

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

利率可調整之抵押貸款證券之風險評估---風險值之應用

Risk Evaluation of Adjustable Rate Mortgage-backed Securities ---Application of Value-at-Risk

計畫編號：NSC 91-2416-H-002-040

執行期限：91 年 8 月 1 日至 92 年 7 月 31 日

主持人：廖咸興 執行機構：國立台灣大學

一、中文摘要

本研究係以郭姿伶（2000）的提前償還模型（Logistic Regression Model）並配合 CIR 利率模型，來模擬利率可調整之不動產抵押貸款證券（利率可調整抵押貸款）的價格，並且微調各個影響利率可調整抵押貸款的重要參數，以便能更深入地分析利率可調整抵押貸款的特徵與性質，其結果如下六點：（1）本研究所模擬之結果符合基本的財務原理，因當模擬的次數增多時，模擬出來之價格有往真實理論價格收斂的情形出現；（2）當利率的均數復歸速率越大，利率可調整抵押貸款的價格將會越高，風險值絕對值（以下風險值皆討論其絕對值）越低，表示利率可調整抵押貸款上所附的選擇權越沒價值。（3）當利率波動性越大時，利率可調整抵押貸款的價格將會越低，風險值也愈大，表示利率可調整抵押貸款上所附的選擇權越有價值；（4）本研究結果發現當貸款期間利率上限較高時，利率可調整抵押貸款的價格將越高，風險值越低，表示利率可調整抵押貸款上所附的 Lifetime Cap 越沒價值；（5）當 Yearly Cap 越大時，選擇權越難進入價內，Yearly Cap 越沒價值，利率可調整抵押貸款的價格也就越高，風險值則不受 Yearly Cap 的影響；（6）當 Margin 越高，證券未來的現金流量就越高，利率可調整抵押貸款的價格也就越高，風險值也越大。（7）當 OAS 越高時，即折現率越高，利率可調整抵押貸款的價格越低，風險值也越低。

關鍵詞：利率可調整之抵押貸款證券、風險評估、風險值

Abstract

Under the growing pressure of financial crisis that is due to the lack of tools of asset liability management, the Legislative Yuan has approved the law “Financial Asset Securitization Act”. It means that the mechanism of mortgage securitization is established. However, the most popular mortgage products in Taiwan are interest rate adjustable rather than fixed rate mortgages. It is questionable to directly apply the empirical results from market of the States to Taiwan market. Therefore, the study is to apply the newly developed risk measure “value-at-risk” to the risk evaluation of the adjustable rate mortgage-backed securities. The results of this study can be summarized as follows:

(1) The basic pricing model is appropriate and the simulation prices converge. (2) The higher the mean reverting speed the lower the value-at-risk. (3) The higher the interest rate volatility the higher the value-at-risk. (4) The higher the lifetime interest rate cap, the lower the value-at-risk. (5) The higher the margin the higher the value-at-risk. (6) the higher the OAS the lower the value-at-risk.

Keywords：Adjustable rate mortgage-backed securities, risk

evaluation, Value-at-Risk

壹、背景動機與目的

面對國內金融機構資產管理工具缺乏導致的金融潛在危機日增，行政院財已於民國九十年十二月底完成「金融資產證券化法案」送立法院審議，抵押債權證券化制度即將在國內建立。但國內不動產抵押貸款市場卻與美國的市場有相當大的差異。其中主要的差異之一為貸款利率型態的不同，國內多為利率可調整型態，而美國多為固定利率型態。貸款利率型態的不同，直接影響到借款人的提前還款行為，進而影響到證券的現金流量。因此，國外或以國外市場條件為基礎的研究結果是否可引援到國內市場來使用，實是令人感到十分存疑。有鑑於此，為了進一步拉進國內研究與市場的特性之距離，本研究以利率可調整之不動產抵押貸款所支持之抵押貸款證券作為主要風險評估分析的對象。而風險評估分析的方法則採用是近年來國際間積極發展量化風險的新方法，「風險值(Value at Risk)」。風險值在概念上是指在特定期間內，既定的信賴水準假設下，投資人持有一投資組合之最大可能損失。由於風險值衡量模型可應用在所有的金融商品上，包括股市、匯市、債市，甚至如新奇選擇權等其他複雜的衍生性金融商品上，是一種可以比較不同資產風險的指標，並且可以作為提供投資人操作的準則。

抵押貸款證券(Mortgage Backed Securities)之完整風險評估涉及三個層面：首先，要描述利率路徑的隨機性質（亦即設定利率模型）；其次，為設定房貸借款人之提前清償行為（亦即設定提前清償模型）；最後，為上述兩個模型整合來找出其價格分配。國內研究不動產證券化已有數年，大部分的研究¹主要針對美國不動產抵押證券的發行情形來研究，但國內不動產抵押貸款市場卻與美國的市場有相當大的差異。其中主要的差異之一為貸款利率型態的不同，國內多為利率可調整型態，而美國多為固定利率型態。貸款利率型態的不同，直接影響到借款人的提前還款行為，進而影響到證券的現金流量。因此，這些研究的結果是否可引援到國內市場來使用，實是令人感到十分存疑。有鑑於此，為了進一步拉進國內研究與市場的特性之距離，本研究以利率可調整之不動產抵押貸款所支持之抵押貸款證券作為主要風險評估的對象。由於抵押貸款證券乃是具有路徑相依性質的衍生性金融商品，因此使得一般在使用偏微分方程(PDE)

¹ 如何澤蘭（1999）、陸文傑（2000）、高心怡（2000）

評價時，很難得到評價的封閉解，此時只能採用數值方法或其他方法如利率樹、一般模擬法等等來評價。國內現有論文一般皆採取利率樹的方法評價，但是以利率樹的方法來評價利率可調整之不動產抵押貸款證券卻可能有利率樹無法真實反映所有利率路徑的缺點，故本研究將改採模擬法來進行利率可調整之不動產抵押貸款證券的風險評估。

所謂風險值(VaR)的定義, Linsmeier and Pearson (1996) 認為基於市場正常的移動('normal' market movement) 下, 對於投資組合可能損失在統計上的衡量, 就是風險值的基本概念, 實際損失超過風險值的可能性極小。Golub and Tilman (1997) 提出兩種對 VaR 的解釋, 機率水準為 95% 的假設下, 一為在某特定的投資或交易期間內, 持有部位有 95% 的機率損失將不超過 VaR 值; 另一定義為當特定的投資或交易期間為一天, 則在所考慮的總交易天數中, 有 5% 的天數之部位損失將會大於 VaR 值。

風險值受國際間的日漸重視, 九十年代以來, 風險值的衡量模型也推陳出新, 學者對於風險值的討論與實證相當熱烈。Jorion (1996) 將風險值衡量模型分為兩大類, 其中之一如常態一階段 (Delta-Normal method) 及二階逼近法 (Delta-Gamma Approximations) 等, 以資產報酬之模型假設為基礎, 無需再計算投資組合在不同情形下的價值, 屬於部分評價 (Local Valuation); 另一類以完全評價 (Full Valuation) 為基礎, 如歷史價格模擬 (Historical-simulation method)、結構性蒙地卡羅法 (structured Monte Carlo method) 及壓力測試法 (Stress testing method) Pritsker (1997) 認為, 風險值評估方法隨其假設以及對精確度 (accuracy) 與計算時間 (computational time) 之要求不同, 分為兩類, 一類如一階段 (Delta method)、二階段 (Delta-Gamma method), 另一類屬於計算上較耗時的, 如模擬法 (Simulation)、壓力測試法等。

