

國立臺灣大學工學院機械工程學系



學士班學生論文

Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Bachelor's Thesis

以三維度滾跑基礎模型探索六足機器人之跑動動態

Analysis and Development of Running Dynamics of a
Hexapod Robot Using a Three-dimensional Rolling Template

張益嘉

I-Chia Chang

指導教授：林沛群 博士

Advisor: Pei-Chun Lin, Ph.D.

中華民國 110 年 4 月

April 2021

國立臺灣大學學士班學生論文
口試委員會審定書

以三維度滾跑基礎模型探索六足機器人之跑動
動態

Analysis and Development of Running Dynamics
of a Hexapod Robot Using a Three-dimensional
Rolling Template

本論文係張益嘉君（B06502095）在國立臺灣大學機械
工程學系完成之學士班學生論文，於民國 110 年 04 月 16
日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員(3 位)：

	<u>林沛群</u> (簽名)
(指導教授)	
<u>連豐力</u>	<u>連豐力</u>
<u>顏炳郎</u>	<u>顏炳郎</u>

系主任：林沛群 (簽名)

致謝

這份研究可以有現在的成果，需要感謝需多人的協助與支持。這份研究由我（張益嘉）、許智翔、吳泓昇三人在林沛群教授的實驗室中共同執行，模擬與分析的部分由我負責，而許智翔與吳泓昇則協助我準備實驗平台、進行實驗並分析實驗數據與結果，我們一起花了許多時間熟悉機器人，把機器人弄壞了又修好，花了好多時間在做實驗與取得數據，感謝兩位的協助如今才能完成這份研究！

首先要感謝林沛群教授的協助與指導，謝謝教授在我們遇到困難的時候幫助我們釐清困境，找到可能的解決方法，謝謝教授與我們討論研究課題，讓我們學到教授做研究的方法與策略，謝謝教授願意提供許多資源來進行協助我們進行研究，真的很感謝教授的指導，使我們都在研究的領域上有所成長！

在實驗室要感謝很多學長姐們的協助與指導，我們才能完成這份研究。感謝林郁衡學長帶領我們進入 BioRoLa 實驗室，也傳承給我們重要的六足機器人。感謝蘇庭頤學長協助我們處理六足機器人的機電問題，協助我取得實驗室的運算資源。感謝朱佑麟學長特地撥空教導我們使用 VICON 系統。感謝陸韋君學姊即使在美國仍願意協助我們進行研究。感謝 BioRoLa 實驗室的所有學長姊，謝謝你們平時給我們的關心與指導，這都讓我們可以進行得更加順利。

能完成這份研究我特別想感謝我陪伴在我身邊的家人，你們總是很支持我完成學業上的每件事情，讓我可以全心全意地學習、做研究與撰寫論文，若沒有你們的支持與栽培，我想我沒能完成這些值得自豪的事情。也謝謝我身邊的同學與朋友，謝謝你們願意聽我聊研究上的難題，能有人可以一起討論、刺激不同的想法是一件相當奢侈的事。我也想謝謝我自己，謝謝自己願意走完這段不簡單的過程，忍受了一段壓力不小的期間，但相信最後看到自己的成長會是一件更快樂的事情！

摘要

在探討機器人運動行為時，常常使用到 Templates and anchors 的概念，使用簡化的基礎模型來討論複雜實體機器人的運動。然而，許多簡化的基礎模型（如：SLIP 或 R-SLIP 模型）皆為二維平面的模型，忽略了機器人在第三個維度的運動。本研究發現六足機器人在使用 R-SLIP 模型所發展出的 Tripod 步態跑步時會產生劇烈的 Roll 方向之晃動，而這是 R-SLIP 模型所無法分析與解釋的。

本研究首先以牛頓法建構平面的簡單 Roll 模型以及將兩個 R-SLIP 模型並排組成的 Roll-Two-Leg R-SLIP (RTL-R-SLIP) 三維被動模型來模擬及分析六足機器人在向前滾跑時 Roll 方向上的被動動態。本研究發現若是忽略機器人在第三個維度的動態，也就是假設機器人左右對稱且沒有 Roll 方向之動態，則機器人會運行在不穩定的 fixed point 上，如此便顯現出二維平面模型的不足之處。相對的，本研究也透過調整系統參數在簡單 Roll 模型中找到穩定的 fixed point，顯示若適當的配合系統參數與運動條件，也能找到具有 Roll 動態的穩定運動軌跡。本研究也利用 RTL-R-SLIP 模型來探索穩定 fixed point，並將得到的 fixed point 軌跡生成為 Tripod 步態，提出了新的生成 Tripod 步態的作法。

接著，為了考慮機器人實際運作過程中的控制器對系統造成的影響，本研究建構 Roll-Two-Leg Clock-Torqued R-SLIP (RTL-CTR-SLIP) 主動模型來分析當機器人以軌跡控制的方式跑動時，系統的運動動態與系統功率輸出。研究發現以二維平面 R-SLIP 模型所生成的 Tripod 步態軌跡相當強韌，可以將 RTL-R-SLIP 模型中的不穩定特性消除，即使無法完全消除 Roll 方向晃動，但仍能抵抗機器人左右兩側彈簧係數不對稱所造成的干擾並維持機器人持續跑動，然而此控制相當耗能，相對的，若使用 RTL-R-SLIP 模型所生成的 Tripod 步態進行跑動，即使在左右彈簧係數不對稱的狀況下仍能減低功率輸出，但在模擬中此步態仍不夠穩定、具有發散的特性，還有待進一步探索更好的 fixed point 軌跡。

最後，本研究在原有的六足機器人上加裝配重塊以改變轉動慣量、設計不同寬度的圓弧腳以改變左右腳的彈簧係數比，藉此實驗不同系統參數下系統動態的差異。實驗結果顯示轉動慣量增加可以增加 Roll 方向的平穩性，而左右彈簧係數比過大或過小都會增加 ρ 方向擾動與系統耗能。此實驗結果與模擬不完全相符，在 Time response 的結果上也不符合，顯示機器人實際跑動的過程中仍有模型未考慮

的因素存在，包含圓弧腳在變形過大時的非線性行為與圓弧腳甩動所造成的力矩，顯示 RTL-CTR-SLIP 模型仍有改進的空間。

綜合上述分析，本研究對於未來使用六足機器人進行 Tripod 步態跑動給出兩個方向性建議，第一，左右彈簧係數比應該在因左右不對稱所造成的不穩定與圓弧腳寬度差異太大之間找到適當的平衡，第二，Tripod 步態生成法可以考量能量輸出需求與設計步態的難易度來選擇以 R-SLIP 模型或是 RTL-R-SLIP 模型來生成 Tripod 步態，前者較容易生成步態，而後者可以降低機器人所需要輸出的能量功率。

關鍵字：跑步步態、基礎模型、三維模型、滾轉、六足機器人、步態生成、穩定性分析

Abstract

When it comes to the discussion of robot motion, the concept of “Templates and anchors,” which represent the complicated robot with simplified model, is widely used. However, most of the templates is two-dimensional model, which ignores the motion of robot in the third dimension. There is a rolling motion as a hexapod robot running with the Tripod gait which is developed by the R-SLIP model. This phenomenon can't not be described or analyzed by the R-SLIP model.

To analysis the passive rolling dynamics as the hexapod robot running forward, this research establishes a two-dimensional passive Simple Roll Model and a three-dimensional passive Roll-Two-Leg R-SLIP(RTL-R-SLIP) model, which consists of two parallelly placed R-SLIP model and a rigid bar connecting the two R-SLIP models. It is found that if we ignore the dynamics in the third dimension of a hexapod robot, which equals to assuming the robot has symmetry about sagittal plane and has no dynamics in rolling direction, the robot is running in the unstable fixed point. These result shows the shortcomings of two-dimensional templates. This research also proposes a new method to generate a Tripod gait of hexapod robot by searching the stable fixed point of the passive RTL-R-SLIP model.

Next, to discuss the influence of the active controller, this research constructs the active Roll-Two-Leg Clock-Torqued R-SLIP(RTL-CTR-SLIP) model, which allows us to analyze the system dynamics and the energy dissipation when a hexapod robot is running with clock-based torqued control. The result shows the robustness of the Tripod gait generated by R-SLIP model, which fix the instability of passive RTL-R-SLIP model and counteract the interference caused by the inequality of the spring coefficient between the left and the right leg. It requires energy to counteract the interference described above. In contrast, given the same the inequality of the spring coefficient, the Tripod gait generated by RTL-R-SLIP model requires less energy. However, the Tripod gait generated by RTL-R-SLIP model is not stable enough, which require a further exploration of stable fixed point.

Finally, to collect the rolling dynamics and energy dissipation data under different system parameters, this research modifies the original hexapod robot with counterweight and the C-shaped legs with different thickness. The experiment result shows the relation between the decreasing of the rolling perturbation and the increasing of moment of inertia. It also shows that the too large or too small of the spring coefficient ratio of left to right

leg both increase the rolling perturbation and the energy dissipation. These results are not consistent with the result from simulation, which shows the simulation might ignore some factors in the real experiment, including the torque caused by the swing C-shaped leg and the nonlinear behavior of the C-shaped leg.

According to the discussion above, this research gives two suggestions about the Tripod running of a hexapod robot. First, the spring coefficient ratio of left to right leg should be optimized between the disadvantages come from the inequality of left and right leg and the thickness different among different C-shaped legs. Second, the Tripod gait could be generated by two different models. The gait generated by R-SLIP model is much easier to generate and still has the robustness. In contrast, the gait generated by RTL-R-SLIP model features in the less energy dissipation.

Keywords: running gait, reduced-order model, three-dimensional model, rolling, hexapod robot, gait generation, stability analysis.

目錄



致謝	I
摘要	II
Abstract.....	IV
目錄	VI
圖目錄	VIII
表目錄	XII
第一章 緒論	1
1.1 前言	1
1.2 研究動機	2
1.3 文獻回顧	4
1.3.1 單足模型	5
1.3.2 步態設計與其特性	5
1.3.3 多足機器人運動及其模型	6
1.4 貢獻	7
1.5 論文架構	7
第二章 簡單 Roll 模型之建模與分析	8
2.1 模型結構與參數	8
2.2 動態方程式	10
2.3 Poincare section 分析	13
2.4 Return map 分析	23
第三章 Roll-Two-Leg R-SLIP 建模與分析	26
3.1 模型結構與參數	26
3.2 動態方程式	29

3.3Return map 分析	36
3.4改良之 Tripod 步態生成	43
第四章 Roll-Two-Leg CTR-SLIP 建模與分析	46
4.1模型結構、參數與初始條件	46
4.2Relative phase ($\delta L, \delta R$)	47
4.3Time response 分析	48
4.4收斂盆地 (Basin of Attraction)	51
4.5能量損耗分析	53
第五章 驗證實驗	57
5.1實驗平台	57
5.2系統參數與其測量	58
5.3Roll 動態分析	61
5.4能量損耗分析	67
第六章 研究結果與討論	68
6.1六足機器人的 Roll 動態特性	68
6.2以 RTL-R-SLIP 模型為基礎設計的 Tripod 步態	69
6.3Clock-Torqued 主動控制對系統造成的影響	70
6.4驗證實驗結果	71
6.5電腦模擬與實驗比較	71
6.6對六足機器人 Tripod 跑動之建議	73
第七章 結論與未來展望	74
7.1結論	74
7.2未來展望	75
參考文獻	76

圖目錄

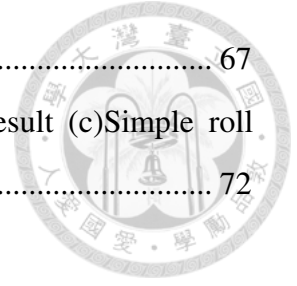


圖 1-1 (a)FANUC 機械手臂[1] (b)Amazon Robotics 物流機器人[4] (c)Pepper[5] (d)火星探測機器人毅力號[6] (e)BigDog[7].....	1
圖 1-2 (a)RHex 型式六足機器人 (b)R-SLIP 模型[9] (c)CTR-SLIP 模型[10] (d)TDR-SLIP 模型[11]	2
圖 1-3 Templates and anchors 關係圖[12].....	4
圖 1-4 (a)SLIP 模型[13, 14] (b)壁虎俯視與 LLS 模型[15] (c)Slot hopper 模型[16] ..	4
圖 1-5 (a)SLIP-R 模型[17] (b)TD-SLIP 模型[19] (c)考慮摩擦力的 SLIP 模型[20] (d)eSLIP 模型[21] (e)R-SLIP 模型[9] (f)TDR-SLIP 模型[11]	5
圖 1-6 (a)Buehler clock[8] (b)基於 R-SLIP 模型設計 Tripod 步態[10]	6
圖 1-7 (a)Scout II 機器人之平面模型[22, 23] (b)Two-leg R-SLIP[25, 26] (c)四足機器人連結 Pitch 與 Roll 方向的運動[27]	6
圖 2-1 (a)六足機器人 (b)六足機器人之後視圖 (c)Tripod 步態示意圖.....	8
圖 2-2 簡單 Roll 模型(a) intrinsic parameters (b)states	8
圖 2-3 簡單 Roll 模型在 Double Stance 時的自由體圖	10
圖 2-4 簡易 Roll 模型之狀態切換示意圖。	12
圖 2-5 簡易 Roll 模型的狀態切換標準。	12
圖 2-6 Poincare section 示意圖.....	13
圖 2-7 Poincare Section of $ksum = 11, \gamma = 2, J = 0.3, l_0 = 0.875$ (a) $E_0 = 0.900$ (b) $E_0 = 0.925$ (c) $E_0 = 0.950$ (d) $E_0 = 1.000$	15
圖 2-8 Poincare Section of $ksum = 11, J = 0.3, l_0 = 0.875, E_0 = 0.90$ (a) $\gamma = 1$ (b) $\gamma = 1.25$ (c) $\gamma = 1.50$ (d) $\gamma = 2$	16
圖 2-9 Poincare Section of $\gamma = 2, J = 0.3, l_0 = 0.875, E_0 = 0.90$ (a) $ksum = 9$ (b) $ksum = 11$ (c) $ksum = 12$ (d) $ksum = 13$	17
圖 2-10 Poincare Section of $ksum = 11, \gamma = 2, l_0 = 0.875, E_0 = 0.90$ (a) $J = 0.28$ (b) $J = 0.35$ (c) $J = 0.45$ (d) $J = 0.7$	18
圖 2-11 Fixed point No.1, $ksum = 11, \gamma = 1, J = 0.3, l_0 = 0.875, E_0 = 0.900$,.....	19
圖 2-12 Fixed point No.2, $ksum = 11, \gamma = 1, J = 0.3, l_0 = 0.875, E_0 = 0.900$,.....	19
圖 2-13 Fixed point No.3, $ksum = 11, \gamma = 1.25, J = 0.3, l_0 = 0.875, E_0 = 0.900$.	20

圖 2-14 Fixed point No.4, $ksum = 11, \gamma = 2, J = 0.3, l_0 = 0.875, E_0 = 0.900, \dots$	20
圖 2-15 Time response of Fixed point with period-3, $ksum = 13, \gamma = 2, J = 0.3, l_0 = 0.875, E_0 = 0.900, \rho_0 = 0, d\rho dt_0 = 0.14 \dots$	20
圖 2-16 一維 Return map 示意圖。	23
圖 2-17 Return map of Simple Roll Model with (a) $\gamma = 1, J = 0.3, ksum = 11, l_0 = 0.875, E_0 = 0.9$ (b) $\gamma = 1.25, J = 0.3, ksum = 11, l_0 = 0.875, E_0 = 0.9$ (c) $\gamma = 2, J = 0.3, ksum = 11, l_0 = 0.875, E_0 = 0.9 \dots$	24
圖 3-1 R-SLIP 模型[9]之(a)intrinsic parameters (b)states (c)initial condition	26
圖 3-2 Roll-Two-Leg R-SLIP 模型之(a)intrinsic parameter of left leg; (b)intrinsic parameter of body; (c)state of left leg; (d)state of robot body	27
圖 3-3 Free body diagram of robot body in (a) xz -plane; (b) yz -plane; (c)FBD of the whole leg; (d) FBD of the bar.	29
圖 3-4 RTL-R-SLIP 模型之狀態切換標準。	35
圖 3-5 Return map of $v = 2m/s, \alpha = 15deg, \theta_{TD0} = \theta_{TD1} = 97deg, \gamma = 1$ (a) $J = 0.097$ (b) $J = 0.109$ (c) $J = 0.122$ (d) $J = 0.137 \text{ kg} \cdot m^2$ (e)Color bar to indicate the error after 1 period.	39
圖 3-6 Return map of $v = 2m/s, \alpha = 15deg, \theta_{TD0} = \theta_{TD1} = 97deg, J = 0.097kg \cdot m^2$ (a) $\gamma = 1$ (b) $\gamma = 1.25$ (c) $\gamma = 1.5$ (d) $\gamma = 2$ (e)Color bar to indicate the error after 1 period.	40
圖 3-7 (a)Time response and (b)moving configuration of $v = 2ms, \alpha = 15deg, \theta_{TD0} = \theta_{TD1} = 97deg, \gamma = 1, J = 0.097kg \cdot m^2, \rho_n = -0.5deg, \rho_n = 0$ (c)Time response and (d)moving configuration of $v = 2ms, \alpha = 15deg, \theta_{TD0} = \theta_{TD1} = 97deg, \gamma = 2, J = 0.097kg \cdot m^2, \rho_n = 0deg, \rho_n = 0$ (e) Time response and (f)moving configuration of $v = 2ms, \alpha = 15deg, \theta_{TD0} = \theta_{TD1} = 97deg, \gamma = 1, J = 0.097kg \cdot m^2, \rho_n = 0deg, \rho_n = 0 \dots$	42
圖 3-8 (a)Return map of $v = 2m/s, \alpha = 15deg, J = 0.097 \text{ kg m}^2, \gamma = 2, \theta_{TD0} = 96deg, \theta_{TD1} = 99deg$, (b)Time response and (c)moving configuration as $\rho_0 = -0.36deg, \rho_0 = 17.4deg/sec \dots$	43
圖 3-9 (a)Return map of $v = 2m/s, \alpha = 15deg, J = 0.097 \text{ kg m}^2, \gamma = 2, \theta_{TD0} = 97deg, \theta_{TD1} = 98.5deg$, (b)Time response and (c)moving configuration as $\rho_0 = -2.75deg, \rho_0 = 31.15deg/sec \dots$	44
圖 3-10 $\theta_{Lt}, \theta_{Rt}, \theta_{Lt}, \theta_{Rt}$ of fixed point of $\theta_{TD0} = 96deg, \theta_{TD1} = 99deg, \rho_0 =$	

$-0.36 \text{ deg}, \rho_0 = 17.4 \text{ deg/sec}$	45
圖 3-11 改良 Tripod 步態生成結果。	45
圖 4-1 R-SLIP trajectory of $v = 2 \text{ m/s}, \alpha = 15 \text{ deg}$	47
圖 4-2 Time response of (a)R-SLIP $\gamma = 1, J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (b)R-SLIP $\gamma = 1.25, J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (c)R-SLIP $\gamma = 1.5, J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (d)R-SLIP $\gamma = 2, J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (e)R-SLIP $\gamma = 2, J = 0.109 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (f)R-SLIP $\gamma = 2, J = 0.122 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (g)R-SLIP $\gamma = 2, J = 0.137 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (h)RTL-R-SLIP $\gamma = 2, J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	49
圖 4-3 Basin of attraction of $\gamma = 1$ (a) $\rho = -20 \text{ deg/sec}$ (b) $\rho = -10 \text{ deg/sec}$ (c) $\rho = 0 \text{ deg/sec}$ (d) $\rho = 10 \text{ deg/sec}$ (e) $\rho = 20 \text{ deg/sec}$	51
圖 4-4 Basin of attraction of $\gamma = 2$ (a) $\rho = -20 \text{ deg/sec}$ (b) $\rho = -10 \text{ deg/sec}$ (c) $\rho = 0 \text{ deg/sec}$ (d) $\rho = 10 \text{ deg/sec}$ (e) $\rho = 20 \text{ deg/sec}$	52
圖 4-5 The torque output and the Power plot of (a)R-SLIP $\gamma = 1, J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (b)R-SLIP $\gamma = 1.25, J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (c)R-SLIP $\gamma = 1.5, J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (d)R-SLIP $\gamma = 2, J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (e)R-SLIP $\gamma = 2, J = 0.109 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (f)R-SLIP $\gamma = 2, J = 0.122 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (g)R-SLIP $\gamma = 2, J = 0.137 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (h)RTL-R-SLIP $\gamma = 2, J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	54
圖 4-6 Histogram of the average power. (unit of J is $\text{kg} \cdot \text{m}^2$).....	55
圖 5-1 RHex 六足機器人機構(a)改裝前 (b)改裝後 (c)圓弧腳。	57
圖 5-2 轉動慣量測量.....	58
圖 5-3 配重塊擺放位置 (a)Zero-Max (b)Two-Max (c)Four-Max (d)All-Max.....	59
圖 5-4 轉動慣量測量結果.....	59
圖 5-5 kt 與寬度關係圖。	60
圖 5-6 (a)VICON 相機 (b)RHex 六足機器人與反光點(以白色箭頭標示) (c)實驗使用之跑道.....	61
圖 5-7 Normalized z -t plot with different J and γ (unit of J : $\text{kg} \cdot \text{m}^2$).....	62
圖 5-8 Normalized ρ -t plot with different J and γ (unit of J : $\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	63
圖 5-9 Normalized ρ -t plot with $J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (a) $\gamma = 1$ (b) $\gamma = 1.25$ (c) $\gamma = 1.5$ (d) $\gamma = 2$ and line for explanation.....	64
圖 5-10 振幅直方圖(左)、 ρ_{rms} 直方圖(右)。	66
圖 5-11 二次微分平均值 SD_{avg} 直方圖.....	66

圖 5-12 平均輸出功率直方圖	67
圖 6-1 $\rho - t$ plot of $\gamma = 2, J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (a)Experiment result (c)Simple roll model result (b) RTL-CTR-SLIP result.....	72



表目錄

表 2-1 簡單 Roll 模型分析參數表	14
表 3-1 RTL-R-SLIP 模型系統參數表	36
表 3-2 選定的 R-SLIP fixed point 初始條件	37
表 4-1 prms表	50
表 5-1 圓弧腳寬度配置表	60

第一章 緒論



1.1 前言

隨著科技的發展，越來越多骯髒(Dirty)、危險(Dangerous)、困難(Difficult)的 3D 工作變成由機器人負責，例如在工廠自動化中，FANUC[1]或 KUKA[2]所製造的機械手臂透過適當的調教便能大量、精準並快速地進行焊接等加工、製造汽車等產品；在物流方面，Amazon[3]導入自動化機器人系統[4]來運送貨物，進而增進處理效率；除了上述較為繁重的工作之外，機器人也被應用在與人的服務之中，例如日本 Softbank 開發多年的 Pepper 機器人[5]，除了可以透過螢幕面板與喇叭來提供資訊，也能透過感測器來偵測人的情緒，進而給出相應的互動來達到陪伴的功能；除了在工廠、城市中，機器人也被應用在崎嶇地形中，如美國太空總署 NASA 開發毅力號(Perseverance)[6]等機器人以探索火星，而 Boston Dynamics 開發由內燃機驅動的大型四足機器人 BigDog[7]，能夠負荷 150 公斤之重物在崎嶇山坡地中行走，並且能承受外力側踢而不會倒下。

以上皆顯示機器人領域相當多元，應用於各式各樣的產業之中，而透過在機器人上加裝不同的感測器，便能使機器人收集更多環境資訊，在經過處理後便能以更智慧的方式與環境互動；透過對機器人運動方式的分析，也能使機器人達成更加靈活的動作，並抵抗環境的干擾以避免機器人在運動過程中倒下，以保證任務完成。

隨著科技的發展，機器人已經不再只是科幻小說中的一個題材，而是真實存在人類生活中的一個重要角色，透過持續對機器人的研究與發展，相信未來機器人能更廣泛的應用在人類的的生活之中，解決未來遇到的各種難題。

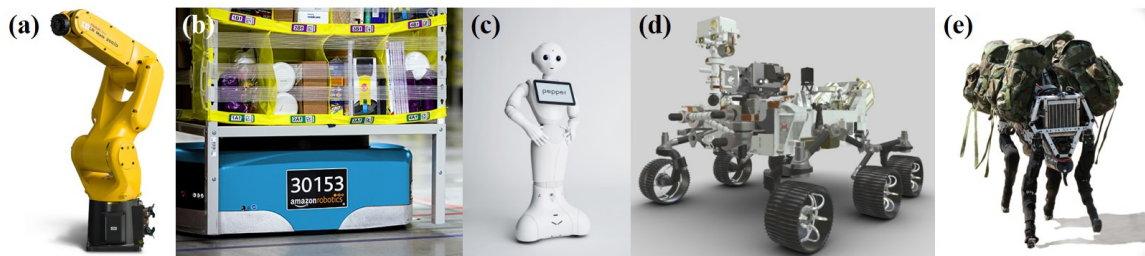


圖 1-1 (a)FANUC 機械手臂[1] (b)Amazon Robotics 物流機器人[4]
(c)Pepper[5] (d)火星探測機器人毅力號[6] (e)BigDog[7]

1.2 研究動機

輪子是人類的重要發明之一，透過輪軸的轉動可以節省能量地搬運貨物，然而輪子需要搭配平坦的地面才能夠順利移動，而自然環境中大部分的地形都是崎嶇不平，不適合輪子行走的，即使在都市中，也會出現如階梯等地形是輪所無法跨越的，因此對於崎嶇地形的載具設計，足類機器人的開發便顯得相對重要。

足類機器人依照腳的數量區分，常見的有二足、四足與六足機器人，每種機器人都具有其特定的運動模式與分析方法。RHex 形式之六足機器人[8]是常見的六足機器人之一，其本體包含六顆馬達，分別驅動一隻具有彈性的圓弧形的腳，常使用的運動步態是輪流以三隻腳踏地的 Tripod 步態，因為踏地時都有三個接觸點接觸地面，容易確保機器人的重心落在接觸點所形成的三角形之中，因此此類型的機器人具有較高的穩定性，而其圓弧腳在崎嶇地中具有一定的越障能力，因而能被應用在崎嶇地的移動與倒塌房屋的搜救等任務。

針對 RHex 六足機器人，過去實驗室開發 Rolling spring-loaded inverted pendulum (R-SLIP)模型[9]，透過找出 R-SLIP 模型中可以被動運動的方式，也就是找出 R-SLIP 模型中 fixed point 的運動軌跡，並將此運動軌跡作為控制六足機器人的參考，成功誘發六足機器人的跑動動態。除了 R-SLIP 模型，為了能更進一步的描述機器人在暫態的運動狀況，實驗室開發了考慮控制器對模型影響的 Clock Torqued Rolling SLIP(CTR-SLIP)模型[10]，並發現透過 Clock 的調控，六足機器人可以忍受更大的誤差範圍，並逐漸將機器人的運動狀態收斂回原本的目標動態。為了能使模型更接近真實的機器人，接著實驗室也在基礎的 R-SLIP 模型上加上阻尼，建構 Torqued-actuated Dissipative Rolling SLIP(TDR-SLIP)模型[11]。

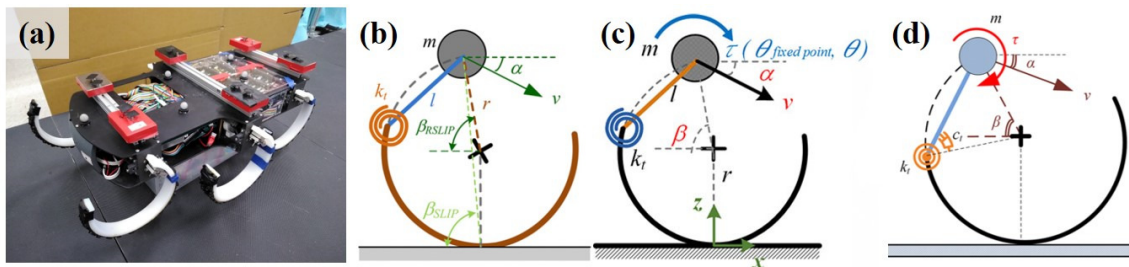


圖 1-2 (a)RHex 型式六足機器人 (b)R-SLIP 模型[9]

(c)CTR-SLIP 模型[10] (d)TDR-SLIP 模型[11]

以上的模型建構過程使得模型更加貼近真實機器人，然而上述的模型都將機器人假設為一個質點、將同時踏地的三隻腳簡化為一隻腳，並將模型侷限在機器人的矢狀平面(Sagittal plane)上，也就是只討論機器人側面的運動特性，某種意義上便是假設六足機器人左右兩側的特性相同、沒有滾轉(Roll)方向的動態。然而六足機器人若是以 Tripod 步態進行跑動，便是以「左半邊的前後腳和右半邊中間的腳」、「左半邊中間的腳和右半邊的前後腳」交替踏到地上，此存在左右兩側踏地腳的數量差異，顯示六足機器人左右兩側的特性不必然相同，再者，六足機器人以 Tripod 步態跑動的過程中確實存在滾轉(Roll)方向的運動動態，也就是機器人會沿著前進方向的軸做轉動。

前段所述的六足機器人左右兩側的特性差異與滾轉方向的動態都是過去的模型所無法討論的，然而若無法對滾轉動態進行分析與控制，可能造成六足機器人實際的運動穩定性下降與能量損耗增加，而未來若要在六足機器人上加裝機械手臂等應用設備，六足機器人本身的動態特性就相當重要，是需要被掌握的。

因此，本研究開發簡易 Roll 模型，嘗試找出機器人在 Roll 方向的動態特性，並且延續實驗室所開發的 R-SLIP 系列模型，將兩個 R-SLIP 模型並排放置以模擬左右兩腳，並以一穿透矢狀平面(Sagittal plane)的剛體軀幹連結兩者，建構 Roll-Two-Leg R-SLIP(RTL-R-SLIP)系列模型，嘗試找出六足機器人在考慮 R-SLIP 模型後的 Roll 方向的動態特性，並期望能找出 RTL-R-SLIP 模型中被動的固定運動模式，並以此運動模式生成新的 Tripod 步態，期待藉由此模型能生成出更穩定、更省能的 Tripod 步態，並希望透過上述對六足機器人 Roll 方向的探討來給出對未來六足機器人以 Tripod 步態跑動時的建議。

1.3 文獻回顧

在機器人運動分析與步態設計的發展中，R.J.Full 等人所發展的 Templates and anchors[12]的概念被廣泛使用，也就是將實體機器人的複雜機構簡化成基礎模型(Templates)，透過對基礎模型的分析與了解，再反過來設計機器人的運動步態、引發實際機器人(Anchors)的動態運動。

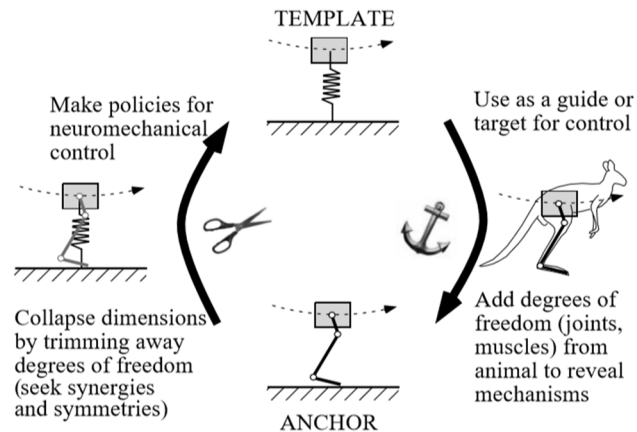


圖 1-3 Templates and anchors 關係圖[12]

基於 Templates and anchors 概念之，近年來有許多模型被發展出來以描述複雜動物或機器人的運動模式，包含：用來描述足步運動的 Spring-loaded inverted pendulum(SLIP)模型[13, 14]；使用 Lateral leg spring(LLS)模型來描述壁虎爬行時前後腳並用的爬行步態[15]；使用 Slot hopper 模型以進一步同時描述兩隻腳的運動步態[16]，進而能夠在四足機器人上實現 Pace、Bounding...等步態。

