_2 dv_2$$

此處 $(dx dv)^k = dx_1 \dots dx_k dv_1 \dots dv_k$ ， x_i, v_i 是質點 i 的無因次距離及速度。

設使

$$K_s \equiv \sum_{i=1}^S v_i \cdot \nabla_i$$

$$\Theta_s \equiv \sum_{1 \leq i \leq j} \nabla_i U_{ij} \cdot (\frac{\partial}{\partial v_i} - \frac{\partial}{\partial v_j}), \Theta_0 \equiv 0 \dots\dots\dots (14)$$

$$L_s \equiv \sum_{i=1}^S \int dx_i dv_i \nabla_i U_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial v_i}, j = s+1$$

則可證明方程式(4)，(9)，(10)可改變寫成如下形式（在無外場時）

$$\frac{\partial F_N}{\partial t} + (K_N - \frac{\phi}{kT} \Theta_N) F_N = 0 \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + V_1 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \frac{\phi}{kT} nr_0^3 L_1 F_2 \dots\dots\dots (16)$$

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} + (K_s - \frac{\phi}{kT} \Theta_s) F_s = \frac{N-S}{N} \frac{\phi}{kT} nr_0^3 L_s F_{s+1} \dots\dots\dots (17)$$

在這些方程式中出現了兩個無因次的參數 $\frac{\phi}{kT}$ 及 $nr_0^3 = \frac{N}{V} r_0^3$ 。

中性氣體的 van der Waals 作用中的值約爲 KT 。如我們選

$$r_0 \approx \text{分子的直徑} \approx \text{分子間相互作用的範圍}$$

$$\approx \text{相關長度 (correlation length)} \dots\dots\dots (18)$$

則對密度不高的氣體而言，參數

$$\epsilon \equiv nr_0^3 \ll 1 \dots\dots\dots (19)$$

是展開過程的一個適當的值。故按 ϵ 展開，即是一種密度的展開。將系列(10)式作密度的展開時，我們將見在密度的第一個量級，由式(9)可導出一個方程式，再用一些近似方法，此方程式即可變成波茲曼方程式。

對電漿而言，由 $\epsilon \ll 1$ ，(11)式上可以看出，有意義的長度是 Debye-Hückel 長度 r_D

$$r_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi n e^2}} \dots\dots\dots (20)$$

對該電漿而言*

$$nr_D^3 \gg 1 \dots\dots\dots (21)$$

對於庫倫相互作用，我們可得（參看(12)式）

$$\phi(r_{12}) = \frac{4\pi e^2}{r_{12}} = \frac{4\pi e^2}{x_{12}r_D} \equiv \phi \frac{1}{x_{12}} = \phi U_{12}$$

在此 x_{12} 是無因次的（距離以 r_D 為單位）且

$$\frac{\phi}{kT} = \frac{4\pi e^2}{r_D kT} = \frac{1}{nr_D^3} \ll 1 \dots\dots\dots (22)$$

因此我們對電漿而言我們可取用的參數即為：

$$\epsilon = (nr_D^3)^{-1} \dots\dots\dots (23)$$

* 時間單位為 $T_0 = \frac{1}{\omega} = \frac{\sqrt{m}}{4\pi n e^2} = \frac{r_D}{u}$ （參看 § I，(11'））長度單位為 r_D

$n \simeq 10^{10}$ 時， $kT \simeq 1$ ， $e, v, r_D \simeq 10^{-2} \text{ cm}$ ， $\epsilon \ll 1$

在這種情形下，式(16)及(17)可代以下列方程式

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + v_1 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = L_1 F_2 \dots\dots\dots (24)$$

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} + (K_s - \epsilon \frac{H_s}{N}) F_s = \frac{N-s}{N} L_s F_{s+1}, s = 2, 3, \dots\dots\dots (25)$$

想解(24)，(25)，仍需要更進一步的近似步驟（如展開 F_s ， $s = 2, 3, \dots$ 並截斷該系統）。

為求明瞭 B-B-G-K-Y 層系和中性氣體及電漿間的關係，讓我們回到(16)–(17)層系，視 $\epsilon \equiv (\frac{\phi}{kT})$ ， $\delta \equiv (\frac{\phi}{kT} nr_D^3)$ 為兩個獨立的參數（我們亦可選擇 nr_D^3 ， $\frac{\phi}{kT}$ 為兩獨立參數，但最後的分析結果是相同的），作下列的展開，

$$F_s = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^m \delta^n F_s^{(m,n)}, \delta = 2, 3 \dots\dots\dots (26)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^m \delta^n A_{(m,n)} \dots\dots\dots (27)$$

