

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

楔形渠道內由於表面張力效應引發之
暫態流動現象研究

計畫類別：☒個別型計畫 ☐整合型計畫

計畫編號：NSC91-2212-E-002-090

執行期間：91年8月1日至92年7月31日

計畫主持人：賴君亮

本成果報告包括以下應繳交之附件：

- ☐赴國外出差或研習心得報告一份
- ☐赴大陸地區出差或研習心得報告一份
- ☐出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
- ☐國際合作研究計畫國外研究報告書一份

執行單位：國立台灣大學工學院機械工程學系

中華民國九十二年七月三十一日

誌 謝

本研究計畫在中華民國國家科學委員會的贊助下得以順利完成,特此深致謝意。

摘要

本文以理論方法探討壁面熱傳與液面蒸發對楔型渠道流的影響。當楔型渠道的半渠道角 α 、與流體間的接觸角 θ 、液面處的剪應力分佈 S 為常數且不受壁面熱傳及液面蒸發的影響時，流場將會存在相似解；但是當 S 為流向的函數或是渠道壁面處受到熱傳傳入及液面有蒸發現象時，統御方程式會成為一非線性的偏微分方程式，此時就需要以數值方法來模擬液柱高度 $h(t, z)$ 以及液柱尖端位置 $l(t)$ 的變化。由研究中發現，當受渠道壁面熱傳以及液面蒸發的影響時，液柱的行進速度將趨緩；當壁面熱傳及液面蒸發成週期性的振盪型式時，液柱的行進速度也將成週期性的振盪型式。若將週期性的熱傳效應與相當的定值熱傳效應(平均熱傳量相等)相較，可發現不論在等流量階段或是等液柱高度階段，除低頻時，週期性熱傳效應對液柱行進的影響較之於定值熱傳效應為小外，在中頻與高頻的熱傳情況，由於波峰值與波谷值的相互抵消，週期性的熱傳效應與定值的熱傳效應對液柱的平均行進速度則具有相同的影響。雖然如此，一般而言，液柱的行進在等流量階段受熱傳與蒸發的影響要比在等液柱高度階段來得大。

Abstract

The effects on the capillary flow in a wedge due to the heat absorption from the wedge wall and the evaporation from the free surface are studied theoretically. Under the assumptions of slenderness with negligible gravitational and inertia effects, similarity solutions for the surface height variation may exist under certain circumstances. In general, numerical simulation has to be applied to solve the problem.

The flow situations are studied; one with a constant heat absorption from the wedge wall, the other with a periodic heat supply from the boundary to simulate the “on-off” effect in electronic appliances. The results indicate that the propagation of the liquid column will be retarded by heat supply from the wedge wall and evaporation from the free surface. Periodic heat supply will induce a periodic moving speed of the liquid column. In both the constant-flow-rate stage and the constant-height stage, the periodic heat condition of low frequency may induce a smaller effect on the liquid column propagation than that induced by the equivalent constant heat condition. However, when the frequency $\omega \geq O(1)$, these two heat conditions produce no difference on the liquid column propagation. Nevertheless, in general, evaporation affects the liquid column propagation stronger in the constant-flow-rate stage than in the constant-height stage.

目錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
目錄.....	iii
表目錄.....	v
圖目錄.....	vi
符號說明.....	x
第一章 緒論.....	1
1-1 前言.....	1
1-2 實用性.....	3
1-3 文獻回顧.....	3
1-4 本文研究動機與架構.....	5
第二章 流場數學模式.....	6
2-1 基本假設.....	6
2-2 無因次化.....	7
2-3 統御方程式.....	7
第三章 流場速度與尖端位置.....	12
3-1 流場速度分佈.....	12
3-2 速度場數值方法與格點系統.....	13
3-3 速度場的結果討論.....	15
3-4 相似解.....	17
3-5 液柱高度與尖端位置變化.....	19

3-6 液柱高度與尖端位置的討論.....	24
第四章 渠道熱傳的效應與影響.....	28
4-1 基本假設.....	28
4-2 液柱高度與尖端位置的變化.....	28
4-3 結果討論.....	30
第五章 結論與建議.....	33
參考文獻.....	35
附表.....	37
附圖.....	40

表目錄

表 1 $\bar{w}$ 與 F_i 隨 m 值增加的收斂情況； $\alpha = 45^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $S = 0.0$ 。

表 2 F_i 隨著 α 與 θ 的變化； $S = 0.0$ 。

表 3 $\frac{F_i \cdot \sin^2 \alpha}{f}$ 隨著 α 與 θ 的變化； $S = 0.0$ 。

圖目錄

- 圖 1.1 楔型渠道示意圖。
- 圖 1.2 楔型渠道截面與座標系統示意圖。
- 圖 3.1 液柱截面的格點系統；(a) $\alpha = 30^\circ, \theta = 0^\circ$ ；(b) $\alpha = 45^\circ, \theta = 30^\circ$ ；(c) $\alpha = 60^\circ, \theta = 15^\circ$ 。
- 圖 3.2 格點數 m 值之收斂測試， $\alpha = 45^\circ, \theta = 30^\circ$ 及 $S = 0.0$ ；(a) F_i 與 m ；(b) $\bar{w}$ 與 m 。
- 圖 3.3 液柱截面速度 w 分佈， $S = 0$ ；(a) $\alpha = 30^\circ, \theta = 45^\circ$ ；(b) $\alpha = 45^\circ, \theta = 30^\circ$ 。
- 圖 3.4 液柱截面速度 w ， $\alpha = 45^\circ, \theta = 30^\circ$ ；(a) $S = 0.05$ ；(b) $S = 0.075$ ；(c) $S = 0.1$ 。
- 圖 3.5 液面處有剪應力作用下的截面速度 w ；(a) $S = 0.05$ ；(b) $S = 0.075$ ；(c) $S = 0.1$ 。
- 圖 3.6 α 與 θ 的關係， $S = 0$ ；(a) F_i ；(b) $\frac{F_i \cdot \sin^2 \alpha}{f^2}$ 。
- 圖 3.7 S 的關係圖(a) $\bar{w}$ ；(b) F_i 。
- 圖 3.8 相似解 $\tilde{F}$ 與 $\tilde{\eta}$ 。
- 圖 3.9 液柱高度圖， $\alpha = 45^\circ, \theta = 30^\circ, S = 0$ ；(a) 等流量階段；(b) 等液柱高度階段。
- 圖 3.10 等流量階段的液柱尖端位置圖， $\alpha = 45^\circ, \theta = 30^\circ, S = 0.0$ ；(a) $l(t)$ 與 t ；(b) $\log(l(t))$ 與 $\log(t)$ 。
- 圖 3.11 在等流量階段， $h(z, t)$ 與 t 和 F_i 的變化；(a) $t = 3$ ；(b)

$t=5$; (c) $t=7$; (1) $F_i=0.1221$; (2) $F_i=0.1506$; (3)
 $F_i=0.2791$ 。

圖 3.12 在等液柱高度階段， $h(z,t)$ 與 t 和 F_i 的變化；(a) $t=3$; (b)
 $t=5$; (c) $t=7$; (1) $F_i=0.1221$; (2) $F_i=0.1506$; (3)
 $F_i=0.2791$ 。

圖 3.13 在等流量階段， $l(t)$ 與 t 和 F_i 的變化；(a) $l(t)$ 與 t ; (b)
 $\log(l(t))$ 與 $\log(t)$; (1) $F_i=0.1221$; (2) $F_i=0.1506$; (3)
 $F_i=0.2791$ 。

圖 3.14 在等液柱高度階段， $l(t)$ 與 t 和 F_i 的變化；(a) $l(t)$ 與 t ; (b)
 $\log(l(t))$ 與 $\log(t)$; (1) $F_i=0.1221$; (2) $F_i=0.1506$; (3)
 $F_i=0.2791$ 。