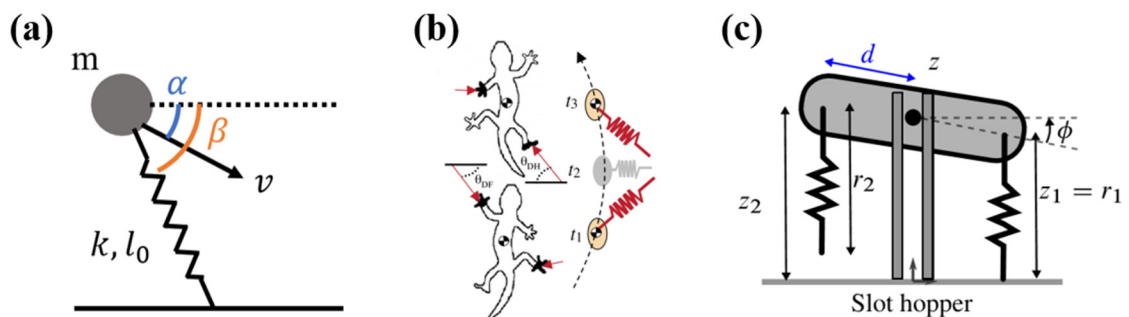


圖 1-4 (a)SLIP 模型[13, 14] (b)壁虎俯視與 LLS 模型[15] (c)Slot hopper 模型[16]

1.3.1 單足模型

然而 SLIP 模型因為其過度簡化的特性以及與實際機器人所受到的控制仍有所差別，因此後續發展出許多改良的模型，包含：在 SLIP 模型底部加上圓弧接觸點的 SLIP-R 模型[17]、在 hip 部位加上扭力輸入並且在考慮阻尼的 TD-SLIP 模型[18, 19]、考慮與地面接觸點的摩擦力的 SLIP 模型[20]、將 hip 點垂直於腳的方向進行平移以產生前後腳功能性差異的 eccentric-SLIP(eSLIP)模型[21]。有別於 SLIP 模型將腳的轉動自由度與彈簧壓縮自由度完全相互獨立，R-SLIP 模型將腳的形式改成圓弧形[9]，相較於 SLIP 模型具有更大的穩定性，基於 R-SLIP 模型也同樣發展出考慮力矩輸入與阻尼的 TDR-SLIP 模型[11]。

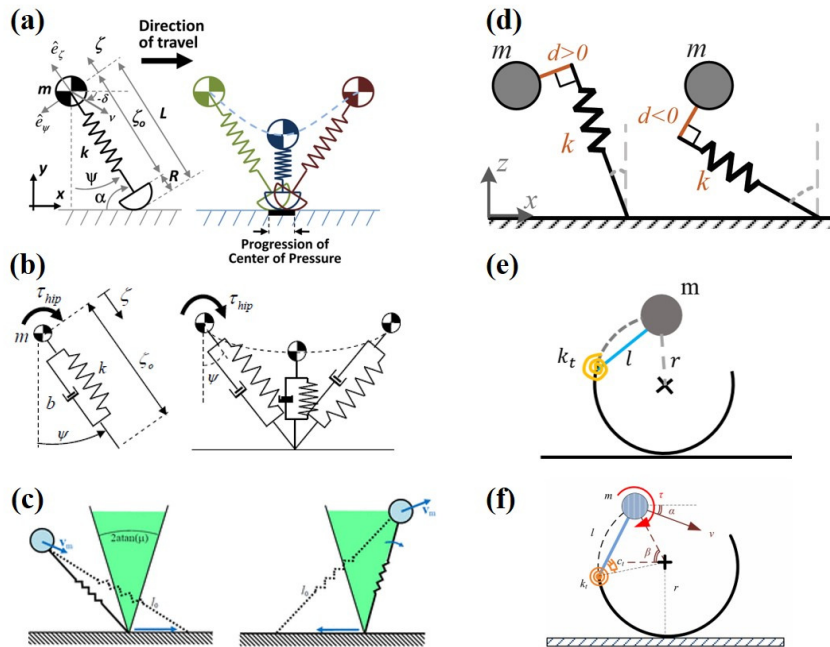


圖 1-5 (a)SLIP-R 模型[17] (b)TD-SLIP 模型[19] (c)考慮摩擦力的 SLIP 模型[20]
(d)eSLIP 模型[21] (e)R-SLIP 模型[9] (f)TDR-SLIP 模型[11]

1.3.2 步態設計與其特性

為了使足式機器人可以具備動態跑動的能力，不同研究團隊對於馬達旋轉的軌跡提出不同想法：Buehler clock 是六足機器人上常使用的調控方法之一，由四個參數的組成，分別為單腳旋轉的週期 t_c 、慢速區擺動的時間長度 t_s 、慢速區的擺動角度 ϕ_s 與慢速區與地面的偏移角度 ϕ_o ，藉由最佳化這四組參數來使六足機器人跑動[8]；相對於 Buehler clock 這樣單純、需要優化過程的設計方式，透過找出 SLIP 或 R-SLIP 模型被動動態中的 fixed point，便可直接將此 fixed point 中 hip 旋轉的角度

軌跡作為馬達旋轉的參考軌跡進行控制，如此的步態生成方式可以不需要進一步的優化、學習便可以達成跑動，而在 SLIP 或 R-SLIP 模型中加入 Clock-Torqued 便成為 CT-SLIP 與 CTR-SLIP 模型，可以進一步探討機器人的暫態性質，並發現加入 Clock-Torqued 後可以相當顯著的增加其忍受干擾的能力[10]。

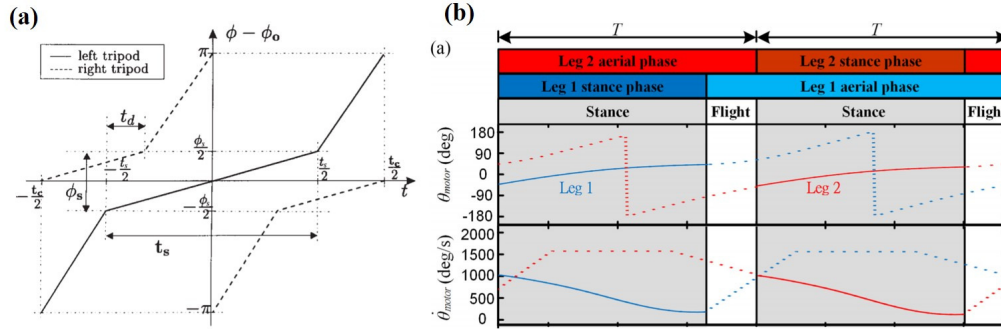


圖 1-6 (a)Buehler clock[8] (b)基於 R-SLIP 模型設計 Tripod 步態[10]

1.3.3 多足機器人運動及其模型

上述模型中多數都只聚焦討論在單一隻腳的運動模式，並且忽略整台機器人在 pitch、yaw 或 roll 方向的運動，相對的，近年來也有越來越多團隊開始開發平面模型來討論 pitch 方向的動態與前後腳之間的功能差異：Scout II 團隊針對其四足機器人開發一平面模型來進行分析與模擬，進而生生成 Bounding 步態[22, 23]。A. De 等人則透過包含兩隻彈簧腳的平面 Slot hopper 模型來生成 Pace、Bounding...等步態[16, 24]。除了上述以直線腳(SLIP 模型)為基礎開發，實驗室也開發以圓弧腳(R-SLIP 模型)為基礎的平面模型 Two-leg R-SLIP，進而生生成前後腳有所差異的運動動態[25, 26]。然而上述團隊的研究仍將運動模型侷限在矢狀(sagittal)平面，而 H. Kimura 等人在 2002 年的研究中[27]，以類神經網路的方式對四足機器人進行控制，因為其機器人僅在 Pitch 與 Yaw 方向具備制動器，所以討論了當機器人受到 Roll 方向的擾動時，如何以 Pitch 方向的運動進行補償。

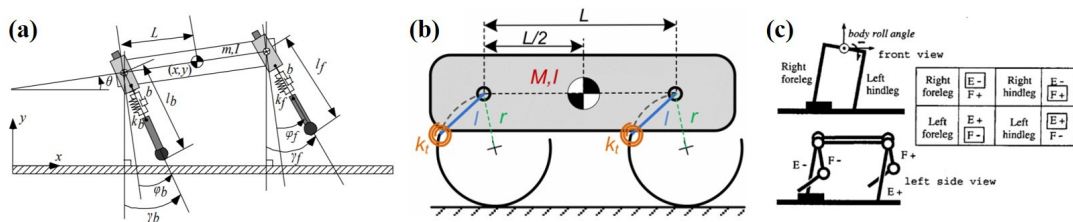


圖 1-7 (a)Scout II 機器人之平面模型[22, 23] (b) Two-leg R-SLIP[25, 26]

(c)四足機器人連結 Pitch 與 Roll 方向的運動[27]



1.4 貢獻

本研究的主要貢獻為：

(1) RTL-R-SLIP 與 RTL-CTR-SLIP 模型開發

Roll-Two-Leg R-SLIP (RTL-R-SLIP) 模型是以過去實驗室所開發的 R-SLIP 模型為基礎，將兩個 R-SLIP 模型並排且以一剛體連結兩者最終組合成一個三維模型，用以描述六足機器人在 Roll 方向因為晃動或是系統參數的不對稱所造成的被動動態，而 Roll-Two-Leg Clock-Torqued R-SLIP (RTL-CTR-SLIP) 模型則是在此被動模型的基礎上加上主動的軌跡控制，藉以模擬機器人在實際運作過程中軌跡控制對系統造成的影響。透過開發這兩個模型，可以使模型更貼近實際機器人的運作狀態，以探討機器人在 Roll 方向的運動動態。

(2) 探討系統參數對 Roll 動態的影響

基於建構出的 RTL-R-SLIP 與 RTL-CTR-SLIP 模型，本研究得以探討六足機器人的左右腳配置與轉動慣量等系統參數如何影響六足機器人在 Tripod 步態跑動時的動態，並進一步給出對未來建置六足機器人的設計建議。

(3) 以 RTL-R-SLIP 模型開發新的 Tripod 步態

透過研究中建構出的 RTL-R-SLIP 模型，本研究搜尋此模型中的 fixed point，以此作為 Tripod 步態的控制軌跡，提出新的 Tripod 步態設計的做法。

1.5 論文架構

本篇論文共分為七個章節，架構如下：第一章闡述研究動機，回顧各研究團隊在機器人模型研究上的文獻，並簡述本研究之貢獻與架構。第二章建構極度簡化的 Simple-roll model，並透過 Poincare section 與 Return map 等方法來分析機器人在 roll 方向的動態特性。第三章以 R-SLIP 模型為基底，建構考量機器人兩側圓弧腳的 Roll-two-leg R-SLIP 模型，以此模型進行 Return map 分析找出 fixed point，生成新的 Tripod 步態。第四章將 RTL-R-SLIP 模型進一步加上主動控制形成 Roll-two-leg CTR-SLIP 模型，用來模擬機器人實際跑動過程中 PD 控制器對機器人動態的影響，以分析 Roll 方向穩定性與能量損耗。第五章介紹實驗平台與其系統參數的準備與測量，並且進行實際實驗，測量機器人實際跑動的 Roll 方向動態與其能量損耗狀況。第六章對前述四個章節進行研究結果的歸納與討論。最後於第七章提出結論與未來展望。

第二章 簡單 Roll 模型之建模與分析

在進入較複雜的模型之前，本研究希望先建立較簡易的 Roll 模型，排除圓弧腳的複雜特性單獨討論機器人在 Roll 方向的動態特性，以及系統參數（如：轉動慣量、左右彈簧係數比例）對系統動態的影響，接著才將 R-SLIP 模型擴充成同時考慮 Roll 方向與前進方向的模型，以完整討論六足機器人的動態特性。

2.1 模型結構與參數

六足機器人在以 Tripod 步態跑動時，會輪流以「左半邊的前後腳和右半邊中間的腳」、「左半邊中間的腳和右半邊的前後腳」交替踏到地上，並且依照機器人傾斜程度與高低位置不同，不同時刻可能有不同數量的腳接觸地面，因此接下來要建立的模型都必須要能符合此步態的特性，包含：模型中要能描述左右側的腳具有不同的特性，而且腳的特性會隨著特定條件而在兩組特性之間交換，並且此模型動態的統馭方程式會隨著機器人姿態而有所改變。

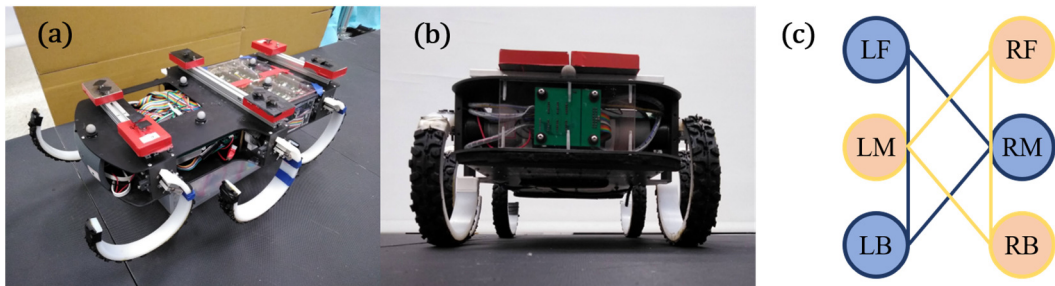


圖 2-1 (a)六足機器人 (b)六足機器人之後視圖 (c)Tripod 步態示意圖

本研究提出的簡單 Roll 模型是將六足機器人投影至機器人正前方的平面上，將左右兩側的腳投影成左右兩支線性彈簧，將機器人的軀體投影成一個剛體，此剛體的左右兩側連結著兩隻彈簧，而這一整個模型被拘束在 yz 平面上，只擁有 z 方向上下與沿著系統質心旋轉的兩個自由度，同時假設左右兩支彈簧會一直平行於 z 軸，此模型的示意圖如下圖所示。

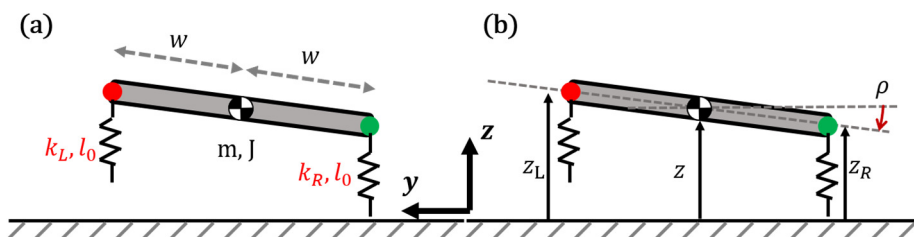


圖 2-2 簡單 Roll 模型(a) intrinsic parameters (b)states

圖 2-2(a)標示了模型中的系統參數，質量 m 集中在系統中心，具有轉動慣量 J ，左右兩側在距離中心 w 位置處有裝設原始長度為 l_0 ，彈性係數分別為 k_L, k_R 的直線彈簧，這兩個彈簧一直維持平行於 z 軸。圖 2-2(b)標示了簡易 Roll 模型的系統狀態參數，分別為中心高度 z 與模型在 Roll 方向的傾角 ρ ，而左右兩個高度 z_L, z_R 都可以由 z, ρ 推算出。

除了以上的系統參數之外，還需要以 γ_{phase} 定義目前機器人在用哪一組腳踏地。參考圖 2-1(c)，當 $\gamma_{\text{phase}} = 0$ 時，以左前腳、左後腳、右中腳 (LF、LB、RM) 踏地，則此時左側腳的彈性係數 k_L 等於左前腳與左後腳共同造成的彈性係數 $k_{LF} + k_{LB}$ ，而右側腳的彈性係數 k_R 等於右中腳的彈性係數 k_{RB} 。當 $\gamma_{\text{phase}} = 1$ 時，機器人以左中腳、右前腳、右後腳 (LM、RF、RB) 踏地，則此時左側腳的彈性係數 k_L 等於左中腳的彈性係數 k_{LM} ，而右側腳的彈性係數 k_R 等於右前腳與右後腳共同造成的彈性係數 $k_{RF} + k_{RB}$ 。

本研究為求簡化，令

$$k_{LF} + k_{LB} = k_{RF} + k_{RB} \equiv k_0, \quad k_{LM} = k_{RM} \equiv k_1 \quad (\text{式 2-1})$$

同時定義 k_0, k_1 的和與比例

$$k_{\text{sum}} \equiv k_0 + k_1, \quad \gamma \equiv k_0/k_1 \quad (\text{式 2-2})$$

限制 $\gamma \geq 1$ ，當六隻腳都裝上相同的腳的時候， $\gamma = 2$ ，也是本研究所討論的最大 γ 的數值。

因此：

$$k_L = \begin{cases} k_0, & \text{if } \gamma_{\text{phase}} = 0 \\ k_1, & \text{if } \gamma_{\text{phase}} = 1 \end{cases} \quad (\text{式 2-3})$$

$$k_R = \begin{cases} k_1, & \text{if } \gamma_{\text{phase}} = 0 \\ k_0, & \text{if } \gamma_{\text{phase}} = 1 \end{cases} \quad (\text{式 2-4})$$

而 γ_{phase} 的切換機制將在 2.2 之中討論。

為了能讓分析的結果適用於不同機器人參數，且可以更廣泛的討論不同的參數狀況，在此將以上的參數無因次化。簡單 Roll 模型中的狀態參數有 ρ, z ，而系統參數有 $J, m, k_L, k_R, l_0, w, g$ 與系統總能量 E_0 ，選擇特徵長度為 w 、特徵時間 t_c 為 $\sqrt{w/g}$ ，特徵質量為 m ，因此可以列出其他參數的無因次量為：

$$\tilde{t} = \frac{t}{t_c}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{w}, \quad \tilde{J} = \frac{J}{mw^2}, \quad \tilde{k}_i = k_i \frac{w}{mg}, \quad \tilde{l}_0 = \frac{l_0}{w}, \quad \tilde{E}_0 = \frac{E}{mgw} \quad (\text{式 2-5})$$

2.2 動態方程式

簡單 Roll 模型除了要考慮左右兩隻腳的彈性係數會隨著機器人使用不同組腳踏地而進行切換之外，也需要考慮不同姿態下，不同數量的腳踏地時會有不同的運動方程式需要遵守。

此處以牛頓法進行分析，並推導出不同狀態（Phase）之下的動態方程式，狀態一共有：Double Stance、Left-leg Stance、Right-leg Stance、Flight，接下來依序推導，並且在最後在 Phase transition 的部分說明這四種狀態與 γ_{phase} 會如何切換。

Double Stance

Double Stance 代表左右兩隻腳都觸地的狀況。依照圖 2-3 的自由體圖，忽略彈簧的質量，可以列出力與力矩平衡的方程式：

$$\begin{cases} F_L + F_R - mg = m\ddot{z} \\ F_L w \cos \rho - F_R w \cos \rho = J\ddot{\rho} \end{cases} \quad (\text{式 2-6})$$

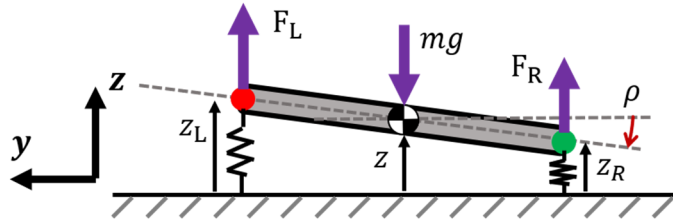


圖 2-3 簡單 Roll 模型在 Double Stance 時的自由體圖

由模型的狀態 z, ρ 可以得到左右兩支彈簧的壓縮量，進而以虎克定律計算出左右端點受力的大小：

$$\begin{cases} F_L = k_L \cdot (l_0 - z_L) = k_L \cdot (l_0 - z - w \sin \rho) \\ F_R = k_R \cdot (l_0 - z_R) = k_R \cdot (l_0 - z + w \sin \rho) \end{cases} \quad (\text{式 2-7})$$

將式 2-7 帶入式 2-6，即可得到運動方程式：

$$\begin{cases} m\ddot{z} = -mg + k_L(l_0 - z - w \sin \rho) + k_R(l_0 - z + w \sin \rho) \\ J\ddot{\rho} = [k_L(l_0 - z - w \sin \rho) - k_R(l_0 - z + w \sin \rho)] \cdot w \cos \rho \end{cases} \quad (\text{式 2-8})$$

將式 2-8 依照式 2-5 無因次化之後得到：

$$\begin{cases} \frac{d^2 \tilde{z}}{d\tilde{t}^2} = -1 + \tilde{k}_L(\tilde{l}_0 - \tilde{z} - \sin \tilde{\rho}) + \tilde{k}_R(\tilde{l}_0 - \tilde{z} + \sin \tilde{\rho}) \\ \frac{d^2 \tilde{\rho}}{d\tilde{t}^2} = \frac{1}{\tilde{J}} \cos \tilde{\rho} [\tilde{k}_L(\tilde{l}_0 - \tilde{z} - \sin \tilde{\rho}) - \tilde{k}_R(\tilde{l}_0 - \tilde{z} + \sin \tilde{\rho})] \end{cases} \quad (\text{式 2-9})$$

最後可以將式 2-9 表示成 state space 的形式：

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \begin{bmatrix} \tilde{z} \\ \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{t}} \\ \tilde{\rho} \\ \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{t}} \\ -1 + \widetilde{k}_L(\tilde{l}_0 - \tilde{z} - \sin \tilde{\rho}) + \widetilde{k}_R(\tilde{l}_0 - \tilde{z} + \sin \tilde{\rho}) \\ \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}} \\ \frac{1}{j} \cos \tilde{\rho} [\widetilde{k}_L(\tilde{l}_0 - \tilde{z} - \sin \tilde{\rho}) - \widetilde{k}_R(\tilde{l}_0 - \tilde{z} + \sin \tilde{\rho})] \end{bmatrix} \quad (\text{式 2-10})$$

Left-leg Stance

Left-leg Stance 代表左腳踏地、右腳懸空的狀態。此狀態的分析方法與 Double Stance 相同，只要將右腳的受力忽略即可，最後可將動態方程式表示成：

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \begin{bmatrix} \tilde{z} \\ \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{t}} \\ \tilde{\rho} \\ \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{t}} \\ -1 + \widetilde{k}_L(\tilde{l}_0 - \tilde{z} - \sin \tilde{\rho}) \\ \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}} \\ \frac{1}{j} \cos \tilde{\rho} [\widetilde{k}_L(\tilde{l}_0 - \tilde{z} - \sin \tilde{\rho})] \end{bmatrix} \quad (\text{式 2-11})$$

Right-leg Stance

Right-leg Stance 代表右腳踏地、左腳懸空的狀態。此狀態的分析方法與 Double Stance 相同，只要將左腳的受力忽略即可，最後可將動態方程式表示成：

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \begin{bmatrix} \tilde{z} \\ \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{t}} \\ \tilde{\rho} \\ \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{t}} \\ -1 + \widetilde{k}_R(\tilde{l}_0 - \tilde{z} + \sin \tilde{\rho}) \\ \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}} \\ \frac{1}{j} \cos \tilde{\rho} [-\widetilde{k}_R(\tilde{l}_0 - \tilde{z} + \sin \tilde{\rho})] \end{bmatrix} \quad (\text{式 2-12})$$

Flight

Flight 代表雙腳皆騰空，整個系統只受到重力的影響，因此在無因次化之後可以將動態方程式寫成：

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \begin{bmatrix} \tilde{z} \\ \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{t}} \\ \tilde{\rho} \\ \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{t}} \\ -1 \\ \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{式 2-13})$$

Phase transition

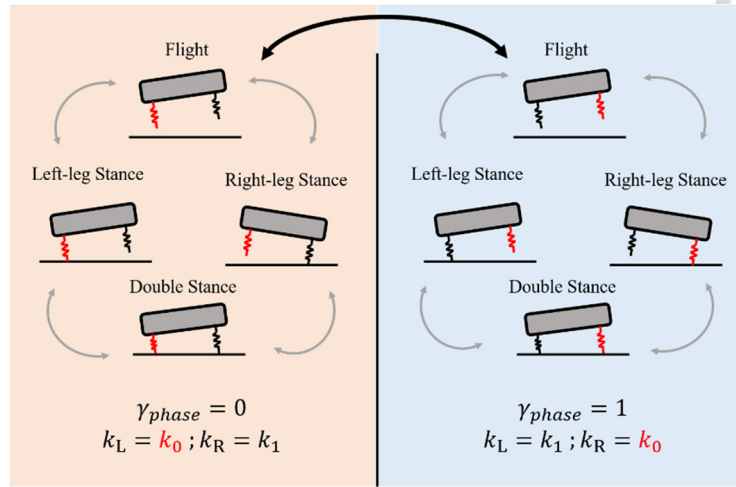


圖 2-4 簡易 Roll 模型之狀態切換示意圖。

如圖 2-4 所示，簡易 Roll 模型一共有兩組狀態參數需要切換，其中一組為 Phase，由四個不同踏地狀態組成，隨著機器人的姿態不相同，要切換到不同的狀態、使用不同的動態方程式進行軌跡運算；另一組為 γ_{phase} ，是要模擬六足機器人在跑動的過程中會輪流用不同的腳踏地，因而動態方程式中的 k_L, k_R 要代入不同的數值。

踏地狀態以機器人的左右兩端的高度是否低於彈簧的自然長度來進行判斷，而 γ_{phase} 則是在模型處於 Flight 狀態且 z 方向速度由正轉負的瞬間進行切換，選擇此瞬間的原因是用來模擬六足機器人用一組腳踏地之後，會先飛起再用另一組腳落地，因此選用此作為切換標準。以下用圖 2-5 進行比較仔細的狀態切換說明：

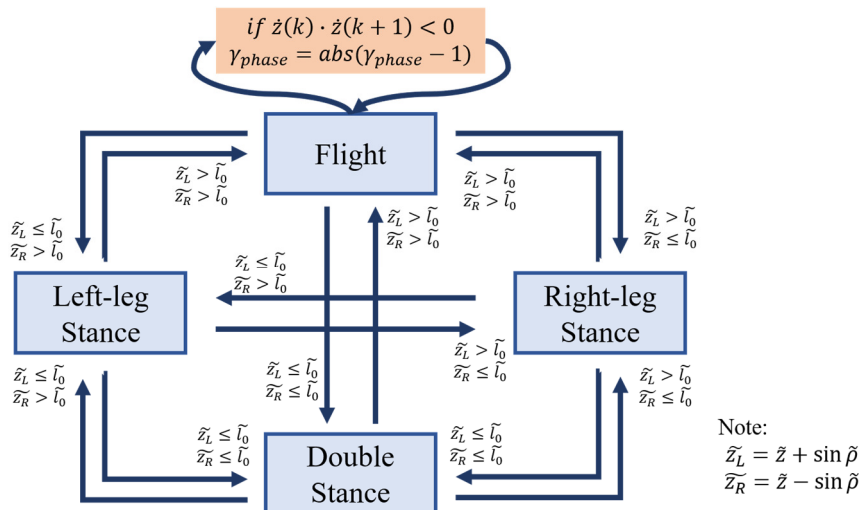


圖 2-5 簡易 Roll 模型的狀態切換標準。

完成動態方程式與切換標準的建立後，即可以 MATLAB 進行數值計算，模擬此模型的運動動態，進而分析模型特性。

2.3 Poincare section 分析

在建立簡單 Roll 模型後，本研究希望找出此模型可以被動地持續運動的運動模式，也就是找出此模型運動動態的 fixed point，並分析 fixed point 存在的狀態空間與系統參數的關聯，期待能找出與 Tripod 步態相匹配的 fixed point 動態。

簡單 Roll 模型的系統參數一共有四個自由度與兩個狀態參數，分別為垂直高度 z 、垂直方向速度 V_z 、模型在 Roll 方向的傾斜角度 ρ 與角速度 $\dot{\rho}$ ，Phase（描述模型受到哪一個運動方程式統御，如：Double Stance、Left-leg Stance...）以及彈簧的配置狀態 γ_{phase} ，系統參數眾多的特性使得 fixed point 分析並不容易進行。

為了能找出此系統的動態特性，此部分採用 Poincare section 的分析方式，此方法是對於非線性系統的動態特性分析常使用的方法之一[28]。此分析方式首先要建立一個由系統的狀態參數（如：簡單 Roll 模型中的狀態參數有 $\rho, \dot{\rho}, z, V_z, \text{Phase}, \gamma_{\text{Phase}}$ 等六個參數）所展開的相空間（phase space），此相空間中的任一個點都代表系統的一個狀態，並且透過運動方程式可以決定出這個點在相空間中的移動軌跡，接著需要恰當的在此相空間中決定一個平面，稱之為 Poincare section，每當相空間中的移動軌跡經過此 Poincare section 時，便在此平面上記錄一個點，因此便可以將高維度的運動特性呈現在二維平面上，例如：當 Poincare section 上只出現一個點，便代表此系統此時運作在一個 fixed point 上，呈現週期性的運動特性；當 Poincare section 上出現一個圓環，則代表該圓環上的運動軌跡代表著類週期性的運動特性(Quasi-periodic motion)；當 Poincare section 上出現碎形(Fractal)，則該軌跡便代表著一個混沌（Chaos）的運動狀態。

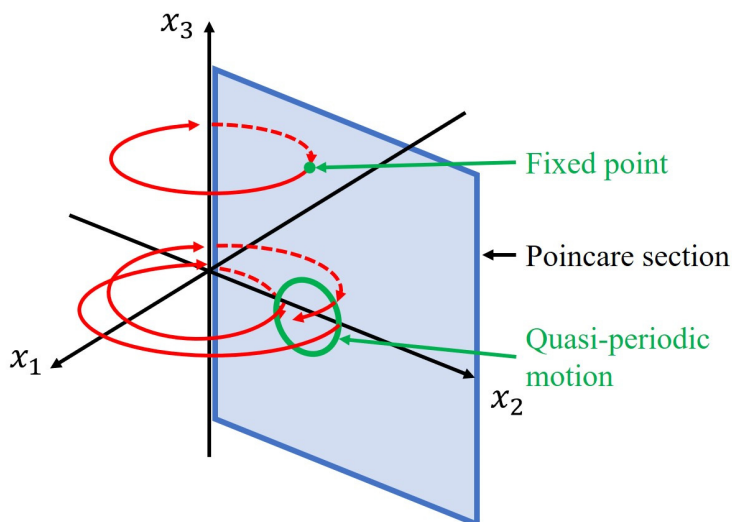


圖 2-6 Poincare section 示意圖

本分析選擇的 Poincare section 為模型滯空、 γ_{phase} 與初始狀態相同且垂直速度 V_z 為零的瞬間，因為此系統的能量守恆，而此瞬間的總能量 E_{total} 為重力位能 mgz 與傳動動能 $1/2 \dot{\rho}^2$ 之和，代表 z 與 $\dot{\rho}$ 有所關聯，只要確保同一張 Poincare section 中所有軌跡的總能量 E_{total} 相同，便可以忽略 z 的自由度，如此一來即可將原本 $[z, V_z, \rho, \dot{\rho}]$ 的四個自由度運動軌跡，降至 $[\rho, \dot{\rho}]$ 二自由度的 Poincare section，較容易進行觀察與分析。

表 2-1 表示機器人的實際系統參數以及其無因次化後的結果，而分析使用的參數則是以實際參數為中心向外擴大，以討論系統參數對系統動態的影響。機器人平台的介紹將於第五章驗證實驗的部分再進行說明。

在 Poincare section 分析中，給予的初始條件的範圍取 $\rho = [-10, 10] \text{deg}$ ，角速度取 $\dot{\rho} = [-200, 200] \text{deg/sec}$ ，換算到無因次下為 $\tilde{\rho} = [-0.17, 0.17]$ ， $\frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}} = [-0.46, 0.46]$ ，在此區間內均勻撒點，觀察是否有 fixed point 或特殊動態。

表 2-1 簡單 Roll 模型分析參數表

參數	實際數值	單位	無因次參數	無因次量
g	9.81	m/s^2	N/A	N/A
m	10.32	kg	N/A	N/A
w	0.16	m	N/A	N/A
k_{sum}	7035.8	N/m	$\widetilde{k_{\text{sum}}}$	11.119
γ	2	N/A	γ	2
J	0.097	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	$\tilde{J}$	0.367
l_0	0.14	m	$\tilde{l}_0$	0.875
E_{total}	16.2	J	$\tilde{E}$	1