蒙地卡羅模擬法以設定的隨機過程, 搭配依市場資料估計參數, 持續模擬風險因子可能之變異, 來建構出各種不同情況下假想的資產價格路徑, 進而自此具代表性的資產報酬分配中衡量風險值, 這個特定的過程即為蒙地卡羅分析法, 也是目前計算風險值最有

力的方法。它不但能涵蓋非線性風險, 也可以處理下列幾種問題, 例如多個隨機變數的價格變動, 具有路徑相依性 (path-dependent) 的評價 (如抵押貸款證券與 Asian option), 隨時間變異的參數 (如波動性和相關性), 雙尾肥胖、不對稱等非常態分配以及信用風險等前述方法束手無策的問題。模擬雖需複雜的電腦技術和大量的重複抽樣, 但在電腦科技快速發展的今天, 過去認為蒙地卡羅模擬法既昂貴又耗時的計算成本的缺點, 如今已大為降低, 因此, 只要模擬的所仰賴風險因子的隨機過程和資產的評價模型的選擇適當, 仍可提供可靠的風險評估資訊。

國內對抵押貸款證券以風險值概念做風險評估研究的僅江常維於 2000 年之碩士論文, 為該研究室以美國市場條件基礎, 應用前述之如一階段 (Delta

method) 與二階段 (Delta-Gamma method)。由於以台灣市場條件為主, 利率可調整之抵押貸款證券之價格並無封閉型解, 無法應用一階段與二階段, 故本研究採行模擬方法進行初探。

本研究以下將分為四部分: 首先討論影響利率可調整之不動產抵押貸款證券價格之因素及其相關之文獻; 接著討論研究方法, 包括本研究採用的提前償還模型以及本研究所採用之利率模型; 第三部分以模擬方式來評價利率可調整之不動產抵押貸款證券之風險分析; 第四部分則為結論。

貳、影響可調整利率之不動產抵押貸款證券的價格相關之文獻探討

一、利率可調整之不動產抵押貸款之特徵

利率可調整之不動產抵押貸款有以下幾個的特點。首先, 貸款合約一開始所設定的利率, 一般而言皆較固定利率抵押貸款的初始利率顯著為低, 如此的特徵使得期初無法繳納較多金額的貸款者, 得以有機會來申請貸款。美國銀行業者亦利用如此特徵, 以大量吸引貸款者²。其次, 利率可調整抵押貸款每隔一固定時間, 便重新調整其合約利率, 其調整的依據通常根據其合約所設定利率指標來調整, 美國利率可調整抵押貸款常用之利率指標主要為三個月、六個月國庫券之年利率、一年期公債利率、聯邦住宅貸款銀行 (FHLB) 之資金成本等。附加在利率指標上的風險貼水 (Margin) 加上利率指標即為合約上每一期的貸款利率 (coupon rate)。利率可調整抵押貸款重新調整利率所需的時間間隔稱為調整期間 (Adjustment period)。利率可調整抵押貸款通常附有整個貸款期間的利率上限 (lifetime cap)、利率下限, 以及每年合約利率可調整的利率上限 (annual cap), 且通常為相對值 (與初始利率相對), 而非絕對值³。

由於利率可調整抵押貸款通常附有利率上下限的選擇權, 在加上不動產抵押貸款原有的提前償還及違約選擇權, 將使得利率可調整抵押貸款的評價將更形複雜。因此為了能順利評價利率可調整抵押貸款, 便必須了解影響利率可調整抵押貸款相關風險及其

價值的要素。

利率可調整抵押貸款不但兼具一般債券的風險, 它還包含了不動產抵押貸款證券特有的提前償還風險。由於利率可調整抵押貸款每隔一調整期間, 便會將其合約利率調整至與指標利率一致, 因此當利率產生變動時, 其對利率可調整抵押貸款所產生的衝擊

² 此較低之利率通常稱為 teaser rate, 而產生的效果稱為 teaser effect。

³ 例如: 若有一利率可調整抵押貸款其初始利率為 8%、lifetime cap 為 5%、annual cap 為 2%, 則利率可調整抵押貸款在整個貸款期間其利率調整後之利率不可超過 13%(=8%+5%)、不可低於 3%(=8%-5%), 在明年的利率調整後則不可高於 10%(=8%+2%)。

將遠較於固定利率抵押貸款來的小。此外，對於利率可調整抵押貸款而言，由於其每固定一段時間，便將其合約利率重新調整一次，因此除非是在兩調整期之間，利率產生劇烈變動，不然一般利率可調整抵押貸款是不容易提前償還的。不過，利率可調整抵押貸款由於每固定一段時間，便將其合約利率重新調整一次，故如果未來利率持續攀升，借款者的負擔將越來越沉重，因此在未來，由於違約產生的本金提前償還機率也將大大地提高。根據 Tyler, Buist, and Megbolugbe (1998) 實證的結果顯示，利率可調整抵押貸款在違約的機率上將顯著地比固定利率抵押貸款來的大。

二、邏輯斯特提前還本模型 (logistic regression model) 之探討

由於提前償還的發生，使得不動產抵押貸款證券的現金流量非常不穩定，也使得評價不動抵押貸款證券的過程更為困難。為了能夠正確地評價抵押貸款證券，一個好的提前償還預測模型便相當地重要。提前償還模型卻主要分為兩大類，一大類是由理論推導而來，其優點是能符合財務經濟學者的推導邏輯，說明一個人的提前償還與否都是來自於極大其效用函數的決定⁴，但是其缺點辨識所推導出來的結果，與實際的資料有相當大地差異。另一大類則是由實證估計而得⁵，其優缺點剛好與上述由理論推導的模型相反，它較能符合實際的資料，但是卻沒有嚴謹的理論作為其基礎。

Peter and Michael (1989) 以邏輯斯特提前還本模型來研究 1979~1982 的加拿大可調整利率之不動產抵押貸款，其將借款者還款的選擇方式分為四類—正常分期還款、提前還款、逾期還款以及貸款違約，實證結果顯示，該研究預期的解釋變數方向，與實證結論無異。該研究亦發現，假如 LTV 很大或者合約利率增加，則貸款違約的機率亦將上升。另外，他們也發現其他投資工具的報酬率將顯著地影響到借款者提前償還的意願，當別的投资工具報酬升高時，借款者通常會減少提前償還，將其資金投資於其他的投資工具。

郭姿伶 (2000) 針對中國農民銀行的不動產抵押貸款資料，利用 logistic regression model 來分析影響一般

住宅抵押借款者提前償還與逾期還款的因素，並估計借款者提前償還的機率。實證結果顯示，貸款利率、正負貸款溢價、貸款年齡以及每月攤還額度的 log 值，其對借款者的提前償還行為有顯著的影響力。另外其在結論中亦指出，在逾期還款方面，借款者的行為主要是受到個別貸款契約條件，以及借款者個人的經濟狀況影響，而與選擇權變數的關聯性不大。

三、各種評價方法之探討

評價抵押貸款證券時，乃是根據假定的提前償還模型及利率隨機模型，利用 Ito's lemma 找出其偏微分方程式 (Partial Differential Equation, PDE)，下一步便是給予偏微分方程式邊界值 (Boundary condition) 及終期值 (Terminal condition)，在這些限制條件下，解出抵押貸款證券的價格。但由於抵押貸款證券的現金流量通常隨著不同的利率路徑，而有不同的分配情形，因此其偏微分方程式的解通常不存在著封閉型解 (closed-form solution)，故通常以適合的數值分析方法來求解偏微分方程式的近似解。常見的數值方法包括：有限差分法 (Finite Difference Methods)、利率樹 (Lattice) 以及一般模擬法 (Monte Carlo Simulation)。有限差分法分為外顯式有限差分法 (Explicit Finite Difference Method) 與內隱式有限差分法 (Implicit Finite Difference Method)，由於內隱式有限差分法需求解抵押貸款證券的聯立方程式，故其所需之運算時間較外顯式有限差分法來得長。Kau, Keenan, Muller, and Epperson (1985, 1990) 使用後推運算法 (Backward Induction Method)，加上一輔助變數 (描述過去利率的路徑)，在滿足無套利及利率可調整抵押貸款所有特徵條件之下，以有限差分法求出利率可調整抵押貸款的價格，提供了一套評價利率可調整抵押貸款的一般方法。