將式(26)(27)代入(16)(17)得到 ϵ ， δ 之各種數量級的方程式，欲解這些方程式，尚需要一些進一步的假設與構想（ideas）。

* 對這問題的基本瞭解，是 Bogoliubov 首次指出是在氣體或電漿中，存在有特性時間尺標（characteristic time scales）。參考本文之 § I。基於這個認識，產生了兩個方法：一個是 Bogoliubov 所用，其精神類似 Chapman 和 Enskog 解波茲曼方程式的方法，另一個則由 Frieman 和 Sandri 提出，引入明顯不同的時間尺標的方法。（參考吳著前書 Chap. 3 §§ 3, 4, 6；Chap. 6，§ 2；Chap. 7 § 3）。

按 Bogoliubov 的方法，計算仍極繁難，這裡不能詳述，但我們可將 $A(m, n)$ 的最後結果圖表示如下：

		δ^n				
		0	1	2	3	$4 \dots\dots\dots$
m	0	$A_{0,0}$	$A_{,,}$	0	0	$0 \dots\dots\dots$
	1	0	$A_{1,1}$	$A_{1,2}$	$A_{1,3}$	$A_{1,4} \dots\dots\dots$
	2	0	$A_{2,1}$	$A_{,,}$	$A_{2,3}$	$A_{2,4} \dots\dots\dots$
	3	0	$A_{,,}$	$A_{,,}$	$A_{,,}$	$A_{,,} \dots\dots\dots$

(1) 若只取 ϵ^0 項，我們得最低次數的近似值

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = A_{(0,0)} + a A_{(0,1)} \quad (\text{第一列}) \dots\dots\dots (29)$$

此式可證明即為 Vlasov 方程式。

(2)若取 δ^1 及所有 ϵ^m 項，則得近似式為

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = A_{(0,0)} + \delta \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m A_{(m,1)} \quad (\text{上表的第一和第二豎行}) \dots\dots\dots (30)$$

此可證明為一個普通性(改良過的)波茲曼方程式。這個近似式，除了兩個質點的一些相關效應外，忽略所有的相關效應不容忽視祇適用於密度不高的氣體，但不適用於電漿，因為電漿中多質點間的相關效應不容忽視(參考吳著，前書 P.83)。

(3)若取 ϵ^1 及所有 δ^n ，可得近似式為：

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = A_{(0,0)} + \delta A_{(0,1)} + \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n A_{(1,n)} \quad (\text{前(28)表的第一，第二兩列}) \dots\dots\dots (31)$$

對均勻電漿，此式即為由 Lenard, Balescu, Guernsey 三人所得的方程式，對不均勻電漿，此式即為由 Gurnsen, Rosenberg 及吳和其他人所得的方程式。這種近似法，由於未包括 ϵ 的所有數量級，故對質點間小距離，時的大的相互作用，未作適當的考慮，故方程式中的積分在小距離時有不收斂的困難。(參考吳著，前書，P180)有關相關的問題(參閱吳著 PP170, 208~212)。

(4)若只取 δ^2 及所有 ϵ^m ，則得方程式

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = A_{(0,0)} + \delta \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n A_{(m,1)} + \delta^2 \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m A_{(m,2)} \dots\dots\dots (32)$$

此理論曾被趙淳植及 Uhlenbeck 二氏研究過(參閱吳著，前書，第四章)。這是將波茲曼方程式延伸至密度第二數量級的理論。

§ VI 電漿的動力方程式(B-B-G-K-Y)體系以方程式 § V.(24)(25)為出發點，

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x} = L_1 F_2 \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} + (K_s - \epsilon \mathcal{H}_s) F_s = \frac{N-s}{N} L_s F_{s+1} \dots\dots\dots (2)$$