圖 3.15 液柱高度 $h(t,z)$ 在等流量階段的變化； $\alpha=45^\circ$ 、 $\theta=30^\circ$ 、
 $S=0.0+0.1 \cdot z$ 。

圖 3.16 液柱高度 $h(t,z)$ 在等液柱高度階段的變化； $\alpha=45^\circ$ 、
 $\theta=30^\circ$ 、 $S=0.0+0.1 \cdot z$ 。

圖 3.17 $l(t)$ 與 t 在等流量階段的關係； $\alpha=45^\circ$ 、 $\theta=30^\circ$ 、
 $S(z)=0.0+0.1 \cdot z$ 。

圖 3.18 $l(t)$ 與 t 在等液柱高度階段的關係； $\alpha=45^\circ$ 、 $\theta=30^\circ$ 、
 $S(z)=0.0+0.1 \cdot z$ 。

圖 3.19 液柱高度 $h(t,z)$ 在等流量階段的變化； $\alpha=45^\circ$ 、 $\theta=30^\circ$ 、
 $S=0.075-0.1 \cdot z$ 。

圖 3.20 液柱高度 $h(t,z)$ 在等液柱高度階段的變化； $\alpha=45^\circ$ 、
 $\theta=30^\circ$ 、 $S=0.075-0.1 \cdot z$ 。

- 圖 3.21 $l(t)$ 與 t 在等流量階段的關係； $\alpha=45^\circ$ 、 $\theta=30^\circ$ 、 $S(z)=0.075-0.1\cdot z$ 。
- 圖 3.22 $l(t)$ 與 t 在等液柱高度階段的關係； $\alpha=45^\circ$ 、 $\theta=30^\circ$ 、 $S(z)=0.075-0.1\cdot z$ 。
- 圖 3.23 液柱高度 $h(t,z)$ 在等流量階段的變化； $\alpha=45^\circ$ 、 $\theta=30^\circ$ 、 $S=-0.1+0.1\cdot z$ 。
- 圖 3.24 液柱高度 $h(t,z)$ 在等液柱高度階段的變化； $\alpha=45^\circ$ 、 $\theta=30^\circ$ 、 $S=-0.1+0.1\cdot z$ 。
- 圖 3.25 $l(t)$ 與 t 在等流量階段的關係； $\alpha=45^\circ$ 、 $\theta=30^\circ$ 、 $S(z)=-0.1+0.1\cdot z$ 。
- 圖 3.26 $l(t)$ 與 t 在等液柱高度階段的關係； $\alpha=45^\circ$ 、 $\theta=30^\circ$ 、 $S(z)=-0.1+0.1\cdot z$ 。
- 圖 3.27 液柱高度 $h(t,z)$ 在等流量階段的變化； $\alpha=45^\circ$ 、 $\theta=30^\circ$ 、 $S=0.0-0.1\cdot z$ 。
- 圖 3.28 液柱高度 $h(t,z)$ 在等液柱高度階段的變化； $\alpha=45^\circ$ 、 $\theta=30^\circ$ 、 $S=0.0-0.1\cdot z$ 。
- 圖 3.29 $l(t)$ 與 t 在等流量階段的關係； $\alpha=45^\circ$ 、 $\theta=30^\circ$ 、 $S(z)=0.0-0.1\cdot z$ 。
- 圖 3.30 $l(t)$ 與 t 在等液柱高度階段的關係； $\alpha=45^\circ$ 、 $\theta=30^\circ$ 、 $S(z)=0.0-0.1\cdot z$ 。
- 圖 4.1 楔型渠道壁面熱傳示意圖。
- 圖 4.2 液柱高度 $h(t,z)$ 在等流量階段的變化；定值熱傳 $\dot{q}=0.01$ 。
- 圖 4.3 液柱高度 $h(t,z)$ 在等液柱高度階段的變化；定值熱傳 $\dot{q}=0.01$ 。

- 圖 4.4 $l(t)$ 與 t 在等流量階段的關係；定值熱傳 $\dot{q}=0.01$ 。
- 圖 4.5 $l(t)$ 與 t 在等液柱高度階段的關係；定值熱傳 $\dot{q}=0.01$ 。
- 圖 4.6 定值熱傳 $\dot{q}$ 與 ζ 關係圖；(a) 等流量階段；(b) 等液柱高度階段。
- 圖 4.7 渠道壁面熱傳 $\dot{q}$ 之函數；(a) $\omega=0.1$ ；(b) $\omega=1$ ；(c) $\omega=10$ ；(d) $\omega=50$ 。
- 圖 4.8 週期性熱傳， $l(t)$ 與 t 在等流量階段的關係， $q_0=0.02$ ；(a) $\omega=0.1$ ；(b) $\omega=1$ ；(c) $\omega=10$ ；(d) $\omega=50$ ，淺色為定值熱傳 $\dot{q}=0.01$ ，淡色為無熱傳 $q=0$ 。
- 圖 4.9 週期性熱傳在等流量階段液柱前進速度， $q_0=0.02$ ；(a) $\omega=0.1$ ；(b) $\omega=1$ ；(c) $\omega=10$ ；(d) $\omega=50$ ，淺色為定值熱傳 $\dot{q}=0.01$ ，淡色為無熱傳 $q=0$ 。
- 圖 4.10 週期性熱傳， $l(t)$ 與 t 在等液柱高度階段的關係， $q_0=0.02$ ；(a) $\omega=0.1$ ；(b) $\omega=1$ ；(c) $\omega=10$ ；(d) $\omega=50$ ，淺色為定值熱傳 $\dot{q}=0.01$ ，淡色為無熱傳 $q=0$ 。
- 圖 4.11 週期性熱傳在等液柱高度階段液柱前進速度， $q_0=0.02$ ；(a) $\omega=0.1$ ；(b) $\omega=1$ ；(c) $\omega=10$ ；(d) $\omega=50$ ，淺色為定值熱傳 $\dot{q}=0.01$ ，淡色為無熱傳 $q=0$ 。
- 圖 4.12 液柱高度 $h(t, z)$ 在等流量階段的變化；(a) 無熱傳 $\dot{q}=0$ ；(b) 定值熱傳 $\dot{q}=0.01$ ；(c) 定值熱傳 $\dot{q}=0.02$ ；(d) 定值熱傳 $\dot{q}=0.026$ 。

符 號 說 明

A	無因次液柱截面積； $A = \tilde{A} / H_0^2$
$\tilde{A}$	液柱截面積
Bo	Bond 數； $Bo \equiv \frac{\Delta\rho \cdot g \cdot L_0^2}{\sigma}$
F	相似解
F_A	輪廓因子； $F_A \equiv \frac{A}{h^2}$
F_i	流動係數； $F_i = \frac{\bar{w} \cdot f^2}{\sin^2 \alpha}$
$\tilde{F}$	經過修正的相似解； $F = \lambda^2 \tilde{F}$
f	渠道幾何參數； $f = \left(\frac{\cos \theta}{\sin \alpha} - 1 \right)^{-1}$
g	重力場大小
H	在 $\phi = 0$ 處的液柱高度
H_0	在 $\phi = 0$ 處的液柱特徵高度
h	在 $\phi = 0$ 處的無因次液柱高度
h_{fg}	流體的潛熱
L	液柱尖端位置
L_0	Z 方向的特徵長度
l	無因次化的液柱尖端位置； $l = \frac{L}{L_0}$
O	渠道兩壁面交點處
O'	液面曲率中心