利率模型主要可分為均衡模型⁶及無套利模型。無套利模型為了表達真實世界利率的情形，通常皆以利率樹來呈現模型所表示的利率隨機過程，例如 Hull and White 所提出的三元利率樹定價模型。由於利率模型可以透過利率樹的表達來簡化其概念，故有相當多的利率衍生性金融商品皆利用利率樹來評價。在評價抵押貸款證券上，國內何澤蘭 (1998)、高心怡 (2000)、陸文傑 (2000) 以及呂致偉 (2001) 等等，便皆以 Hull and White 的三元利率樹定價模型來評價。

理論上，當我們將一段期間無數細分時，利率樹的表達方式將可包含所有未來可能的利率路徑，但是由於在真實的世界，我們不可能做到這樣的程度，因此我們所用來評價的利率樹，恐不足以代表未來所有的利率途徑。對利率可調整抵押貸款而言，因其每隔一固定期間便須重新調整利率一次，若以利率樹評價之，

⁴ 如 Dunn and McConnell (1981), Brennan and Schwartz (1985), Kau et al. (1992), Buser and Hendershott (1984), Timmis (1985), Wayne and David (1993) and Giliberto and Ling (1992)。

⁵ 如 Green and Shoven (1986) 首次將在醫療統計學及人口統計學中發展已多年的比例轉機模型 (PHM) 運用在不動產抵押貸款證券提前償還機率的估計上，Peter and Michael (1989) 以 logistic regression model 來研究 1979~1982 的加拿大可調整利率之不動產抵押貸款的提前償行為，Cheyette, Choi, and Blanter (1996)，考慮了五個因子，包括發行機構與證券型態、利率水準 (包括利率期間結構的形狀)、貸款年齡 (seasoning)、月份因素以及 burnout 效果，並利用非線性迴歸，配合最大概似法來評估其參數，求出 MBS 的提前償還函數。

⁶ 利率均衡模型是經由理論的推導，在整個經濟體達到均衡時所得到的結論，故其未必與實際世界的狀況吻合；然無套利模型卻是在經濟體無套利的假設下所獲得的結果，較能反映真實世界的情形。利率均衡模型包括有 Vasicek 模型、CIR 模型等等，而無套利模型則有 Ho and Lee 模型、Hull and White 模型及 HJM 模型等等。

便需假設未來所調整的利率值剛好為該節點的利率值，這是相當不合理的假設，為了解決如此的問題，有些學者建議將分配的概念引入每一節點，讓每一節點的利率皆服從一 Markov 過程，以便包括所有可能的利率路徑，但如此又讓實際之操作產生困難。模擬法主要是利用統計和數值方法，針對主要的財務變數，利用電腦以一個隨機推測過程重複去做模擬，每一次模擬結果會產生一個證券價格，當我們模擬次數夠多時，將可得到證券市場價格近似「真實」的分配，再算出分配的平均值，此即為證券的理論價格，再由此一分配找出最差的 5% 的價格，其與理論價格的差距即是 VaR。依據 Golub and Tilman (1997) 的概念，此方法的結果顯示有 95% 的機率損失將不超過此 VaR 值⁷。模擬法相對於其他評價方法而言，最簡單易懂，且無其它重大缺陷，因此本研究決定採用模擬法，來作為本研究的評價方法。

參、研究方法

一、研究步驟

本研究採用模擬法作為評價方法，其主要步驟可分述如下：

- (1) 選定提前償還模型及利率模型。
- (2) 模擬所有可能的利率路徑。
- (3) 計算出每一條利率路徑所對應每一期的現金流量。
- (4) 將每期的現金流量予以折現，加總可得一價格。
- (5) 將上述 (1) ~ (4) 重複進行模擬 n 次。
- (6) 將不同的利率路徑所產生的結果加權平均，此即為證券的理論價格。
- (7) 自上述 n 次具代表性的資產價格分配中衡量風險值。

其中本研究採邏輯斯特提前還本模型作為本研究的提前償還模型，以 CIR 模型作為本研究的利率模型。

二、邏輯斯特提前還本模型

邏輯斯特提前還本模型可以式 (1) 來說明。令 y_i 代表第 i 個借款者提前償還與否的變數， y_i 值為 1 時，即代表借款者發生提前償還， y_i 值為 0 時，即借款者未發生提前償還。又令 x_{ij} 為借款者 i 提前償還行為第 j 個的解釋變數，將 y 與 x 進行迴歸分析，即可得下式：

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^n \beta_j x_{ij} + u_i \quad (1)$$

其中 β_0 為截距項， u_i 為殘差項。

想像 y_i 為 Bernoulli 分配，因此可得下式：

$$E(y_i) = P_i \times 1 + (1 - P_i) \times 0 = P_i \quad (\text{機率的分配}) \quad (2)$$

又根據迴歸的定義，吾人可得下式：

$$E(y_i) = \beta_0 + \sum_{j=1}^n \beta_j x_{ij} \quad (\text{數值的分配}) \quad (3)$$

故根據 (2) 式及 (3) 式，可得下式：

$$P_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^n \beta_j x_{ij} \quad (4)$$

但是 (4) 式等號右邊的值不一定保證落於 0~1 之間，然等號左邊的值卻一定要落在 0~1 之間，因此勢必將 (1) 式做變數轉換，以確保右邊的值必落在 0 與 1 之間，(4) 式方可能成立。一般在進行變數變換時，通常以累積機率密度函數來作為其函數轉換，可以下式表示：

$$\text{Prob}\{y_i = 1\} = F\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^n \beta_j x_{ij}\right) = F(Z_i) \quad (5)$$

令 $F(Z_i)$ 服從一 logistic 函數，即可得下式：

$$\text{Prob}\{y_i = 1\} = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_j x_{ij})}} \quad (6)$$

因此將確保 (4) 式等號右邊的值必若在 0~1 之間。本研究為了能夠更貼近台灣目前的實際情形，特別採取郭姿伶 (2000) 針對中國農民銀行的不動產抵押貸款資料研究的結果，作為本研究的提前償還模型。

三、CIR 利率模型

廖柏媛 (2001) 使用 Vasicek 模型，來作為評價利率可調整抵押貸款的利率模型。但是 Vasicek 有一個嚴重的缺陷，就是在模擬的過程中，它將可能產生負的利率值，在真實的世界裡，這是不太合理的。因此為了避免這樣的問題，本研究將以 CIR 模型來作為評價利率可調整抵押貸款的利率模型。此外，CIR 模型不同於 Vasicek 模型的地方，乃是 CIR 模型短期利率 r 的標準差會隨著利率的變動而改變，然 Vasicek 模型短期利率 r 的標準差卻不會。以下將 CIR 模型表示如下：

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz \quad (7)$$

其中 a 表回復平均的速度

b 表長期平均利率水準

σ 表利率標準差

z 表一平均數為 0、標準差為 dt 的 Winner

process

根據 (7) 式，我們便可表示所有可能的利率路徑，再利用 CIR 模型導出的零息債券公式予以轉換，可求得各種不同的遠期利率，最後將可得到我們所需要的 Spot rate curve。零息債券公式表示如下：