改變總能量 $\widetilde{E}_0$

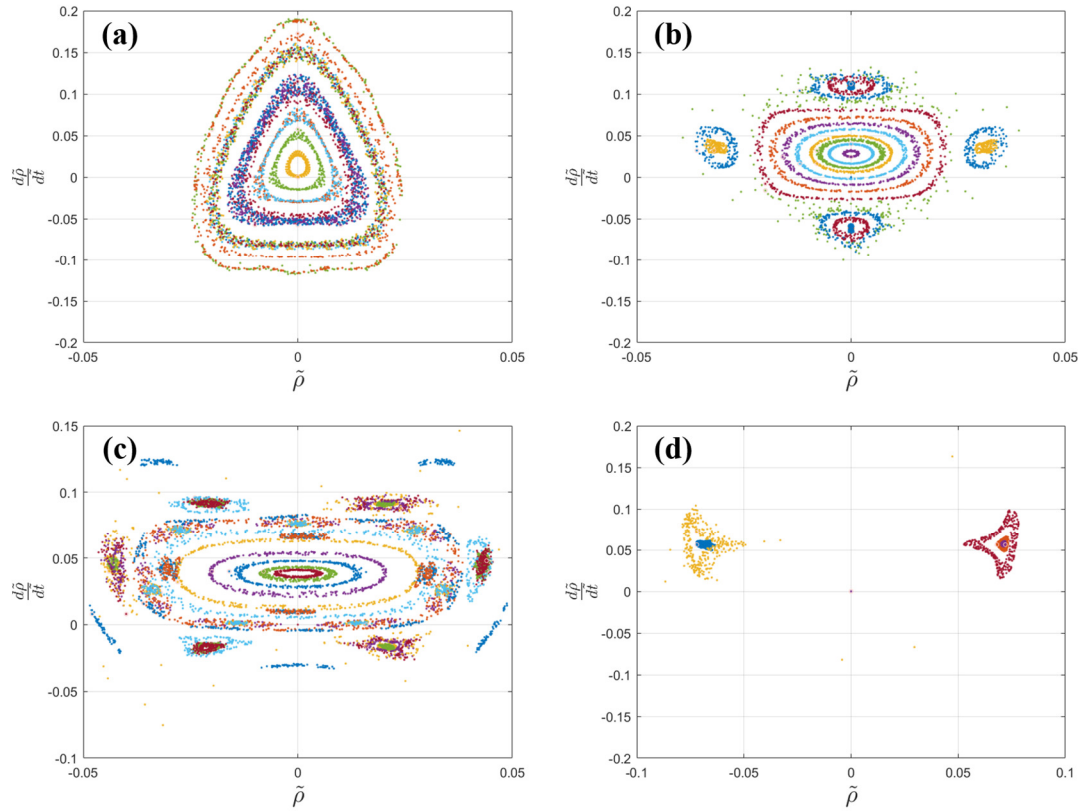


圖 2-7 Poincare Section of $\widetilde{k}_{sum} = 11, \gamma = 2, \widetilde{f} = 0.3, \widetilde{l}_0 = 0.875$

(a) $\widetilde{E}_0 = 0.900$ (b) $\widetilde{E}_0 = 0.925$ (c) $\widetilde{E}_0 = 0.950$ (d) $\widetilde{E}_0 = 1.000$

圖 2-7 是固定 $\widetilde{k} = 11, \gamma = 2, \widetilde{f} = 0.3, \widetilde{l}_0 = 0.875$ ，調整 $\widetilde{E}_0$ 分別為 0.900、0.925、0.950、1.000 四種數值所繪製出的 Poincare section。可以從圖 2-7 中看出只有當 $\widetilde{E}_0$ 為 0.900、0.925 或 0.950 時會在圖像中心有環狀結構出現，代表在該參數狀態附近有類週期性的軌跡出現。以圖 2-7 的(a)圖為例，該結構的中心在角度為零的軸上，但角速度並不為零，而且其結構是一層一層的環狀結構，顯示在一定的區間內都有類週期性的運動動態，隨著層狀結構往內縮，最終會聚在一個點上，則該點就代表一個 fixed point。當能量從 0.900 逐漸增加至 0.950，該環狀結構範圍擠壓，當 $\widetilde{E}_0$ 增加為 1.000 時該結構便消失，代表隨著 $\widetilde{E}_0$ 從 0.95 增加至 1.00，中間至少經過一個 Bifurcation point，使系統動態產生結構性的差異。當 $\widetilde{E}_0$ 增加，除了中央的環型結構逐漸受到擠壓，該環型結構附近也會出現雙周期（圖 2-7(b)）、三、四、五、七周期（圖 2-7(c)）的高週期運動模態。

總上所述，隨著 $\widetilde{E}_0$ 從 0.90 增加至 1.000，簡單 Roll 模型的類週期運動模式會

消失，顯示 $\widetilde{E}_0$ 對於簡單 Roll 模型是一個重要的參數。接下來將 $\widetilde{E}_0$ 設定為 0.900，以確保環形結構存在，並進一步討論其他系統參數對系統動態造成的影響。



改變左右彈性係數比例 γ

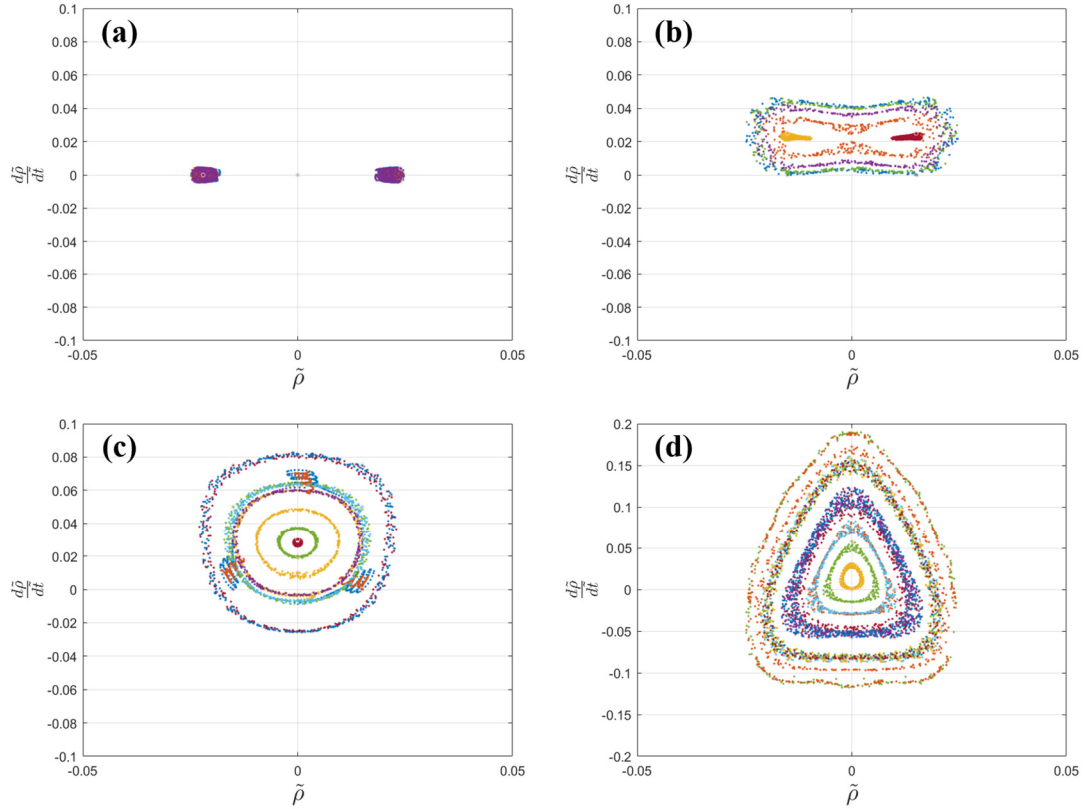


圖 2-8 Poincare Section of $\widetilde{k}_{sum} = 11, \widetilde{J} = 0.3, \widetilde{l}_0 = 0.875, \widetilde{E}_0 = 0.90$

(a) $\gamma = 1$ (b) $\gamma = 1.25$ (c) $\gamma = 1.50$ (d) $\gamma = 2$

圖 2-8 是固定 $\widetilde{k} = 11, \widetilde{J} = 0.3, \widetilde{l}_0 = 0.875, \widetilde{E}_0 = 0.90$ ，調整 γ 分別為 1、1.25、1.50、2 四種數值所繪製出的 Poincare section。觀察圖 2-8(a)，發現系統除了在原點有一個小點，代表在角度與角速度為零的初始條件下有一個 fixed point，而該 fixed point 的動態便是只有上下彈跳、沒有 Roll 轉動的運動模式。除此之外同樣在圖 2-8(a) 中，當 $\widetilde{\rho} = -0.022$ 與 0.022 時，也出現 fixed point，且該 fixed point 的範圍較大，也包含了 Roll 方向的動態。觀察圖 2-8(b)(c)(d) 可以發現當 $\gamma = 1.25, 1.5, 2$ 時，系統都存在層狀結構，具有類週期性的運動動態，而層狀結構的中心則是存在一個 fixed point。特別是當 $\gamma = 1.25$ 時，此層狀結構的中心有兩個不同的 fixed point，對稱於角度為零的軸。以及當 $\gamma = 1.5$ 時，在層狀結構中有出現三個點，經 Time

response 分析可以確定是三周期的動態。而當 γ 逐漸增加，Poincare section 中的層狀結構的範圍也會逐漸增加，範圍由扁長形狀逐漸變成三角形，顯示系統可以產生類週期動態的區間逐漸增加



改變總彈簧係數 $\widetilde{k_{sum}}$

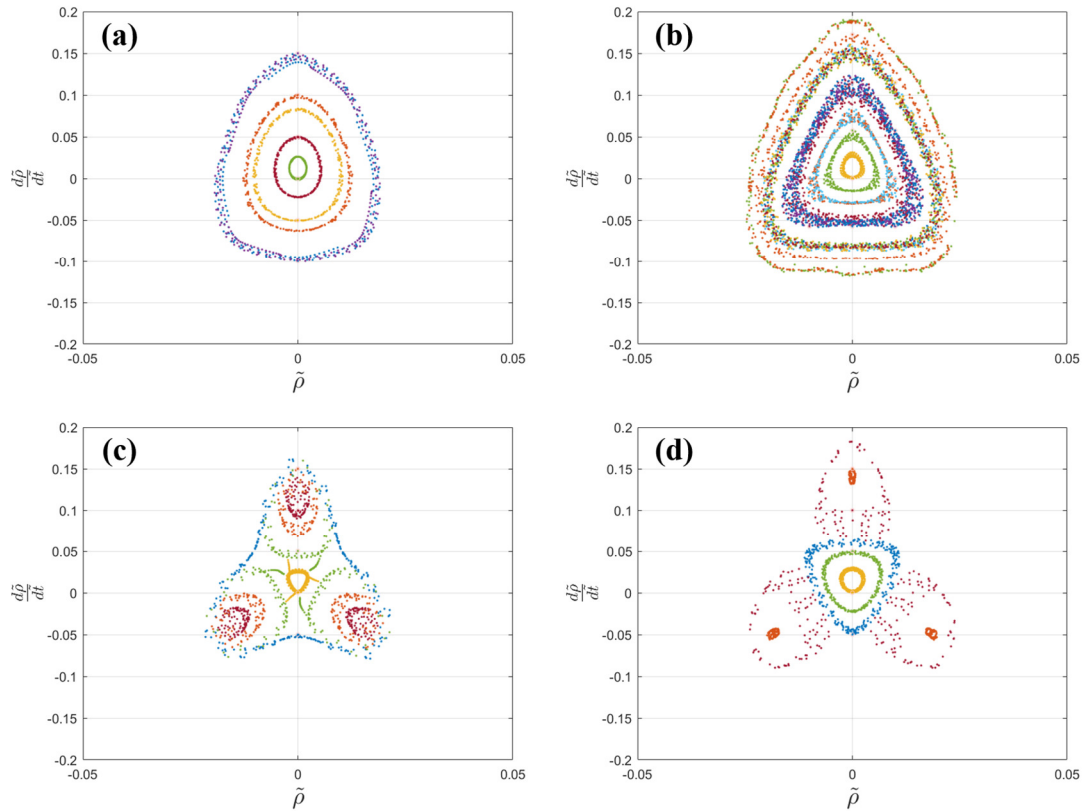


圖 2-9 Poincare Section of $\gamma = 2, \tilde{J} = 0.3, \tilde{l}_0 = 0.875, \tilde{E}_0 = 0.90$

(a) $\widetilde{k_{sum}} = 9$ (b) $\widetilde{k_{sum}} = 11$ (c) $\widetilde{k_{sum}} = 12$ (d) $\widetilde{k_{sum}} = 13$

圖 2-9 是固定 $\gamma = 2, \tilde{J} = 0.3, \tilde{l}_0 = 0.875, \tilde{E}_0 = 0.90$ ，改變 $\widetilde{k_{sum}}$ 為 9、11、12、13 所繪製出的 Poincare section。從圖 2-9 中可以看出，每張圖中都有層狀結構，顯示該系統具有類週期性的動態特徵，然而隨著 $\widetilde{k_{sum}}$ 逐漸增加，從原本的類似圓形結構，逐漸變成三角形，最終三角形的三個頂點分離出獨立的 fixed point，經過時間序列分析，可以確認這三個點代表的是一個三倍周期的運動模式。而在這四張圖中，在 $\tilde{p} = 0$ 上的 fixed point 都有存在，但隨著 $\widetilde{k_{sum}}$ 增加，該 fixed point 附近的層狀結構逐漸變小，當 $\widetilde{k_{sum}} = 13$ 時此三角形層狀結構方向顛倒。

綜上所述，可以發現 $\widetilde{k_{sum}}$ 對於系統的運動動態有不可忽略的影響成分，從

$\widetilde{k}_{sum} = 9$ 到 $\widetilde{k}_{sum} = 13$ 之間至少會經過一個 Bifurcation point，造成結構性的影響，然而另一個在 $\tilde{\rho} = 0$ 上的 fixed point 都可以存在。



改變轉動慣量 $\tilde{J}$

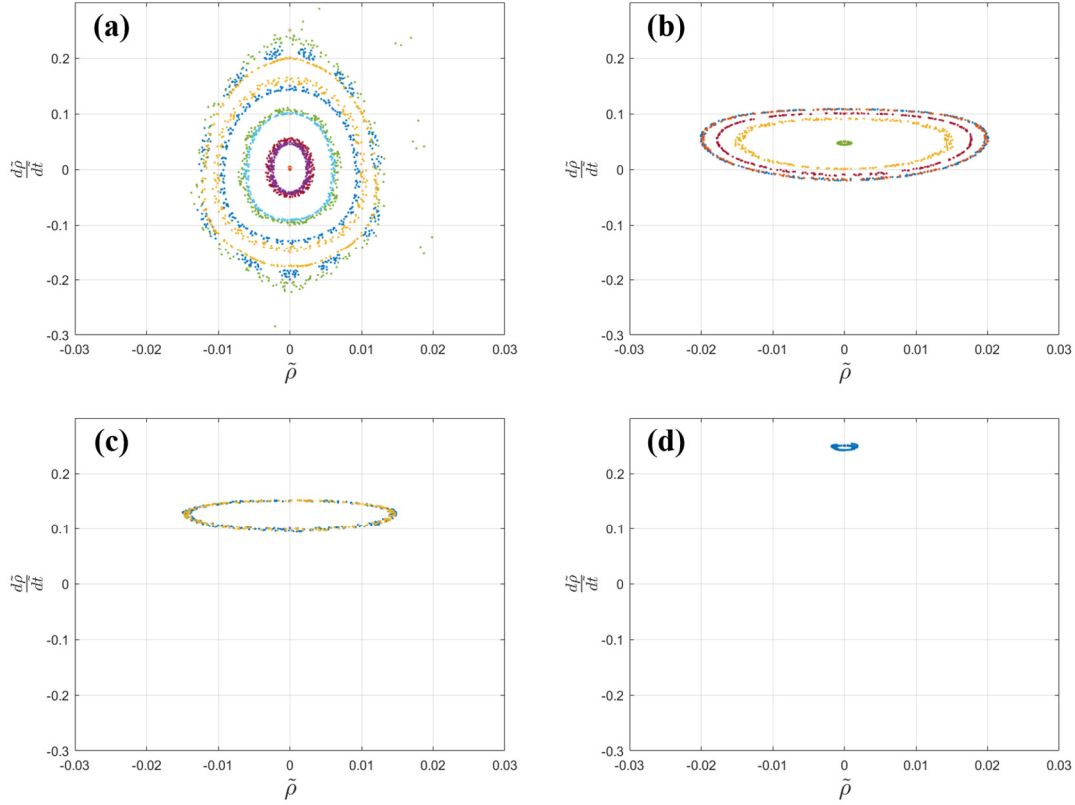


圖 2-10 Poincare Section of $\widetilde{k}_{sum} = 11$, $\gamma = 2$, $\tilde{l}_0 = 0.875$, $\widetilde{E}_0 = 0.90$

(a) $\tilde{J} = 0.28$ (b) $\tilde{J} = 0.35$ (c) $\tilde{J} = 0.45$ (d) $\tilde{J} = 0.7$

圖 2-10 是固定 $\widetilde{k}_{sum} = 11$, $\gamma = 2$, $\tilde{l}_0 = 0.875$, $\widetilde{E}_0 = 0.90$ ，改變 $\tilde{J}$ 為 0.28、0.35、0.45、0.7 所繪製出的 Poincaré section。整體而言，無論 $\tilde{J}$ 的數值為何，Poincaré section 上都會出現環形的結構，代表此系統具有類週期性的運動動態，但隨著 $\tilde{J}$ 增加，該環形結構會逐漸被擠壓、縮小，而且逐漸往角速度增加的方向移動。若 $\tilde{J}$ 逐漸減小至 0.28 時，可以發現該環形結構的中心點很接近角速度為零的軸，此時若將 $\tilde{J}$ 再減少，會發現該環形結構便消失。如此可以推論當 fixed point 的角速度為零時，就代表一個 Bifurcation point，因此若要維持系統具備上圖中所出現的 fixed point，就需要確保 $\tilde{J}$ 大於該分岔點的數值。

Fixed point 時間序列

在分析的過程中，排除不同系統參數但實際是相同 fixed point 的情況，一共找到以下的五類 fixed point：圖 2-8(a)中， $\gamma = 1$ 時，在角度與角速度都為零的狀況下直上直下的彈跳；圖 2-8(a)中， $\gamma = 1$ 時，在角速度為零但角度不為零的 fixed point；圖 2-8(b)中， $\gamma = 1.25$ 時，角度與角速度都不為零的 fixed point；圖 2-8(d)中， $\gamma = 2$ 在其他數值都相匹配的狀況下所產生在 $\tilde{\rho} = 0$ 上的 fixed point；圖 2-7(c)、圖 2-8(c)與圖 2-9(d)中出現的七倍、三倍周期 fixed point。以下將上述前四類 fixed point 依照順序編號，並將其時間序列與彈跳姿態繪製出來，以篩選適合用來匹配 Tripod 步態的穩定動態，而第五類 fixed point 因週期較長且行為較複雜，此處不多加討論，僅舉圖 2-9(d)中出現的三倍週期 fixed point 為例。

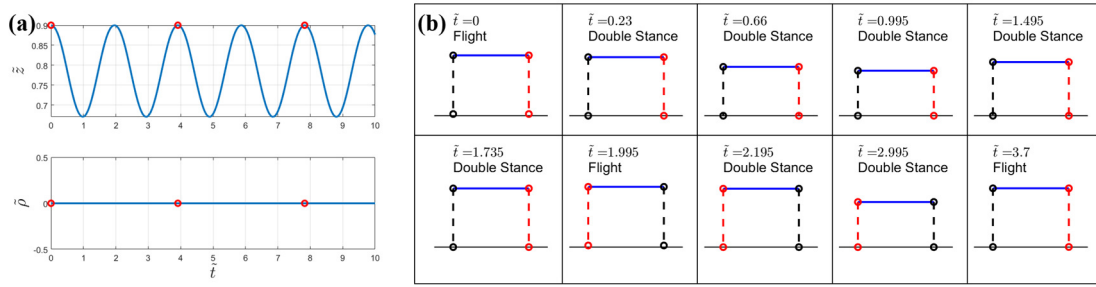


圖 2-11 Fixed point No.1, $\widetilde{k_{sum}} = 11, \gamma = 1, \tilde{J} = 0.3, \tilde{l}_0 = 0.875, \widetilde{E}_0 = 0.900,$

$$\widetilde{\rho}_0 = 0, \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}_0} = 0 \quad (a) \text{Time response} \quad (b) \text{moving configuration}$$

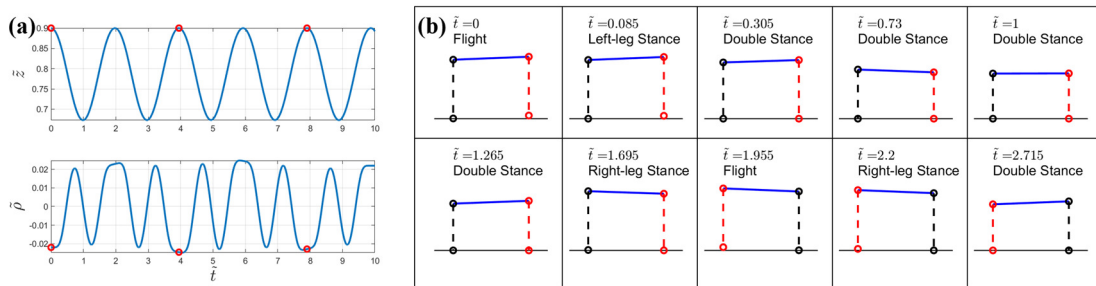


圖 2-12 Fixed point No.2, $\widetilde{k_{sum}} = 11, \gamma = 1, \tilde{J} = 0.3, \tilde{l}_0 = 0.875, \widetilde{E}_0 = 0.900,$

$$\widetilde{\rho}_0 = -0.022, \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}_0} = 0 \quad (a) \text{Time response} \quad (b) \text{moving configuration}$$

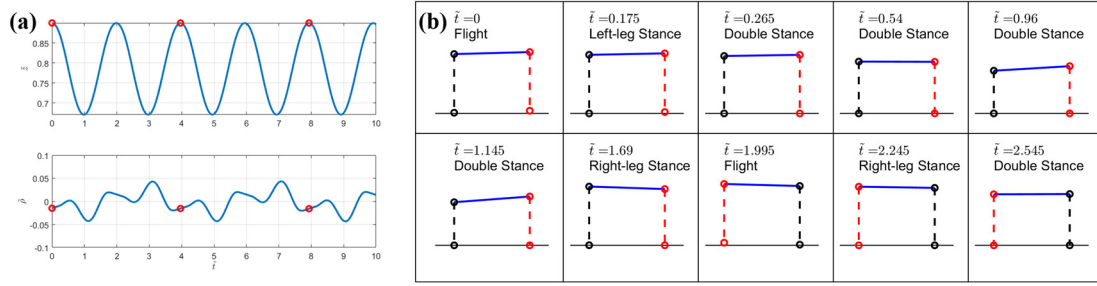


圖 2-13 Fixed point No.3, $\widetilde{k_{sum}} = 11, \gamma = 1.25, \tilde{f} = 0.3, \tilde{l}_0 = 0.875, \widetilde{E}_0 = 0.900$

$\widetilde{\rho}_0 = -0.015, \frac{d\widetilde{\rho}}{d\tilde{t}_0} = 0.023$ (a)Time response (b)moving configuration

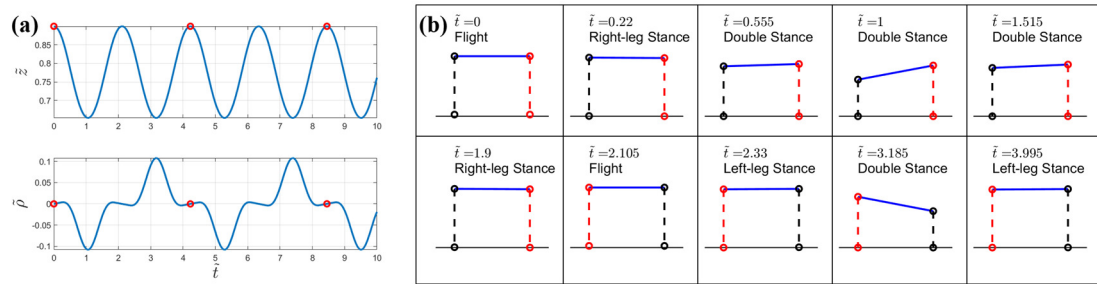


圖 2-14 Fixed point No.4, $\widetilde{k_{sum}} = 11, \gamma = 2, \tilde{f} = 0.3, \tilde{l}_0 = 0.875, \widetilde{E}_0 = 0.900,$

$\widetilde{\rho}_0 = 0, \frac{d\widetilde{\rho}}{d\tilde{t}_0} = 0.015$ (a)Time response (b)moving configuration

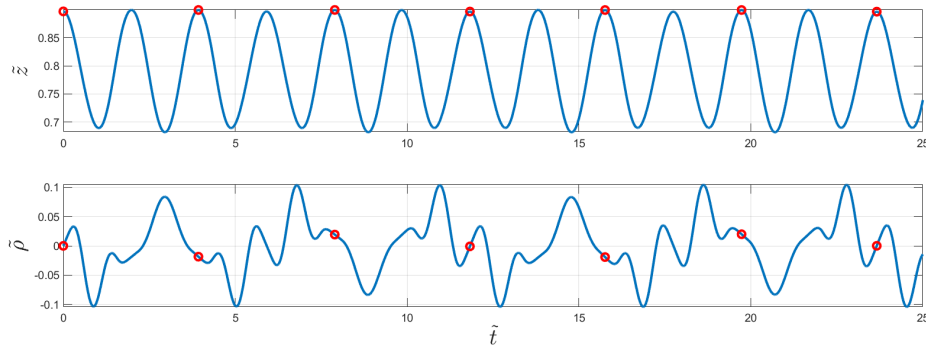


圖 2-15 Time response of Fixed point with period-3,

$\widetilde{k_{sum}} = 13, \gamma = 2, \tilde{f} = 0.3, \tilde{l}_0 = 0.875, \widetilde{E}_0 = 0.900, \widetilde{\rho}_0 = 0, \frac{d\widetilde{\rho}}{d\tilde{t}_0} = 0.14$

圖 2-11(a)、圖 2-12(a)、圖 2-13(a)、圖 2-14(a)、圖 2-15 中以紅色圓圈標記 Poincare point。圖 2-11(b)、2-11(b)、2-12(b)、2-13(b)中的藍色線條代表簡單 Roll 模型的機器人軀幹，用紅色與黑色虛線區別彈簧係數的大小，紅色代表較大的彈性係數 k_0 ，黑色代表較小的彈簧係數 k_1 ，而兩者的比值 $\gamma = k_0/k_1$ 。

從圖 2-11 中可以確認當 $\gamma = 1$ 、初始角速度與角度為零所對應的 fixed point 的動態確實為筆直上下的彈跳，符合直覺的推測，將其編號為「Fixed point No.1」。而圖 2-12 中可以看到在與 Fixed point No.1 有相同的系統參數條件下，也能出現第二類的穩定點，編號為「Fixed point No.2」，Fixed point No.2 具有 Roll 方向的動態，尤其當模型處地時，由於兩側彈簧係數相同，會在觸地的過程中產生均勻的 Rolling 轉動，不會特別傾向單側。

圖 2-13 與 2-13 分別表示了 $\gamma = 1.25$ 與 2 所對應的 fixed point 動態，分別將其編號為「Fixed point No.3」與「Fixed point No.4」，其運動方式都是先單腳先觸地、雙腳觸地、單腳離地、滯空，再換另一側單腳先觸地、雙腳觸地、單腳離地、滯空，如此反覆循環。

圖 2-15 表示了 $\gamma = 2$ 而 $\widetilde{k_{sum}} = 13$ 時的 fixed point，可以看出此 fixed point 的動態較為複雜，而且其週期為前述四者的三倍，落地與晃動的狀況也較為複雜，因此排除此類高週期 fixed point 作為後續改良 Tripod 步態的設計參考。

值得注意的是，雖然 Fixed point No.3 與 No.4 在 Poincare section 上有不同的性質，但可以發現這兩個 fixed point 也有許多相似之處。首先，角度 $\tilde{\rho}$ 出現極大極小值的時候都發生在 $\tilde{z}$ 較小，也就是落地的時候，而且該極大極小值的方向都與落地瞬間的角速度方向相反、朝著彈簧係數較小（黑色）的腳的方向傾斜，顯示如果要使此簡單 Roll 模型維持在 fixed point，必須使模型在落地前朝著彈性係數較大的腳的方向傾斜，才能在落地後抵銷因為兩側彈性係數差異而造成的傾斜。其次，觀察圖 2-13(a)與圖 2-14(a)可以發現整個 $\tilde{\rho} - t$ 圖都是由一個較低頻的週期波與一個高頻、大振幅的周期波疊加在一起，由 Phase 的資訊可以得知這兩者的分別由滯空的動態方程式與雙腳觸地的動態方程式主導，而且兩者如何搭配銜接便是 fixed point 是否存在的關鍵因素。

Fixed point No.3 與 No.4 相異之處除了 $\tilde{\rho}_0$ 不相等之外，也看到兩者的低頻週期波不相同，在圖 2-13 中的低頻週期波的振幅較大，但相對的整體的 $\tilde{\rho}$ 振幅則是 $\gamma = 2$ 較大，而比較兩 fixed point 的週期，可以看出當 $\gamma = 2$ 時的周期較長。

小結

本小節使用 Poincare section 的技巧，將簡單 Roll 模型的運動軌跡記錄在由 $\tilde{\rho}$ 與 $\frac{d\tilde{\rho}}{dt}$ 所建構的相平面上，並且以實際機器人系統參數為中心，單獨調整各系統參數，繪製出不同的 Poincare section，觀察系統參數對系統動態、fixed point 存在與否的影響，並且嘗試找出簡單 Roll 模型的 fixed point 動態。

經過分析，本研究發現 $\widetilde{E_0}, \gamma, \widetilde{k_{sum}}, \tilde{J}$ 都對系統有相當大的影響，從前述的討論中可以發現這些參數的變化除了會使 Poincare section 上的圖形伸縮或位移，也會帶給系統結構性的改變，也就是產生 Bifurcation。這顯示各個系統參數對於此系統都是相當重要，需要適當的匹配系統參數才能得到期望中的 fixed point。

接著本研究從 Poincare section 分析中找出五類 fixed point，並繪製其 $\tilde{z} - t$ 與 $\tilde{\rho} - t$ 圖，觀察其運動動態，並發現高週期 fixed point 如 $\gamma = 2, \widetilde{k_{sum}} = 13$ 的三週期 fixed point 動態相對複雜，較不適合應用在 Tripod 步態的設計上，而 $\gamma = 1.25$ 與 2 的 fixed point 動態有所相似，也推論出要使得簡單 Roll 模型存在 fixed point 的可能條件。



2.4 Return map 分析

從 Poincare section 的分析中找出四個類型的 fixed point 後，將針對選定的 fixed point 進行穩定度分析，此處採取 Return map 的分析方法。

一維 Return map 的橫軸與縱軸分別表示了初始狀態與經過一個周期後的狀態，當 Return map 上的曲線與過原點且斜率為一的直線相交，就代表這一個初始狀態經過了一個周期仍會回到同樣的狀態，代表發生了固定的運動模式，也就是產生了一個 fixed point，透過進一步判斷此交點斜率絕對值的大小是否小於一便能判斷此 fixed point 是否為穩定[28]，如圖 2-16 所示，當一個初始條件稍微遠離 unstable fixed point，如紫色線段，系統因為 $X_{n+1} = f(X_n)$ 的 mapping 關係而逐漸遠離 unstable fixed point，而 stable fixed point 則有相反的性質，會逐漸收斂回 stable fixed point。

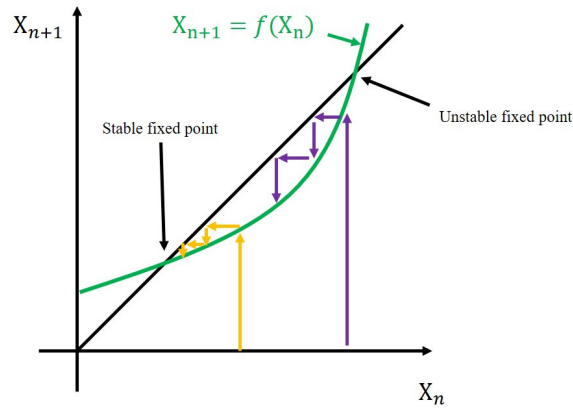


圖 2-16 一維 Return map 示意圖。

針對簡單 Roll 模型， X_n 代表某一次通過 Poincare section 時的參數（詳細定義請見 2.3），而 X_{n+1} 代表下一次通過 Poincare section 時的參數。值得注意的是，根據簡單 Roll 模型的 Poincare section 定義，由 X_n 到 X_{n+1} 之間一共經過兩次踏地，因為一個完整的 Tripod 週期包含由兩組不同的腳分別踏地，此部分與過去 SLIP 或 R-SLIP 模型所定義的一次踏地為一個週期有所不同。

然而簡單 Roll 模型的狀態參數並不只有一維，而是由 $[z, V_z, \rho, \dot{\rho}]$ 所組成，如同 2.3 時所討論的，在 Poincare section 中只有 $[\rho, \dot{\rho}]$ 是較具代表性的狀態變數，因此可以將 Return map 降低成二維，並以兩張圖表示，第一張圖為 ρ_{n+1} 對 ρ_n 作圖並將 $\dot{\rho}_n$ 以顏色標示，第二張圖為 $\dot{\rho}_{n+1}$ 對 $\dot{\rho}_n$ 作圖並將 ρ_n 以顏色標示，如此便可以從這兩張圖中同時觀察該 fixed point 是否具有穩定性（stability）。