P	壓力
Pe	Peclet 數 ; $Pe = \frac{V_z L}{\alpha}$
P_0	特徵壓力
P_w	液面與壁面的交點處
p	無因次的壓力
q_0	熱傳函數的振幅
$\dot{q}$	熱傳量的參數 ; $\dot{q} = \frac{L_0}{H_0 \cdot W_0 \cdot \rho \cdot h_{fg}} \cdot \tilde{q}$
$\tilde{q}$	由渠道壁面傳入的熱傳率
R, δ, Z	圓柱座標系統 (R, δ, Z) 之主軸座標
R', ϕ, Z	圓柱座標系統 (R', ϕ, Z) 之主軸座標
R_0	由液面曲率中心至液面的特徵曲率半徑
R_c	液面的曲率半徑
R_s	由渠道兩壁面交點 O 至液面與壁面之交點 P_w 的長度
R_w	由液面的曲率中心至渠道壁面的長度
r	無因次的徑向座標
r_c	無因次的液面曲率半徑
r_s	由渠道兩壁面交點 O 至液面與壁面之交點 P_w 的無因次長度
r_w	由液面的曲率中心至渠道壁面的無因次長度
S	剪應力分佈
t	無因次的時間
$\tilde{t}$	時間變數
V_c	無因次的液柱體積
V_R, V_ϕ, V_Z	速度在 R 、 ϕ 及 Z 方向的分量

$\bar{V}_z$	液柱截面平均速度
v_z	無因次化的液柱截面速度
$\bar{v}_z$	無因次化的液柱截面平均速度
W_0	Z 方向的特徵速度； $W_0 = \frac{\sigma \cdot \varepsilon \cdot \sin^2 \alpha}{\mu \cdot f}$
w	經過轉換的液柱截面速度
$\bar{w}$	經過轉換的液柱截面平均速度
z	無因次化圓柱座標系統的 Z 方向； $z = \frac{Z}{L_0}$

希臘符號

α	半渠道角
α'	熱擴散係數
δ_0	δ 角度的上界； $\delta_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha - \theta$
ε	$\frac{H_0}{L_0}$
η	相似解的變數
$\tilde{\eta}$	經過轉換的相似解的變數； $\eta = \lambda \tilde{\eta}$
κ	幾何參數； $\kappa = \frac{2f \cdot \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \alpha} - \frac{2 \cos \theta \cos \delta_0}{\sin \alpha} + 1 \right)^{1/2}}{F_A}$
λ	比例因子
μ	黏滯係數
ω	熱傳函數的頻率
ρ	流體密度
σ	表面張力係數

$$\tau = \frac{F_i \cdot t}{2}$$

θ 接觸角

ξ 經過轉換的圓柱座標的徑向座標； $\xi \equiv \frac{r}{r_c}$

ζ 時間 t 的因次

第一章 緒論

1-1 前言

在傳統工業的應用上，表面張力總是被視為較微弱的力而被忽略；隨著現代精密工程的發展，許多的設備或產品都需要符合尺寸小及單位體積附加價值高，因此在微小裝置中或外太空無重力作用下的流場就愈顯現出其重要性。參考圖 1.1，在微小楔型渠道(wedge)內部，液面在受到表面張力的作用下，驅動液柱沿渠道順著流向流動，此時，表面張力就相對較重要，而不能被忽略。參考圖 1.2 液柱截面圖，在渠道的截面上，渠道具有開角 2α ，其中 2α 稱為渠道角(wedge angle)；液面和渠道間有一夾角 θ ，稱為接觸角(contact angle)；當嘗試改變不同的 α 與 θ 時，流場會受到很大的影響。而流體受熱蒸發及蒸發後之蒸氣因流動與液面間產生的剪應力(shear stress)分佈也會對渠道內流體的傳輸現象(transport phenomenon)產生影響。本文主要探討的部分是渠道中的流體，當受到壁面處熱能傳入使液面處產生蒸發(evaporation)效應時，對於液柱外型和尖端位置(tip location)的變化與影響。

有關渠道流的傳輸現象，有兩個基本觀念需要先加以說明與澄清：

- (1) Concus-Finn 條件 (Concus-Finn condition)， $\alpha + \theta < \frac{\pi}{2}$ ：

參考圖 1.2，由幾何計算可以得知， $\alpha + \theta + \delta_0 = \frac{\pi}{2}$ 。從物理的角度來看，當 $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$ 時，液面會是水平的，此時流體沒有受到表面張力的作用，無法產生壓力差驅動流體向前流動；換句話說，若要流體流動，需要的條件是 $\delta_0 > 0$ ，故可推得 $\alpha + \theta < \frac{\pi}{2}$ ，稱為 *Concus-Finn* 條件。

(2) *Bond* 數 (*Bond Number*)， $Bo = \frac{\Delta\rho g L_0^2}{\sigma}$ ：

其中：

$\Delta\rho$ 為流體的密度差；

g 為重力加速度；

L_0 為沿流向的特徵長度；

σ 為表面張力。

在物理上，*Bond* 數可視為重力與表面張力兩者效應之比較，當 $Bo < 1$ 時表示表面張力的效應大於重力的效應。在地球上，重力 g 的作用不能忽略，此時 *Bond* 數會較大；當在外太空重力作用極小的環境， g 會遠小於 σ ，此時表面張力的作用遠大於重力的作用，即 $Bo < 1$ ；此外在微尺度的情況下，特徵長度 L_0 會很小，也有可能達成 $Bo < 1$ 的情況，在上述兩種情況下，表面張力的效應就不能被忽略。

1-2 實用性

根據之前所提的 *Bond* 數可知，符合楔形渠道中由表面張力驅動的流場，需要是在微尺度 (*small scale*) 或是重力場可予以忽略時的條件下才會彰顯出來；許多科技產業都有這方面的應用。諸如：在地表上，有關石化及紡織工業、系統工程、生物科技，包括近來很熱門的微機電 (*MEMS*)，以及多孔性物質中的流場都符合微尺度的流場中 *Bond* 數很小的條件。而在外太空，飛行載具的燃料管理、液壓系統、熱交換，也符合重力場可予以忽略時 *Bond* 數很小的條件。

1-3 文獻回顧

有關楔型渠道中由表面張力驅動之流場的研究，是在近幾十年來才逐漸開始的，根據前人的分析研究，可以將其分成三類：靜態液柱外形分析 (*static interfacial shape*)、動態分析 (*dynamic flow behavior*) 與穩定度分析 (*instability phenomenon*)。在渠道中，當流體由表面張力驅動時，流場會受到渠道角 (2α) 與接觸角 (θ) 的不同而影響；判斷流體是否會順利流動的標準，即 $\alpha + \theta < \frac{\pi}{2}$ ，是由 *Concus* 與 *Finn* 所提出的，而這種條件則稱為 *Concus-Finn* 條件 (*Concus-Finn Condition*) 【1、2】。

Ayyaswamy、*Catton* 與 *Edwards* 【3】及 *Ransohoff* 與 *Radke* 【4】的研究是解二維流場的問題，他們以不同的方法來計算無液面摩擦剪

應力時，沿流動方向任意截面的無因次化速度分佈，並討論不同的 α 與 θ 對流場的影響。

Ma、*Peterson*與*Lu*【5】的研究是假設液面處的速度為定值來求解沿流動方向任意截面的速度分佈，並討論不同的 α 與 θ 對流動係數 F_l 的影響；此外，他們也曾研究液面與蒸氣間的作用對流動係數的影響。*Ma*與*Peterson*【6、7】又陸續對流動係數作一系列的分析研究，以及熱傳對微熱管的影響【8、9】。*Mittelmann*與*Zhu*【10】則是以數值方法與變分法來分析不同的接觸角對液面形狀及其穩定性的影響。