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r} \quad (8)$$

其中

$$A(t, T) = \left[\frac{2\gamma e^{(a+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma+a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right]^{2ab/\sigma^2} \quad (9)$$

$$B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma+a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \quad (10)$$

$$\gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2} \quad (9)$$

⁷ 參考 Penza and Bansal (2001) 和 Wilmott (1998)

肆、評價模擬與風險分析

由於國內尚未出現任何形態的不動產抵押證券，因此為了能完整地分析利率可調整抵押貸款商品，本研究依據引用之提前清償模型設計一個利率可調整抵押貸款商品並模擬評價以之為基礎所發行之抵押貸款證券。

一、抵押貸款產品設計

除了利率可調整抵押貸款商品一般所具有的特徵之外，本研究為了配合郭姿伶(2000)的提前償還模型，更詳細敘述了貸款的性質、種類以及借款者的相關資訊，但為了簡化分析以及評價過程，本研究假設貸款群組只有一種類型的貸款。詳細的設計如下表 1。相較於廖柏媛(2001)所設計的產品，本研究設計的商品更貼近台灣不動產抵押貸款的實際情況，因此更能夠對台灣未來發展利率可調整抵押貸款提供更多的啟示。

表 1 抵押貸款產品設計內容

可調整利率之不動產抵押貸款 (ARM)

貸款群組規模 (Pool size)	\$1,000,000
初始設定利率 (Teaser rate)	6%
利率加碼 (Margin)	2%
服務費用 (Service fee)	0.05%
指標利率 (Index)	一年期中國農民銀行基本放款利率
調整期間 (Adjustment period)	一年
每年利率上限 (Annual cap)	相對利率 2%
貸款期間利率上限 (Lifetime cap)	相對利率 5%
借款者性別 (Sex)	為男性
房屋型態 (Type)	新屋
貸款類型	一般房屋貸款
首次購屋	非首次購屋
貸款地區	都市
本金還款方式	每月固定攤還本息
房屋購買時價格	\$1,250,000
貸款期間	20 年

二、利率可調整抵押貸款的現金流量計算

(一) 提前償還模型參數估計

為了地估計利率可調整抵押貸款的現金流量，我們必須對提前償還模型模擬的結果有所了解，底下茲列出本研究所引用郭姿伶(2000)提前償還機率的迴歸結果於表 2。郭姿伶(2000)利用邏輯斯特回歸模型估計出借款者提前償還的機率，並顯示貸款的提前償還將在發行後第一年達到高峰，約 15%，第二年開始漸趨下降，之後幾年提前償還的機率都變小，維持在 2% 以下。

表 2 郭姿伶(2000)提前償還機率的迴歸結果

自變數名稱	參數值	標準差	P-Value
-------	-----	-----	---------

截距項	-65.477	9.778	0.0001
性別	-0.024	0.429	0.9558
Log (貸款金額)	0.648	0.482	0.1784
貸款利率	8.782	1.154	0.0001
正貸款溢價 ⁸	86.276	12.359	0.0001
負貸款溢價	-48.166	6.645	0.0001
負權益價值機率 ⁹	-5.901	2.645	0.0257
農業貸款	-10,017	1,424.9	0.9944
央行低利率優惠	-12,207	594.10	0.9836
購置新屋	-0.935	0.591	0.1136
首次購屋	-0.803	1.150	0.4849
每月固定攤還本息	1.008	0.951	0.2895
Log (每月攤還額度)	0.714	0.343	0.0372
貸款期間	0.020	0.073	0.7784
貸款年齡	-0.645	0.134	0.0001
都市地區	-1.108	0.769	0.1496

資料來源：郭姿伶(2000)

(二) 利率可調整抵押貸款合約利率調整

根據 Kau, Keenan, Muller, and Epperson (1985, 1990) 利率可調整抵押貸款重新調整利率的公式，我們亦可將利率可調整抵押貸款重新調整利率表達如式 12：

$$c(t+1) = \text{Min}[r(t+1) + m, c(t) + yc, c(0) + lc] \quad (12)$$

其中 $c(t+1)$ 表在時間點 $t+1$ 時的貸款利率

$r(t+1)$ 表在時間點 $t+1$ 時的市場利率

m 表利率加碼 (Margin)

yc 表每年的利率上限

lc 表整個貸款期間的利率上限

⁸貸款溢價指將貸款每月支付額以當期市場利率 $r(t)$ 折現所得之現值，與以當期貸款契約利率 $c(t)$ 折現之現值的差異視為貸款的買權價值，為消除貸款規模的影響，作者並將此貸款溢價定義如下：

$$MP(t) = \frac{\sum_{\tau=1}^{T-t} Pay(\tau) \left\{ \frac{1}{1+r(t)} \right\}^{\tau} - \sum_{\tau=1}^{T-t} Pay(\tau) \left\{ \frac{1}{1+c(t)} \right\}^{\tau}}{\sum_{\tau=1}^{T-t} Pay(\tau) \left\{ \frac{1}{1+r(t)} \right\}^{\tau}}$$

其中 T 為貸款年限， $Pay(t)$ 為在時間點 t 時，每月的貸款支付額。當合約利率大於市場利率時，即表貸款溢價為正，此時借款者發生提前償還的機率將增加，兩者成正向關係。

⁹郭姿伶(2000)採用 Deng and Calhoun(1997)中對負權益價值機率 $PNEQ(t)$ 的定義，表示如下：

$$PNEQ(t) = F \left\{ \frac{\ln(UPB(t)) - \ln(P(0)e^{\beta(t)} + \max[0, MV(t)])}{\sigma(t)} \right\}$$

其中 $F(\bullet)$ 為標準常態的 CDF； $UPB(t)$ 為剩餘的本金餘額； $P(0)$ 為貸款契約訂定時的房屋買價

$\beta(t)$ 為預期房價升值率。(郭姿伶(2000)估計為 0.35%)

$\sigma(t)$ 為房價報酬標準差。(郭姿伶(2000)估計為 0.9388)

$$MV = \sum_{\tau=1}^{T-t} Pay(\tau) \left\{ \frac{1}{1+r(t)} \right\}^{\tau} - \sum_{\tau=1}^{T-t} Pay(\tau) \left\{ \frac{1}{1+c(t)} \right\}^{\tau}$$

當房屋價格下跌(LTV 上升)， $\beta(t)$ 下降，負權益價值機率上升，故提前償還機率下降，違約機率上升，與提前償還機率呈正向關係，違約機率負正向關係。

(三) 現金流量估算

由於利率可調整抵押貸款每隔一年，便需重新調整合約利率，因此在計算每月固定攤還本息方面，必須分割為 20 個區間（貸款期間 20 年）來計算。在第一個區間初，未來攤銷期間為 240 個月，配合提前償還函數，計算每月固定攤還本息金額，然後將利息、預定償還本金及提前償還本金加總起來，即可得每月的現金流量；到了第二區間初時，就剩餘本金依重新調整過的合約利率，以攤銷期間為 228 個月，重新計算每月固定攤還本息金額，求出現金流量值；最後，每年依此重設直到最後一個區間，便可計算出每月的現金流量值。歸納如下表 3。

根據表 3 將可計算出每個月的現金流量金額，再配合由利率模型所推導出的 Spot rate curve，將每期的現金流量予以折現，即可求得在該條利率路徑下的利率可調整抵押貸款價格，如此重複 N 次，再將所得結果加權平均，可得利率可調整抵押貸款的理論價格，同時，此 N 次可形成一分配，可加以計算出 VaR；另外，當模擬的次數越多次時，模擬的結果將更準確。