此處 $F_1 = F(x, v, t)$

$$F_2 = F(x_1, x_2, v_1, v_2, t) \dots\dots\dots (3)$$

$$F_3 = F(x_1 \dots x_s, v_1 \dots v_s, t)$$

$K_s, \mathcal{H}_s, L_s$ 是如 § V, (4)式的算子，且由 § V, (23)式知：

$$\epsilon = \frac{1}{n r_D^3} < 1 \dots\dots\dots (4)$$

在 § I 中曾指出在電漿中有二個有意義的特性時間，即：電漿的振盪週期 T_0 及電漿速度達成平衡分佈的衰減時間 T_r (relaxation time)。

$$T_0 = \frac{1}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{4\pi n e^2}} = \frac{r_D}{u} \dots\dots\dots (5)$$

就我們所討論的電漿而言， $T_r > \frac{1}{\epsilon} T_0$ ，

因此

$$\frac{T_0}{T_r} < \epsilon \dots\dots\dots (6)$$

以下我們將引入多時間尺標(many-time-scale)理論。

設 $\tau_0, \tau_1, \tau_2 \dots$ 是單位為 $T_0, T_1, T_2 \dots$ 的時間變數，此處

$$\frac{1}{T_0} : \frac{1}{T_1} : \frac{1}{T_2} \dots = 1 : \epsilon : \epsilon^2 \dots\dots\dots (7)$$

τ_0 是最快的時間尺標， τ_1 較慢， τ_2 更慢…。若有一種氣體(或電漿)演化過程的，時間變數

爲 t 。 t 可看成是由氣體中各種過程（碰撞，衰滅）的特性時間指標所組成。因爲這些過程是紛亂的（random），故各種時間尺標沒有同一且固定的源點（origin），我們只有以下式來固定它們的相對大小：

$$\frac{d\tau_1}{d\tau_0} = \epsilon, \quad \frac{d\tau_2}{d\tau_0} = \epsilon^2 \dots\dots\dots (8)$$

我們將 $\frac{\tau}{\tau_0}$ 代以

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \tau_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} \dots\dots\dots (9)$$

配合式(8)的關係，我們按 ϵ 冪級，展開分佈函數 F

$$F = \sum \epsilon^n f^{(n)} \dots\dots\dots (10)$$

與式(9)合併可得

$$\frac{\partial F}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \tau_0} + \epsilon \left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \tau_0} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \tau_1} \right) + \epsilon^2 \dots\dots\dots (11)$$

爲解(2)式的方程式系列，我們作所謂的群組（Cluster）展開：

$$F_2(1, 2) = F_1(1)F_1(2) + G(1, 2) \dots\dots\dots (12)$$

$$F_3(1, 2, 3) = F_1(1)F_1(2)F_1(3) + F_1(1)G(2, 3) + F_1(2)G(3, 1) + F_1(3)G(1, 2) + g(1, 2, 3) \dots\dots\dots (13)$$

爲切斷系統(2)的連鎖關係，我們假設二質點相關函數 $G(1, 2)$ ，較 $F_1(1)F_1(2)$ 爲小，即：

$$\frac{G(1, 2)}{F_1(1)F_1(2)} = O(\epsilon), \quad \frac{g(1, 2, 3)}{F_1(1)F_1(2)F_1(3)} = O(\epsilon^2) \dots\dots\dots (14)$$

這裡我們必須強調的是這些假設關係，在質點距離 r_{12} 很小（交互作用甚大）時是無效的。

由式(14)，我們可作進一步的展開：

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1^{(0)} + \epsilon F_1^{(1)} + \epsilon^2 F_1^{(2)} + \dots\dots\dots \\ G &= \epsilon G^{(1)} + \epsilon^2 G^{(2)} + \dots\dots\dots (15) \\ g &= \epsilon^2 g^{(2)} + \dots\dots\dots \end{aligned}$$

將式(11)，(12)，(13)，(15)代入(1)和(2)系列方程式，並將各種次數 ϵ^n 項相較，我們可得下列方程式

$$\epsilon^0: \frac{\partial F_1^{(0)}}{\partial \tau_0} + \mathcal{H}^{(0)} F_1^{(0)} = 0 \dots\dots\dots (16)$$

$$\epsilon^1: \frac{\partial F_1^{(1)}}{\partial \tau_0} + \mathcal{H}_1^{(0)} F_1^{(1)} + \mathcal{H}^{(1)} F_1^{(0)} = L G^{(1)} \dots\dots\dots (17)$$

$$\epsilon^1: \frac{\partial G^{(1)}}{\partial \tau_0} + K_2 G^{(1)} = H_2 F_1^{(0)} F_1^{(0)} + \Gamma^{(0)} G^{(1)} + M^{(0)} G^{(1)} \dots\dots\dots (18)$$