*Weislogel*與*Lichter*【11、12】則假設液柱是細長的同時慣性力很小可予以忽略來簡化問題，並分析楔型渠道中由表面張力驅動的流場，他們進一步忽略液面與蒸氣交界處的摩擦剪應力，並導出一相似方程式來模擬流場的流動；在預測液柱尖端位置 l 之後，即可解出此相似方程式的相似解。他們也提出工作液體在開始流動後，會有幾個不同特性的階段；在流體剛開始流動時會有一起始階段(*start up stage*)，接著會有等流量階段(*constant flow rate stage*)與等液柱高度階段(*constant height stage*)兩個階段，這幾個流動階段皆可經由實驗加以證實。而蘇頌凱【13】則是將液面的摩擦剪應力考慮進去，並以數值方法計算出液柱外型與液柱尖端位置的變化。

在渠道的熱傳方面，*Stephan*與*Busse*【14】假設液面的溫度等於液體的飽和蒸氣溫度來計算液柱外型與流場的溫度分佈。*Xu*與*Carey*【15】則是利用甲醇與丙酮為工作流體，對具熱傳的渠道之液面與渠道壁面交界處的薄膜區(*thin liquid film*)進行研究。*Ha*與*Peterson*

【16】預測一具熱傳的傾斜渠道之液柱前端位置 (*dryout point*)，由於他們並沒有忽略重力的效應，所以液體流動到一定的位置之後，會因重力的影響而無法前進，因而產生所謂的液柱前端位置。*Catton* 與 *Stroes* 【17】則是以半解析模式 (*Semi-Analytical Model*) 來研究並預測具熱傳之傾斜渠道的液柱尖端位置。

1-4 本文研究動機與架構

當渠道的壁面處有熱傳傳入時，會使液面處的流體汽化成蒸氣，而工作流體的蒸發將對楔型渠道內的傳輸現象產生影響；若未加以考慮則研究將不夠完整，因此對於楔型渠道中的熱傳效應做進一步的研究即是本文的研究動機。同時由於渠道流動三階段中的起始階段其流場較為複雜不易分析，因此本文將僅對等流量與等液柱高度兩階段來做分析。

在第二章將先對流場的物理現象提出基本假設來簡化問題，並藉由無因次化與適當的轉換得到統御方程式。

在第三章將以數值方法求解速度場與液柱尖端位置，同時對離散化過程與數值方法加以說明，並為所作的結果加以討論。

在第四章將對本文所欲研究的熱傳現象提出基本假設來簡化問題，並藉由無因次化得到統御方程式，接著以數值方法求解熱傳效應下的液柱尖端位置，同時對離散化過程與數值方法加以說明，並對結果加以討論。最後在第五章將研究所得做成結論並提出未來研究的建議與方向。

第二章 流場數學模式

2-1 基本假設

為了簡化統御方程式，需要做幾個簡單的假設：

- (1) 首先假設工作流體是不可壓縮的牛頓流體；而流體的密度 ρ 、黏滯係數 μ 以及表面張力係數 σ 等流體特性均為固定值。
- (2) 假設重力和慣性力過小，可予以忽略。
- (3) 假設液柱是細長的(*slenderness*)，也就是說沿流場的特徵長度 L_0 遠大於沿截面的特徵長度 H_0 ，($\varepsilon \equiv H_0/L_0 \ll 1$)。

由液柱是細長的假設中，經由將連續方程式做因次分析，可以衍生出以下五個結論：

- (1) 液面在沿流向的曲度很小，與截面上液面的曲度比較後可以忽略。
- (2) 沿流向的流動速度遠大於在截面上流動的速度，因此沿著截面流動的速度 V_R 、 V_ϕ 可被忽略；即 $V_R, V_\phi \ll V_z$ 。
- (3) 沿流向的壓力變化遠大於沿截面的壓力變化，因此沿截面的壓力變化 $P(R')$ 、 $P(\phi)$ 可被忽略，所以壓力變化為 Z 與 $\tilde{t}$ 的函數； $P = P(Z, \tilde{t})$ 。
- (4) 由上一個結論，可以知道在流場的截面上，無論角度是如何變化，壓力皆是相等的；因此在截面上的液面為一具曲率半徑 R_c 的圓弧。
- (5) V_z 隨 Z 方向的變化很小，可予以忽略； $V_z = V_z(R', \phi)$ 。

2-2 無因次化

為了使往後的討論能被更廣泛的應用，需要將各變數依下列尺度關係做無因次化。

長度：	$z = Z / L_0$; $l = L / L_0$; $h = H / H_0$; $r = R / H_0$ $r_c = R_c / H_0$; $r_w = R_w / H_0$; $r_s = R_s / H_0$
速度：	$v_{R'} = V_{R'} / \varepsilon \cdot W_0$; $v_\phi = V_\phi / \varepsilon \cdot W_0$ $v_z = V_z / W_0$; $\bar{v}_z = \bar{V}_z / W_0$
其他：	$t = \tilde{t} \cdot W_0 / L_0$; $p = P \cdot R_0 / \sigma$; $A = \tilde{A} / H_0^2$

其中 H_0 為液柱在 $\delta = 0$ 的平面上之特徵高度； L_0 為液柱在 Z 方向的特徵長度。由液柱是細長的假設，可以推得 $\varepsilon \equiv H_0 / L_0 \ll 1$ 的關係。而 W_0 為在 Z 方向的特徵速度，其決定方式將會在稍後討論。 T_0 為流場的特徵溫度。 t 為除上 L_0 / W_0 尺度之後的時間。 p 為除上 σ / R_0 尺度之後的壓力；其中 σ 表示表面張力、 R_0 表示液面的特徵曲率半徑。 A 為除上 H_0^2 尺度之後的液柱截面積。

2-3 統御方程式

Z 方向的動量方程式

$$\rho \cdot \left[\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_{R'} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial R'} + \frac{V_\theta}{R'} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial Z} \right] = - \frac{\partial P}{\partial Z} + \mu \cdot \nabla^2 V_z \quad (2.1)$$

參考渠道截面圖 1.2，本文中使用的座標系統為圓柱座標，依 Z 軸的選取共分成兩種；第一種是取渠道兩壁面之交點 O 沿流向為 Z 軸的系統 (R', ϕ, Z) ；第二種是取液面的曲率中心 O' 沿流向為 Z 軸的系統 (R, δ, Z) 。

由渠道截面上的幾何關係可推算出 $R_w(\delta)$ 和 R_c 的關係為

$$R_w(\delta) = R_c \cdot \frac{\cos\theta}{\sin(\alpha + \delta)} = f \cdot H \cdot \frac{\cos\theta}{\sin(\alpha + \delta)} \quad (2.2)$$

為了往後計算上的便利，需將 R_c 、 R_w 等長度轉換成液柱高度 H 的函數，在 $\delta = 0$ 的平面上，液柱高度 H 可以用 $R_w(0) - R_c$ 來表示，因此可以得到

$$H = R_c \cdot \left(\frac{\cos\theta}{\sin\alpha} - 1 \right) = R_c \cdot f^{-1} \quad (2.3)$$

或

$$R_c = f \cdot H \quad (2.4)$$

其中

$$f = \left(\frac{\cos\theta}{\sin\alpha} - 1 \right)^{-1} \quad (2.5)$$

由截面上表面張力和壓力平衡的關係可得知 $P - P_\infty = \frac{-\sigma}{R_c}$ ，故無因次化的壓力可表示為

$$p = \frac{P - P_\infty}{P_0 - P_\infty} = \frac{\Delta P}{\Delta P_0} = \frac{-\sigma / R_c}{-\sigma / R_0} = -\frac{\sigma / (f \cdot H)}{\sigma / (f \cdot H_0)} = -\frac{1}{h} \quad (2.6)$$