表 3 現金流量計算法

調整時點	區間	現金流量計算公式
0	1~12 月	合約利率 c_0，市場利率 $/12 = r_0$， $n = 20 \times 12 = 240$，提前償還機率为 P_t， $t = 1 \sim 12$ $MP_1^1 = MB_0^1 \times \frac{1}{PVIFA(r_0, 240)} = MB_0^1 \times \frac{r_0(1+r_0)^n}{[(1+r_0)^n - 1]}$ $b_{t-1} = \prod_{i=1}^{t-1} (1 - SMM_i), MP_t^1 = b_{t-1} \times MP_1^1,$ $I_t = MB_{t-1}^1 \times c_0, S_t = MB_{t-1}^1 \times 0.05\%,$ $SP_t = MP_t^1 - I_t - S_t, PR_t = P_t \times MB_{t-1}^1$ $CF_t = I_t + SP_t + RP_t, SMM_t = \frac{PR_t}{MB_{t-1}^1 - SP_t}$ S_t = Service fee, SP_t = Schedule Payment PR_t = Prepayment, CF_t = Cash flow
13	13~24 月	合約利率 c_{13}，市場利率 $/12 = r_{13}$， $n = 19 \times 12 = 228$，提前償還機率为 P_t， $t = 1 \sim 12$ $MP_1^2 = MB_0^2 \times \frac{1}{PVIFA(r_{13}, 228)} = MB_0^2 \times \frac{r_{13}(1+r_{13})^n}{[(1+r_{13})^n - 1]}$ $b_{t-1} = \prod_{i=1}^{t-1} (1 - SMM_i), MP_t^2 = b_{t-1} \times MP_1^2,$ $I_t = MB_{t-1}^2 \times c_{13}, S_t = MB_{t-1}^2 \times 0.05\%,$ $SP_t = MP_t^2 - I_t - S_t, PR_t = P_t \times MB_{t-1}^2$ $CF_t = I_t + SP_t + RP_t, SMM_t = \frac{PR_t}{MB_{t-1}^2 - SP_t}$ S_t = Service fee, SP_t = Schedule Payment PR_t = Prepayment, CF_t = Cash flow

...	...	...
229	229~240 月	合約利率 c_{229}，市場利率 $/12 = r_{229}$， $n = 1 \times 12 = 12$，提前償還機率为 P_t， $t = 1 \sim 12$ $MP_1^{20} = MB_0^{20} \times \frac{1}{PVIFA(r_{229}, 228)} = MB_0^{20} \times \frac{r_{229}(1+r_{229})^n}{[(1+r_{229})^n - 1]}$ $b_{t-1} = \prod_{i=1}^{t-1} (1 - SMM_i), MP_t^{20} = b_{t-1} \times MP_1^{20},$ $I_t = MB_{t-1}^{20} \times c_{229}, S_t = MB_{t-1}^{20} \times 0.05\%,$ $SP_t = MP_t^{20} - I_t - S_t, PR_t = P_t \times MB_{t-1}^{20}$ $CF_t = I_t + SP_t + RP_t, SMM_t = \frac{PR_t}{MB_{t-1}^{20} - SP_t}$ S_t = Service fee, SP_t = Schedule Payment PR_t = Prepayment, CF_t = Cash flow

(四) 利率模型

起始利率為中國農民銀行基本放款利率 7.75%，長期利率水準為 7%，利率調整參數為 0.1，利率標準差為 3%，再以 CIR 利率模型模擬出未來不同時點的瞬間利率，經過（8）式的轉換，可求得各種不同的遠期利率，再藉由不同的組合（如表 4），最後將可得到我們所需要的 Spot rate curve。

表 4 遠期利率與即期利率之關係

遠期利率	Spot rate
${}_0 r_1$	${}_0 r_1$
${}_1 r_2$	${}_0 r_2 = [(1 + {}_0 r_1)(1 + {}_1 r_2)]^{\frac{1}{2}} - 1$
${}_2 r_3$	${}_0 r_3 = [(1 + {}_0 r_2)^2 (1 + {}_2 r_3)]^{\frac{1}{3}} - 1$
...	...
${}_{n-2} r_{n-1}$	${}_0 r_{n-1} = [(1 + {}_0 r_{n-2})^{n-2} (1 + {}_{n-2} r_{n-1})]^{\frac{1}{n-1}} - 1, n \geq 3$
${}_{n-1} r_n$	${}_0 r_n = [(1 + {}_0 r_{n-1})^{n-1} (1 + {}_{n-1} r_n)]^{\frac{1}{n}} - 1, n \geq 3$

在求得 spot rate curve 之後，接著我們可配合郭姿伶（2000）的提前償還模型，計算出 pool 所有時點的現金流量，包括利息、預定償還本金、服務費用以及貸款者的提前償還金額，但是由於 spot rate 代表的乃是中國農民銀行的基本放款利率，一般借款者根本無法以如此低的利率來借得貸款，再加上利率可調整抵押貸款擁有提前償還的選擇權，故此時便必須利用到前章所述的 OAS（Option-adjusting Spread）觀念加上 spot rate，然後將所有的現金流量折回現在時點予以加總，即可得利率可調整抵押貸款的理論價格。但是由於台灣尚未存在 MBS 市場，因此本研究無法從市場取得合理的 OAS 值，但為了計算的合理性，故本研究將先假定 OAS 值為 2%，接著再從事敏感性

分析,考慮各種可能的情形,以增加本研究的嚴謹性。

三、評價結果與風險值之敏感性分析

根據統計理論,當模擬的次數越多,模擬出來的分配將越接近真實的分配,故當模擬的次數達到無限多次時,其所算出的分配平均值,必將趨近真實分配的平均值,此即為證券的理論價格。表 5 為本研究模擬 10 次、30 次、50 次、100 次、150 次、200 次、300 次、400 次、500 次、700 次、900 次以及 1000 次的結果,從結果我們可看出當模擬越多次時,證券的價格將趨近一數值,此數值即為利率可調整抵押貸款真正的理論價格。為了更清晰地了解此趨勢,我們將表 5 繪成圖 1。

表 5 評價模擬結果

模擬次數	價格	模擬次數	價格
10	988,881.82	300	996,036.82
30	997,857.08	400	996,069.66
50	996,268.03	500	995,814.24
100	996,201.10	700	995,959.99
150	995,419.85	900	995,767.11
200	995,555.41	1000	995,656.23