以下繪製出對應 Fixed point No.1, No.2, No.3, and No.4 的系統參數的 return map，並一一分析各 fixed point 的穩定性：

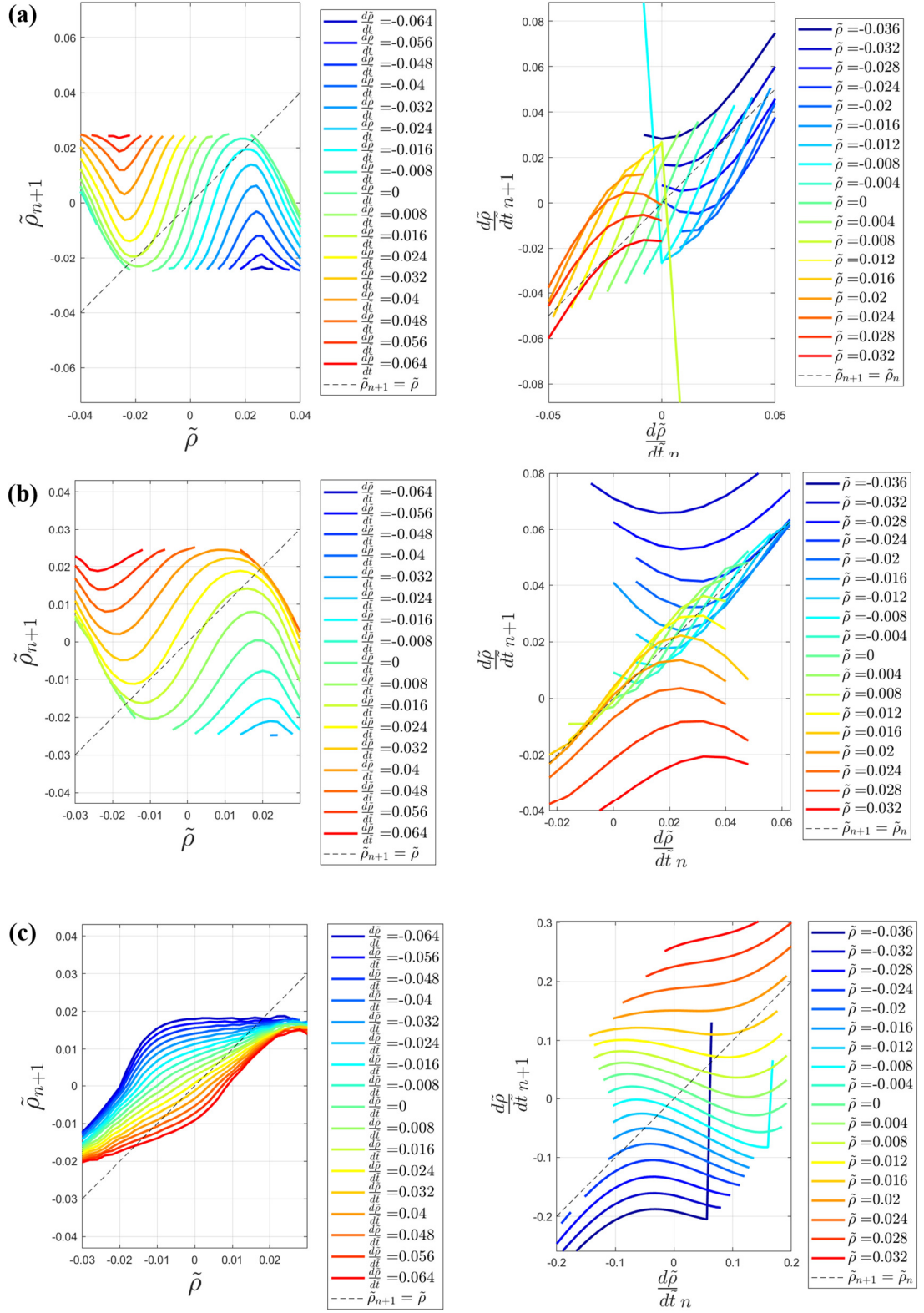


圖 2-17 Return map of Simple Roll Model with

(a) $\gamma = 1, \tilde{f} = 0.3, \widetilde{k_{sum}} = 11, \tilde{l}_0 = 0.875, \widetilde{E_0} = 0.9$

(b) $\gamma = 1.25, \tilde{f} = 0.3, \widetilde{k_{sum}} = 11, \tilde{l}_0 = 0.875, \widetilde{E_0} = 0.9$

(c) $\gamma = 2, \tilde{f} = 0.3, \widetilde{k_{sum}} = 11, \tilde{l}_0 = 0.875, \widetilde{E_0} = 0.9$

圖 2-17(a)是以 Fixed point No.1 與 No.2 的系統參數所繪製的 Return map。Fixed point No.1 的初始條件為 $(\tilde{\rho}, \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}}) = (0,0)$ ，在 $\tilde{\rho}_{n+1} - \tilde{\rho}_n$ 的圖中，該位置的斜率大於一，在 $\frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}_{n+1}} - \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}_n}$ 的圖中該點的斜率也大於一，代表 Fixed point No.1 並不是穩定的 fixed point。Fixed point No.2 的初始條件為 $(\tilde{\rho}, \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}}) = (-0.022,0)$ ，在 $\tilde{\rho}_{n+1} - \tilde{\rho}_n$ 的圖中，該位置的斜率約等於零，而在 $\frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}_{n+1}} - \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}_n}$ 的圖中，該點的斜率絕對值小於一，代表 Fixed point No.2 是一個穩定的 fixed point。

圖 2-17(b)是以 Fixed point No.3 的系統參數所繪製的 Return map。Fixed point No.3 的初始條件為 $(\tilde{\rho}, \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}}) = (-0.015,0.023)$ ，在 $\tilde{\rho}_{n+1} - \tilde{\rho}_n$ 的圖中，該位置的斜率約等於零，在 $\frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}_{n+1}} - \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}_n}$ 的圖中該點的斜率也是約等於零，代表 Fixed point No.3 是一個穩定的 fixed point。

圖 2-17(c) 是以 Fixed point No.4 的系統參數所繪製的 Return map。Fixed point No.4 的初始條件為 $(\tilde{\rho}, \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}}) = (0,0.015)$ ，在 $\tilde{\rho}_{n+1} - \tilde{\rho}_n$ 的圖中，該位置的斜率大於零且小於正一，在 $\frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}_{n+1}} - \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}_n}$ 的圖中該點的斜率則是小於零但大於負一，代表 Fixed point No.4 是一個穩定的 fixed point。

綜上所述，本小節由 Return map 分析發現 Fixed point No.1 為不穩定 fixed point，其餘三者皆為穩定的 fixed point。

此處得到的結論與 Poincare section 分析中的環狀結構範圍大小也有相關，因為 Fixed point No.1 為不穩定的 fixed point，因此只有當初始條件剛好是 fixed point 時才能以此模式運動，則該點在 Poincare section 上就只有一點，而其他 fixed point 是穩定的，因此即使初始條件稍微偏離穩定點，系統仍然可以在某一區間中運動，但從 Poincare section 中發現此偏離 fixed point 的軌跡並不會逐漸收斂至 fixed point 上，此現象可能與系統能量守恆有關，但仍有待進一步的探討。

此處發現簡單 Roll 模型在左右彈簧比例為 1:1 時，以 ρ 和 $\dot{\rho}$ 為零的筆直跳躍運動模式並不穩定，此發現與過去將六足機器人的左右兩腳視為一個彈簧、只考慮 SLIP 或 R-SLIP 平面運動的簡化假設有所衝突，因為實際上這樣的系統並不穩定，如此的簡化便會忽略這個不穩定所造成的影響，顯示更進一步的整合 Roll 方向動態與 R-SLIP 動態在增進 Tripod 跑動穩定性與減少耗能上確實有其重要性。

第三章 Roll-Two-Leg R-SLIP 建模與分析

前一章建立了簡單 Roll 模型並對其進行分析，然而該模型過於簡化，並未考慮機器人的圓弧腳對系統動態造成的影響，也沒有考慮系統於 x 方向前進的動態，更無法單以此模型產生新的 Tripod 步態。

因此，為了建立更精確的模型並且生成考慮 Roll 方向動態的 Tripod 步態，本小節將建構考慮左右兩側腳的 Roll-two-leg R-SLIP 模型，依序介紹其模型結構與參數、動態方程式，並進行 Return map 分析，說明步態生成方法。

3.1 模型結構與參數

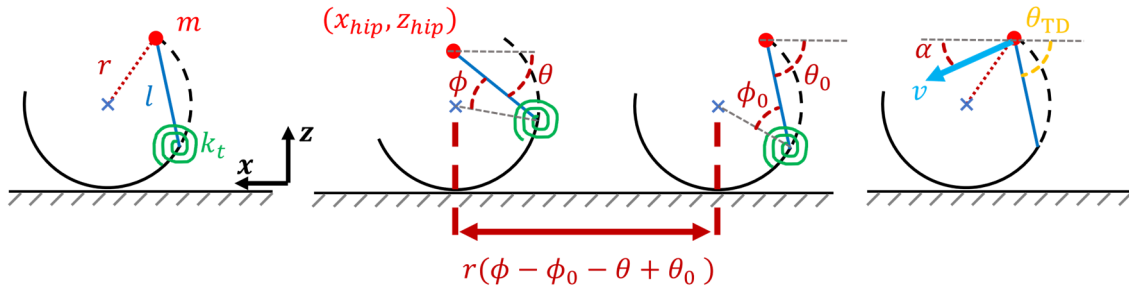


圖 3-1 R-SLIP 模型[9]之(a) intrinsic parameters (b)states (c)initial condition

在進入 Roll-Two-Leg R-SLIP 模型（以下簡稱為 RTL-R-SLIP 模型）之前，需要先回顧 R-SLIP 模型的模型結構與參數[9]。圖 3-1(a)表示 R-SLIP 模型的系統參數，R-SLIP 模型由單質點 m 、長度為 l 的直桿、剛性為 k_t 的扭簧，以及半徑為 r 的半圓形所組成，而半圓形與地面維持純滾動。其 state 在圖 3-1(b)中表示，包含髖關節的位置 (x_{hip}, z_{hip}) ，以及直桿角度與扭簧角度 (θ, ϕ) ，而髖關節位置 (x_{hip}, z_{hip}) 可以由狀態參數 (θ, ϕ) 來表示，其關係式如下：

$$\begin{cases} x_{hip} = r(\phi - \phi_0 - \theta + \theta_0) - r \cdot \cos(\phi - \theta) + l \cdot \cos\theta \\ z_{hip} = r + r \cdot \sin(\phi - \theta) + l \cdot \sin\theta \end{cases} \quad (\text{式 3-1})$$

其中 θ_0 與 ϕ_0 表示為 R-SLIP 模型的初始角度，也就是腳剛觸地時的狀態。而圖 3-1(c)中表示 R-SLIP 模型的三個初始條件：質點落地時的速度 v 、落地時速度方向與水平面的夾角 α 與落地時的直桿與水平面的夾角 θ_{TD} 。

Roll-Two-Leg R-SLIP 模型相當於兩個平行於 xz 平面的 R-SLIP 模型以一個剛體軀幹連接。圖 3-2(a)(b)中的參數為系統參數，左右兩側 R-SLIP 腳各自帶有四個系統參數：圓弧半徑 r_L, r_R 、直桿長度 l_L, l_R 、扭簧剛性 k_L, k_R 與扭簧的自然角度 ϕ_{L0}, ϕ_{R0} ，忽略兩腳的質量，系統質量為 m 集中在軀幹中央，轉動慣量為 J ，兩腳髖關節(hip)到軀幹中央的距離為 w 。圖 3-2(c)(d)中為模型 state，模型中不考慮 yaw 的自由度，因此 $X_L = X_C = X_R$ ，而左右兩側髖關節的位置可從軀幹中央的位置與 ρ 推得，此系統的 state 共有 $[X_C, Z_C, \rho, \theta_L, \phi_L, \theta_R, \phi_R]$ 七個參數，但模型中的兩個 R-SLIP 腳分別需要滿足純滾動的條件，以及 R-SLIP 模型的限制條件，因此最終會將系統自由度降低至三個自由度，此部分將在 3.2 部分進行說明。

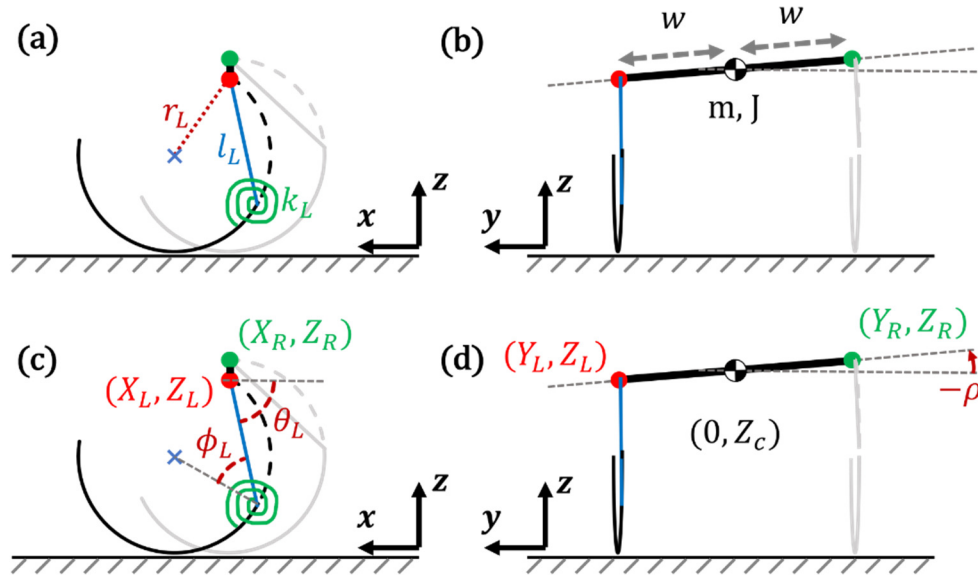


圖 3-2 Roll-Two-Leg R-SLIP 模型之(a)intrinsic parameter of left leg; (b)intrinsic parameter of body; (c)state of left leg; (d)state of robot body

RTL-R-SLIP 模型與簡單 Roll 模型同樣需要考慮 γ_{phase} ，也就是左右腳扭簧彈性係數比例需要隨著踏地的次數進行切換，因此在 RTL-R-SLIP 模型中也需要定義 k_{sum}, k_0, k_1 ，其定義方法與 2.1 相同，而 k_L, k_R 如何隨 γ_{phase} 改變的方式則和簡單 Roll 模型不盡相同。由於左右腳飛起與落地的時間是不相同的，所以切換 γ_{phase} 的時機點也不相同，因此在此引入新的狀態參數 $\gamma_{L, \text{phase}}$ 、 $\gamma_{R, \text{phase}}$ ，用來分別定義左右腳的切換狀態，其定義方式與式 2-3、式 2-4 相似，唯獨在式 2-3 中要以 $\gamma_{L, \text{phase}}$ 取代 γ_{phase} ，在式 2-4 中以 $\gamma_{R, \text{phase}}$ 取代 γ_{phase} 。

與簡單 Roll 模型不同的是，RTL-R-SLIP 模型還需要考慮左右兩隻腳落地時直桿與水平面夾角 θ_{TD} 也要隨著 γ_{phase} 切換，因此定義左右腳落地時的初始狀態分別為 θ_{LTD} 、 θ_{RTD} ，其數值與 $\gamma_{L,phase}$ 、 $\gamma_{R,phase}$ 關係如下：

$$\theta_{LTD} = \begin{cases} \theta_{TD0}, & \text{if } \gamma_{L,phase} = 0 \\ \theta_{TD1}, & \text{if } \gamma_{L,phase} = 1 \end{cases} \quad (\text{式 3-2})$$

$$\theta_{RTD} = \begin{cases} \theta_{TD1}, & \text{if } \gamma_{R,phase} = 0 \\ \theta_{TD0}, & \text{if } \gamma_{R,phase} = 1 \end{cases} \quad (\text{式 3-3})$$

而 θ_{TD0} 、 θ_{TD1} 則是需要事先定義的參數、 $\gamma_{L,phase}$ 與 $\gamma_{R,phase}$ 初始都為 0。在 RTL-R-SLIP 模型中，如果任一隻腳是處於懸空狀態，那麼該腳的直桿就會依據左腳或右腳而維持在 θ_{LTD} 或 θ_{RTD} ，並依照當時下的 $\gamma_{L,phase}$ 、 $\gamma_{R,phase}$ 來決定實際上的角度，而扭簧角度則會維持在扭簧自然角度 ϕ_{L0} 或 ϕ_{R0} 。

3.2 動態方程式

Roll-Two-Leg R-SLIP 模型的動態方程式採用牛頓法來進行動態方程式的推導。推導過程參考黃群凱與曾冠語研究之 Two-Leg R-SLIP 模型[25, 26]，因為模型在運動過程中會有狀態（phase）的切換，在此建立完整的切換機制，並且依序推導說明各個狀態所對應的動態方程式，包含的狀態有：Double Stance、Left-leg Stance、Right-leg Stance、Flight。

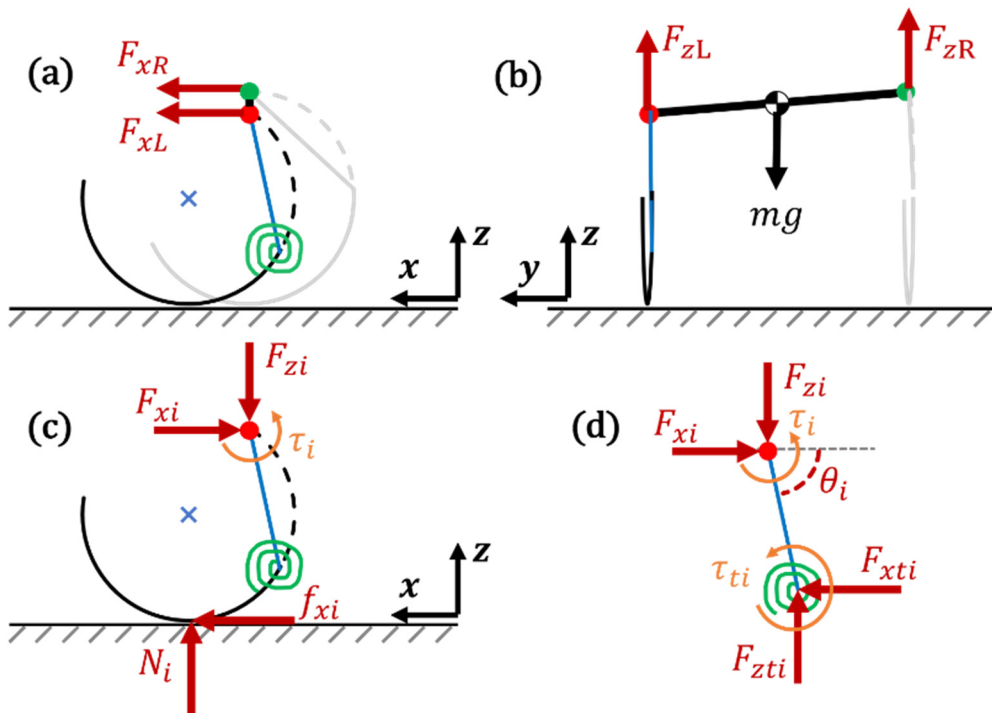


圖 3-3 Free body diagram of robot body in (a) xz-plane; (b) yz-plane;
(c)FBD of the whole leg; (d) FBD of the bar.

Double Stance

Double Stance 是雙腳觸地的狀態，此時兩隻 R-SLIP 腳都會對系統動態造成影響。此階段動態方程式推導的策略為將各系統狀態用左腳的直桿角度與扭簧角度以及軀幹的傾斜角度來表示，也就是表示為 $[\theta_L, \phi_L, \rho]$ 的函數，進而推算出系統動態方程式。

首先，依照圖 3-3(a)(b)的 free body diagram，可以列出運動方程式為：

$$\begin{cases} F_{xL} + F_{xR} = m \ddot{X}_c \\ F_{zL} + F_{zR} - mg = m \ddot{Z}_c \\ F_{zL} w \cos \rho - F_{zR} w \cos \rho = J \ddot{\rho} \end{cases} \quad (\text{式 3-4})$$



接著，便要將運動方程式中的所有參數以 $[\theta_L, \phi_L, \rho]$ 的函數的形式表示。

我們將質心加速度 $[\ddot{X}_c, \ddot{Z}_c]$ 先透過軀幹的幾何關係寫成 $[\ddot{X}_L, \ddot{Z}_L, \rho]$ 的函數：

$$\begin{cases} X_c = X_L \\ Z_c = Z_L + w \sin(-\rho) \end{cases} \quad (\text{式 3-5})$$

$$\begin{cases} \dot{X}_c = \dot{X}_L \\ \dot{Z}_c = \dot{Z}_L + (-\rho)w \cos(-\rho) \end{cases} \quad (\text{式 3-6})$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_c = \ddot{X}_L \\ \ddot{Z}_c = \ddot{Z}_L + w(-\dot{\rho}^2 \sin(-\rho) - \ddot{\rho} \cos(-\rho)) \end{cases} \quad (\text{式 3-7})$$

接著將其中的 $[\ddot{X}_L, \ddot{Z}_L]$ 藉由式 3-1 以及其微分式表示成 $[\theta_L, \phi_L, \rho]$ 的函數：

$$\begin{cases} X_i = X_{i,toe} + r_i(\phi_i - \phi_{0,i} - \theta_i + \theta_{0,i}) - r_i \cos(\phi_i - \theta_i) + l_i \cos \theta_i \\ Z_i = r_i + r_i \sin(\phi_i - \theta_i) + l_i \sin \theta_i \end{cases} \quad (\text{式 3-8})$$

$$\begin{cases} \dot{X}_i = r_i(\dot{\phi}_i - \dot{\theta}_i) + r_i(\dot{\phi}_i - \dot{\theta}_i) \sin(\phi_i - \theta_i) - l_i \dot{\theta}_i \sin \theta_i \\ \dot{Z}_i = r_i(\dot{\phi}_i - \dot{\theta}_i) \cos(\phi_i - \theta_i) + l_i \dot{\theta}_i \cos \theta_i \end{cases} \quad (\text{式 3-9})$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_i = r_i(\ddot{\phi}_i - \ddot{\theta}_i) + r_i[(\dot{\phi}_i - \dot{\theta}_i)^2 \cos(\phi_i - \theta_i) + (\ddot{\phi}_i - \ddot{\theta}_i) \sin(\phi_i - \theta_i)] \\ \quad - l_i[\dot{\theta}_i^2 \cos \theta_i + \ddot{\theta}_i \sin \theta_i] \\ \ddot{Z}_i = r_i[-(\dot{\phi}_i - \dot{\theta}_i)^2 \sin(\phi_i - \theta_i) + (\ddot{\phi}_i - \ddot{\theta}_i) \cos(\phi_i - \theta_i)] \\ \quad + l_i[-\dot{\theta}_i^2 \sin \theta_i + \ddot{\theta}_i \cos \theta_i] \end{cases} \quad (\text{式 3-10})$$

式 3-8、式 3-9、式 3-10 中，下標 i 可以帶入 L 或 R，代表左右腳的 X, Z 位置皆可以用式 3-8 表示，而 $X_{i,toe}$ 代表圓弧腳與地面接觸點的 x 座標。

由式 3-7、式 3-10，便可將 $[\ddot{X}_c, \ddot{Z}_c]$ 寫成 $[\theta_L, \phi_L, \rho]$ 的函數。接下來從圖 3-3(c)(d) 的 FBD 中推導如何將 F_{xi}, F_{zi} 寫成 $[\theta_L, \phi_L, \rho]$ 的函數形式，在模型中假設直桿與圓弧形腳的質量可忽略，因此列出力與力矩的平衡式。

$$\begin{aligned}
f_i &= F_{xi} \\
N_i &= F_{zi} \\
F_{xti} &= F_{xi} \\
F_{zti} &= F_{zi}
\end{aligned}$$



(式 3-11)

$$\begin{cases} F_{xi}(r_i + r_i \sin(\phi_i - \theta_i) + l_i \sin \theta_i) + F_{zi}(r_i \cos(\phi_i - \theta_i) - l_i \cos \theta_i) = \tau_i \\ F_{xi}(l_i \sin \theta_i) - F_{zi}(l_i \cos \theta_i) = \tau_i + \tau_{ti} = \tau_i + k_i(\phi_i - \phi_{ori,i}) \end{cases}$$

(式 3-12)

式 3-11 中 τ_i 為馬達輸入的力矩是為已知，在被動模型分析時會帶入 0，在後續主動控制的模型中則會帶入由控制器產生的特定數值，將式 3-12 解聯立方程式可計算出 F_{xi} , F_{zi} 。然而若要解出右腳的資訊則需要先得到 $[\theta_R, \phi_R]$ ，可以由左右兩側髖關節的 x, z 位置幾何關係求解得出，其需滿足的方程式為：

$$\begin{aligned}
&X_{L,toe} + r_L(\phi_L - \phi_{0,L} - \theta_L + \theta_{0,L}) - r_L \cos(\phi_L - \theta_L) + l_L \cos \theta_L \\
&= X_{R,toe} + r_R(\phi_R - \phi_{0,R} - \theta_R + \theta_{0,R}) - r_R \cos(\phi_R - \theta_R) + l_R \cos \theta_R
\end{aligned}$$

(式 3-13)

$$r_L + r_L \sin(\phi_L - \theta_L) + l_L \sin \theta_L + 2w \sin(-\rho) = r_R + r_R \sin(\phi_R - \theta_R) + l_R \sin \theta_R$$

(式 3-14)

式 3-13、式 3-14 中， $X_{L,toe}$, $X_{R,toe}$, $\phi_{0,L}$, $\theta_{0,L}$, $\phi_{0,R}$, $\theta_{0,R}$ 都會在 Double Stance 的初始條件中給定，因此便可由數值計算解出 $[\theta_R, \phi_R]$ 。將結果帶回式 3-11、式 3-12，便可以計算出右側腳所造成的作用力。

將式 3-7、式 3-10、式 3-12、式 3-13 與式 3-14 的結果帶回式 3-4，便可將動態方程式表示成 $[\theta_L, \phi_L, \rho]$ 的函數形式：

$$\begin{aligned}
&\ddot{\phi}_L[r_L + r_L \sin(\phi_L - \theta_L)] + \ddot{\theta}_L[-r_L - r_L \sin(\phi_L - \theta_L) - l_L \sin \theta_L] \\
&= \frac{F_{xL} + F_{xR}}{m} + l_L \dot{\theta}_L^2 \cos \theta_L - r_L(\dot{\phi}_L - \dot{\theta}_L)^2 \cos(\phi_L - \theta_L)
\end{aligned}$$

(式 3-15)

$$\begin{aligned}
& \ddot{\phi}_L[r_L \cos(\phi_L - \theta_L)] + \ddot{\theta}_L[-r_L \cos(\phi_L - \theta_L) + l_L \cos \theta_L] \\
&= \frac{F_{zL} + F_{zR}}{m} - g - w(-\dot{\rho}^2 \sin(-\rho) - \ddot{\rho} \cos(-\rho)) \\
&+ r_L(\dot{\phi}_L - \dot{\theta}_L)^2 \sin(\phi_L - \theta_L) + l_L \dot{\theta}_L^2 \sin \theta_L
\end{aligned}$$

(式 3-16)

$$\ddot{\rho} = \frac{1}{J} [F_{zL} w \cos \rho - F_{zR} w \cos \rho]$$

(式 3-17)

將式 3-15 與式 3-16 聯立，可以透過克拉瑪公式解出 $\ddot{\phi}_L$ 和 $\ddot{\theta}_L$ ：

$$\ddot{\phi}_L = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad (\text{式 3-18})$$

$$\ddot{\theta}_L = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad (\text{式 3-19})$$

其中行列式內的係數為：

$$a_1 = r_L + r_L \sin(\phi_L - \theta_L) \quad (\text{式 3-20})$$

$$b_1 = -r_L - r_L \sin(\phi_L - \theta_L) - l_L \sin \theta_L \quad (\text{式 3-21})$$

$$c_1 = \frac{F_{xL} + F_{xR}}{m} + l_L \dot{\theta}_L^2 \cos \theta_L - r_L(\dot{\phi}_L - \dot{\theta}_L)^2 \cos(\phi_L - \theta_L) \quad (\text{式 3-22})$$

$$a_2 = r_L \cos(\phi_L - \theta_L) \quad (\text{式 3-23})$$

$$b_2 = -r_L \cos(\phi_L - \theta_L) + l_L \cos \theta_L \quad (\text{式 3-24})$$

$$\begin{aligned}
c_2 = & \frac{F_{zL} + F_{zR}}{m} - g - w(-\dot{\rho}^2 \sin(-\rho) - \ddot{\rho} \cos(-\rho)) \\
& + r_L(\dot{\phi}_L - \dot{\theta}_L)^2 \sin(\phi_L - \theta_L) + l_L \dot{\theta}_L^2 \sin \theta_L
\end{aligned} \quad (\text{式 3-25})$$

整理成 state space 形式可以簡化成

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_L \\ \dot{\theta}_L \\ \phi_L \\ \dot{\phi}_L \\ \rho \\ \dot{\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_L \\ f_1(\theta_L, \dot{\theta}_L, \phi_L, \dot{\phi}_L, \rho, \dot{\rho}) \\ \dot{\phi}_L \\ f_2(\theta_L, \dot{\theta}_L, \phi_L, \dot{\phi}_L, \rho, \dot{\rho}) \\ \dot{\rho} \\ f_3(\theta_L, \dot{\theta}_L, \phi_L, \dot{\phi}_L, \rho, \dot{\rho}) \end{bmatrix} \quad (\text{式 3-26})$$

其中， f_1, f_2, f_3 分別為式 3-19、式 3-18、式 3-17。如此一來，給定初始條件 $\theta_L, \dot{\theta}_L, \phi_L, \dot{\phi}_L, \rho, \dot{\rho}$ 便可求出系統在 Double Stance 中的運動軌跡。

Left-leg Stance

Left-leg Stance 代表左腳觸地、右腳懸空的狀態，此時也將狀態參數以 $[\theta_L, \phi_L, \rho]$ 來表示，此部分的推導幾乎與 Double Stance 相同，唯獨在 Left-leg Stance 時，右腳不會對系統造成影響，因此不必計算 $[\theta_R, \phi_R]$ ，並將 $F_{xR} = 0, F_{zR} = 0, \tau_R = 0$ ，接著在計算時直接套用式 3-26 的結果即可計算出 Left-leg Stance 的軌跡。

在此階段中，右腳會懸空，而此時右腳的姿態會依照 $\gamma_{R, \text{phase}}$ 來判斷其直桿角度應維持在幾度，判斷機制同式 3-3。

Right-leg Stance

Right-leg Stance 代表右腳觸地、左腳懸空的狀態，此時與 Double Stance 和 Left-leg Stance 不同，需要將狀態表示成 $[\theta_R, \phi_R, \rho]$ ，同時因為幾何位置改變，需要重新計算其運動方程式。推導的策略也與 Double Stance 相同，先列出此狀態要滿足的力與力矩平衡的方程式：

$$\begin{cases} F_{xR} = m \ddot{X}_c \\ F_{zR} - mg = m \ddot{Z}_c \\ -F_{zR} w \cos \rho = J \ddot{\rho} \end{cases} \quad (\text{式 3-27})$$

此時要將 $[\ddot{X}_c, \ddot{Z}_c]$ 表示成 $[\theta_R, \phi_R, \rho]$ 的形式，因此將幾何關係式列出、微分：

$$\begin{cases} X_c = X_R \\ Z_c = Z_R - w \sin(-\rho) \end{cases} \quad (\text{式 3-28})$$

$$\begin{cases} \dot{X}_c = \dot{X}_R \\ \dot{Z}_c = \dot{Z}_R - (-\rho) w \cos(-\rho) \end{cases} \quad (\text{式 3-29})$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_c = \ddot{X}_R \\ \ddot{Z}_c = \ddot{Z}_R - w(-\dot{\rho}^2 \sin(-\rho) - \ddot{\rho} \cos(-\rho)) \end{cases} \quad (\text{式 3-30})$$

由式 3-10 可以將 $[\ddot{X}_R, \ddot{Z}_R]$ 表示成 $[\theta_R, \phi_R, \rho]$ 的關係式，再透過解聯立方程式 3-12，便可以得到 F_{xR}, F_{zR} ，將結果帶回式 3-27：