其中

$$\Delta P_0 = \frac{-\sigma}{R_0} = \frac{-\sigma}{f \cdot H_0} \quad (2.7)$$

(1) 液柱截面上的速度分佈：

欲計算液柱截面上的速度分佈，先要將 Eqn.(2.1) 做無因次化，再加上液柱是細長的假設 ($\varepsilon \equiv H_0 / L_0 \ll 1$)，即可推導出截面的動量方程式 Eqn.(2.8)，其中非穩態項與慣性項皆可予以忽略

$$\frac{\partial^2 V_z}{\partial R'^2} + \frac{1}{R'} \frac{\partial V_z}{\partial R'} + \frac{1}{R'^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \phi^2} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{dP}{dZ} \right) \quad (2.8)$$

將截面動量方程式經過適度的變數轉換之後，即可以數值方法模擬出截面上的速度分佈，至於以數值方法求解的過程將在下一章介紹。

將截面動量方程式和原動量方程式比較，可以發現原動量方程式中的慣性項和阻力項在 Z 方向的變化可予以忽略。此外，將截面動量方程式做因次分析可得到 $\frac{W_0}{H_0^2} \sim \frac{\Delta P_0}{\mu \cdot L_0}$ ，再將 Eqn.(2.8) 帶入上述因次分析

即可得到特徵速度， $W_0 = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{f \cdot \mu}$ 。然而根據 Weislogel 和 Lichter 的建議，

特徵速度 W_0 應該要涵蓋渠道幾何上的變化，即會隨著渠道角 α 而改變，因此將特徵速度定為

$$W_0 = \frac{\sigma \cdot \varepsilon \cdot \sin^2 \alpha}{f \cdot \mu} \quad (2.9)$$

(2) 液柱的增長與尖端位置之所在：

可將連續方程式在 Z 方向上的質量守恆做無因次化可得

$$\frac{\partial A}{\partial t} = - \frac{\partial (A \cdot \bar{v}_z)}{\partial z} \quad (2.10)$$

其中 A 為無因次之液柱截面積、 $\bar{v}_z$ 為無因次之平均速度；而 A 與 $\bar{v}_z$ 皆可轉換為無因次液柱高度 h 的函數，討論如下。

(A) 截面積 A

首先定義

$$A = F_A \cdot h^2 \quad (2.11)$$

其中 F_A 稱為輪廓因子 (*shape factor*)。

截面上的面積可表示為

$$A = 2 \cdot \int_0^{\delta_0} \int_{r_c}^{r_w} r dr d\delta = \int_0^{\delta_0} (r_w^2 - r_c^2) d\delta \quad (2.12)$$

將 Eqn.(2.2) 無因次化後代入 Eqn.(2.12) 並整理可得

$$A = f^2 \cdot h^2 \cdot \left(\int_0^{\delta_0} \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2(\alpha + \delta)} d\delta - \delta_0 \right) \quad (2.13)$$

由 Eqn.(2.11) 和 Eqn.(2.13) 聯立可以計算出 F_A ，即

$$F_A = f^2 \cdot \left(\frac{\sin 2\delta_0}{2} + \frac{\sin^2 \delta_0}{\tan \alpha} - \delta_0 \right) \quad (2.14)$$

由上式可看出 F_A 為一與渠道幾何相關的因子 (*geometrical factor*)；當 α 和 θ 固定之後， F_A 也將同時為一固定值。

(B) 平均速度 $\bar{v}_z$

定義

$$\bar{v}_z = -F_i \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \quad (2.15)$$

其中 F_i 稱為流動係數 (*flow coefficient*)。有關 F_i 的詳細說明將留待下一章來討論。

將 Eqn.(2.11) 及 Eqn.(2.15) 代入 Eqn.(2.10) 後，可得

$$\frac{\partial(F_A \cdot h^2)}{\partial t} = -\frac{\partial(F_A \cdot F_i \cdot h^2 \cdot h_z)}{\partial z} \quad (2.16)$$

由於當 α 和 θ 為定值時， F_A 也將為一定值，因此可將 F_A 自等號兩邊消去；於是 Eqn.(2.16) 可簡化為

$$2\frac{\partial h}{\partial t} = 2F_i \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial F_i}{\partial z} \cdot h \cdot \frac{\partial h}{\partial z} + F_i \cdot h \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \quad (2.17)$$

經由 Eqn.(2.17)，即可計算出液柱高度隨位置的變化，並預測液柱的尖端位置；由於 Eqn.(2.17) 並不存在解析解，因此必需仰賴數值模擬的方式來求解。

第三章 流場速度與尖端位置的解

3-1 流場速度分佈

為了能精確探討熱傳與蒸發效應對楔型渠道流的影響，本章將先分析無熱傳效應的流動現象，並與蘇頌凱君的研究結果相互驗證，以建立精確可信的數值方法。

將上一章介紹的截面動量方程式 Eqn.(2.7) 做座標的轉換，由 (R', ϕ, Z) 座標系統轉換成 (R, δ, Z) 座標系統，也就是將 Z 軸由渠道的兩壁面交點移到液面的曲率中心，如此可以得到轉換後的動量方程式 Eqn.(3.1)；

$$\frac{\partial^2 V_z}{\partial R'^2} + \frac{1}{R'} \frac{\partial V_z}{\partial R'} + \frac{1}{R'^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \phi^2} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{dP}{dZ} \right) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 V_z}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_z}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \delta^2} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{dP}{dZ} \right) \quad (3.1)$$

將 Eqn.(3.1) 做無因次化，可得

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \delta^2} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{dp}{dz} \right) \quad (3.2)$$

接下來需要將動量方程式經由一些轉換來進一步簡化方程式。首先令

$$\xi = \frac{r}{r_c} \quad (3.3)$$

$$w = v_z \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{r_c^2} \cdot \left(-\frac{dp}{dz} \right) \quad (3.4)$$

將 Eqn.(3.3)、Eqn.(3.4) 代入 Eqn.(3.2) 可以得到

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \delta^2} + 1 = 0 \quad (3.5)$$

Eqn.(3.5)表示經過座標轉換之後的任意截面上 Z 方向的動量方程式；

其中 w 為 α 、 θ 和 S 的函數，即 $w = w(\alpha, \theta, S)$ 。

邊界條件：

$$(1) \text{ 當 } \xi = \frac{r_c}{r_c} = 1, \frac{\partial w}{\partial \xi} = S \quad (3.6)$$

$$(2) \text{ 當 } \xi = \frac{r_w}{r_c} = \frac{\cos \theta}{\sin(\alpha + \delta)}, w = 0 \quad (3.7)$$

$$(3) \text{ 當 } \delta = 0, \frac{\partial w}{\partial \delta} = 0 \quad (3.8)$$

第一個邊界條件表示在液面處受到一等量的剪應力作用的情況，在此定義正的剪應力 S 的方向是與流向反向的；第二個邊界條件表示在渠道壁面上，速度為零(*no slip condition*)；第三個邊界條件表示渠道中間為對稱面，即在 $\delta = 0$ 處，速度隨角度沒有變化。接下來要由數值方法解出流場的速度分佈。

3-2 速度場數值方法與格點系統

所需模擬的統御方程式為 Eqn.(3.5)：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \delta^2} + 1 = 0 \quad (3.5)$$

在使用有限差分法來求解 Eqn.(3.5)前，先要建立液柱截面的網格分佈。若嘗試將液柱截面依半徑 ξ 和角度 δ 等分切割時，會發現在液面與壁面處的網格較稀疏，而接近渠道中間對稱面($\delta = 0$)的網格較緊密的情況。為了使網格能夠呈現較均勻的分佈，以增加數值計算上的精

確度，因此在 δ 方向採用如下的不均勻格點分佈：

$$\delta_j = \delta_0 \cdot \frac{\exp\left(\frac{j-1}{m-1}\right) - 1}{e - 1}, j = 1, 2, \dots, m \quad (3.9)$$