此處

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(0)} &= \nabla_1 \cdot \nabla_1 - \int dx_2 F_1^{(0)}(2) \nabla_1 U_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \\ \mathcal{H}_1^{(0)} &= - \int dx_2 F_1^{(1)}(2) \nabla_1 U_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \\ \mathcal{H}_2 &= \nabla_1 U_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} + \nabla_2 U_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2}, \quad K_2 = \nabla_1 \cdot \nabla_1 + \nabla_2 \cdot \nabla_2 \dots\dots\dots (19) \\ \Gamma^{(0)} G^{(1)} &= \int dx_3 \left[\nabla_1 U_{13} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} F_1^{(0)}(3) G^{(1)}(2, 3) + \nabla_2 U_{23} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2} F_1^{(0)}(3) G^{(1)}(1, 3) \right] \\ M^{(0)}(1, 2) &= \int dx_3 F_1^{(0)}(3) \sum_{i=1}^2 \nabla_i U_{i3} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} \\ L(1) &= \int dx_2 \nabla_1 U_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \end{aligned}$$

此處 $dx = d^3 r d^3 v$ ，參考吳著，前書第7章，第3節。

(1)數量級爲 ϵ^0 者，我們得到式(16) Vlasov 方程式。

$$\frac{\partial F_1^{(0)}}{\partial t} + v_1 \cdot \frac{\partial}{\partial r_1} F_1^{(0)} = \int \int d^3 r_2 d^3 v_2 F_1^{(0)}(2) \frac{\partial U_{12}}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial}{\partial v_1} F_1^{(0)}(1) = 0 \quad (20)$$

這個方程式可從 self-consistent field 的觀點導出。將第二個粒子作用於第一個粒子的力，對所有 r_2 和 v_2 作平均後，即得下列

$$\int \int d^3 r_2 d^3 v_2 F_1^{(0)}(2) \frac{\partial U_{12}}{\partial r_1} \quad (21)$$

我們不詳細討論這個方程式，只將其最重要的性質摘錄於下：

① 這個非線性方程式，儘管其形式簡單，仍不易解。

② 它是逆時不變的，因此，由 H 定理得 $\frac{dH}{dt} = 0$ 。

③ 將其做線性化之近似法處理後，可發現

1 表示趨近於空間均勻分佈的 Landau 衰減 (Landau damping)

2 第(20)方程式沒有使速度分佈趨使於平衡 (馬克斯威爾分佈) 的趨勢，所以 Vlasov 方程式只能用於“短時間”行為，而完全不適用於“趨向平衡”的問題。

3 有一“密度波”的電漿振盪。

有關這些論題之討論可參考吳著之前書第 5 章，第 2.1 節和第 5 節。

(2) 數量級為 ϵ^1 者：

方程式(17)，(18)之普遍狀況太複雜而無法處理。對於空間均勻之電漿，(17)，(18)式可化為：

$$\frac{a F_1^{(1)}}{a \tau_0} + \frac{a F_1^{(0)}}{a \tau_1} = L G^{(0)} \quad (22)$$

$$\frac{a G^{(1)}}{a \tau_0} + K_2 G^{(1)} = H_2 F^{(0)}(1) F^{(0)}(2) + \Gamma^{(0)} G \quad (23)$$

將(22)，(23)式當作初值問題求解時，我們作一些關於相關函數 $G^{(1)}_{(1,2)}$ 初值狀態之假設，導出一個對時間不再是可逆的動力方程式，有關參考資料請參看吳著前書第 7 章 3 - 3 節。至於證明由近似法可導出 § V 節的 Lenard-Balescu-Guernsey 動力方程式，參閱吳著前書第 6 章第 4 節之 (6.88b)，(6.98a)，關於由 Rosenberg 和吳著作線性近似計算衰減時間部份，則參閱該書第 6 章第 7 節。

(3) 源自 B-B-G-K-Y 層系之動力方程式：

讓我們回到 § V 表(28)及兩個近似式(30)和式(31)，即

① 波茲曼方程式“B”由表(28)之首兩行表之。

② 空間分佈均勻性電漿的 Balesu-Lenard-Guernsey 方程式“G”，由表(28)之首兩列表之。

由於電漿有庫倫作用，在粒子間之大距離時，“B”式中之碰撞積分是不收斂的 (因為忽略了相關作用。)