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi}_R [r_R + r_R \sin(\phi_R - \theta_R)] + \ddot{\theta}_R [-r_R - r_R \sin(\phi_R - \theta_R) - l_R \sin \theta_R] \\ &= \frac{F_{xR}}{m} + l_R \dot{\theta}_R^2 \cos \theta_R - r_R (\dot{\phi}_R - \dot{\theta}_R)^2 \cos(\phi_R - \theta_R) \end{aligned} \quad (\text{式 3-31})$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\phi}_R[r_R \cos(\phi_R - \theta_R)] + \ddot{\theta}_R[-r_R \cos(\phi_R - \theta_R) + l_R \cos \theta_R] \\
&= \frac{F_{ZR}}{m} - g - w(\dot{\rho}^2 \sin(-\rho) + \ddot{\rho} \cos(-\rho)) + r_R(\dot{\phi}_R - \dot{\theta}_R)^2 \sin(\phi_R - \theta_R) \\
&\quad + l_R \dot{\theta}_R^2 \sin \theta_R
\end{aligned}
\tag{式 3-32}$$

$$\ddot{\rho} = \frac{1}{J}[-F_{ZR}w \cos \rho]
\tag{式 3-33}$$

此結果與 Double Stance 相似，唯獨改變下標與少數正負號，也可由克拉瑪公式將式 3-31 與式 3-32 進行聯立解出 $[\ddot{\theta}_R, \ddot{\phi}_R]$ ，此部分便不多贅述，最終便可以列出 State space 的表示式，進而解出系統的運動軌跡。

在此階段中，左腳會懸空，而此時左腳的姿態會依照 $\gamma_{L,phase}$ 來判斷其直桿角度應維持在幾度，判斷機制同式 3-2。

Flight

Flight 代表左右兩腳都懸空的狀態，此時系統只受到重力影響，假設為拋體運動，此時將系統以系統的質心位置與 roll 的角度 $[X_c, Z_c, \rho]$ 表示，因此可以列出 state space 的運動方程式為：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} X_c \\ \dot{X}_c \\ Z_c \\ \dot{Z}_c \\ \rho \\ \dot{\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{X}_c \\ 0 \\ \dot{Z}_c \\ -g \\ \dot{\rho} \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{式 3-34}$$

在此階段中，左右腳都會懸空，而此時左右腳的姿態會依照 $\gamma_{L,phase}$ 、 $\gamma_{R,phase}$ 來判斷其直桿角度應維持在幾度，判斷機制同式 3-2、式 3-3。

Phase transition

此模型的 Phase transition 與簡單 Roll 模型相似，包含四個狀態(Double Stance、Left-leg Stance、Right-leg Stance、Flight)的切換，以及為了模擬 Tripod 步態中會輪流用不同腳著地而需要進行 $\gamma_{L,phase}$ 、 $\gamma_{R,phase}$ 的切換。

四個狀態之間的切換主要由左右兩側腳的落地(Touch down)與起飛(Lift off)兩個事件的發生來進行切換。當滯空的腳的最低點第一次低於地面的高度時，判定

為落地，當觸地的腳的扭簧角度 ϕ 回復到自然角度 ϕ_0 時，此時地面不會再提供正向力給模型，判定為起飛。切換機制的數學式如下：



$$\text{Left leg Touch down : } Z_L - r_L(1 + \sin(\phi_{L0} - \theta_{LTD})) + l_L \sin \theta_{LTD} \leq 0 \quad (\text{式 3-35})$$

$$\text{Right leg Touch down : } Z_R - r_R(1 + \sin(\phi_{R0} - \theta_{RTD})) + l_R \sin \theta_{RTD} \leq 0 \quad (\text{式 3-36})$$

$$\text{Left leg Lift off : } \phi_L > \phi_{L0} \quad (\text{式 3-37})$$

$$\text{Right leg Lift off : } \phi_R > \phi_{R0} \quad (\text{式 3-38})$$

在實際程式模擬上需要以其他輔助判斷機制來進行狀態切換，詳細的切換機制由下圖所示：

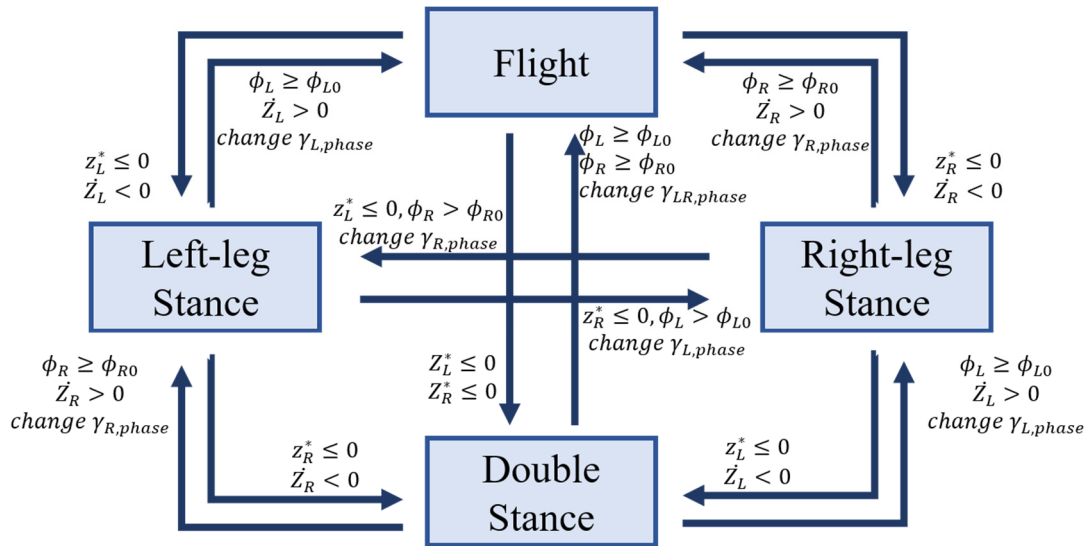


圖 3-4 RTL-R-SLIP 模型之狀態切換標準。

而 $\gamma_{L,phase}$ 、 $\gamma_{R,phase}$ 的切換點則設計在當左右腳 Lift off 的當下，也就是當左腳或右腳起飛時，則 $\gamma_{L,phase}$ 或 $\gamma_{R,phase}$ 就從 0 切換到 1 或由 1 切換到 0。



3.3 Return map 分析

藉由 3.1 與 3.2 的內容，便可以在 MATLAB 中用數值模擬的方式產生 RTL-R-SLIP 模型在不同系統參數、初始條件之下的運動軌跡，藉此進一步的討論六足機器人在 Roll 方向上的動態特性。

本階段希望著重討論的問題有二。

首先，本研究希望確認在設計 Tripod 步態時，忽略 Roll 動態的假設是否合理。在簡單 Roll 模型的分析中，本研究發現當 $\gamma = 1$ 時，直上直下的運動模態其實是不穩定的，如此的結論與過去在設計 Tripod 步態時所使用的假設（忽略 Roll 動態仍可以產生節省能量的被動穩定步態）有所衝突，在本階段希望透過相較於簡單 Roll 模型更準確的 RTL-R-SLIP 模型來觀察是否可以得到與簡單 Roll 模型中相同的結果。

第二，本研究希望觀察系統穩定性隨著轉動慣量 J 與左右彈簧係數比 γ 的變化關係。在簡單 Roll 模型的分析中，本研究發現當 $\gamma \neq 1$ 時系統在 $\rho = 0, \dot{\rho} = 0$ 並沒有 fixed point，然而在其他系統參數或初始條件下則可能出現穩定點，因此希望透過 Return map 來分析可能出現 fixed point 的位置與參數對系統特性的影響，而在此採用的轉動慣量與左右彈簧係數比皆為實際可以進行實驗的數值。

為了達成上述兩個目的，在本段落將分析 RTL-R-SLIP 模型在現有機器人的實際參數狀況下，改變不同轉動慣量、左右彈簧係數比所繪製出的 Return map。使用的系統參數如下表所示：

表 3-1 RTL-R-SLIP 模型系統參數表

參數	實際數值	單位	參數	實際數值	單位
g	9.81	m/s ²	k _{sum}	23.704	Nm/rad
m	10.32	kg	r _L , r _R	0.075	m
w	0.16	m	l _L , l _R	0.0992	m
J	0.097	kg · m ²	ϕ _{LO} , ϕ _{RO}	0.8482	rad
	0.109		γ	2	N/A
	0.122			1.5	
	1.25				
	0.137			1	

在 RTL-R-SLIP 模型中，為了和過去 R-SLIP 模型的研究能夠有所連結，將 RTL-R-SLIP 模型的初始狀態設定在「Touch down」的瞬間，也就是任一隻或兩隻腳同時觸地，而雙腳扭簧都尚未壓縮的瞬間。RTL-R-SLIP 模型的初始狀態可以由下列四項初始條件與兩個參數唯一決定：機器人軀幹的傾斜角度 ρ 、傾斜的角速度 $\dot{\rho}$ 、模型質心在 xz 平面的移動速度 v 與該質心速度方向與 x 軸之間的夾角 α ，上述為四項初始條件，而兩個參數則為 θ_{TD0} 和 θ_{TD1} ，用來決定機器人觸地時直桿的角度。

其中部分的參數可以和簡單 Roll 模型中相互連結，傾斜角度與角速度可以直接一一對應，而移動速度 v 在 z 方向上的投影可以對應到簡單 Roll 模型中的 $\dot{z}$ ，或者可以說是和總能量 E_0 相關，而最後三個參數 α 、 θ_{TD0} 和 θ_{TD1} 則較難和簡單 Roll 模型中的參數對應。

在過去對 R-SLIP 模型的研究中[9,10]，可以在給定 R-SLIP 模型的系統參數以及兩個初始條件 v, α 的情況下，找出第三個初始條件 θ_{TD} 使得系統可以在穩定點上跑動。本研究即使用過去的研究成果，為本研究所使用的機器人系統參數進行 R-SLIP 模型的 fixed point 搜尋，得出在下列初始狀態下，R-SLIP 模型可以在 fixed point 上運動：

表 3-2 選定的 R-SLIP fixed point 初始條件

參數	實際數值	單位
v	2	m/s
α	15	deg
θ_{TD}	97.0	deg

在得到本研究使用的機器人的 R-SLIP fixed point 參數後，本研究希望在此參數附近進行 RTL-R-SLIP 模型的分析，據此減少不必要的運算，並且提升有效搜尋的效率，同時為了減少要調整的參數，固定 $v = 2\text{m/s}$, $\alpha = 15\text{ deg}$ 來進行分析，而 θ_{TD0} 和 θ_{TD1} 則先固定為 97.03，只改變 J 和 γ ， ρ 在 $[-10, 10]\text{ deg}$ 而 $\dot{\rho}$ 在 $[-200, 200]\text{ deg/sec}$ 進行計算。

由於 RTL-R-SLIP 模型的初始狀態有四個參數，若使用二維的 Return map 是不足以表示完整資訊的，但若再增加 Return map 的維度會過於複雜，因此透過計

算兩次踏地前後的 Touch down 之間的初始狀態誤差，將此誤差以顏色的方式標記在 Return map 上，以達成表示資訊的效果。而誤差定義為：

$$\text{err} = \sqrt{\frac{v_{n+1}-v_n}{v_n} + \frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\alpha_n} + \frac{\rho_{n+1}-\rho_n}{\rho_n} + \frac{\dot{\rho}_{n+1}-\dot{\rho}_n}{\dot{\rho}_n}} \quad (\text{式 } 3-39)$$

為避免 $\rho_n = 0$ 會造成誤差無限大的狀況，若 $\rho_n = 0$ 或 $\dot{\rho}_n = 0$ ，則以 $\rho_n^* = 3 \text{ deg}$ 與 $\dot{\rho}_n^* = 10 \text{ deg/sec}$ 作為基準，當誤差小於 0.3 時該點以星號★表示，若該點誤差較大，則以圓圈表示，若該點無法跑動兩步就失敗（如：無法起跳），則該點就不標註在 Return map 上。

以下表示分析結果：

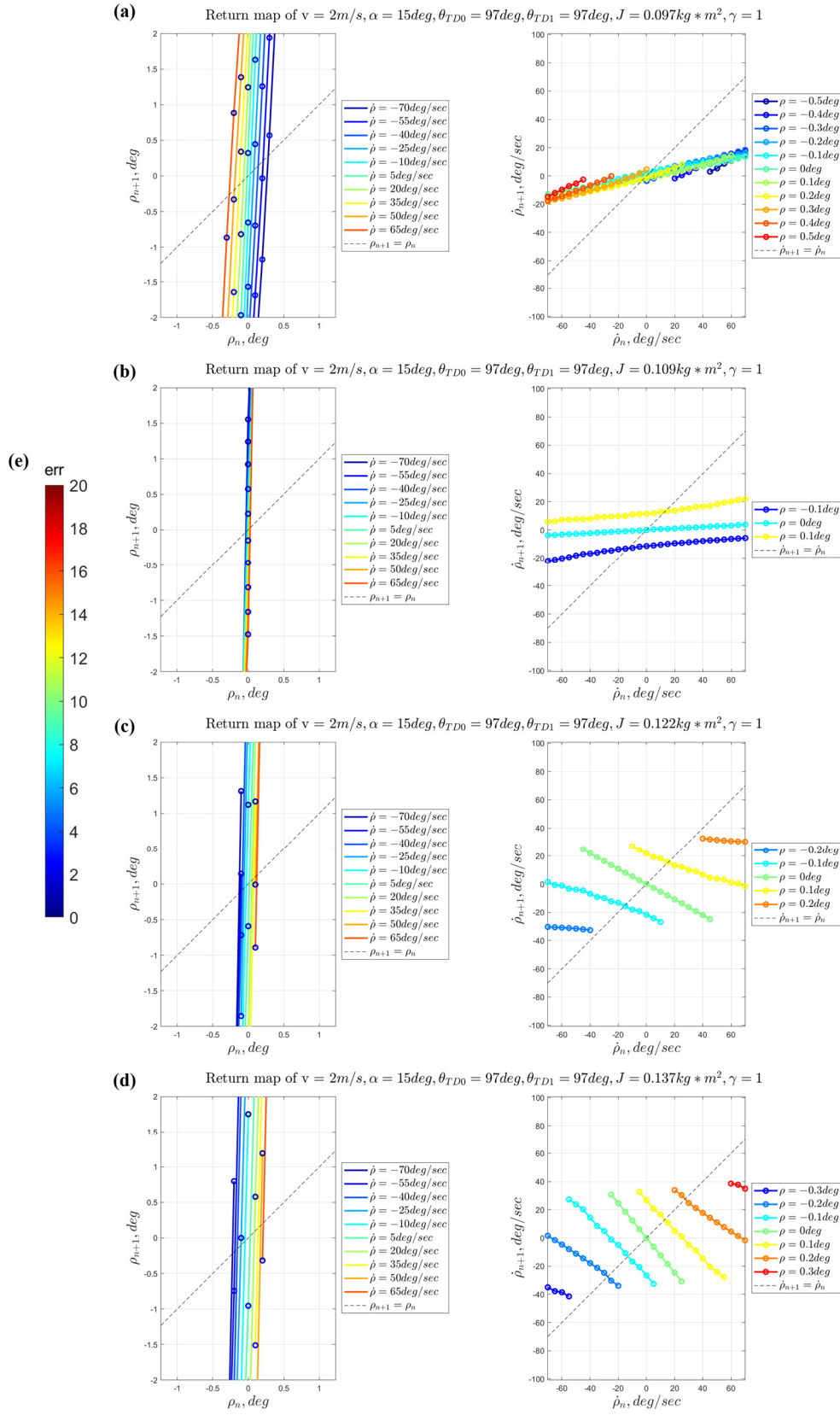


圖 3-5 Return map of $v = 2m/s, \alpha = 15deg, \theta_{TD0} = \theta_{TD1} = 97deg, \gamma = 1$

(a) $J = 0.097$ (b) $J = 0.109$ (c) $J = 0.122$ (d) $J = 0.137 \text{ kg} \cdot m^2$

(e) Color bar to indicate the error after 1 period.

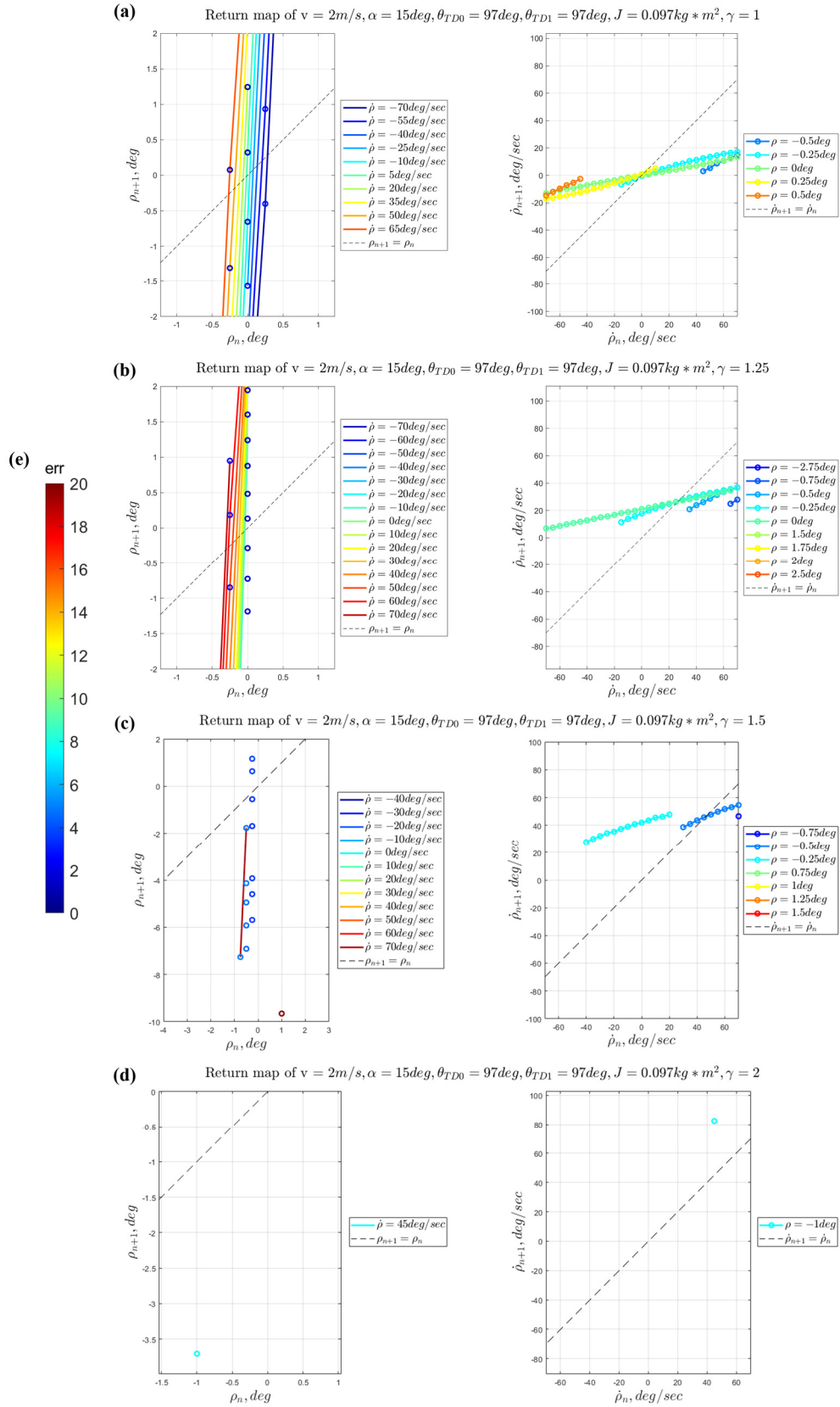


圖 3-6 Return map of $v = 2m/s, \alpha = 15deg, \theta_{TD0} = \theta_{TD1} = 97deg, J = 0.097kg \cdot m^2$ (a) $\gamma = 1$ (b) $\gamma = 1.25$ (c) $\gamma = 1.5$ (d) $\gamma = 2$ (e)Color bar to indicate the error after 1 period.

圖 3-5 為使用 R-SLIP 模型中找出的 fixed point 參數，也就是固定 $v = 2 \text{ m/s}$ 、 $\alpha = 15 \text{ deg}$ 、 $\theta_{TD0} = \theta_{TD1} = 97 \text{ deg}$ ，同時固定 $\gamma = 1$ ，也就是最接近單純 R-SLIP 模型的狀態，進而改變不同的轉動慣量 J ，所繪製出的 Return map。在圖 3-5 中，四張 $\rho_{n+1} - \rho_n$ 的 Return map 中，都只在角度極小的狀態中可以完成踏步兩步，整體而言當 ρ_n 小於 -0.5 deg 或大於 0.5 deg ，RTL-R-SLIP 模型便無法起跳， ρ_n 的範圍相當小之外，此範圍中的斜率也非常大，代表此系統在此參數空間下是不穩定的。而觀察系統特性與轉動慣量之間的關係，可以發現轉動慣量對 ρ_n 可以成功起跳的區間有所影響，也對 $\dot{\rho}_{n+1} - \dot{\rho}_n$ 的 Return map 中的斜率有所影響。

圖 3-6 同樣為使用 R-SLIP 模型中找出的 fixed point 參數，也就是固定 $v = 2 \text{ m/s}$ 、 $\alpha = 15 \text{ deg}$ 、 $\theta_{TD0} = \theta_{TD1} = 97 \text{ deg}$ ，但改成固定 $J = 0.097$ ，改變不同彈簧係數比例 γ 所繪製出的 Return map，用來觀察 γ 對系統造成的影響。從圖 3-6 中可以發現，隨著 γ 逐漸增加，Return map 上的點越來越少，代表此模型越來越容易失敗，顯示當 γ 逐漸增加，則 R-SLIP 模型越來越不能作為 RTL-R-SLIP 模型的近似模型。而隨著 γ 逐漸增加， $\rho_{n+1} - \rho_n$ 的 Return map 上出現成功點的位置會偏向單一方，表現了系統的不對稱性。

以下以 Time response 與模型運動中的姿態表示圖 3-5 與圖 3-6 中幾個重要的運動狀況：首先為當 ρ_n 角度過大而造成的失敗，以圖 3-7(a)(b) 表示；其次為當 $\gamma \neq 1$ 時所造成的失敗，以 $\gamma = 2$ 為例，表示在圖 3-7(c)(d)；最後為即使是 $\gamma = 1$ 時，系統在 ρ 方向仍會逐漸發散最終失敗的狀況，以圖 3-7(e)(f) 表示。

在圖 3-7(b)(d)(f) 中，以紅色表示左側、藍色表示右側的圓弧腳與 hip 的軌跡，由綠色虛線表示機器人中心的位置軌跡，在扭簧的彈性係數分別由紫色與綠色表示，紫色代表該側扭簧係數為 k_0 、直桿初始角度為 θ_{TD0} ，綠色代表該側的扭簧係數為 k_1 、直桿初始角度為 θ_{TD1} ，而 $\gamma = k_0/k_1$ 。

在圖 3-7(a)(b) 中，可以發現只是很微小的初始 Roll 角度變化，就會在第二次踏地後造成更大的 Roll 角度，若觀察左側（紅色）hip 的軌跡，便會發現該軌跡正逐漸往下降，便不再可能往上飛起，因此判定為失敗。

在圖 3-7(c)(d)中，可以發現就算初始的條件是水平狀態，但因為左右兩側的彈簧係數差異，造成右側（藍色）腳直直往下掉落，最終仍無法起跳，也造成失敗。

在圖 3-7(e)(f)中，因為初始條件 $\rho = \dot{\rho} = 0$ 且 $\gamma = 1$ ，系統在初期完整的跑動在 R-SLIP 模型的軌跡上，然而數值誤差隨著計算時間成指數形式增加，加上此運動模態由 Return map 分析為不穩定 fixed point，無法將誤差收斂，因此最終 ρ 的誤差仍累積到容忍值之外，導致最終步態的失敗。

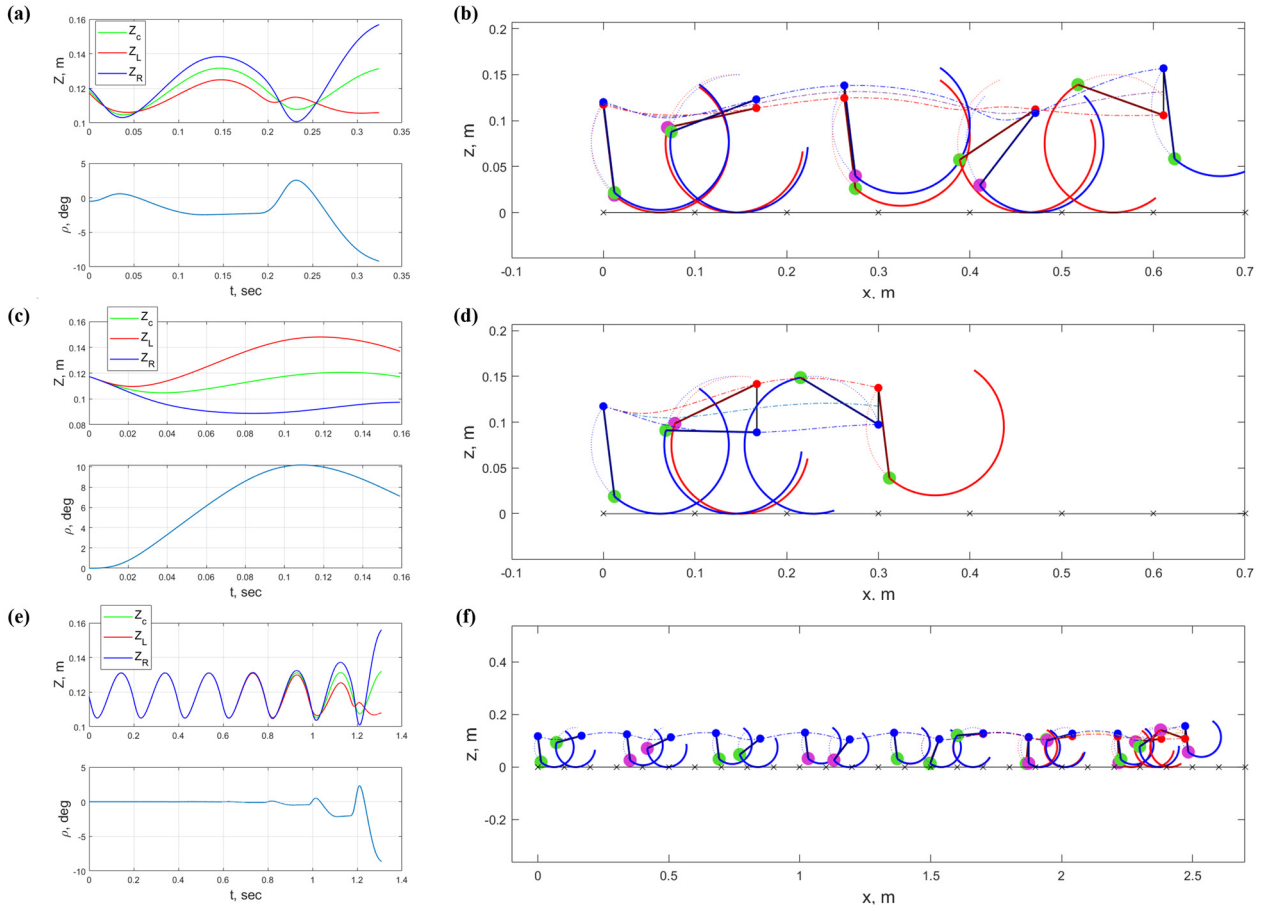


圖 3-7 (a)Time response and (b)moving configuration of $v = 2 \frac{m}{s}, \alpha = 15 \text{deg}$,

$$\theta_{TD0} = \theta_{TD1} = 97 \text{deg}, \gamma = 1, J = 0.097 \text{kg} \cdot \text{m}^2, \rho_n = -0.5 \text{deg}, \dot{\rho}_n = 0$$

$$(c) \text{Time response and (d)moving configuration of } v = 2 \frac{m}{s}, \alpha = 15 \text{deg},$$

$$\theta_{TD0} = \theta_{TD1} = 97 \text{deg}, \gamma = 2, J = 0.097 \text{kg} \cdot \text{m}^2, \rho_n = 0 \text{deg}, \dot{\rho}_n = 0$$

$$(e) \text{Time response and (f)moving configuration of } v = 2 \frac{m}{s}, \alpha = 15 \text{deg},$$

$$\theta_{TD0} = \theta_{TD1} = 97 \text{deg}, \gamma = 1, J = 0.097 \text{kg} \cdot \text{m}^2, \rho_n = 0 \text{deg}, \dot{\rho}_n = 0$$

3.4 改良之 Tripod 步態生成

由 3.3 中的 Return map 分析，本研究發現 R-SLIP 模型所產出的 fixed point 參數必須在 $\gamma = 1$ 且將 ρ 和 $\dot{\rho}$ 控制在極小的範圍內時，RTL-R-SLIP 模型才能成功跑動，而且此步態仍然是不穩定的。而若 $\gamma \neq 1$ 時，R-SLIP 模型所產出的 fixed point 便完全無法使 RTL-R-SLIP 模型進行正常的跑動。

因此，本研究希望尋找 RTL-R-SLIP 模型中的 fixed point，以找出可以符合 RTL-R-SLIP 模型特性的跑動方式，進而改良 Tripod 步態。

為了減少需要匹配的參數數量，在此部分固定大部分的數值與表 3-1 相同，選擇轉動慣量 J 為最小值 0.097 kg m^2 、左右彈簧比例 $\gamma = 2$ ，選用 $\gamma = 2$ 是因為這是在製作機器人時最方便的配置，如此一來機器人的所有腳都可以用相同的規格製造，而為了能讓接下來的數據可以與之前的數據進行比較，固定 $v = 2 \text{ m/s}$, $\alpha = 15 \text{ deg}$ 。剩下可以進行調整的參數為：左右腳觸地時直桿與水平面的夾角 θ_{TD0} 和 θ_{TD1} ，以及 Roll 方向的傾角 ρ 與角速度 $\dot{\rho}$ 。此處仍使用 Return map 的分析方法，將不同 θ_{TD0} 和 θ_{TD1} 所產生的 Return map 一一繪製出來，並尋找是否有 $\text{err} < 0.3$ 的結果出現，並進一步判斷其穩定性。

以下以圖表列出搜尋得到的兩個 err 較小的 fixed point：

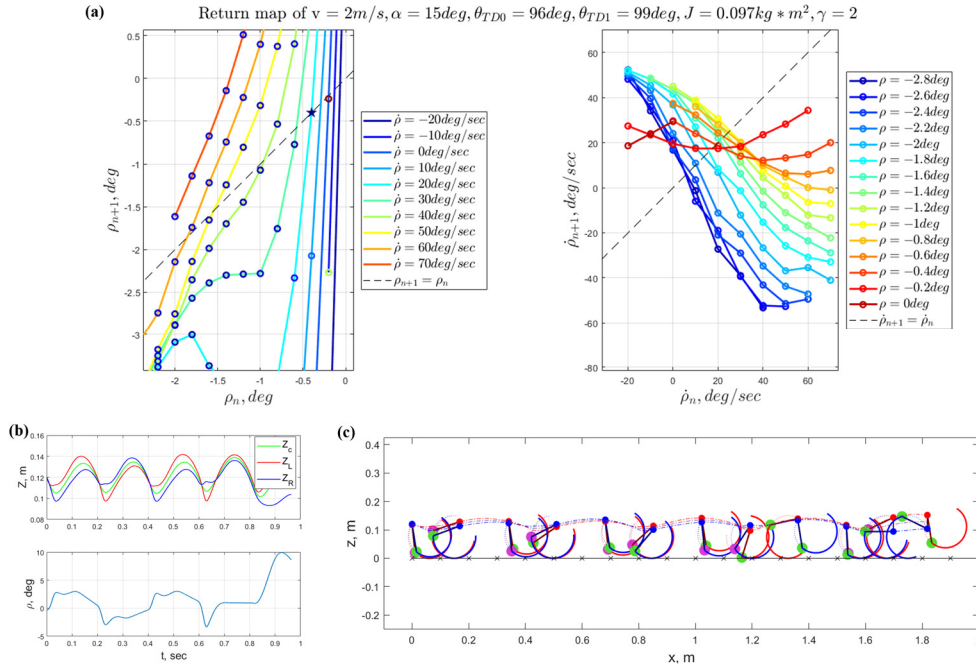


圖 3-8 (a)Return map of $v = 2 \text{ m/s}$, $\alpha = 15 \text{ deg}$, $J = 0.097 \text{ kg m}^2$, $\gamma = 2$, $\theta_{TD0} = 96 \text{ deg}$, $\theta_{TD1} = 99 \text{ deg}$, (b)Time response and (c)moving configuration as $\rho_0 = -0.36 \text{ deg}$, $\dot{\rho}_0 = 17.4 \text{ deg/sec}$