其中 $\delta_0 = \delta_m = \frac{\pi}{2} - \alpha - \theta$ ，並非 δ 角度的下限，而是上限，參考圖 1.2 可以看出， δ_0 位於液面與渠道的交點 P 處；而 δ_1 則位於渠道中間對稱面上。當格點隨角度的變化確定之後，沿 ξ 方向上的格點即可由各角度與渠道壁面的交點來決定：

$$\xi_w(i) = \frac{\cos\theta}{\sin(\alpha + \delta_{m-i+1})}, i = 1, 2, \dots, m \quad (3.10)$$

由於在液面處有 m 個格點，接近渠道兩壁面交點 O 點處只有一個格點，因此取截面的半邊來計算時，總共有 $m \cdot (m-1)/2$ 個格點。由圖 3.1 即可看出渠道截面網格的分佈情況。

使用有限差分法離散 Eqn.(3.5) 可得：

$$Aw_{i+1,j} + Bw_{i-1,j} + C_{i,j}w_{i,j} + D_{i,j}w_{i,j+1} + E_{i,j}w_{i,j-1} = F_i \quad (3.11)$$

其中

$$A = \Delta\xi_{i-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2r(i)} \cdot \Delta\xi_{i-1}\right) \quad (3.12)$$

$$B = \Delta\xi_i \cdot \left(1 - \frac{1}{2r(i)} \cdot \Delta\xi_i\right) \quad (3.13)$$

$$C = -(\Delta\xi_i + \Delta\xi_{i-1}) \cdot \left(1 - \frac{1}{2r(i)} \cdot (\Delta\xi_i - \Delta\xi_{i-1}) + \frac{1}{r(i)^2} \cdot \frac{\Delta\xi_i \Delta\xi_{i-1}}{\Delta\delta_j \Delta\delta_{j-1}}\right) \quad (3.14)$$

$$D = \frac{1}{r(i)^2} \cdot \frac{\Delta\xi_i \cdot \Delta\xi_{i-1} \cdot (\Delta\xi_{i-1} + \Delta\xi_i)}{\Delta\delta_j \cdot (\Delta\delta_{j-1} + \Delta\delta_j)} \quad (3.15)$$

$$E = \frac{1}{r(i)^2} \cdot \frac{\Delta\xi_i \cdot \Delta\xi_{i-1} \cdot (\Delta\xi_{i-1} + \Delta\xi_i)}{\Delta\delta_{j-1} \cdot (\Delta\delta_{j-1} + \Delta\delta_j)} \quad (3.16)$$

$$F = -\frac{1}{2} \cdot \Delta \xi_i \cdot \Delta \xi_{i-1} \cdot (\Delta \xi_{i-1} + \Delta \xi_i) \quad (3.17)$$

接著要做格點測試，在以數值方法計算的過程中，增加網格的密度可以使計算的結果更為精確；不過由於計算機本身的精確度是有限制的，當網格太密時，除了會增加計算時間之外，計算結果的精確度卻未必能有太大的改善。如何找到適當的格點數便很重要；本文中將以 $m=10,20,30,40,50$ 來作測試。

將渠道角、接觸角與液面摩擦剪應力分別固定為定值，即選定 $\alpha = 45^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $S = 0$ ，並以 $m=10,20,30,40,50$ 分別做測試來計算 $\bar{w}$ 與 F_i 值；計算結果可參考表 1 與圖 3.2，由於在 $m=30$ 之後， $\bar{w}$ 與 F_i 值皆有逐漸收斂的趨勢，因此本文在截面網格的計算上是選取 $m=30$ 。

3-3 速度場的結果討論

經由數值模擬出的液柱截面速度場，可以參考圖 3.3-3.5。因為液柱在液面處會受到剪應力的作用，而前面曾提到剪應力的方向與流向反向，參考圖 3.4 可以看出，當剪應力的作用增大到一定程度之後，液面處會產生逆向流，而逆向流初始的位置，是在液面與渠道壁面交界處，這是由於渠道壁面處的流速為零，故液面接近壁面處的流場會先有逆向流的產生。具有剪應力作用的液柱截面速度場，可以參考圖 3.5。

在上一章我們提到要將 Z 方向的平均速度轉換成與液柱高度 h 有

關的函數 Eqn.(2.15)，其中會出現一個與 h 無關的係數 F_i ，我們稱它為流動係數。

$$\bar{v}_z = -F_i \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \quad (2.15)$$

從 Eqn.(3.4) 知道 Z 方向的平均速度可以表示為

$$\bar{v}_z = \bar{w} \cdot \frac{r_c^2 \cdot \left(-\frac{dp}{dz} \right)}{\sin^2 \alpha} \quad (3.18)$$

將幾何關係 Eqn.(2.4) 和壓力的函數 Eqn.(2.6) 代入上式 Eqn.(3.18) 可得

$$\bar{v}_z = - \left(\frac{\bar{w} \cdot f^2}{\sin^2 \alpha} \right) \cdot \frac{dh}{dz} \quad (3.19)$$

而 Eqn.(3.19) 即可寫成 Eqn.(2.15) 的型式，其中

$$F_i = \frac{\bar{w} \cdot f^2}{\sin^2 \alpha} \quad (3.20)$$

由於 $\bar{w}$ 僅為 α 、 θ 和 S 的函數，故可知 F_i 亦僅為 α 、 θ 和 S 的函數。

又由 Eqn.(2.9) 和 Eqn.(3.4) 可推得

$$\bar{v}_z = F_i \frac{\sin^2 \alpha}{f} \cdot \left(-h^2 \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{\epsilon \sigma}{\mu} \right) \quad (3.21)$$

接下來將討論 α 、 θ 和 S 的影響。

(1) α 與 θ 的影響

在 $S=0$ 的情況下，將 F_i 與 $\frac{F_i \cdot \sin^2 \alpha}{f}$ 隨 α 與 θ 的變化做表於表 2

及圖 3.6，在符合 Concus-Finn 條件的前提下，當固定 α 不變時，可

以發現 θ 愈小則 $\frac{F_i \cdot \sin^2 \alpha}{f}$ 愈大，這是由於接觸角 θ 較小時，液面曲

率較大，液柱的驅動力也因而較大，故流速會較快；當固定 θ 不變

時，可以發現在 α 較大或較小時， $\frac{F_i \cdot \sin^2 \alpha}{f}$ 均較小，這是由於不論在 α 較大或較小時，液柱與壁面的接觸面積相對都較大，故流速會較低。

(2) S 的影響

在固定 α 與 θ 的情況下，將計算所得 F_i 與 S 的關係做表 3.1，以曲線擬合法(Curve Fitting)做圖 3.7 發現，在固定 α 與 θ 的情況下， F_i 的變化將隨著 S 呈現線性關係，故可假設

$$F_i = c_1 + c_2 \cdot S \quad (3.22)$$

其中 c_1 、 c_2 為常數。

3-4 相似解

在上一章提到將連續方程式做無因次化，再將 A 、 $\bar{v}_z$ 兩變數的關係分別代入，整理之後可以得到

$$2 \frac{\partial h}{\partial t} = 2 F_i \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial F_i}{\partial z} \cdot h \cdot \frac{\partial h}{\partial z} + F_i \cdot h \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \quad (2.17)$$

其中 F_i 為 α 、 θ 和 S 的函數。根據Weislogel和Lichter所提出的相似解，他們假設液面處沒有剪應力作用($S=0$)，且 α 和 θ 微固定值，因此 F_i 亦為一定值，即 $\frac{\partial F_i}{\partial z} = 0$ 。此時Eqn.(2.17)可簡化成

$$2 \frac{\partial h}{\partial t} = 2 F_i \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 + F_i \cdot h \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \quad (3.23)$$