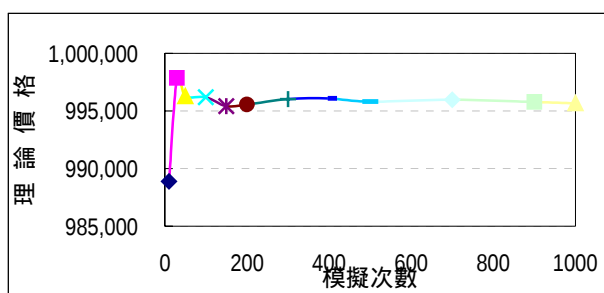


圖 1 模擬次數與價格圖

由圖 1 我們可看到當模擬次數大於 300 次時,理論價格已經呈現收斂的狀態了。而由圖 2 可以看出價格分配也呈現些許右偏狀態。

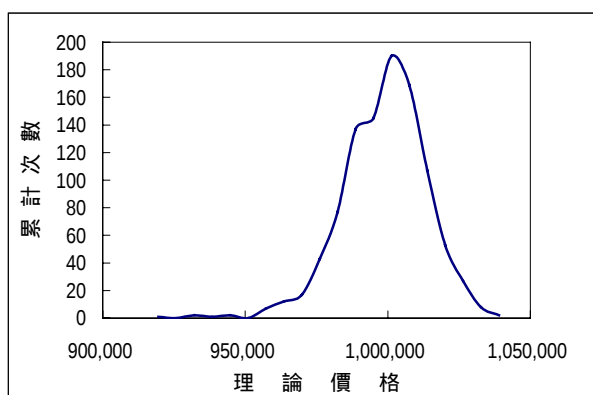


圖 2 價格分配圖

利率可調整抵押貸款證券一般皆附有利率上限以及提前償還的選擇權,因此利率可調整抵押貸款乃

是屬於利率衍生性商品的一種,故利率變動特性對於抵押貸款證券的理論價格與風險值具有一定的影響。

本研究首先針對均數復歸的速度 a 進行研究,將原先的參數值 0.1 往上延伸至 0.14,往下至 0.06,並以模擬次數 1000 次為基準來分析,結果如圖 3 顯示:當均數復歸速率愈大,利率可調整抵押貸款證券的理論價格愈大,而風險值愈小¹⁰。這意味著當處於一個利率均數復歸速率越大的市場狀態時,利率的波動越沒有機會觸及利率上限,借款者提前償還的機會越小,利率可調整抵押貸款證券附加的選擇權比較便宜,證券投資人在購買利率可調整抵押貸款證券時比較願意以較高的價格購買;而在一個利率均數復歸速率越大的市場狀態時,利率波動的標準差越小,風險值自然越小。

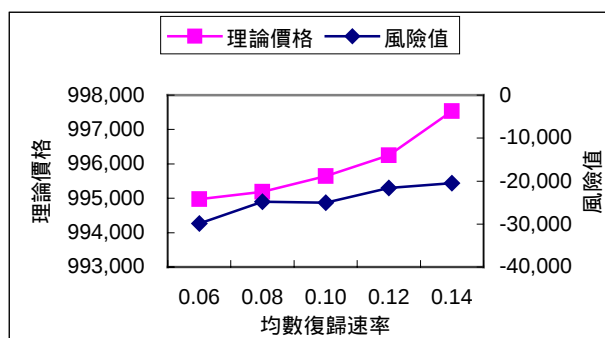


圖 3 均數復歸速率對價格與風險值的關係圖

另外,利率波動性大小也將嚴重地影響到利率可調整抵押貸款的價格。為了進一步的了解到利率波動性如何影響利率可調整抵押貸款的價格,本研究將原本的利率標準差假設 3%,向上延伸至 5%,向下擴充到 1%,並以模擬次數 1000 次為基準來作比較,結果如圖 4。

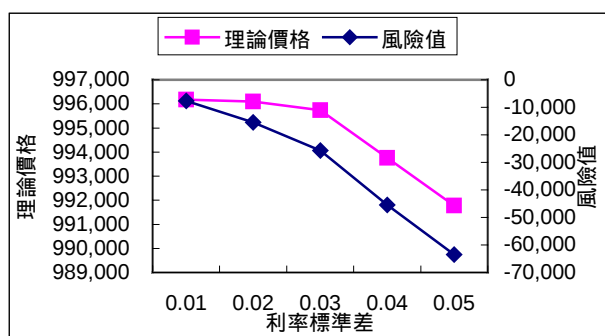


圖 4 利率標準差對價格與風險值的關係圖

由圖 4 我們可明顯地看出,當利率標準差 σ 越大時,利率可調整抵押貸款的價格越小,其結果相當符合財務的直覺,因為當利率標準差越大時,代表利率的波動越有可能觸及到利率上限 (Lifetime Cap or Annual Cap),借款者發生提前償還的機率增加,故利率可調整抵押貸款上所附有的選擇權將越貴,投資人在購

¹⁰ 風險值一般皆為負數,本處及以下提到風險值大小時,皆表示其絕對值之大小。

買利率可調整抵押貸款時，當然會要求以更低的價格來購買，所以利率標準差越大，利率可調整抵押貸款的價格越低，而且當利率標準差越大，風險值自然也跟著越大。

圖 5 顯示出當初始設定利率 (Teaser Rate) 越高，利率可調整抵押貸款證券的價格越高，其結果相當符合財務的直覺，通常當票面利率高於市場利率時，債券處於溢價，而當票面利率低於市場利率時，債券是處於折價狀態的。有趣的是初始設定利率對風險值的影響情形，當初始設定利率高於 4% 時，風險值變動不大，而當初始設定利率等於 4% 時，風險值特別大，其原因可以從利率可調整抵押貸款重新調整利率的公式看出。當初始設定利率過低，重新調整的利率很可能一直是此利率加上貸款期間利率上限這個水準，使得利率可調整抵押貸款證券的利息不跟隨市場利率波動調整，因而此證券擁有固定利率債券的性質，也就是價格波動性較大，進而使其風險值變大。

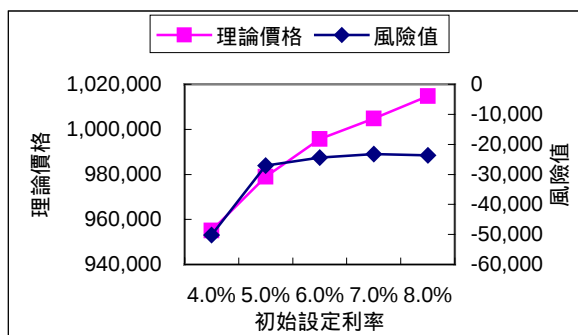


圖 5 初始設定利率對價格與風險值的關係圖

由於貸款期間利率上限 (Lifetime Cap) 限制了利率可調整抵押貸款重新設定合約利率的範圍，因此將嚴重地影響到利率可調整抵押貸款未來的現金流量，故 Lifetime Cap 會嚴重地影響到利率可調整抵押貸款的價格。為了能夠更完整地瞭解 Lifetime Cap 與利率可調整抵押貸款價格的關係，本研究將原來的假設 Lifetime Cap 5%，向上延伸至 7%，向下擴展至 3%，並以 1000 次的模擬次數為比較基準，其結果如圖 6 所示。

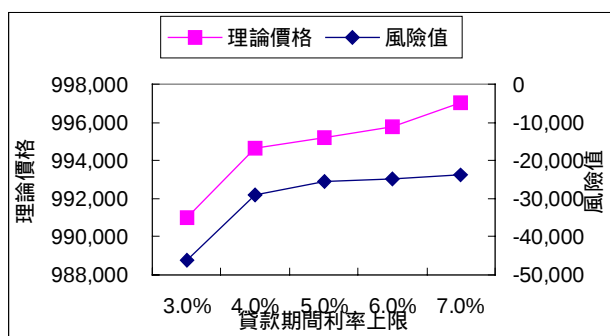


圖 6 貸款期間利率上限對價格與風險值的關係圖

由圖 6 我們可清楚地看出當 Lifetime Cap 越大時，利率可調整抵押貸款的價格將越高，此現象相當合理，因為 Lifetime Cap 越大，即選擇權的執行價 (exercise price) 越高，該選擇權將更難進入價內