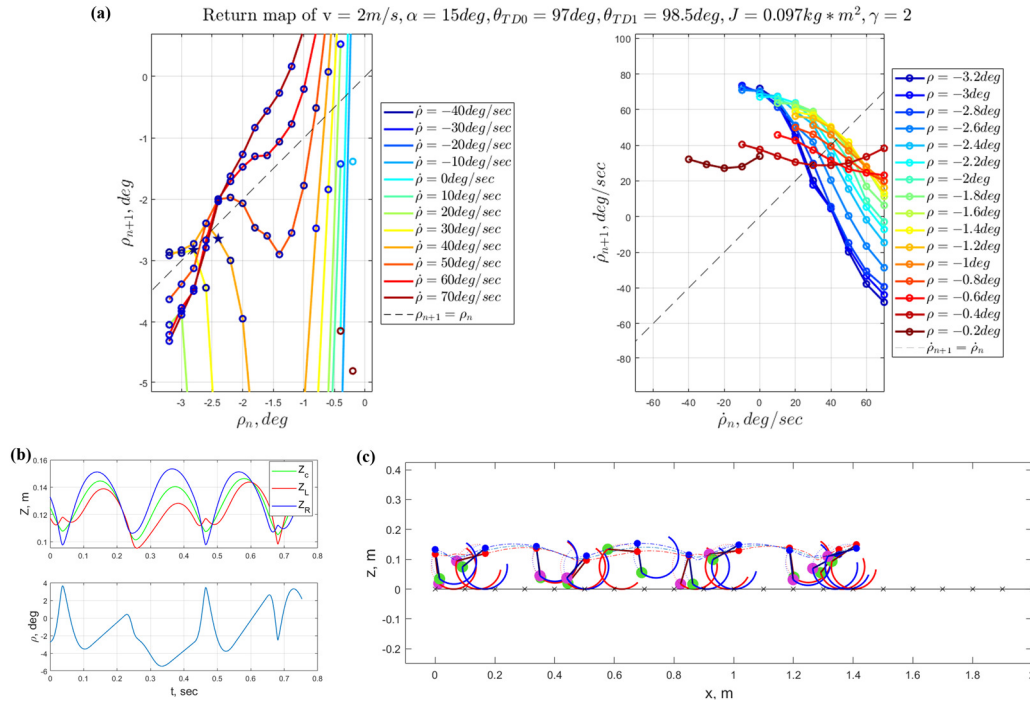


圖 3-9 (a)Return map of $v = 2 \text{ m/s}$, $\alpha = 15 \text{ deg}$, $J = 0.097 \text{ kg m}^2$, $\gamma = 2$, $\theta_{TD0} = 97 \text{ deg}$, $\theta_{TD1} = 98.5 \text{ deg}$, (b)Time response and (c)moving configuration as $\rho_0 = -2.75 \text{ deg}$, $\dot{\rho}_0 = 31.15 \text{ deg/sec}$

圖 3-8 與圖 3-9 分別表示搜尋結果中的兩個較好的 fixed point，可以看到圖 3-8 所找出的 fixed point 位於 $\rho_{n+1} - \rho_n$ 圖中斜率相當大的地方，而圖 3-9 的 $\rho_{n+1} - \rho_n$ 圖中有斜率較平緩地的區域，而 fixed point 也在該區域其中，但該 fixed point 在 $\dot{\rho}_{n+1} - \dot{\rho}_n$ 圖中則位於斜率小於 1 的區域，顯示目前搜尋得到的兩個 fixed point 仍不夠理想。

然而比較圖 3-8 與圖 3-9 所得到的兩個 fixed point，圖 3-8 中的 fixed point 在 $\rho - t$ 圖中相對對稱，而且兩者相比，圖 3-8 中的 fixed point 在第五步時才失敗，而圖 3-9 中的 fixed point 則是在第四步就失敗。因此後續選擇以圖 3-8 中， $\theta_{TD0} = 96 \text{ deg}$, $\theta_{TD1} = 99 \text{ deg}$, $\rho_0 = -0.36 \text{ deg}$, $\dot{\rho}_0 = 17.4 \text{ deg/sec}$ 的 fixed point 作為後續生成 RTL-R-SLIP 步態的基準。

RTL-R-SLIP 步態的生成方式參考 R-SLIP 步態的生成方法[9, 10]，將目前取得的 fixed point 軌跡中 θ_L , θ_R 隨時間變化的序列記錄下來，而腳懸空的時間則以梯形軌跡將前一個 LO 與下一個 TD 之間的角度連結起來，如此便可以形成一組完整的步態軌跡。圖 3-8 中 fixed point 的 $\theta - t$ 關係如下圖所示：

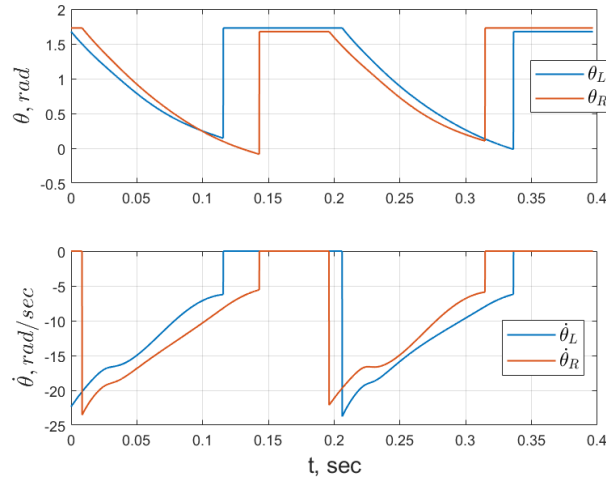


圖 3-10 $\theta_L(t), \theta_R(t), \dot{\theta}_L(t), \dot{\theta}_R(t)$ of fixed point of $\theta_{TD0} = 96deg, \theta_{TD1} = 99deg,$
 $\rho_0 = -0.36 deg, \dot{\rho}_0 = 17.4 deg/sec$

從圖 3-10 中可以看出左右兩側的步態軌跡是不相同的，且大略可以看出左右兩腳有一個對稱的趨勢存在，第一步是左腳先踏地，但腳早飛起，而第二步時則是右腳先踏地，也較早飛起。然而目前搜尋得到的軌跡並不完全對稱，因此分別需要用四組多項式函數進行擬和，同時也需要將滯空時的軌跡改成梯型軌跡，處理後的結果如下：

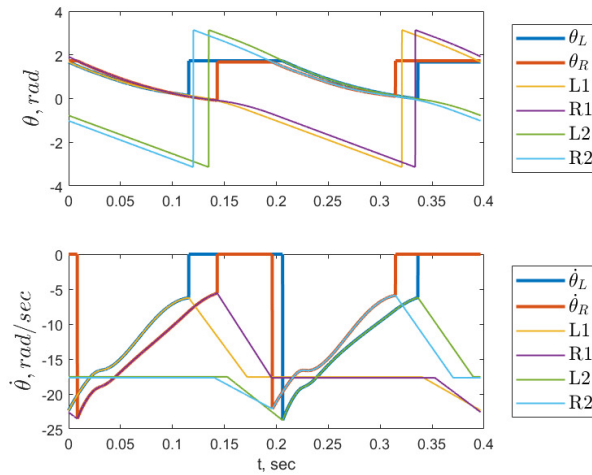


圖 3-11 改良 Tripod 步態生成結果。

圖 3-11 中的 L1、R1、L2、R2 分別對應四組腳（左前左後、右中、左中、右前右後）所需要遵循的運動軌跡，接下來會由機器人的 PD 控制器進行控制，為了能描述機器人實際運動過程中會受到 PD 控制器的影響，將在 4.3 把 PD 控制器也加入目前的 RTL-R-SLIP 模型，以進行更進一步的討論。

第四章 Roll-Two-Leg CTR-SLIP 建模與分析

在第三章的討論中，本研究建立了 RTL-R-SLIP 模型的被動動態，用來研究考慮 Roll 動態時，六足機器人的動態特性，進而找出新的 Tripod 步態。然而在實際機器人的運動上，是將軌跡輸入機器人的控制器中，以 PD control 的方式驅動圓弧腳旋轉，藉此協助機器人處理跑動過程中遇到的誤差，以維持機器人依照 fixed point 的方式跑動，而這樣的運動機制在 RTL-R-SLIP 模型中是無法描述的。

因此，在本階段將在 RTL-R-SLIP 模型中加入 Clocked-Torque，也就是加入軌跡控制的項目，建置 Roll-Two-Leg Clock-Torqued-Rolling SLIP（簡稱 RTL-CTR-SLIP）模型，用來模擬實際上六足機器人跑動過程中的 Rolling 動態以及控制器對系統產生的影響。

在章節將依序介紹模型結構與參數、說明初始條件的設定方式，並對此模型進行收斂盆地、系統動態與能量損耗的分析，主要討論的問題如下：使用 R-SLIP 模型或 RTL-R-SLIP 模型所設計出的軌跡是否可以在 RTL-CTR-SLIP 模型中跑動？其穩態為何？能量損耗的狀況為何？若改變轉動慣量 J 與左右彈簧係數比 γ 會對系統產生怎麼樣的影響？

4.1 模型結構、參數與初始條件

RTL-CTR-SLIP 模型與 RTL-R-SLIP 模型結構在幾何型態上完全相同，唯獨需要考慮左右 hip 位置的馬達的扭矩輸入，而該扭矩的大小以 PD control 的方式來決定輸出大小

$$\tau_i = k_p(\theta_i - \theta_{traj,i}) + k_d(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{traj,i}) \quad (\text{式 4-1})$$

其中 k_p, k_d 為 PD control 的 gain， $\theta_i, \dot{\theta}_i$ 為模型的直桿角度與角速度， $\theta_{traj,i}, \dot{\theta}_{traj,i}$ 為理想軌跡的直桿角度與角速度，在本研究中會分為 R-SLIP 軌跡與從 3.4 中生成的 RTL-R-SLIP 軌跡兩種。而 i 可以為 L 或 R 分別代表左右腳。

R-SLIP 軌跡由過去實驗室的研究成果[9, 10]產出，透過分析 R-SLIP 模型，找出 R-SLIP 模型的 fixed point，並且得到該 fixed point 下的 $\theta, \dot{\theta}$ 的軌跡。本研究使用表 3-1 中的系統參數套用在 R-SLIP 模型中，找到 $v = 2 \text{ m/s}, \alpha = 15 \text{ deg}$ 的 fixed point，其軌跡如圖 4-1 所示：

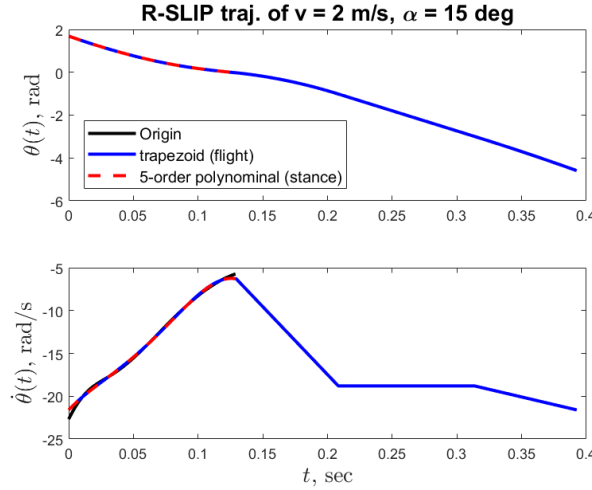


圖 4-1 R-SLIP trajectory of $v = 2 \text{ m/s}, \alpha = 15 \text{ deg}$

圖 4-1 是 R-SLIP 模型所產出的 Tripod 步態軌跡，是接下來分析中代表 R-SLIP 模型的軌跡。與圖 3-11 中由 RTL-R-SLIP 模型生成的 Tripod 軌跡相比，R-SLIP 模型的軌跡相當單純，只由一組軌跡表示，而且左右兩腳以相同的軌跡進行控制，和 RTL-R-SLIP 模型中同時踏地的左右兩腳有所差異。但在 R-SLIP 軌跡中仍需要將同一組軌跡分給 $\gamma_{\text{phase}} = 0$ 與 $\gamma_{\text{phase}} = 1$ 的兩組腳使用，因此需要將軌跡複製並平移半個週期（以圖 4-1 為例，約為 0.2 秒），讓另一組腳以半個週期的差異進行軌跡控制。

4.2 Relative phase (δ_L, δ_R)

RTL-CRT-SLIP 與 RTL-R-SLIP 被動模型不同，RTL-CRT-SLIP 是以 PD 控制的方式追著理想軌跡運動，在模型受到擾動時，左右兩腳便不會依照理想的落地時間點落地，為了描述這樣的現象，參考過去在 CTR-SLIP 模型的研究中所定義的 relative phase[10]，本研究進行 Relative phase (δ_L, δ_R) 的定義，由於在 RTL-CTR-SLIP 模型中有左右兩隻腳，因此需要分別描述 δ_L, δ_R ：

$$\delta_i = \frac{\Delta t_i}{T_{traj.}}, \text{ where } i = L, R \quad (\text{式 4-2})$$

式 4-2 中的 Δt_i 代表 i 側腳實際落地時刻與理想落地時刻的時間位移，而 $T_{traj.}$ 表示一個 Tripod 步態的週期（以圖 4-1 為例，約為 0.4 秒）。 $\delta_L < 0$ 代表左腳提前落地，也代表當左側馬達還沒轉到實際上要落地的角度時，左腳便已經觸地； $\delta_R = 0$ 代表右側腳準確地在理想落地時間碰觸到地面；而 $\delta_L > 0$ 代表左腳延遲觸地，也代表當左側馬達已經轉超過應該要落地的角度時，左腳才觸地。

在完成 Relative phase 的定義之後，便可以完善描述 RTL-CTR-SLIP 在觸地（Touch down）瞬間的八個參數：

$$[v, \alpha, \rho, \dot{\rho}, \delta_L, \delta_R, \gamma_{L,phase}, \gamma_{R,phase}] \quad (\text{式 4-3})$$

其中， $v, \alpha, \rho, \dot{\rho}, \gamma_{L,phase}, \gamma_{R,phase}$ 與 RTL-R-SLIP 模型中的定義相同， δ_L, δ_R 為 Relative phase。在本研究中，皆由 $\gamma_{L,phase} = \gamma_{R,phase} = 0$ 的初始狀態開始模擬，因此在後續對初始狀態的描述中會省略此項，而在給定 δ_L, δ_R 後可以透過下列關係式計算出觸地瞬間的 θ_L, θ_R

$$\theta_{i,TD} = \theta_{traj,i}(\delta_i \cdot T_{traj.}), \text{ where } i = L, R \quad (\text{式 4-4})$$

4.3 Time response 分析

在建立主動控制的 RTL-CTR-SLIP 模型後，首先進行 Time response 分析，觀察不同系統參數在 R-SLIP 步態或 RTL-R-SLIP 步態控制下跑動最多 10 步的狀況，以確認如此的步態設計是否有效，並觀察系統參數對控制結果的影響。

對於 R-SLIP 步態，都將初始條件設定為 $v = 2 \text{ m/s}, \alpha = 15 \text{ deg}, \rho = 0 \text{ deg}, \dot{\rho} = 0 \text{ deg/s}, \delta_L = 0, \delta_R = 0, \gamma_{L,phase} = \gamma_{R,phase} = 0$ ，而對於 RTL-R-SLIP 模型則設定初始條件為 $v = 2 \text{ m/s}, \alpha = 15 \text{ deg}, \rho = -0.36 \text{ deg}, \dot{\rho} = 17.4 \text{ deg/s}, \delta_L = 0, \delta_R = 0, \gamma_{L,phase} = \gamma_{R,phase} = 0$ 。挑選的系統參數大致參數都與表 3-1 相同，唯獨會調整轉動慣量 J 與左右彈簧比例 γ ，細節將在圖說說明。分析結果如下圖所示：

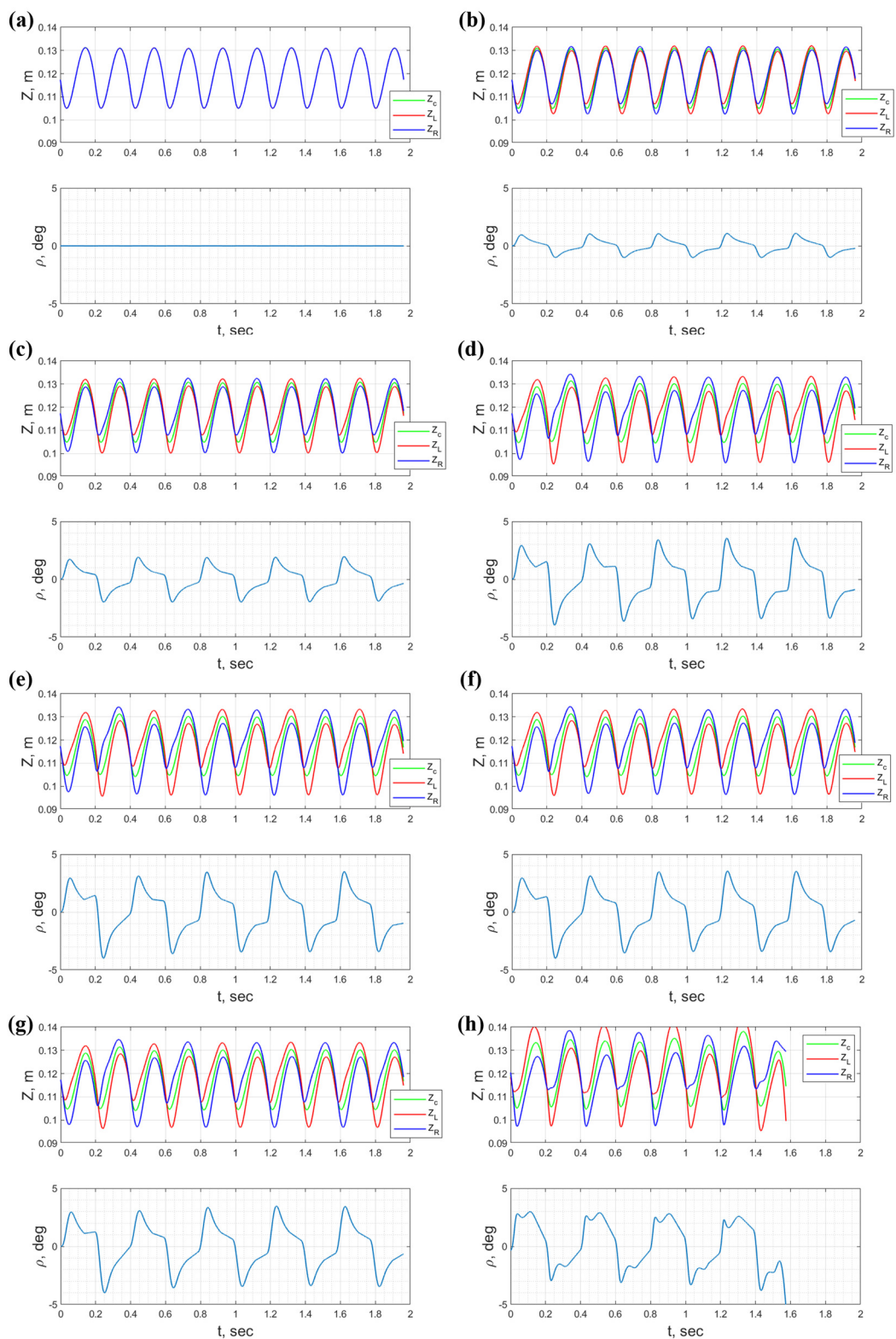


圖 4-2 Time response of

(a)R-SLIP $\gamma = 1, J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (b)R-SLIP $\gamma = 1.25, J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

(c)R-SLIP $\gamma = 1.5, J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (d)R-SLIP $\gamma = 2, J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

(e)R-SLIP $\gamma = 2, J = 0.109 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (f)R-SLIP $\gamma = 2, J = 0.122 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

(g)R-SLIP $\gamma = 2, J = 0.137 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (h)RTL-R-SLIP $\gamma = 2, J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

圖 4-2 是不同系統參數依照 R-SLIP 或 RTL-R-SLIP 軌跡進行跑動時的時間序列。

從圖 4-2(a)中可以看出，當 $\gamma = 1$ 時，若加上主動控制，可以很好的使系統維持在 R-SLIP 的 fixed point 上跑動，並且 ρ 也維持在 0，顯示加上主動控制可以改善 RTL-R-SLIP 系統原本在 $\rho = \dot{\rho} = 0$ 的不穩定特性。

從圖 4-2(a)(b)(c)(d)中可以看出當固定轉動慣量與其他系統參數，唯獨改變左右扭簧係數比 γ 時，系統在 ρ 方向的擾動越來越大，顯示 clock-torqued 的主動控制仍然無法完全消除 γ 造成的影響，然而可以從圖 4-2(b)(c)(d)中看出，系統仍然運作在有別於 R-SLIP fixed point 的另一個 fixed point 上，顯示 clock-torqued 的主動控制仍然有相當好的效果使得系統能夠維持跑動。

觀察圖 4-2(d)(e)(f)(g)是固定 $\gamma = 2$ 與其他系統參數，唯獨改變轉動慣量 J ，從圖表中難以觀察出這四張圖之間的區別。此處嘗試以量化方式分辨期間的區別，在此對 $\rho(t)$ 的數據取方均根值，用以表示模型在 roll 方向上的擾動，計算圖中八個數據的結果如下表所示：

表 4-1 ρ_{rms} 表

γ	1	1.25	1.5	2 (R-SLIP)
$J(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	0.097	0.097	0.097	0.097
$\rho_{rms}(\text{deg})$	0.000	0.558	1.042	1.867
γ	2	2	2	2(RTL)
$J(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	0.109	0.122	0.137	0.097
$\rho_{rms}(\text{deg})$	1.884	1.889	1.887	2.046

從 ρ_{rms} 的計算結果也能看出 γ 對 ρ_{rms} 的影響比 J 來得大，顯示在 RTL-CTR-SLIP 模型中，轉動慣量 J 對系統產生的影響幾乎可以忽略。

圖 4-2(h)是使 RTL-CTR-SLIP 模型以 RTL-R-SLIP 軌跡進行主動控制的步態，可以看到系統在踏地 8 步才發生失敗，相較於其在被動模型中只能踏地 5 次來得好，顯示即使在有主動控制仍有其效果存在，但相較於 R-SLIP 軌跡的效果，在 3.4 中所選定的 fixed point 軌跡仍然不夠理想。

4.4 收斂盆地 (Basin of Attraction)

收斂盆地 (Basin of attraction) 為相空間中的一個特定區域，只要模型的初始條件落在這個區域中，就代表此初始條件可以逐漸收斂至系統的穩態，透過分析收斂盆地大小，便可以找出模型所可以忍受的干擾與誤差的大小，進而衡量系統的穩定性差異。

由於 RTL-CTR-SLIP 模型的初始狀態需要有八個參數才能完整定義，為求簡化並呼應本研究對 Roll 動態的好奇，此處固定 $v = 2 \text{ m/s}$, $\alpha = 15 \text{ deg}$, $\gamma_{L, \text{phase}} = \gamma_{R, \text{phase}} = 0$ ，僅調整 $\rho, \dot{\rho}, \delta_L, \delta_R$ 來進行收斂盆地的探索，以 $\dot{\rho} = -20, -10, 0, 10, 20$ 分別繪製五張圖，每張圖以 $\rho = -8:1:8 \text{ deg}$, $\delta_L = -0.05:0.01:0.05$, $\delta_R = -0.05:0.01:0.05$ 進行區塊分割，並且設定穩定的標準為「維持成功踏地 10 次」，達成標準的初始點才會被標記下來。

本段落比較在使用 R-SLIP 模型所生成的 Tripod 步態跑動時， $\gamma = 1$ 與 $\gamma = 2$ 的收斂盆地大小，並固定 $J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 以及其他系統參數如表 3-1 之內容，以了解 γ 對收斂盆地大小的影響，結果如下圖所示：

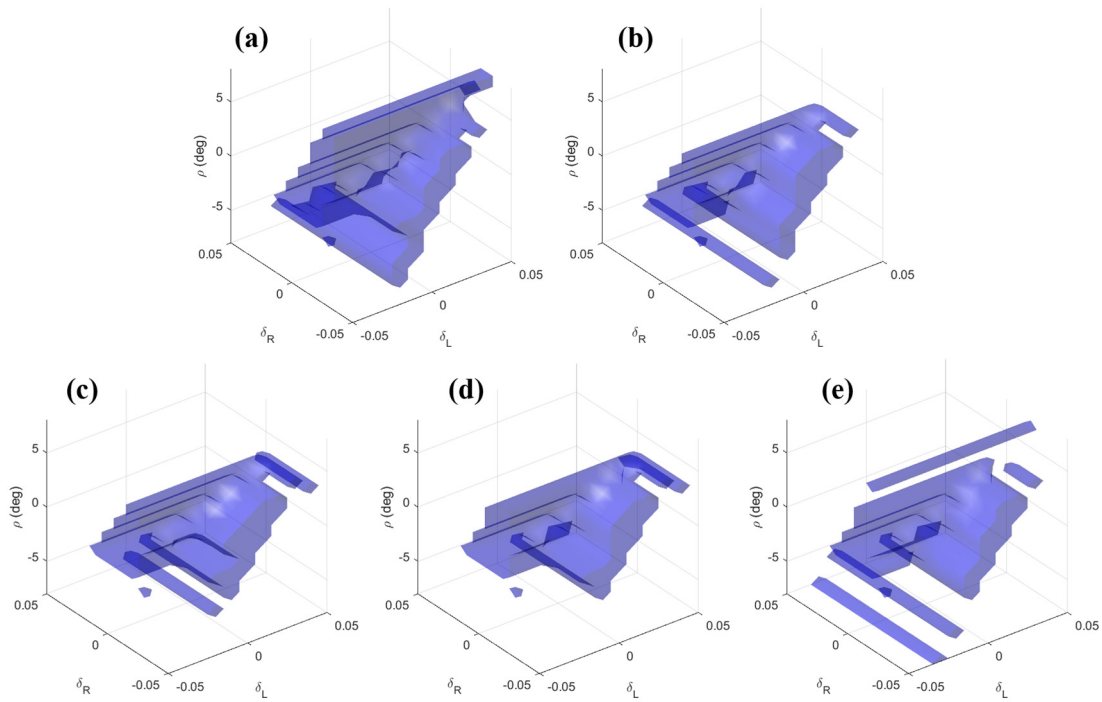


圖 4-3 Basin of attraction of $\gamma = 1$ (a) $\dot{\rho} = -20 \text{ deg/sec}$ (b) $\dot{\rho} = -10 \text{ deg/sec}$
(c) $\dot{\rho} = 0 \text{ deg/sec}$ (d) $\dot{\rho} = 10 \text{ deg/sec}$ (e) $\dot{\rho} = 20 \text{ deg/sec}$

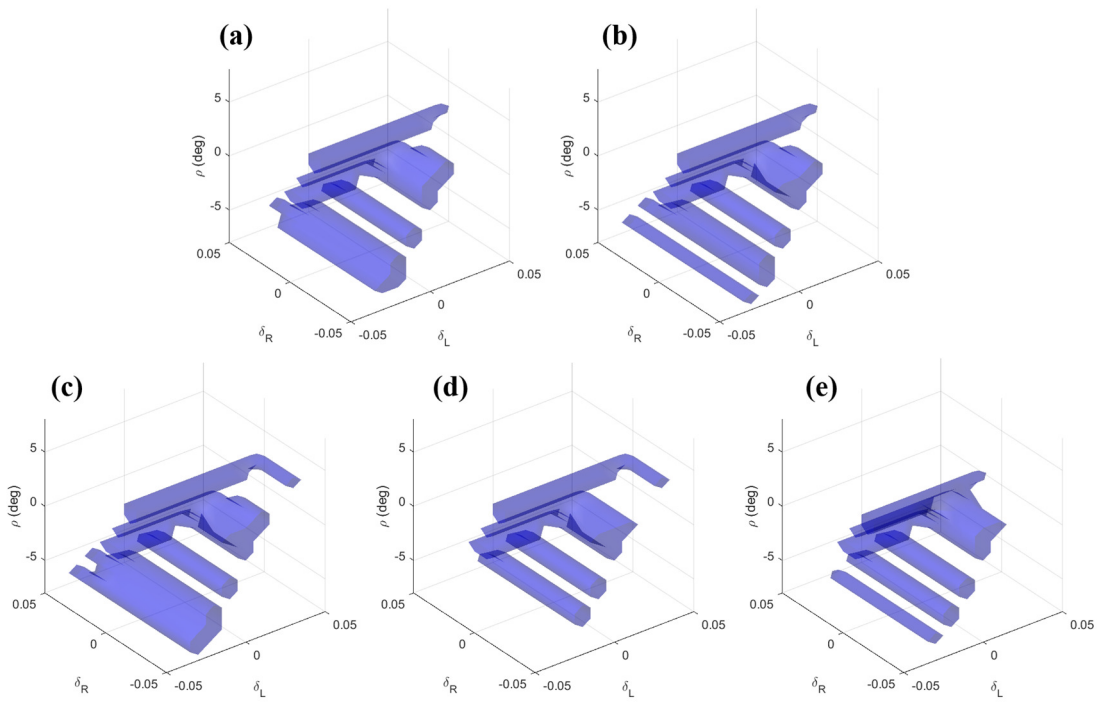


圖 4-4 Basin of attraction of $\gamma = 2$ (a) $\dot{\rho} = -20 \text{ deg/sec}$ (b) $\dot{\rho} = -10 \text{ deg/sec}$
(c) $\dot{\rho} = 0 \text{ deg/sec}$ (d) $\dot{\rho} = 10 \text{ deg/sec}$ (e) $\dot{\rho} = 20 \text{ deg/sec}$

圖 4-3 與圖 4-4 分別是 $\gamma = 1$ 與 $\gamma = 2$ 的 Basin of attraction 圖。兩張圖中存在相似的趨勢，首先，我們可以發現當 ρ 偏離 0 的時候，並不是所有的 relative phase 都可以使系統逐漸回到穩態，在仔細觀察後會發現，當 $\rho = 0$ 時，只有當 $\delta_L = \delta_R = 0$ 時才能使系統持續穩定跑動，而當 $\rho < 0$ 時，代表模型往左傾斜，從 BoA 圖中會看出需要使 $\delta_L < 0$ 才能使模型持續穩定跑動，此時右腳就會懸空，使得 δ_R 的數值就相對不重要，因為即使初始有誤差也能盡速修正，因而會在 BoA 圖中呈現柱狀的結構。而當 $\rho > 0$ 時，則會有相反的趨勢，也就是要使得 $\delta_R < 0$ 才能使模型穩定跑動。這樣的結果顯示 relative phase 在 RTL-CTR-SLIP 模型中相當重要， ρ 與 δ_L, δ_R 需要相互匹配才能使系統穩定跑動。如此的結果是符合直覺的，因為當機器人在跑動的過程中傾向某側，如果該側的腳可以提早觸地便可以提供較多的力使機器人往另外一側回正，若傾斜該側的腳延遲落地，便無法提供足夠的力道扶正機器人，便會造成跑動失敗。

其次，可以發現角速度 $\dot{\rho}$ 對於 BoA 的分布在兩張圖中都會造成相似的影響，當 $\dot{\rho} < 0$ 時，代表系統往左側旋轉，此時 BoA 會往 $\rho < 0$ 的區域偏移，反之則往相反的方向偏移。

若比較 $\gamma = 1$ 與 $\gamma = 2$ 兩者之間的差異，總觀來看可以發現當 $\gamma = 2$ ，BoA 中的區域較為零碎，整體的區域大小也比 $\gamma = 1$ 時來得小，顯示當 $\gamma = 2$ 時，系統對於干擾的抵抗能力較差。

若仔細比較圖 4-3(c)與圖 4-4(c)，可以發現當 $\gamma = 2$ 時，在 $\rho < 0$ 的區域有較大的收斂區域，但相對的在 $\rho > 0$ 處則較稀疏，此不對稱的現象可以從 γ 的特性來解釋，因為當 $\gamma = 2$ ，則代表左側腳的扭簧係數比右側的扭簧係數來得大，代表系統往左側傾斜是相對穩定的，因而在 $\rho < 0$ 的區域有較大的收斂區間。

4.5 能量損耗分析

以被動模型尋找 fixed point 再進行運動軌跡生成的目的除了減少參數調整的需求以外，能量損耗可以降到最低也是其中一個訴求，因為若是機器人可以跑在被動動態上，代表制動器只需要提供最少的力量來抵抗外界擾動即可，大部分的運動都是透過慣性與系統的被動特性來達成。