Weislogel和Lichter又提出以下的定義

$$h = \tau^a F(\eta) \quad (3.24)$$

$$\eta = |b|^{1/2} \cdot z \cdot \tau^b \quad (3.25)$$

$$\tau = F_i t / 2 \quad (3.26)$$

$$b = -(1+a)/2 \quad (3.27)$$

$$F = \lambda^2 \tilde{F} \quad (3.28)$$

$$\eta = \lambda \tilde{\eta} \quad (3.29)$$

由稍後 a 值的選取將可決定 b 值皆為負值。將以上關係代入 Eqn.(3.23)，整理後得到

$$\tilde{F} \cdot \tilde{F}_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} + 2\tilde{F}_{\tilde{\eta}}^2 + \tilde{\eta} \cdot \tilde{F}_{\tilde{\eta}} - \frac{2a}{1+a} \tilde{F} = 0 \quad (3.30)$$

若定義液柱尖端處為 $\tilde{\eta}_{tip}$ ，並設定 $\tilde{\eta}_{tip} = 1$ ，可得

$$\tilde{F}(\tilde{\eta}_{tip}) = \tilde{F}(1) = 0 \quad (3.31)$$

再將 Eqn.(3.31) 代入 Eqn.(3.30) 可得

$$\left. \frac{d\tilde{F}}{d\tilde{\eta}} \right|_{\tilde{\eta}_{tip}} = \frac{d\tilde{F}}{d\tilde{\eta}}(1) = -\frac{1}{2} \tilde{\eta}_{tip} = -\frac{1}{2} \quad (3.32)$$

當 a 值確定之後，由 Eqn.(3.30)、Eqn.(3.31) 和 Eqn.(3.32) 即可求出相似解 $\tilde{F}(\tilde{\eta})$ ，見圖 3.8；再由 Eqn.(3.24) 及 Eqn.(3.28) 即可求出液柱高度的變化 $h(t, z)$ 及尖端位置 $l(t)$ 。

茲討論 a 值的決定。無因次化後的液柱體積 V_c 可由截面面積的積分得之，表示如下

$$V_c = \int_0^l A dz \quad (3.33)$$

將 Eqn.(2.11) 代入 Eqn.(3.33) 可得

$$V_c = F_A \int_0^l h^2 dz \quad (3.34)$$

又由 Eqn.(3.24)、Eqn.(3.25)、Eqn.(3.26)、Eqn.(3.27)、Eqn.(3.28)、Eqn.(3.29)

可導出

$$V_c = F_A \cdot \lambda^5 \cdot \left(\frac{1+a}{2} \right)^{-1/2} \cdot \tau^{\frac{1+5a}{2}} \cdot \int_0^l \tilde{F}^2(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \quad (3.35)$$

又因為 F_A 、 λ 、 $\left(\frac{1+a}{2} \right)^{-1/2}$ 、 $\int_0^l \tilde{F}^2(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta}$ 皆為常數，故 $V_c \propto \tau^{\frac{1+5a}{2}}$ ，即

$$V_c \propto t^{\frac{1+5a}{2}} \quad (3.36)$$

(1) 等流量 (Constant Flow Rate)

當流量隨時間改變仍維持不變時，表示液柱的體積與時間之間為一次方關係，也就是 $V_c \propto t$ ，故 $a=0.2$ 。

(2) 等液柱高度 (Constant Height)

即流場某處的液柱高度 $h(z, t)$ 不隨時間改變；將此位置設定為 $z=0$ ，也就是 $h(0, t) = \text{constant}$ 。將之代入 Eqn.(3.24) 和 Eqn.(3.25)，即可推導出 $a=0$ 。

3-5 液柱高度與尖端位置變化

當 F_i 為流向 (Z -方向) 的函數時，Eqn.(2.17) 並無解析解的存在，

$$2 \frac{\partial h}{\partial t} = 2 F_i \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial F_i}{\partial z} \cdot h \cdot \frac{\partial h}{\partial z} + F_i \cdot h \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \quad (2.17)$$

因此需要利用數值方法來求解。以數值方法求解的幾個步驟是：(1) 確定液柱高度 $h(z)$ 的初始值；(2) 確定 Δt 與 Δz 的大小；(3) 將非線性項 $\left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2$ 、 $h \cdot \frac{\partial h}{\partial z}$ 、 $h \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}$ 做線性化的處理；(4) 確定流場的邊界條件；

(5) 決定液柱尖端位置 $l(t, z)$; (6) 重建液柱增長後 Z 方向的格點。

(1) $h(z)$ 的初始值：

要以數值方法來模擬求解 Eqn.(2.17)，首先要先給定流場中液柱高度 $h(z)$ 的初始值，不過由於流場在剛開始流動的初期 (*start up regime*) 並不容易分析，所以需要由近似值來代替求解；本文將以前面所介紹過的相似解，當作液柱高度 $h(z)$ 的初始值。

(2) Δt 與 Δz 的大小：

在確定整個流場的格點之前，需要先說明以下定義： $t(j)$ 指目前所計算時間軸的瞬間； $l(t(j))$ 指 $t(j)$ 瞬間的液柱長； $m(j)$ 指 $t(j)$ 瞬間在 Z 方向上液柱的格點總數； k 指 Z 方向上所能計算的格點總數，由以上定義可得

$$t(j) = t(0) + j \cdot \Delta t, j = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (3.37)$$

$$z(i) = 0 + i \cdot \Delta z, i = 0, 1, 2, \dots, m(j), \dots, k \quad (3.38)$$

其中

$$\Delta z = (l(t(0)) - 0) / m(0) \quad (3.39)$$

此外由液柱尖端的定義，可以得到

$$h(z(i), t(j)) = 0, \text{ for } i \geq m(j+1), j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (3.40)$$

由液柱會隨時間增長的條件可得

$$m(j) \geq m(j-1) \quad (3.41)$$

(3) 將非線性項線性化：

由於 Eqn.(2.17) 中的 $\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2$ 、 $h \cdot \frac{\partial h}{\partial z}$ 、 $h \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}$ 為非線性項，所以在使用有

限差分法之前，需要將各非線性項做線性化的處理。

$$\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2 \approx \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)_n \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)_{n+1} \quad (3.42)$$

$$h \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right) \approx \frac{1}{2} \cdot h_n \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)_{n+1} + \frac{1}{2} \cdot h_{n+1} \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)_n \quad (3.43)$$

$$h \cdot \left(\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\right) \approx \frac{1}{2} \cdot h_n \cdot \left(\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\right)_{n+1} + \frac{1}{2} \cdot h_{n+1} \cdot \left(\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\right)_n \quad (3.44)$$

其中具下標 n 者為前一瞬間所得之值，而具下標 $n+1$ 者為欲求得之未知項。接下來要由下面的差分式來離散 Eqn.(3.42)-(3.44)：

$$\frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{i,n} = \frac{h_{i,n+1} - h_{i,n}}{\Delta t} \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} \Big|_{i,n} = \frac{h_{i+1,n} - h_{i-1,n}}{2 \cdot \Delta z} \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \Big|_{i,n} = \frac{h_{i+1,n} - 2 \cdot h_{i,n} + h_{i-1,n}}{(\Delta z)^2} \quad (3.47)$$

(4) 邊界條件：

由於 Eqn.(2.17) 為二階偏微分方程式，需要擁有兩個邊界條件來滿足求解。但是當液柱隨時間而增長時，尖端位置卻未必會恰好坐落於初始預定的格點上，這時邊界條件 $h(z(m(j)), t(j)) = 0$ 並無法順利使用，因此在此需要以 $h(z(m(j)-1), t(j))$ 、 $h(z(m(j)-2), t(j))$ 外插來近似求出 $h(z(m(j)), t(j))$ ；本文將使用線性外插法來解決這個問題。至於另一個邊界條件可以由流場的狀況，也就是等流量或等液柱高度來決定。