(in-the-money)，選擇權被執行的機率越低，投資者所受的威脅更少，故利率可調整抵押貸款的價格當然越高。另外，當 Lifetime Cap 在 3% 到 4% 時，利率可調整抵押貸款的價格急速上升，此乃是因為合約利率的調漲更容易受到 Lifetime Cap 限制，故當 Lifetime Cap 在 3% 到 4% 時，利率可調整抵押貸款的價格急速上升，但是等到 Lifetime Cap 為 4% 以上之後，由於其不容易限制到合約利率的重設，因此利率可調整抵押貸款價格改變的幅度將趨於和緩。類似初始設定利率對風險值影響的情形也發生在貸款期間利率上限對風險值的影響，只是影響方向相反，原因也是相同的，這點同樣可從利率可調整抵押貸款重新調整利率的公式看出。

利率可調整抵押貸款的每年利率上限 (Annual Cap) 限制了利率可調整抵押貸款每年重新設定合約利率的幅度，也影響到利率可調整抵押貸款未來的現金流量，嚴重地影響到利率可調整抵押貸款的價格。為了能夠更完整地瞭解 Annual Cap 與利率可調整抵押貸款價格的關係，本研究將原來的假設 Lifetime Cap 2%，向上延伸至 5%，向下擴展至 1%，並以 1000 次的模擬次數為比較基準，其結果如圖 7 所示。

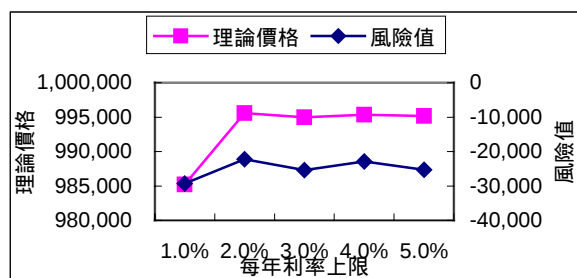


圖 7 每年利率上限對價格與風險值的關係圖

由圖 7 我們可看到當 Yearly Cap 越大時，利率可調整抵押貸款的價格將越高，此現象相當符合財務理論，因為 Yearly Cap 越大，即選擇權的執行價 (exercise price) 越高，該選擇權將更難進入價內 (in-the-money)，選擇權被執行的機率越低，投資者所受的威脅更少，故利率可調整抵押貸款的價格當然越高。另外，當 Yearly Cap 在 1% 時，利率可調整抵押貸款的價格特別低，原因也可從利率可調整抵押貸款重新調整利率的公式看出，因為 yearly cap 過低，重新設定的利率很容易低於市場利率，因而造成嚴重折價，而當 Yearly Cap 較高時 (2~5%)，合約利率的重新調整受到之限制降低很多，比較可以隨市場利率調整，故價格較高且差異不大。從風險值的角度來看每年利率上限的影響情形，可以明顯看出風險值不太受到每年利率上限的影響，每年利率上限 1% 雖然有一點點大，也是因為價格較低，價格的標準差稍大導致的。

因此，由 Lifetime Cap 與 Yearly Cap 的分析可知，儘管 Lifetime Cap 與 Yearly Cap 會影響到利率可調整抵押貸款的價格，但是其影響的效力卻跟利率波動性非常地相關，利率波動性大小將顯著地影響到利率上限選擇權的價格。

由於本研究的初始利率為中國農民銀行的基本

放款利率 (Primary rate)，那是銀行給予有良好關係之大客戶的優惠貸款利率，一般借款者不可能以此利率貸款，必須有一利率加碼方能成功貸到款，故本研究假設此 Margin 為 2%。由於 Margin 的大小會影響到利率可調整抵押貸款未來的現金流量，故也將影響到利率可調整抵押貸款的價格，因此為了能夠更完整地瞭解 Margin 與利率可調整抵押貸款價格的關係，本研究將原來的假設 Margin 2%，向上延伸至 5%，向下擴展至 1%，並以 1000 次的模擬次數為比較基準，其結果如圖 8 所示。

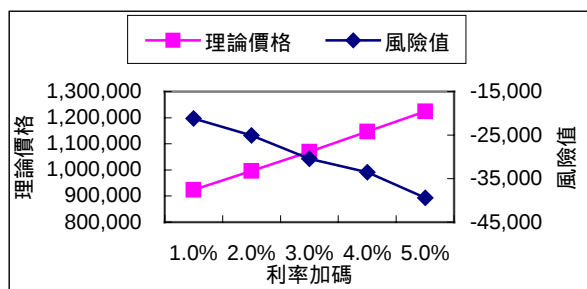


圖 8 利率加碼對價格與風險值的關係圖

由圖 8 我們可以看出當 Margin 越大時，利率可調整抵押貸款的價格將越高，這種結果相當地符合財務原理，因為當 Margin 越大，代表借款者未來所付的每一期利息將越多，使得利率可調整抵押貸款未來現金流量也就越大，故利率可調整抵押貸款的價格當然也就越大了。若從利率可調整抵押貸款重新調整利率的公式來看，每年利率上限 2% 與貸款期間利率上限 5% 似乎太高了，使得從新設定的利率可以跟隨著市場狀況變動，因而使利率加碼對利率可調整抵押貸款證券價格呈現線性的影響。利率加碼越大，利率可調整抵押貸款證券的風險值也越大，原因也跟其對價格的影響原因一樣。

OAS 乃是市場針對證券的信用風險以及流動性風險所要求的風險貼水，當風險越大時，投資者所要求的風險貼水也會越高，投資者的要求報酬率也就越高。由於 OAS 值為一般投資者所要求的利率加碼，因此其大小將嚴重地影響到利率可調整抵押貸款證券的價格。為了能夠更完整地瞭解 OAS 與利率可調整抵押貸款價格的關係，本研究將原來的假設 OAS 2%，向上延伸至 5%，向下擴展至 1%，並以 1000 次的模擬次數為比較基準，其結果如圖 9 所示。

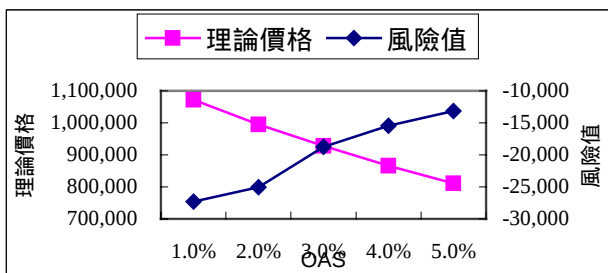


圖 9 OAS 對價格與風險值的關係圖

由圖 9 我們可以看出當 OAS 越大時，利率可調整抵押貸款的價格將越低，這種結果相當的合理，因

為 OAS 為投資者所要求的風險貼水，實為投資者要求報酬率的一部分，也就是折現率的一部分，當 OAS 越高時，代表著折現率越高，當然利率可調整抵押貸款的價格也就越低，同時，價格的標準差也跟著越低，進一步使得風險值也跟著越低。

伍、結論

本研究係以郭姿伶 (2000) 的提前償還模型 (Logistic Regression Model) 並配合 CIR 利率模型，來模擬可調整利率之不動產抵押貸款證券 (利率可調整抵押貸款) 的價格與風險值，並且微調各個影響利率可調整抵押貸款的重要參數，以便能更深入地分析利率可調整抵押貸款證券的特徵與性質，其結果如下六點：