本研究希望以 RTL-CTR-SLIP 模型來檢驗 R-SLIP 軌跡與 RTL-R-SLIP 軌跡的能量損耗，並分析轉動慣量 J 與左右彈簧比例 γ 對能量損耗的影響為何。瞬時功率的計算方式為

$$P_i = \tau_i \cdot \dot{\theta}_i \quad (\text{式 4-5})$$

其中 τ_i 代表 i 側馬達的輸出扭矩、 $\dot{\theta}_i$ 為 i 側直桿的角速度， i 可以為 L 或 R。並且計算整段時間內的平均功率

$$\bar{P} = \frac{1}{T_{total}} \sum |P_L| + |P_R| \quad (\text{式 4-6})$$

其中 T_{total} 代表完整跑動的時間長，通常為 10 次踏地所經過的時間，但對於 RTL-R-SLIP 軌跡的數據，時間長度就是到失敗以前。以下呈現與圖 4-2 相同的系統參數組合的瞬時功率對時間的關係圖，以及平均輸出功率直方圖：

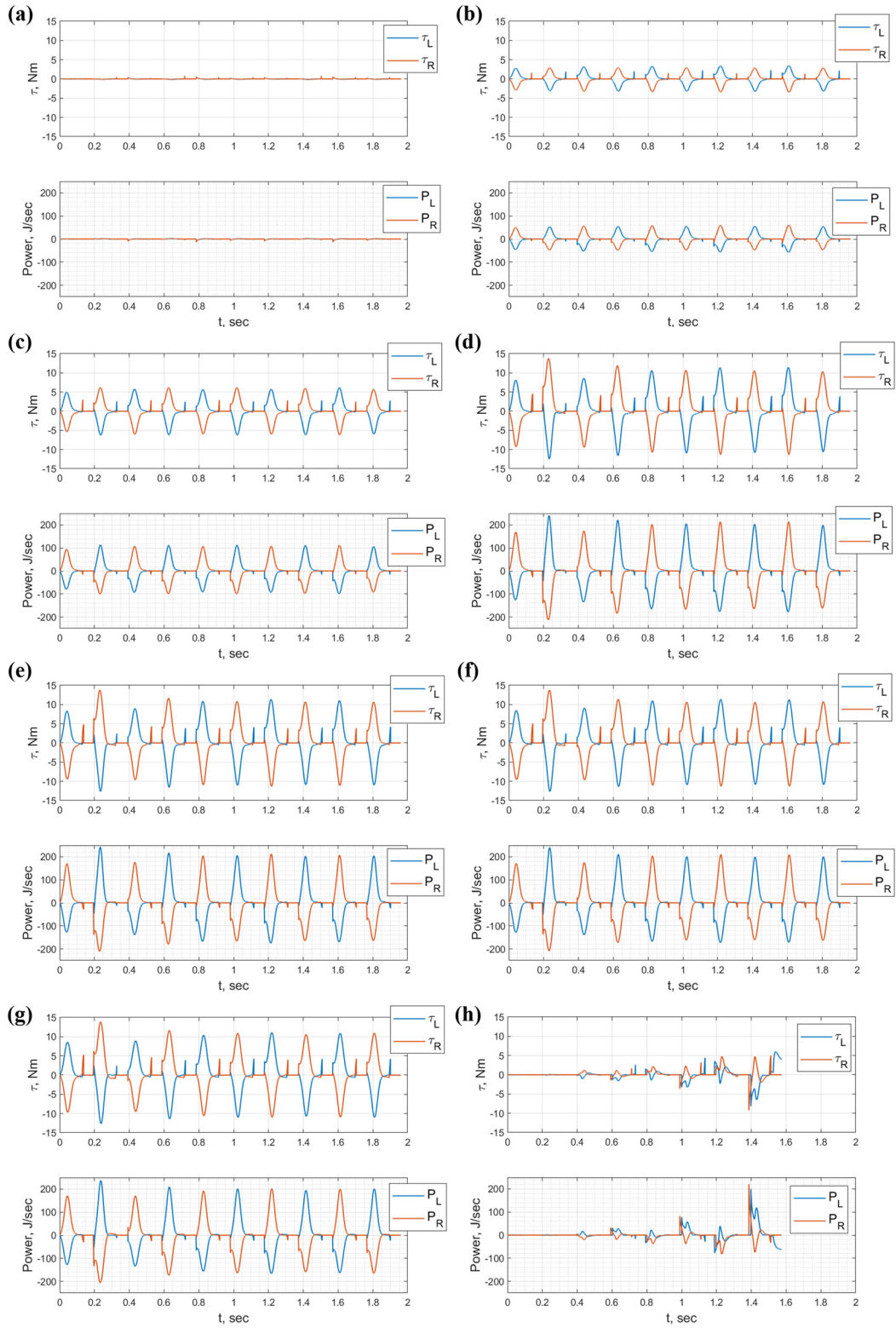


圖 4-5 The torque output and the Power plot of

- (a)R-SLIP $\gamma = 1, J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (b)R-SLIP $\gamma = 1.25, J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
(c)R-SLIP $\gamma = 1.5, J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (d)R-SLIP $\gamma = 2, J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
(e)R-SLIP $\gamma = 2, J = 0.109 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (f)R-SLIP $\gamma = 2, J = 0.122 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
(e)R-SLIP $\gamma = 2, J = 0.137 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (f)RTL-R-SLIP $\gamma = 2, J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

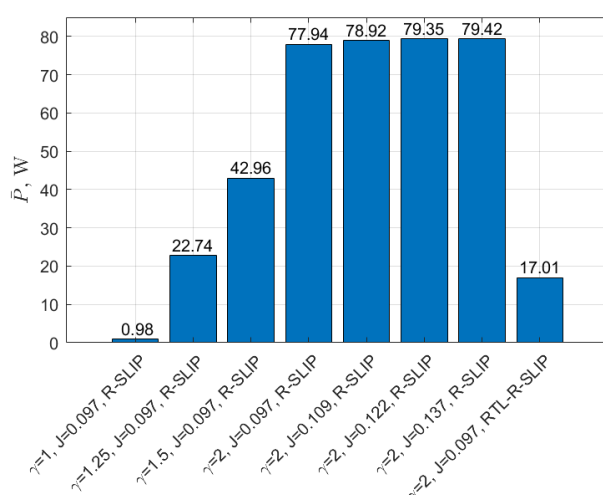


圖 4-6 Histogram of the average power. (unit of J is $\text{kg} \cdot \text{m}^2$)

圖 4-5 表示不同系統參數下，分別給定與圖 4-2 相同的初始條件後，左右馬達輸出力矩以及左右馬達瞬時輸出功率對時間的關係圖，圖 4-5(a)(b)(c)(d)(e)(f)(g)皆為使用 R-SLIP 軌跡，而圖 4-5(h)則是使用 RTL-R-SLIP 軌跡。圖 4-6 則是將圖 4-5 的瞬時功率數據以式 4-6 計算出的平均功率直方圖。

從圖 4-5(a)中可以看出當 $\gamma = 1$ 時，左右馬達不需要輸出過多的力矩與功率即可維持系統穩定，並且此系統參數下的平均功率為所有數據中的最小值 0.98W。代表若選用 $\gamma = 1$ 的系統參數搭配 R-SLIP 的軌跡，當系統穩定運作在穩態軌跡上時，系統所需輸出的功率便是目前討論的狀況中最低的。

圖 4-5(a)(b)(c)(d)為固定其他所有系統參數，唯獨改變左右扭簧係數比 γ ，可以發現隨著 γ 增加，左右馬達所需輸出的扭矩與功率也隨 γ 增加，在圖 4-6 的直方圖中也能看到類似的趨勢。有趣的是，在圖 4-5(b)(c)(d)中，左腳與右腳的輸出扭矩的方向呈現類似對稱的型態，顯示左右兩側腳需要出力的方向並不相同，某側的馬達會作正功，而另一側會做負功。

圖 4-5(d)(e)(f)(g)為固定 γ 與其他系統參數，只改變轉動慣量 J ，如同在時間序列分析的結果，轉動慣量在圖中難以觀察其差異，但在圖 4-6 中便可以看出隨著轉動慣量增加，平均功率也會有微小的增加，然而其比例與 γ 所造成的影響來比則是非常微小。

圖 4-5(d)(h)為固定同樣的系統參數 $\gamma = 2, J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，然而前者以 R-SLIP 軌跡進行跑動，而後者以 RTL-R-SLIP 軌跡進行跑動。可以明顯的看到在這

個系統參數下，以 RTL-R-SLIP 軌跡進行跑動可以減少能量的輸出與損耗，在圖 4-6 中也能看到這兩者在平均功率上也有顯著的差異。

此外，圖 4-5(h)中所輸出的力矩與功率隨著時間越來越多，顯示在此動態下即使加上主動控制，系統仍可能是不穩定的，隨後在約 1.6 秒處便無法繼續跑動，顯示目前搜尋出的步態仍不盡理想。

第五章 驗證實驗



經過第二章對簡單 Roll 模型的分析、第三章對 RTL-R-SLIP 被動模型與第四章對 RTL-CTR-SLIP 主動模型的分析，本研究從動態模擬中已經了解六足機器人在 Roll 方向動態的部分特性，接下來希望透過實際實驗來檢驗分析的可靠性，並觀察實際機器人在跑動的過程中的特性。

在第五章中會依序介紹本研究使用的實驗平台——RHex，講解如何設計可供調整的系統參數 J, γ, k_t ，以及測量方法，接著進行跑動實驗，分析其運動動態以及能量損耗。

本部分為我在專題上的實驗夥伴許智翔與吳泓昇協助我一同進行的，在程式控制、電子電路的處理、數據量測與數據整理都仰賴兩位的幫助，而我則主要負責實驗的規劃與實驗和理論的比較。

5.1 實驗平台

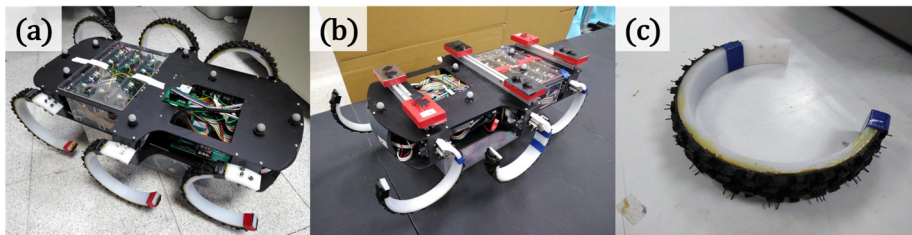


圖 5-1 RHex 六足機器人機構(a)改裝前 (b)改裝後 (c)圓弧腳。

本研究延續使用實驗室中的六足機器人，如圖 5-1(a)，並在其背面平均設置三條滑軌，滑軌上設置六塊配重塊以進行轉動慣量的調整，改裝後如圖 5-1(b)所示，透過排列組合不同的配重塊配置方式，一共可以產生四種不同的轉動慣量，其轉動慣量的測量於 5.2 詳細說明。

本研究中使用圓弧腳，如圖 5-1(c)所示，而為了能實驗不同左右扭簧係數 γ 對系統動態造成的影響，本研究設計了不同寬度的圓弧腳來實現不同 γ 的數值，並確保能保持相同的 k_{sum} 。

此機器人的六隻腳都由一顆 12V 有刷直流馬達搭配齒輪箱驅動，為了使馬達有足夠的瞬間力矩輸出，每一顆馬達都有搭配一塊升壓電路，使每顆馬達可以用最高 37V 進行控制。

機器人的機電系統由 Wifi 與電腦通訊，主控制器為 NI 的 sbRIO，sbRIO 的訊號會分送到六個實驗室製作的馬達控制器上，進而控制六足機器人的運動，控制方法則是以 PD 控制的方式驅動各腳，其追尋軌跡則是由 R-SLIP 模型所生成的 fixed point 軌跡。而六足機器人的感測器有各個馬達的編碼器可偵測馬達的角度與速度資訊，也設置有霍爾感測器搭配固定於六隻腳上的磁鐵，可以達成角度歸零的功能，並且此六足機器人具有電流感測系統，與馬達控制器的電壓輸出訊號相乘便可得到各馬達的輸出功率。

5.2 系統參數與其測量

本實驗平台的系統參數的測量結果如表 3-1 所示，其中較重要的參數為轉動慣量 J 與左右扭簧係數比 γ 與總扭簧係數 k_{sum} ，接下來將依序進行說明：

轉動慣量 J

如 5.1 所述，為了達成「在維持質量相同的前提下改變轉動慣量」，本研究在舊有的機器人上加裝了配重塊，並且以三點懸掛的方式進行轉動慣量的測量。

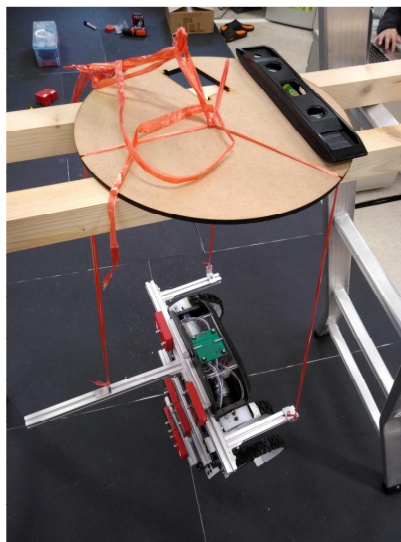


圖 5-2 轉動慣量量測

透過製作簡易的裝置，將機器人的軸心固定在懸掛點的中心，接著讓機器人在 Roll 的方向上進行旋轉，計算其旋轉週期，並測量其他參數，以下列公式計算轉動慣量：

$$J = \frac{mgRr}{\omega_n^2 H} \quad (\text{式 5-1})$$

其中， m 為下方整體的質量、 g 為重力加速度、 R 與 r 分別為上下懸掛點所形成的圓的半徑、 ω_n 為懸掛物旋轉時的轉動頻率、 H 為上下懸掛點之間的高度差。而實驗中所使用的四種配重塊排列位置為以下四種，並分別命名為：

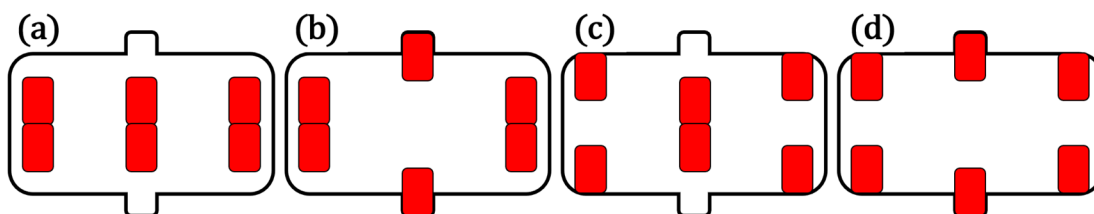


圖 5-3 配重塊擺放位置 (a)Zero-Max (b)Two-Max (c)Four-Max (d)All-Max

轉動慣量測量的結果如下圖所示：

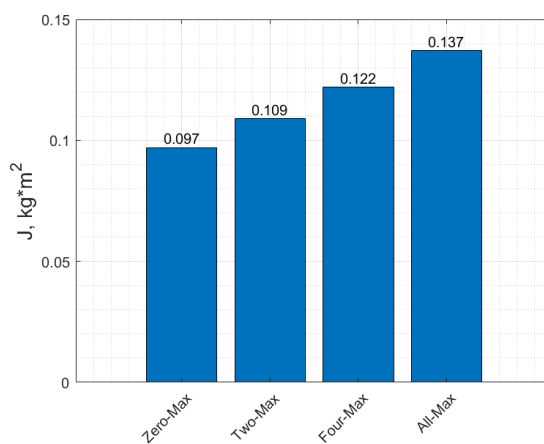


圖 5-4 轉動慣量測量結果

可以看出如此的結構設計確實可以對轉動慣量進行調整，並最多可以達成 $0.04 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 的轉動慣量變化。

扭簧係數 k_t

為了能實驗不同 γ 對系統造成的影響，我們需要製作總扭簧係數 k_{sum} 維持固定，但左右腳扭簧係數有 γ 倍差異的圓弧腳。為了達成這個目標，我們假設圓弧腳的寬度與扭簧係數成正比關係，並製作不同寬度的圓弧腳，接著進行量測以驗證假設。

實驗中我們想測量 $\gamma = 1, 1.25, 1.5, 2$ 這四種不同 γ 的實驗數據，因此設計以下寬度的圓弧腳：

表 5-1 圓弧腳寬度配置表

γ	中腳寬度(mm)	前後腳各自寬度(mm)	總寬度(mm)
1	40.00	20.00	80
1.25	35.56	22.22	80
1.50	32.00	24.00	80
2	26.67	26.67	80

表 5-1 中表示不同 γ 所對應的中腳與前後腳的圓弧腳寬度分別數值為何，由於前後腳會同時踏地，因此需要將這兩隻腳的扭簧係數（寬度）相加才是實際上該側的總扭簧係數，舉例而言，當 $\gamma = 1$ ，左側中腳的寬度就需要與右側前腳與後腳的寬度和相同，因此右側的前腳與後腳的寬度就會是左側中腳寬度的一半。

接著以過去實驗室所設計測量 R-SLIP 模型係數的方式測量寬度為 20、26.67、32 與 40mm 的圓弧腳的等效扭簧係數，其結果如下所示：

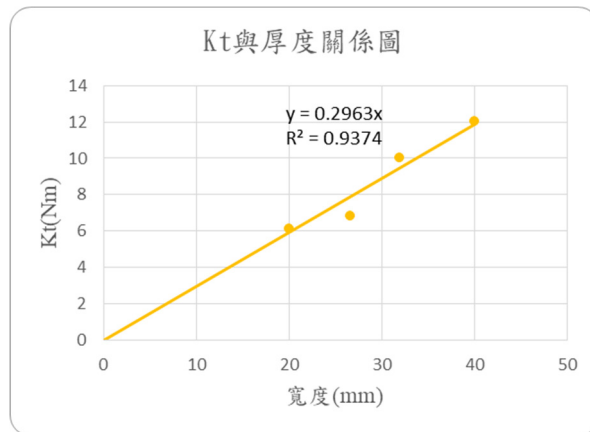


圖 5-5 k_t 與寬度關係圖。

在圖 5-5 中以正比的趨勢線來擬合實驗數據，R 平方值呈現 0.9374，顯示假設 k_t 與寬度成正比關係是可接受的，因此可以使用寬度的差異來產生 γ 的差異，但仍需在後續的分析中注意實驗結果可能因為 k_t 與寬度的關係不是完美的正比而造成的誤差。

接著便以 $k_t = 0.2963 \times (\text{寬度})$ 的數據來計算 k_{sum} ，由於從表 5-1 中可以知道總寬度為 80mm，因此 $k_{\text{sum}} = 0.2963 \times 80 = 23.704 \text{ Nm}$ ，此數值即為表 3-1 中的數值。

5.3 Roll 動態分析

本研究使用的機器人背上一共裝置有六個反光點，其中兩個位於機器人中線的最前與最後方，實驗中讓機器人在長約七公尺的跑道上跑動，同時以約十台 VICON 高速攝影機捕捉機器人背上六個反光點的位置資訊，以此資訊反算出機器人的位置與角度資訊。

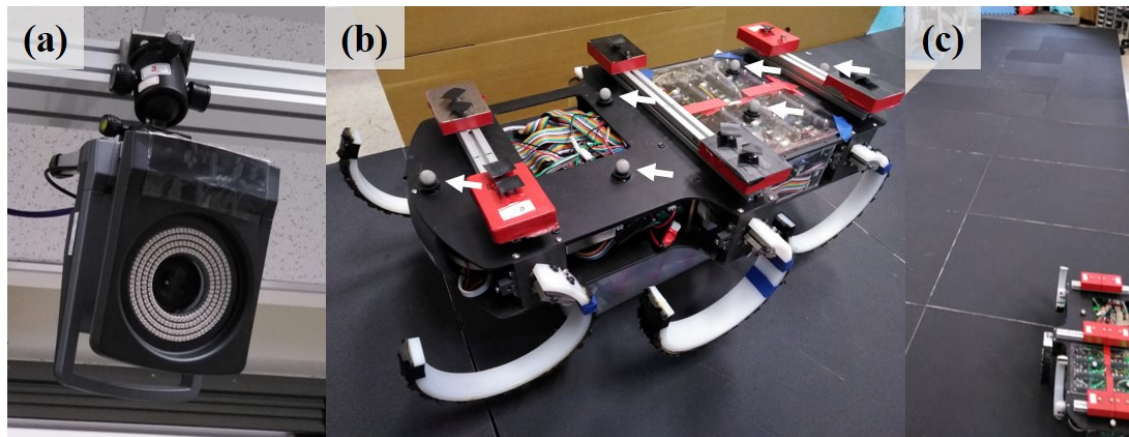


圖 5-6 (a)VICON 相機 (b)RHex 六足機器人與反光點(以白色箭頭標示)
(c)實驗使用之跑道

在此實驗中只進行以 R-SLIP 生成的 Tripod 步態跑動的實驗，使用四種轉動慣量 J 與四種左右扭簧係數比 γ 來進行實驗，收集機器人在 z 方向高度與 roll 方向角度 ρ 隨時間變化的關係。此實驗中關注「穩態時的動態」，因此只使用機器人落地兩三步且已經達到穩態之後的數據，由於完整長度的時間序列不容易觀察出趨勢，因此將數據以兩次踏地為一個週期進行疊合、平均並計算標準差，顯示出一個週期中平均的動態趨勢與變化。

實驗後得到的結果如下圖所示：

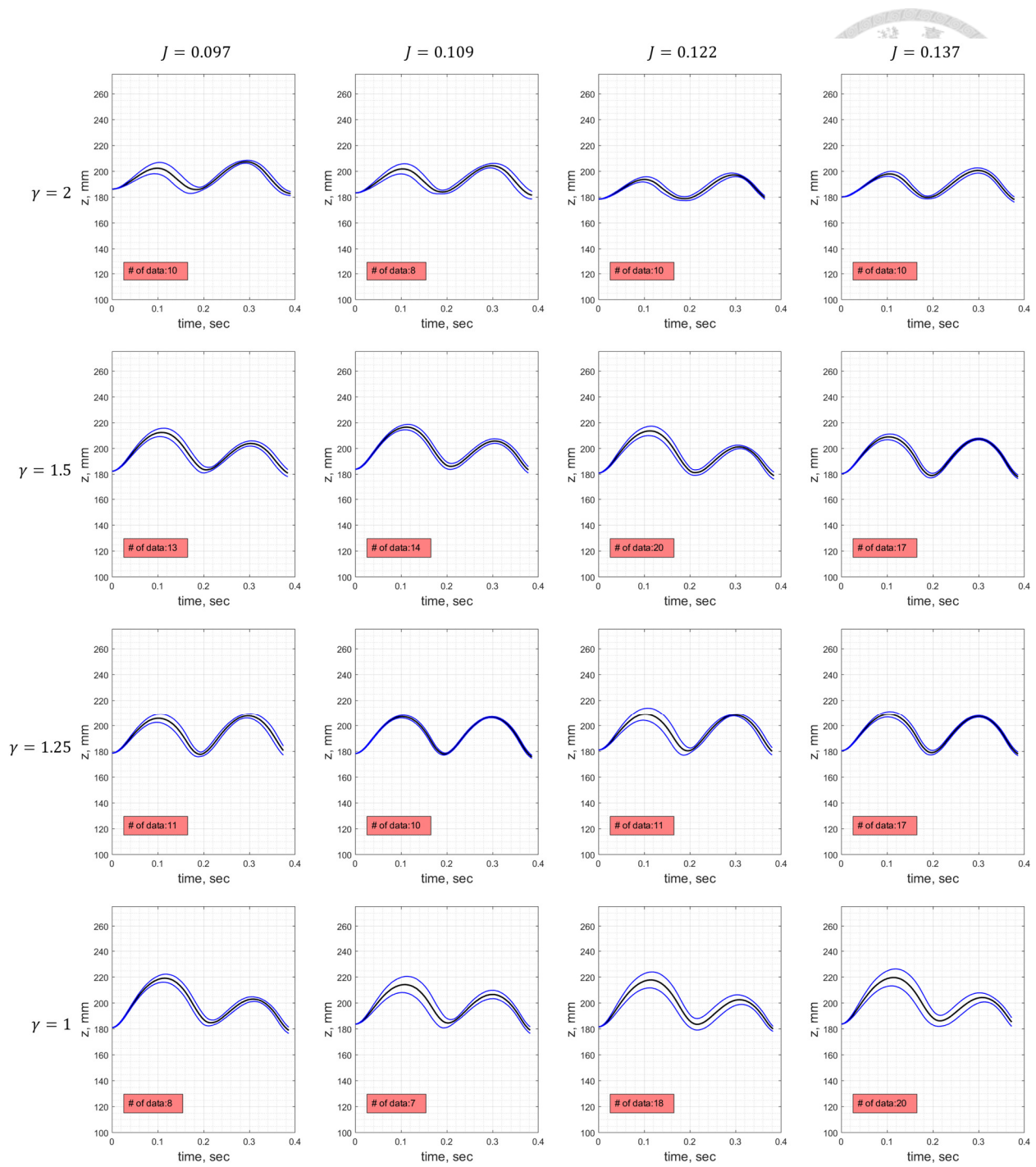


圖 5-7 Normalized z - t plot with different J and γ (unit of J : $\text{kg} \cdot \text{m}^2$)

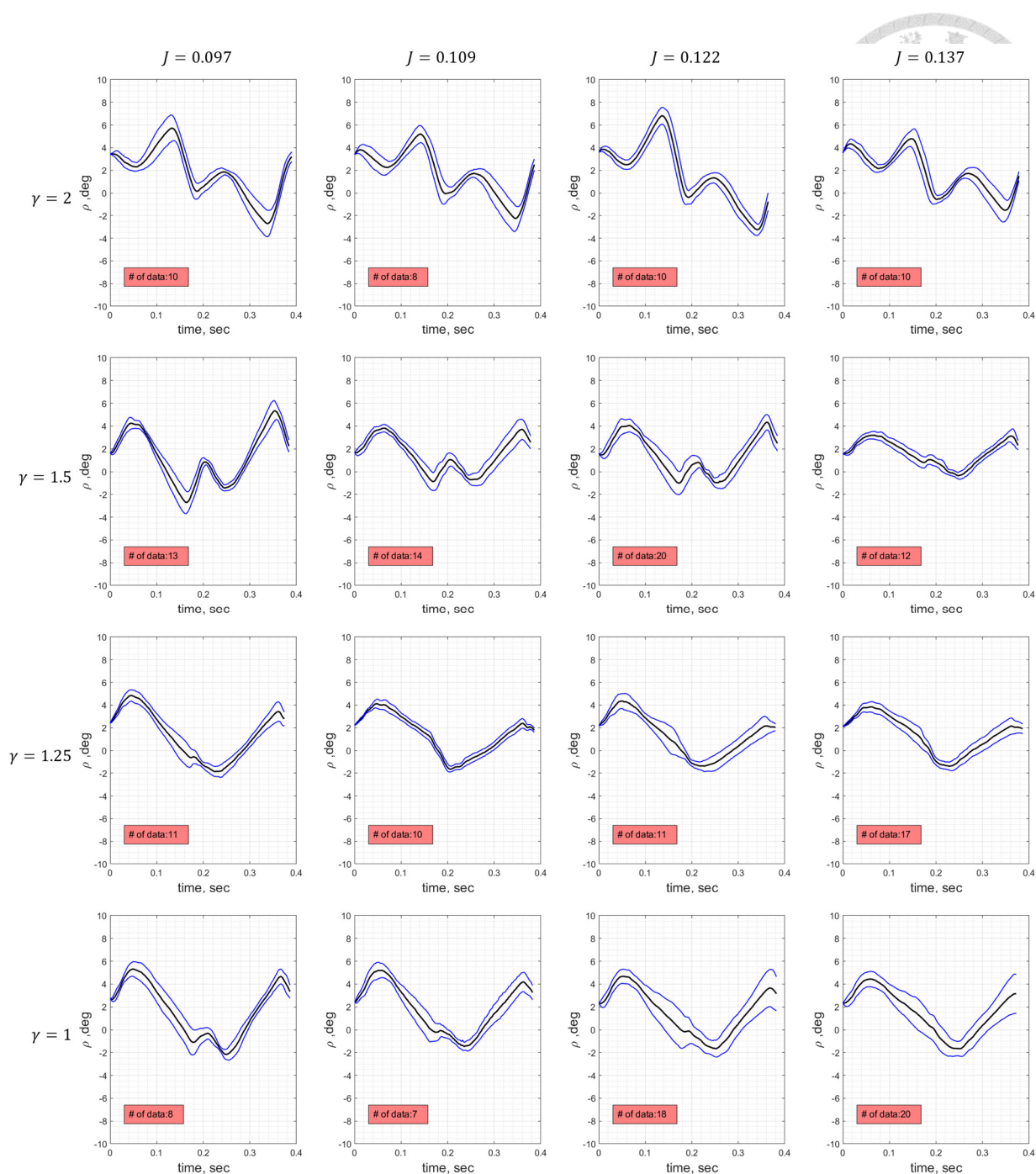


圖 5-8 Normalized ρ -t plot with different J and γ (unit of J : $\text{kg} \cdot \text{m}^2$)

圖 5-7 與圖 5-8 中的黑色線代表在該時間點上的數據平均值，而藍色線段則表示該時間點的數據標準差的範圍，如果某一時刻的藍色區間越大，代表該時間點的數據標準差較大。而在每張圖表中的左下角標示用來繪製出該圖所使用的數據量有多少，每張圖的數據量都有七個週期以上去進行平均。

圖 5-7 表示機器人 z 位置隨時間的關係圖，可以發現整體而言所有數據的標準差都不大，顯示實驗確實收到穩態下的數據，且在實際機器人的運動中，R-SLIP 軌跡確實可以使機器人跑動在穩定步態上。然而若仔細觀察圖中的細節，可以發現當 $\gamma = 1.5$ 或 $\gamma = 1$ 時，一個週期中的兩個波形大小並不相同，顯示兩次踏地之間是有差異存在的。這代表不同組的腳之間可能存在馬達扭力或是圓弧腳扭簧係數的差異。且如果比較標準差的數值大小，可以發現當 $\gamma = 1$ 時，在 z 方向上的標準差較大，顯示當 $\gamma = 1$ 時，即使機器人已經運作在穩態中，仍有較大的不穩定性。

圖 5-8 表示機器人 Roll 方向傾角 ρ 隨時間的變化圖，同樣可以發現整體而言標準差不大，顯示機器人確實已經跑在穩態上了，這也證實了六足機器人在以 R-SLIP 模型生成的 Tripod 步態跑動時確實存在特定的 Roll 方向運動。

透過比較圖 5-8 中的不同數據結果，可以大致看出 ρ 的動態主要是由兩個不同特性的軌跡疊加而合成的，以下以圖 5-8 中 $J = 0.097$ 的數據來表示：

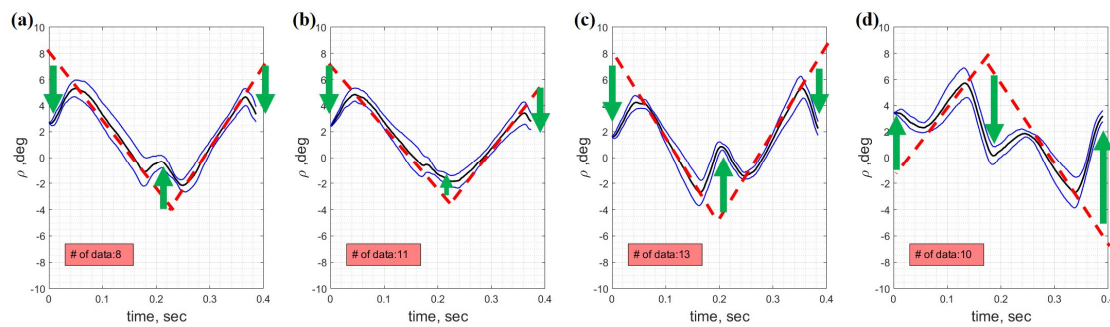


圖 5-9 Normalized ρ - t plot with $J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

(a) $\gamma = 1$ (b) $\gamma = 1.25$ (c) $\gamma = 1.5$ (d) $\gamma = 2$ and line for explanation

圖 5-9 中以紅色虛線代表數據中較低頻的成分，而從圖 5-7 的相同時間中可以看出紅色虛線的區域對應的是 z 位置較高的區域，顯示該區域可能是機器人滯空的時間點，滯空時 ρ 方向並不會受到加減速，因而維持等速是合理的；而綠色箭頭代表附加在這個低頻成分上的高頻干擾，此干擾發生的時間對應到圖 5-7 中便是 z 較低、踏地的時間，顯示此干擾很可能是機器人在踏地過程中所產生的。綜合上述，於實驗中發現機器人在 ρ 方向的動態可以由一個低頻震盪與踏地時發生的高頻干擾疊加而成，這樣的現象與圖 2-13 或圖 2-14 中描述簡單 Roll 模型在 $\gamma = 1.25$ 或 $\gamma = 2$ 的 fixed point 的 $\rho - t$ 圖相當雷同，代表實際六足機器人在跑動過程中可能與簡單 Roll 模型所描述的動態相似。