而在粒子間小距離時，“G”式中之碰撞積分是不收斂的 (因為在小距離時，相關作用未得充分正確的處理，見(4)式)。另外，更早 Landau 導出 (1936) 的動力方程式，現在可見乃 § V 圖表(28)中之 A (1.1) 項，即“L”

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \epsilon \partial A (1.1) \quad (24)$$

此式同時忽略了在 $r_{12} \geq r_D$ 和 $r_{12} \sim r_L$ ($r_L = e^2 / kT$)，兩種狀況下的相關作用，故在大距離或小距離都是不收斂的。再參考 § V 表(28)，我們可得一個由前兩行和前兩列所有各項得到之動力方程式，即

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = "G" + "B" - "L" \quad (25)$$

因爲“G” + “B”將 $A_{(1,1)}$ 項算了兩次，故必須減去一個“L”。仔細檢查“G”，“B”，“L”中之積分，顯示出“G”在短距離和“B”在長距離之不收斂，正好被“L”之不收消除掉，於是式(25)在任何距離皆係收斂的。

以下之概念曾由許多作者提出。這個方程式，據作者所知還從未被真正的使用過。

參閱吳著前書第7章第4節，

關於解B-B-G-K-Y層系之方法的評註：

在第§V，(28)式中我們用表說明了在解B-B-G-Y-K層系時，作“作用力强度”，“密度”的展開所得之結果，且在§VI，我們提到了動力方程式“B”(Boltzmann)“G”(Balescu-Leuand-Gurnsey)和“L”(Landau)的形式，相當於：

“B” = §V(28)式之首兩行

“G” = §V(28)式之首兩列

“L” = §V(28)式之 $A_{(1,1)}$ 項

爲清楚地解說表(28)及“B”，“G”方程式中所包含的近似法，下列數點是甚有助益的。

(1)由於Bogoliubov方法(吳著前書方程式(3-70)和68-83頁)和由Frieman及Sanari方法(見吳著前書，方程(3-106)及86-90頁)所導出的方程式“B”是略微普遍化的波茲曼方程式的型式，如上述參考資料中第83頁所指出的，波茲曼方程式確實包含了兩粒子之相關效應，但並無三粒子或多粒子間之相關效應。因爲雙粒子相關效應之考慮不夠充分，波茲曼方程式即完全不適用於電漿，因在電漿中長距程庫倫作用力使得相關效應非常重要。由於展開時刪除了密度的高階數量級項，忽略了三粒子和多粒子碰撞，結果使得由波茲曼方程式計算出的黏滯係數和傳導係數不含與密度有關的項，這些項即是出現於趙(Choh)和Uhlenbeck計算中的二次方項(n^2)(吳著前書第4章)。

波茲曼方程式，係正確至密度之第一數量級項，亦即係包含了交互作用參數所有各數量級項，故已將粒子間小距離之作用完善地考慮在內，在小距離 r 時不發生無不收斂的情形，

(2)由Gurnsey按Bogoliubov方法(見吳著前書第六章168-180頁)，和由Balescu和Lenard不使用於Bogoliubov函數法所得到的方程式“G”，只適用於空間均勻性電漿。這些作者之詳細數學方法雖然不同，而他們都作了下列的近似假設：

(a)計算只取至作用强度的第一數量級。

(b)只考慮雙粒子之相關作用，但包含了所有密度參數之高次數量級(即密度項不需展開)。

(c)三粒子或多粒子相關作用完全忽略。這個限制，在Gurnsey的研究裡，是來自Bogoliubov初始狀態。此在吳著之前書170頁方程式(6-39a)和(6-39b)中有明晰的討論。在Balescu及Lenard的研究工作中，上述的限制，是來自有關 $g(1,2,3)$ 三粒子相關作用假設式(4)。這兩個理論的近似假設，是等效的，此在吳著前書208-212頁中曾予以證明。

(3)方程式“G”可作些變更後應用於短距離作用力粒子的系統。例如，若作用力爲 $V(r_{12}) \propto \frac{e^{-\lambda r_{12}}}{r_{12}}$ 則我們可證明，動力方程式就是著者前書中將(6.89a)式 k^2 項換成 $k^2 + x^2$ 的(6.88b)式及(6.89a式)。按吳著第180頁中所給的同樣理由，如此得到之方程式在大 k 值時(即小距離 r_{12} 時)，當然，是收斂的。