- (1) 根據理論，當模擬的次數為無限多次時，模擬出來的證券價格將等於證券真實的理論價格。本研究所模擬之結果也符合如上的財務原理，因當模擬的次數增多時，模擬出來之價格有往真實理論價格收斂的情形出現。
- (2) 利率可調整抵押貸款為利率衍生性金融商品的一種，故利率的走勢將會影響到利率可調整抵押貸款證券的價格。本研究的結果顯示當利率的均數復歸速率越大，利率可調整抵押貸款證券的價格越大，但風險值越小，這意味著利率可調整抵押貸款上所附的選擇權越沒有價值。
- (3) 故利率的波動也會影響到利率可調整抵押貸款的價格。當利率波動性越大時，利率可調整抵押貸款的價格將會越低，而風險值也跟著越大，這表示利率可調整抵押貸款上所附的選擇權越有價值。
- (4) 本研究結果發現當初設定利率較高時，利率可調整抵押貸款的價格將越高，表示初始設定利率可使利率可調整抵押貸款上所附的 Lifetime Cap 越沒價值。而初始設定利率太低，風險值會比較大，使得利率可調整抵押貸款的性質接近固定利率的抵押貸款。
- (5) 當貸款期間利率上限較高時，利率可調整抵押貸款的價格將越高，表示利率可調整抵押貸款上所附的 Lifetime Cap 越沒價值。另外，當貸款期間利率上限小於 3% 時，Lifetime Cap 的高低將嚴重地影響到利率可調整抵押貸款的價格，但高於 3% 之後，利率可調整抵押貸款價格變化的幅度開始趨於和緩。風險值的變化也類似利率可調整抵押貸款價格的變化。
- (6) Yearly Cap 限制了每年利率可調整抵押貸款重新調整合約利率的幅度，也影響了利率可調整抵押貸款的價格。本研究發現當 Yearly Cap 過低時，選擇權越容易進入價內，Yearly Cap 越有價值，利率可調整抵押貸款的價格也就越低，Yearly Cap 夠大時，證券價格自然不受 Yearly Cap 的影響。風險值則比較不受到每年利率上限的影響。另外，Yearly Cap 也存在著與 Lifetime Cap 同樣的問題，這樣的原因主要是受到利率波動性大小的影響，當利率波動性大於利率上限，利率上限選擇權進入價內的機會變大，選擇權價格變貴，利率可調整抵押貸款的價格降低；反之，則相反。

- (7) Margin 為借款者的利率加碼，影響到證券未來的利息收入以及現金流量，因此利率可調整抵押貸款證券的價格對 Margin 大小是相當敏感的。本研究結果發現當 Margin 越高，證券未來的現金流量就越高，利率可調整抵押貸款的價格也就越高風險值也越高。
- (8) OAS 為投資者要求的風險性貼水，屬於投資者要求報酬率的一部分，即為折現率的一環。本研究發現當 OAS 越高時，即折現率越高，利率可調整抵押貸款的價格越低，風險值也越低，這樣的結果符合我們的預期，也說明了本研究的 Model 是沒有錯誤的。

參考文獻

一、中文部份：

- 何澤蘭 (1999)，「台灣不動產抵押債權證券化之推行及評價」，國立台灣大學財務金融研究所。
- 高心怡，民國八十九年六月，「結合 Hull-White 利率模型與 PHM 提前償還模型評價 CMO 利率衍生性商品」，國立台灣大學財務金融研究所碩士論文。
- 陸文傑 (2000)，「抵押貸款證券之評價—Implied Prepayment 之應用」，國立台灣大學財務金融研究所。
- 郭姿伶 (2000)，「住宅貸款之提前清償與逾期還款」，國立中正大學財務金融研究所。
- 廖柏媛 (2001)，「不動產抵押貸款證券化之分析與評價」，國立政治大學金融研究所。
- 江常維 (2000)，「抵押貸款相關證券之風險評估 - 風險值 (Value at Risk) 之應用」，國立台灣大學財務金融研究所。
- 黃至民 (2002)，「利率可調整之不動產抵押貸款證券之評價與分析 - CIR 利率模型與邏輯斯諦提前還本模型之結合與應用」，國立台灣大學財務金融研究所。

二、英文部份：

- Abrahams, S.W (1997), "The New View in Mortgage Prepayments: Insight From Analysis At The Loan-By-Loan Level", *The Journal of Fixed Income*.
- Archer, W.R and D.C Ling (1993), "Pricing Mortgage-Backed Securities: Integrating Optimal Call and Empirical Models of Prepayment", *AREUEA*.
- Asay, R. Michalel (1984/12), "Adjustable Rate Mortgages", *Mortgages Banking*.
- Asness, C (1993), "OAS Models, Expected Returns, and a Steep Yield Curve", *The Journal Of Portfolio Management*.
- Buser, A. Stephen, Patric H. Hendershott and Anthony B. Sanders (1985), "Pricing Life-of-Loan Rate Caps on Default-Free Adjustable-Rate Mortgages", *AREUEA*.
- Cheyette, O., S. Choi, and E. Blanter (1996), "The New BARRA Fixed Rate Prepayment Model", *BARRA Newsletter*.
- Dharan, V.G (1997), "Pricing Path-Dependent Interest Rate Contingent Claims Using A Lattice", *The Journal of Fixed Income*.
- Dunn, B. Kenneth and John J. McConnell (1981), "Valuation of GNMA Mortgage-Backed Securities", *Journal of Finance*.
- Gujarati, N. Damodar (1995), *Basic Econometrics—Third Edition*.
- Hayre, S. Lakhbir (1990), "Understanding Option-Adjusted Spreads and Their Use", *The Journal of Portfolio Management*.
- Hu, Joseph and Jerry M. Dell'sIsola (1986/6), "ARM Pricing Model", *Mortgages Banking*.
- Huang, Charles and Warren Xia (1996), "Modeling ARM Prepayments", *Journal of Fixed Income*.
- Hull, John C. (2000), *Options, Futures & Other Derivatives—Fourth Edition*, Chapter 21.
- Green, Jerry and John B. Shoven (1986/2), "The Effects of Interest Rates on Mortgage Prepayments", *Journal of Money, Credit, and Banking*.
- Kalbfleisch, D. J. and R. L. Prentice (1980), *The Statistical Analysis of Failure Time Data*.
- Kau, B. James, Donald C. Keenan, Walter J. Muller III, and James F. Epperson (1985), "Rational Pricing of Adjustable Rate Mortgages", *AREUEA*.
- Kau, B. James, Donald C. Keenan, Walter J. Muller III, and James F. Epperson (1990), "The Valuation and Analysis of Adjustable Rate Mortgages", *Management Science*.
- Neftci, N. Salih (1996), *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*.
- Penza, Pietro and Vipul K. Bansal (2001), "Measuring Market Risk with Value at Risk", *John Wiley & Sons*.
- Richard A. Philips, Eric Rosenblatt, James H. Vanderhoff (1996), "The Probability of Fixed and Adjustable Rate Mortgage Termination", *AREUEA*.
- Schwartz, S. Eduardo and Walter N. Torous (1989), "Prepayment and the Valuation of Mortgage-Backed Securities", *Journal of Finance*.
- Stavros, Peristiani, Paul Bennett, Gordon Monsen, Richard Peach, and Jonathan Raiff (1997), "Effects of Household Creditworthiness on Mortgage Refinancings", *The Journal of Fixed Income*.
- Wilmott, Paul (1998), "Derivatives, the theory and practice of financial engineering", *John Wiley & Sons*.
- Yang T. Tyler, Buist Henry and F. Isaac Megbolugbe (1998), "An Analysis of the Ex Ante Probabilities of Mortgage Prepayment and Default", *Real Estate Economics*.
- Yawitz, Jess, Howard Kaufold, Thomas Macirowski, and Michael Smirlock (1987), "The Pricing and Duration of Floating Rate Bonds", *The Journal of Portfolio Management*.
- Zorn, M. Peter and Michael J. Lea (1989), "Mortgage Borrower Repayment Behavior: A Microeconomic Analysis with Canadian Adjustable Rate Mortgage Data", *AREUEA*.