接著可以觀察 J, γ 對動態造成的影響，首先，固定 $J = 0.097$ 比較四種 γ 的 $\rho - t$ 圖，可以發現前述所講的高頻干擾的大小隨著 γ 而有所改變，此高頻干擾的大小以 $\gamma = 1.25$ 為最小，幾乎看不到，而 $\gamma = 1$ 為次小，接著當 $\gamma = 1.5、2$ 則越來越大。因此推測此高頻干擾是因為左右彈簧係數 γ 的差異而造成的，可能的機制是當機器人踏地的瞬間，因為左右兩側的支撐力不同，因而會快速的朝支撐力較差的方向傾斜。

若固定 $\gamma = 1.5$ ，逐漸增加 J 則會發現該高頻干擾逐漸減小，此一現象在 $\gamma = 2, \gamma = 1$ 時都會發生，顯示轉動慣量對於 ρ 方向穩態的運動軌跡確實也有影響。

若觀察當 $\gamma = 1$ 的 $\rho - t$ 圖，會發現實驗結果與模擬結果之間的差異，在實驗結果中， $\gamma = 1$ 的 $\rho - t$ 圖中仍然有圖 5-9 中所描述的低頻震盪與高頻干擾，與 RTL-CTR-SLIP 的模擬結果（ $\rho(t) = 0$ ）不相同，顯示還有實際機器人跑動的過程中仍有部分因素沒有被 RTL-CTR-SLIP 模型所考慮到。

為了能更量化的討論轉動慣量 J 與左右彈簧係數 γ 對六足機器人跑動的影響，接著以三個統計量來衡量這十六組系統參數組合的差異，分別為振幅、方均根值與二階微分的平均值 SD_{avg} 。振幅代表的是六足機器人 Roll 方向晃動的範圍，對於平穩的運作目標而言，希望振幅較小，方均根值代表 Roll 方向晃動與維持 $\rho = 0$ 之間的差異，也是數值越小代表較佳的 Roll 方向平穩性，而最後一個二階微分的平均值代表系統在 Roll 方向受到角加速度的強度大小，如果機器人在 Roll 方向一直受到角加速度擾動，也代表較差的設計，此一參數也希望能顯現出前段討論中高頻干擾的大小差異，計算公式如下：

$$SD_{avg} = \frac{1}{T_{total}} \int |\ddot{\rho}(t)| dt \quad (\text{式 5-2})$$

其中， T_{total} 是整段數據的時間長度，而 $\ddot{\rho}(t)$ 為原始數據 $\rho(t)$ 對時間二次微分的結果，實際計算上會加上相同的濾波以去掉高頻雜訊。結果如下圖所示：

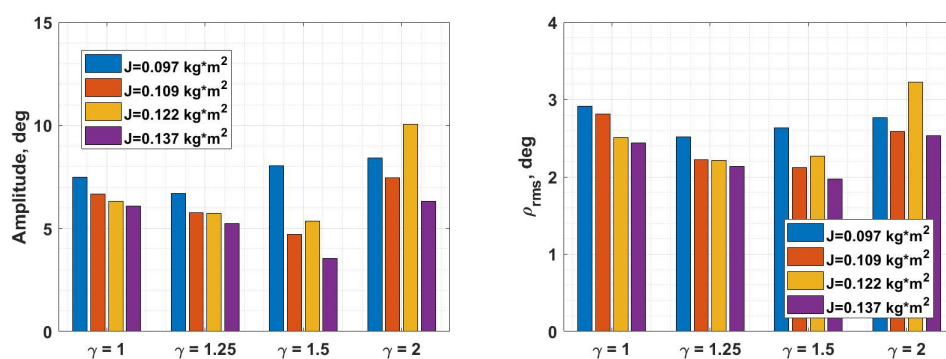


圖 5-10 振幅直方圖(左)、 ρ_{rms} 直方圖(右)。

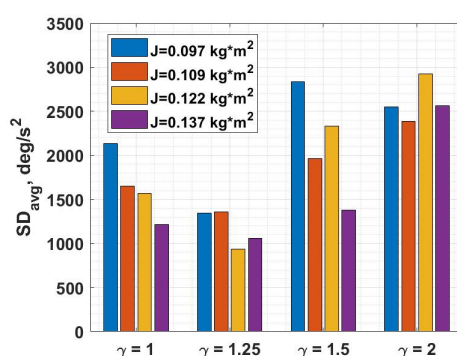


圖 5-11 二次微分平均值 SD_{avg} 直方圖

圖 5-10、圖 5-11 中分別表示了實驗中不同系統參數下 $\rho(t)$ 的振幅、方均根值與二次微分平均值的直方圖。從振幅直方圖中可以看出隨著轉動慣量增加，多數情況下振幅便會減少，而振幅的最低值發生在當 $\gamma = 1.5$ 且 $J = 0.137$ 時，而振幅的最大值發生在當 $\gamma = 2$ 且 $J = 0.122$ 時。 ρ_{rms} 也有相似的趨勢，在 $\gamma = 1.5$ 且 $J = 0.137$ 時有最小值，在 $\gamma = 2$ 且 $J = 0.122$ 時有最大值。

而二次微分平均值則與前兩張圖有不相同的趨勢，因為二次微分平均值描述的物理量是運動過程中的角加速度大小，這個數量指標與之前描述的高頻干擾的大小有所相關，如果高頻干擾越大，如 $\gamma = 2$ 的狀況，則在二次微分平均值也會得到較大的數值。而二次微分平均值的最小值發生在 $\gamma = 1.25$ 且 $J = 0.122$ ，顯示此參數狀態下的 Roll 方向的加速度較為緩和。



5.4 能量損耗分析

利用馬達控制版上的電流偵測與電壓輸出訊號，便可以計算出機器人在跑動的過程中，單顆馬達所輸出的功率，其計算公式如下：

$$\bar{P} = \frac{1}{T_{total}} \int I(t) \cdot V(t) dt \quad (\text{式 5-3})$$

實驗中以三筆三週期（六次踏地）的數據進行積分，計算平均功率。然而實際上需要計算的是整台機器人在跑動的過程中所消耗的總能量，因此需要將六顆馬達所損耗的能量相加，以下呈現統計結果：

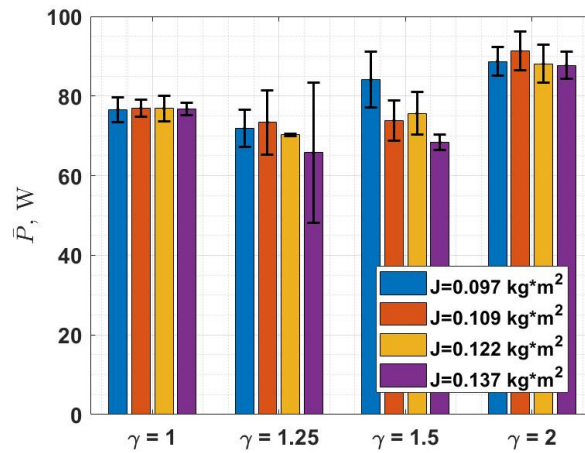


圖 5-12 平均輸出功率直方圖

從圖 5-12 中可以看出不同 J, γ 下，以 R-SLIP 軌跡進行 Tripod 跑動時的輸出功率，可以發現整體而言數據都相當接近，並不如 RTL-CTR-SLIP 分析時所產出的結果有明顯的差異性，甚至數據之間的差異會比實驗不準確度來得小，然而大致上仍能看出當 $\gamma = 2$ 時系統需要輸出較多的能量，而且 $\gamma = 1$ 並不是最節省能量的。

第六章 研究結果與討論



本研究透過建構簡單 Roll 模型、RTL-R-SLIP 模型來了解六足機器人在 Roll 方向上的動態特性，並透過 RTL-R-SLIP 模型嘗試設計改良的 Tripod 步態，接著建構 RTL-CTR-SLIP 模型來分析加入 Clock 的控制對系統造成的影響為何，最後透過實際實驗來與模擬結果相互驗證，並嘗試給出在設計六足機器人時系統參數搭配的建議。以下將分階段說明研究結果並進行討論。

6.1 六足機器人的 Roll 動態特性

本研究希望針對六足機器人的 Roll 動態進行分析，因而分別建置簡單 Roll 模型與 Roll-Two-Leg Rolling Spring Loaded Inverted Pendulum (RTL-R-SLIP) 被動模型來分析六足機器人在 Roll 方向的動態。

在簡單 Roll 模型中，本研究發現：

1. 總能量 $\widetilde{E}_0$ 、左右彈簧係數比 γ 、彈簧係數和 $\widetilde{k_{sum}}$ 與轉動慣量 $\widetilde{J}$ 在特定數值時都會使系統產生 Bifurcation，顯示此系統對各參數的敏感性，以及 fixed point 的出現需要各系統參數的匹配才可能出現。
2. 本研究在簡單 Roll 模型中找到 4 種不同類型的單周期 fixed point 以及三周期與七周期以上的 fixed point，在單周期的 fixed point 中，辨別出其中之一者為不穩定 fixed point，而剩下的三者為穩定 fixed point。
3. 第 2 點中提到的不穩定的 fixed point 為左右彈簧係數相同，在 Roll 方向上沒有任何動態、直上直下跳躍的 fixed point，而過去在機器人步態的設計過程時，都會假設機器人左右兩側性質相同並且在 Roll 方向沒有動態，而直接在 xz 平面（見圖 3-2）進行步態設計，這樣的假設在簡單 Roll 模型的分析後顯得不夠穩固，因為這樣的運動狀態會是不穩定的，若要尋找穩定的被動步態 fixed point，忽略 Roll 方向動態是不恰當的。
4. 接續第 3 點，則第 2 點中提到剩下的三個穩定 fixed point 便為尋找符合 Roll 動態的 Tripod 步態設計提供了線索，而這三個 fixed point 分別是發生在 $\gamma = 1, \rho \neq 0, \dot{\rho} = 0$ 、 $\gamma = 1.25, \rho \neq 0, \dot{\rho} \neq 0$ 、 $\gamma = 2, \rho = 0, \dot{\rho} \neq 0$ 。

RTL-R-SLIP 模型為兩個 R-SLIP 模型並排在左右並以一剛體軀幹連結在一起所形成的模型，在 RTL-R-SLIP 模型中，本研究發現：

1. 呼應簡單 Roll 模型中的第 3 點，在 RTL-R-SLIP 模型中也驗證當 $\gamma = 1, \rho = 0, \dot{\rho} = 0$ 時，即使在 xz 平面上給出在 R-SLIP 模型中會穩定跑動的初始條件，系統仍然會逐漸發散，最終無法繼續跑動，在 Return map 上也呈現不穩定的特性。即使調整轉動慣量也無法抵銷這個不穩定性。
2. 當 $\gamma = 2$ 時，若以 $\rho = 0, \dot{\rho} = 0$ 以及 R-SLIP 模型所找出的初始條件使模型進行跑動，模型便會因為左右扭簧係數的差異而很快失敗，無法繼續起跳，顯示左右彈簧係數的差異對模型的影響仍然很大，但 $\gamma = 2$ 便是過去實驗室常使用且能順利運行的機器人配置，顯示只考慮被動模型仍不夠完整，還需要更進一步的考慮主動控制對模型造成的影響。

6.2 以 RTL-R-SLIP 模型為基礎設計的 Tripod 步態

本研究利用 RTL-R-SLIP 模型進行改良 Tripod 步態的設計，透過大量撒點搭配 Return map 進行 fixed point 的搜索，目前所得出的最佳結果為圖 3-8 所示的 fixed point。然而從 Return map 與實際的跑動模擬都看出此 fixed point 仍是一個不理想的 fixed point，即使在後續加上 Clock-Torqued 的主動控制的表現也不夠理想（圖 4-2(h)），但在能量損耗的分析（圖 4-6）中可以看出以 RTL-R-SLIP 模型為基礎進行軌跡生成確實可以大幅降低馬達所需要的扭力輸出，確實為值得努力的搜索方向。

從簡單 Roll 模型中我們已經知道幾個可能存在 fixed point 的參數空間，也知道總能量 $\widetilde{E}_0$ 也是一個重要參數，但在目前的研究中為了節省運算成本，在 fixed point 的搜索上固定了 v 與 α ，是與總能量相關的一個數值，未來若能增加搜索的自由度，並且參考簡單 Roll 模型中出現 fixed point 的參數空間進行搜索，相信便可以改善目前 Tripod 軌跡仍不理想的問題。

6.3 Clock-Torqued 主動控制對系統造成的影響

由簡單 Roll 模型與 RTL-R-SLIP 模型只能對六足機器人在 Roll 方向上的被動動態進行分析，然而實際上六足機器人在跑動的過程中，是以控制器給予理想軌跡進行主動控制，因此本研究也建立了 Roll-Two-Leg Clock Torqued Rolling Spring Loaded Inverted Pendulum 的主動模型，來分析 Clock 對系統造成的影響，本研究發現：

1. 透過 Time response 分析與 Basin of attraction 分析，本研究發現以 R-SLIP 模型所設計的 Tripod 軌跡可以使 RTL-CTR-SLIP 的穩定性增加，使模型可以持續跑動超過 10 步，而不會像圖 3-7(e)(f)中跑動 7 步便失敗，而收斂範圍的區間也從圖 3-5(a)中在 ρ 只有 0 度附近的區域擴增到如圖 4-3(c)中 ρ 可以分布於-4 度到+4 度之間的區域，但值得注意的是，該收斂區間還需要與 δ_L, δ_R 相匹配才能收斂。
2. 在 RTL-R-SLIP 模型中當 $\gamma = 2$ 時系統會在一步之內失敗，但在加上 R-SLIP 模型所生成的 fixed point 軌跡給控制器追隨之後，卻發現在 RTL-CTR-SLIP 中系統可以穩定跑動，並且比較圖 4-3 與圖 4-4 可以發現在 RTL-CTR-SLIP 模型中， γ 的改變對 BoA 的變化沒有非常顯著的影響，顯示 Clock 控制仍然是相當強韌的。
3. 承接第 2 點，雖然當 $\gamma = 2$ 時系統可以穩定跑動，但系統的動態並沒有如同 $\gamma = 1$ 時收斂到 $\rho(t) = \dot{\rho}(t) = 0$ 的穩態上，而是收斂到新的穩態上（如圖 4-2(d)所示）。顯示即使 R-SLIP 軌跡可以很強韌的控制機器人的跑動狀態，但單以 R-SLIP 模型來描述六足機器人的動態仍不足夠。
4. 當 $\gamma = 1$ 時，主動控制器幾乎不需要輸出力矩與功率來維持系統平衡，然而當 γ 逐漸增加，力矩與功率的需求便逐漸上升，如同第 3 點所述，因為無法回到 $\rho(t) = \dot{\rho}(t) = 0$ 的穩態上，因此控制器就需要持續輸出力矩以穩定模型持續跑動。

6.4 驗證實驗結果

在驗證實驗中，本研究在六足機器人上裝置配重塊以實現不同轉動慣量、製作不同寬度的圓弧腳來改變左右扭簧係數比，並以 R-SLIP 生成之 Tripod 不太驅動六足機器人，收集機器人在穩態跑動時 Roll 方向的動態數據以及馬達的能量損耗數據，我們發現：

1. Roll 方向的動態（如圖 5-9 所示的 $\rho - t$ 圖）由一個低頻的振盪訊號與踏地時所的高頻干擾所組成，而大致上隨著 γ 增加或是 J 減小，高頻干擾會越來越大，這樣的趨勢與「二階微分平均值 SD_{avg} （圖 5-11）」的結果相呼應，顯示 γ, J 的變化會影響六足機器人在穩態運動時所受到的加速度大小。在實驗數據中當 $\gamma = 1.25$ 且 $J = 0.122$ 時二階微分平均值有最小值。
2. 在 Roll 方向的振幅與 ρ_{rms} （圖 5-10）也會受到 γ, J 的影響，整體趨勢上，隨著 J 增加，振幅與 ρ_{rms} 會隨之減小，但振幅與 ρ_{rms} 的關係則不是線性的，趨勢上是以 $\gamma = 1.5$ 為最低點，當 γ 增加或減少則振幅與 ρ_{rms} 便逐漸增加。在實驗數據中當 $\gamma = 1.5$ 且 $J = 0.137$ ，振幅與 ρ_{rms} 有最小值。
3. 在能量損耗的數據中（圖 5-12），大致上仍能看出當 $\gamma = 2$ 時系統需要輸出較多的能量，而且 $\gamma = 1$ 並不是最節省能量的。

6.5 電腦模擬與實驗比較

在 RTL-CTR-SLIP 模擬與驗證實驗中都有收集系統的 Roll 方向動態數據以及能量損耗數據，以下進行幾點比較以及可能原因的討論：

1. 當 $\gamma = 1$ 時，在 RTL-CTR-SLIP 模型中系統會維持 $\rho = \dot{\rho} = 0$ （圖 4-2(a)），但在實驗數據中（圖 5-8）卻以類似三角波的形式進行週期性晃動。本研究認為可能的原因是 RTL-CTR-SLIP 模型未考慮圓弧腳甩動對系統造成的力矩：六足機器人在跑動時會快速地甩動圓弧腳，雖然其質量相對於整台機器人可以忽略，但是馬達驅動的速度相當快，而且圓弧腳的位置也遠離轉軸中心有較大的力臂，在慣性力的作用下會造成 Roll 方向的力矩，但這樣的外界擾動並沒有被 RTL-CTR-SLIP 模型所考慮，因而可能造成誤差。
2. 以 $\gamma = 2, J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 並且使用 R-SLIP 模型所生成的 Tripod 步態跑動的狀況為例，比較實驗數據、簡單 Roll 模型與 RTL-CTR-SLIP 模型得到的數據，將三者數據以相同的方式呈現做比對

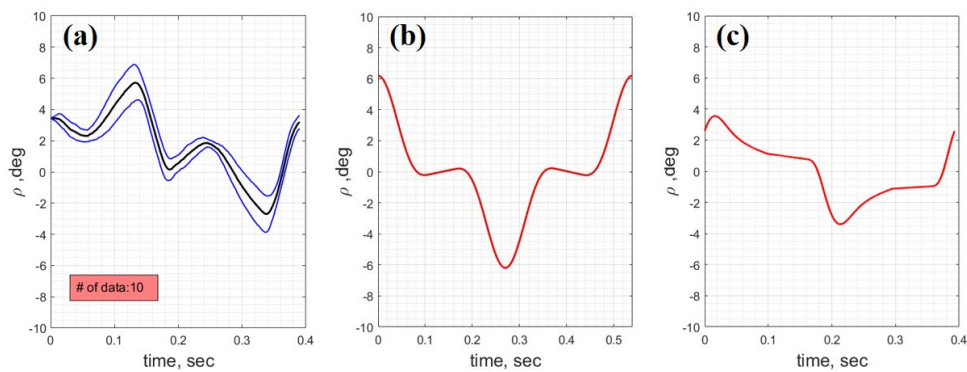


圖 6-1 $\rho - t$ plot of $\gamma = 2, J = 0.097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

(a) Experiment result (c) Simple roll model result (b) RTL-CTR-SLIP result.

從圖 6-1 中我們發現不論是實驗或是模擬所得到的結果，當時間在整個週期約等於一半時都會有一個往下凹的現象發生，若從 Time response 中可以確認該下凹代表的是機器人在踏地得瞬間會有一個較劇烈的晃動，推測其原因是當 $\gamma = 2$ 時左右兩側的彈簧差異較大，而造成的晃動，這顯示目前開發的模型都可以抓到機器人的這一個運動特性，也就是在 5.3 中所討論的高頻干擾。然而其餘部分則和實驗結果有較大的差異，可能的原因和第 1 點相同，在 RTL-CTR-SLIP 模型中沒有考慮圓弧腳甩動造成的力矩。

3. 在能量損耗的分析中，由 RTL-CTR-SLIP 模型給出的趨勢如圖 4-6 所示，當 $\gamma = 1$ 時系統幾乎不須輸出力矩來維持系統穩定，而隨著 γ 增加，系統需要輸出的功率也要增加來抵抗 γ 造成的不穩定，同時，當轉動慣量 J 增加，模擬的結果也顯示需要提高輸出功率才能維持穩定跑動。在實際實驗中（如圖 5-12 所示）， $\gamma = 1$ 並不是輸出功率最低的狀況，這是與模擬結果相異的。這顯示 RTL-CTR-SLIP 模型仍只能表現出六足機器人的部分特性，可能還有此模型中未考慮的因素，包含第 1 點提到的圓弧腳甩動造成的力矩，以及 γ 除了對 Roll 方向動態造成影響，也可能對其他機制造成影響。本研究認為，當轉動慣量增加，圓弧腳甩動而造成的力矩的效應就會相對減少，便可能因此減少 Roll 方向的擾動，因而減少能量輸出的需求。而當 $\gamma = 1$ 時，因為前後腳的圓形腳太細，可能更容易發生大形變，因而無法以 R-SLIP 模型妥善描述，這也可能是造成 RTL-CTR-SLIP 在能量損耗的估計上出錯的原因。



6.6 對六足機器人 Tripod 跑動之建議

對於未來設計六足機器人進行 Tripod 步態的跑動，由於本研究中模擬與實驗的結果不完全相符，因而只對左右彈簧係數比 γ 與步態生成方法提出方向性的建議：

左右彈簧係數比 γ

以下討論的是以 R-SLIP 軌跡進行 Tripod 跑動狀況：

當 $\gamma = 1$ 時，在 RTL-CTR-SLIP 模型中的跑動結果是最理想的，然而在實際的實驗中，此方案在 z 方向的運動較其他 γ 的結果來得不穩定，在 Roll 方向的振幅、 ρ_{rms} 、二次微分平均值也不是最低的，這可能與前後腳的圓弧腳寬度太細而發生大形變、較難抵抗 pitch 方向的干擾有關，因此在 $\gamma = 1$ 的狀況下並不會是最佳解。

當 $\gamma = 2$ 時，由 RTL-CTR-SLIP 模型可以發現此狀況最為耗能，並且此結果也在實際實驗中受到驗證，同時當 $\gamma = 2$ 時，在 Roll 方向的振幅、 ρ_{rms} 、二次微分平均值都是較大的，顯示了這樣的系統參數配置是不佳的。

因此較恰當的選項便落到兩者之間，在 γ 造成的不穩定與圓弧腳寬度差異太大之間找到適當的平衡，若以目前的實驗數據來判斷，當 $\gamma = 1.25$ 時 Roll 方向的二次微分平均值較低，而當 $\gamma = 1.5$ 時 Roll 方向的振幅與方均根值較低，而在能量損耗上兩者都相近，未來在進行設計時可以以此做為參考再進行設計上的選擇。

步態生成方法

本研究中有兩種生成 Tripod 步態的做法，第一個是過去學長姐所開發的以 R-SLIP 模型的 fixed point 來進行生成，第二個為本研究所提出由 RTL-R-SLIP 模型來進行生成。

第一個生成法的優勢為所需的系統參數較少，較為簡潔，然而在搭配 $\gamma \neq 1$ 的機器人進行跑動時，雖然因為控制的強韌性仍可進行跑動，但需要輸出較多的能量以維持跑動、且 Roll 方向的動態是在 R-SLIP 模型中無法預期的。

第二個生成法的優勢是可以適應不同的 γ 數值，即使在 $\gamma \neq 1$ 的狀況下也能減少馬達輸出的需求，然而其困難點是此模型的參數過多，需要收集較多系統參數才能進行設計，而且在 fixed point 的搜尋上也會消耗較多的計算資源，目前也無法確認搜尋得到的 fixed point 軌跡是否真的能透過 Clock 的控制方式增加收斂範圍的大小。

第七章 結論與未來展望



7.1 結論

本研究探索六足機器人在 Roll 方向上的動態特性，建置了簡單 Roll 模型、RTL-R-SLIP 被動模型與 RTL-CTR-SLIP 主動模型，提供本研究更深入探討六足機器人在 Roll 方向上動態的工具，並且在目前實驗室的六足機器人上加裝配重塊以調整其轉動慣量、製作不同寬度的圓弧腳，藉此來比較不同系統參數 (J, γ) 對系統動態造成的影響。

透過 Poincare section 與 Return map 分析，本研究發現在被動系統中，六足機器人在 Roll 方向的動態是非常不穩定的，然而透過加上以 R-SLIP 軌跡為 Clock 的主動控制，在 RTL-CTR-SLIP 中可以看到系統變得相對穩定，顯示 Clock-Torqued 是一個強韌的控制方法。

本研究也藉由 RTL-R-SLIP 被動模型，嘗試生成考慮 Roll 動態的 Tripod 步態，然而因為系統自由度過多、需耗費大量運算資源，目前找到的 fixed point 步態仍然不夠理想，即使藉由 Clock 進行主動控制，仍然會在 9 步以內失敗，相較於以 R-SLIP 模型所生成的軌跡來的不穩定，但由 RTL-R-SLIP 被動模型所生成的軌跡在能量損耗上的表現則較為優秀，是值得繼續開發的。

藉由 RTL-CTR-SLIP 主動模型，本研究發現在模型模擬中能量損耗和 J 與 γ 都呈現正相關，然而在驗證實驗中卻得到不同的結果，在驗證實驗中，當 $\gamma = 2$ 時系統需要輸出較多的能量，但 $\gamma = 1$ 並不是最節省能量的，這顯示 RTL-CTR-SLIP 模型仍只能表現出實際機器人的部分特性，仍有改善的空間。

最後透過上述的分析，本研究對於未來使用六足機器人進行 Tripod 步態跑動給出兩個方向性建議，第一，左右彈簧係數比 γ 應該在因為 γ 造成的不穩定與圓弧腳寬度差異太大之間找到適當的平衡，以目前實驗的結果來說 $\gamma = 1.25$ 或 1.5 的效果是較好的，第二，Tripod 步態生成法可以考量能量輸出需求與設計步態的難易度來選擇以 R-SLIP 模型或是 RTL-R-SLIP 模型來生成 Tripod 步態，前者較容易生成步態，而後者可以降低機器人所需要輸出的能量功率。

7.2 未來展望

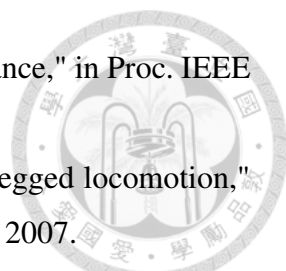
以下列出幾點未來可以發展的方向：

1. 參考簡單 Roll 模型發生 fixed point 的參數空間，同時調整更多 RTL-R-SLIP 模型中的系統參數，以找出穩定的 fixed point，改進 3.4 的步態生成結果，並進行實際實驗以驗證新步態的特性。
2. 在 RTL-CTR-SLIP 模型中加入圓弧腳甩動的力矩，以更進一步模擬實際機器人跑動的狀況，解決目前 RTL-CTR-SLIP 模型模擬結果與實驗結果有差距的問題。
3. 以類似簡單 Roll 模型的簡單模型，來考量系統在 pitch 方向會如何受到 γ 變化造成的影響，進而綜合評估 γ 對整體機器人造成的影響。
4. 目前在六足機器人上所設計的跑動步態都為直線前進的跑動動態，若在 RTL-R-SLIP 模型中加入 Yaw 方向（垂直地面的轉軸）的自由度，便可討論機器人左右兩腳在轉彎時的差異，進而生成使機器人邊轉彎邊跑動的步態。

參考文獻



- [1] *FANUC* [Online]. Available: <https://www.fanuc.com/>
- [2] *KUKA* [Online]. Available: <https://www.kuka.com/zh-tw>
- [3] *Amazon* [Online]. Available: <https://www.amazon.com/>
- [4] *Amazon Robotics* [Online]. Available: <https://www.amazon.jobs/en/teams/amazon-robotics>
- [5] *Pepper* [Online]. Available: <https://www.softbank.jp/en/robot/>
- [6] *Perseverance Rover* [Online]. Available: <https://mars.nasa.gov/mars2020/>
- [7] *BigDog* [Online]. Available: <https://www.bostondynamics.com/bigdog>
- [8] U. Saranli, M. Buehler, and D. E. Koditschek, "RHex: A simple and highly mobile hexapod robot," *Int. J. Robot. Res.*, vol. 20, no. 7, pp. 616-631, Jul. 2001.
- [9] K. J. Huang, C. K. Huang, and P. C. Lin, "A simple running model with rolling contact and its role as a template for dynamic locomotion on a hexapod robot," *Bioinspir. Biomim.*, vol. 9, no. 4, Dec. 2014, Art. no. 046004.
- [10] W. C. Lu, M. Y. Yu, and P. C. Lin, "Clock-Torqued Rolling SLIP Model and Its Application to Variable-Speed Running in a Hexapod Robot," *IEEE Trans. Robot.*, vol. 34, no. 6, pp. 1643-1650, Dec. 2018.
- [11] C. J. Hu, T. K. Wang, C. K. Huang, and P. C. Lin, "A Torque-actuated dissipative spring loaded inverted pendulum model with rolling contact and Its application to hexapod running," *Bioinspir. Biomim.*, vol. 14, no. 2, Mar. 2019, Art. no. 026005.
- [12] R. J. Full and D. E. Koditschek, "Templates and Anchors Neuromechanical Hypotheses of Legged Locomotion on Land," *Journal of Experimental Biology*, vol. 202, no. 23, pp. 3325-3332, 1999.
- [13] R. M. Alexander, *Elastic Mechanisms in Animal Movement* Cambridge University Press 1988.
- [14] R. Blickhan, "The Spring-mass Model for Running and Hopping," *Journal of biomechanics*, vol. 22, no. 11-12, pp. 1217-1227, 1989.
- [15] Chen, J. J., Peattie, A. M., Autumn, K. and Full, R. J. (2006). Differential leg function in a sprawled-posture quadrupedal trotter. *J. Exp. Biol.* 209, 249-259.
- [16] A. De, D. E. Koditschek, "Vertical hopper compositions for reflex-ive and feedback-stabilized quadrupedal bounding pacing pronking and trotting", under review, Dec. 2016.

- 
- [17] J. Y. Jun and J. E. Clark, "Effect of rolling on running performance," in Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (ICRA), 2011, pp. 2009-2014.
- [18] J. Seipel and P. Holmes, "A simple model for clock-actuated legged locomotion," Regular & Chaotic Dynamics, vol. 12, no. 5, pp. 502-520, Oct. 2007.
- [19] J. Y. Jun and J. E. Clark, "Dynamic stability of variable stiffness running," in Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (ICRA), 2009, pp. 1756-1761.
- [20] Y. Or and M. Moravia, "Analysis of Foot Slippage Effects on an Actuated Spring-mass Model of Dynamic Legged Locomotion," Int. J. Adv. Robot. Syst., vol. 13, Apr. 2016, Art. no. 69.
- [21] J. -R. Chiu, Y. -C. Huang, H. -C. Chen, K. -Y. Tseng and P. -C. Lin, "Development of a Running Hexapod Robot with Differentiated Front and Hind Leg Morphology and Functionality," 2020 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), Las Vegas, NV, USA, 2020, pp. 3710-3717, doi: 10.1109/IROS45743.2020.9340811.
- [22] I. Poulakakis, J. A. Smith, and M. Buehler, "Modeling and experiments of untethered quadrupedal running with a bounding gait: The Scout II robot," Int. J. Robot. Res., vol. 24, no. 4, pp. 239-256, Apr. 2005.
- [23] I. Poulakakis, E. Papadopoulos, and M. Buehler, "On the stability of the passive dynamics of quadrupedal running with a bounding gait," Int. J. Robot. Res., vol. 25, no. 7, pp. 669-685, Jul. 2006.
- [24] A. De, S. A. Burden, and D. E. Koditschek, "A hybrid dynamical extension of averaging and its application to the analysis of legged gait stability," Int. J. Robot. Res., vol. 37, no. 2-3, pp. 266-286, Feb-Mar. 2018.
- [25] C. K. Huang, C. L. Chen, C. J. Hu, and P. C. Lin, "Model-based bounding on a quadruped robot," in Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (ICRA), 2016, pp. 3576-3581.
- [26] 曾冠語(2019)。足式平面基礎模型之探索與其應用於四足機器人翻跳及跑步行為。國立臺灣大學工學院機械工程學系碩士論文，台北市。
- [27] H. Kimura, Y. Fukuoka, Y. Hada and K. Takase, "Three-dimensional adaptive dynamic walking of a quadruped - rolling motion feedback to CPGs controlling pitching motion," Proceedings 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.02CH37292), Washington, DC, USA, 2002, pp. 2228-2233 vol.3.

- [28] S. H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos with Student Solutions Manual: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. CRC Press, 2018.