(i) 等流量階段：

由 Eqn.(3.34) 可以推出 $V_c \sim \int_0^{l(t)} h^2(z, t) dz$ ，由於是等流量的階段，液

柱體積隨時間的變化率為一常數，即 $\frac{d}{dt} \int_0^{l(t)} h^2(z, t) dz = \text{constant}$ ，故

可使用以下差分式來表示

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} \cdot \left[\sum_{i=0}^{m(j)} h^2(z(i), t(j)) - \sum_{i=0}^{m(j-1)} h^2(z(i), t(j-1)) \right] = C, j=0, 1, 2, \dots, n, \quad (3.48)$$

其中 C 為一個常數，可以由 $a=0.2$ 的相似解計算出。將 $h(z(i), t(j))$ 以泰勒展開式展開並消去高次項可得

$$h(z(i), t(j)) \approx h(z(i), t(j-1)) + \frac{h(z(i), t(j)) - h(z(i), t(j-1))}{\Delta t} \Big|_{z(i)} \cdot \Delta t \quad (3.49)$$

將 Eqn.(3.49) 代入 Eqn.(3.48) 可得

$$\sum_{i=0}^{m(j-1)} h(z(i), t(j-1)) \cdot h(z(i), t(j)) = \frac{C \cdot \Delta t}{2 \cdot \Delta z} + \sum_{i=0}^{m(j-1)} h^2(z(i), t(j-1)) \quad (3.50)$$

Eqn.(3.50) 即為計算上的第二個邊界條件。

(ii) 等液柱高度階段：

在等液柱高的階段可以使用下式來當作第二個邊界條件

$$h(z(0), t(j)) = h(z(0), t(0)), j=0, 1, 2, \dots, n, \quad (3.51)$$

其中 $h(z(0), t(0))$ 是在 $t(0)$ 的初始液柱高度，可以由 $a=0$ 時的相似解得到。

(5) 液柱尖端位置：

前面曾經提到液柱增長後，間端位置未必會座落於初始預定的格點上，所以需要以線性外插法由 $h(z(m(j)-1), t(j))$ 、 $h(z(m(j)-2), t(j))$ 來預測尖端位置，這時尖端位置可由 Z 軸與 $h(z(m(j)-1), t(j))$ 、 $h(z(m(j)-2), t(j))$ 的斜率； $\frac{h(z(m(j)-1), t(j)) - h(z(m(j)-2), t(j))}{z(m(j)) - z(m(j)-1)}$ 來決定。

(6) 格點重建：

由 Eqn.(3.36)得知 Z 方向的計算格點位於 $(0, z(k))$ 之間，而液柱的格點則是位於 $(0, z(m(j)))$ 之間。當液柱隨著時間增長時，欲判別計算到何時該格點該增加、何時需停止，需要一個判別的準則；本文是以步驟(5)中，由 $h(z(m(j)-1), t(j))$ 、 $h(z(m(j)-2), t(j))$ 以線性外插法計算出的尖端位置所增加的距離來判斷，當增加的距離大於 Δz 時，則對應增加格點數；當增加的距離小於 Δz 時，則停止增加格點數。

由於上述的差分式，並無法離散 $\frac{\partial F_i}{\partial z}$ 項，因此需要找出 F_i 與 z 之間的關係。上一章曾經提到，在固定 α 與 θ 的情況之下， F_i 與 S 之間為近似線性的關係，即

$$F_i = c_1 + c_2 \cdot S \quad (3.22)$$

假設液面的剪應力隨 Z 方向變化為線性分佈，即

$$S = c_3 + c_4 \cdot z \quad (3.52)$$

其中， c_3 與 c_4 為任意常數。則由 Eqn.(3.22)、Eqn.(3.52) 可得

$$\frac{\partial F_i}{\partial z} = c_2 \cdot c_4 \quad (3.53)$$

將 Eqn.(3.53) 和以上各差分式代入 Eqn.(2.17)，整理後可得

$$\begin{aligned} h_{i,n+1} - h_{i,n} = & A_{i,n} \cdot (h_{i+1,n+1} - h_{i-1,n+1}) + B_{i,n} \cdot (h_{i+1,n+1} - h_{i-1,n+1}) + \\ & C_{i,n} \cdot (h_{i+1,n+1} - h_{i-1,n+1}) + D_{i,n} (h_{i+1,n+1} - 2 \cdot h_{i,n} + h_{i-1,n+1}) + E_{i,n} \cdot h_{i,n+1} \end{aligned} \quad (3.54)$$

其中

$$A_{i,n} = \frac{F_i \cdot \Delta t}{2 \cdot \Delta z} \left(\frac{h_{i+1,n} - h_{i-1,n}}{2 \cdot \Delta z} \right) \quad (3.55)$$

$$B_{i,n} = \frac{\Delta t}{4} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial z} \cdot \left(\frac{h_{i+1,n} - h_{i-1,n}}{2 \cdot \Delta z} \right) \quad (3.56)$$

$$C_{i,n} = \frac{\Delta t}{8\Delta z} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial z} \cdot h_{i,n} \quad (3.57)$$

$$D_{i,n} = \frac{F_i \cdot \Delta t}{4 \cdot \Delta z^2} \cdot h_{i,n} \quad (3.58)$$

$$E_{i,n} = \frac{F_i \cdot \Delta t}{4} \cdot \left(\frac{h_{i+1,n} - 2 \cdot h_{i,n} + h_{i-1,n}}{\Delta z^2} \right) \quad (3.59)$$

故 Eqn.(2.17) 可以簡化為下式

$$h_{i,n} = P_{i,j-1}^n \cdot h_{i-1,n+1} + P_{i,j}^n \cdot h_{i,n+1} + P_{i,j+1}^n \cdot h_{i+1,n+1} \quad (3.60)$$

其中

$$P_{i,j-1}^n = A_{i,n} + C_{i,n} - D_{i,n} \quad (3.61)$$

$$P_{i,j}^n = 1 - B_{i,n} + 2D_{i,n} - E_{i,n} \quad (3.62)$$

$$P_{i,j+1}^n = -A_{i,n} - C_{i,n} - D_{i,n} \quad (3.63)$$

經由以上數值方法，可以計算出在固定 α 、 θ 之下，隨不同的 S 分佈，液柱尖端位置 $h(z,t)$ 的變化。計算的結果將在後面的章節作詳細的說明與討論。

3-6 液柱高度與尖端位置的討論

固定渠道的 $\alpha = 45^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ ，由液面所受到的剪應力分佈來區分，分別討論如下。

(1) 無剪應力分佈($S=0.0$)

利用上一個章節提到的數值方法，將液柱高度 $h(t,z)$ 做圖 3.9；其中

圖 3.9(a)為等流量的情況，圖 3.9(b)為等液柱高度的情況。由這兩個圖可以看出液柱高度 $h(t, z)$ 在等流量的情況，會隨著時間的增加有逐漸趨近於等液柱高度的趨勢，這與 *Weislogel* 與 *Lichter* 【11】的實驗觀察結果相同。此外，將液柱尖端位置 l 與時間 t 的關係作 $\log - \log$ 圖 3.10；由等流量的圖 3.10(a)可以觀察出 $l(t) \propto t^{3/5}$ ，而由等液柱高度的圖 3.10(b)可以觀察出 $l(t) \propto t^{1/2}$ 。

(2) 等剪應力分佈 ($S = \text{constant}$)

當剪應力的分佈為常數時，表示 α 、 θ 與 S 皆為常數，故 $F_i(\alpha, \theta, S)$ 並不是 z 的函數，即 $\frac{\partial F_i}{\partial z} = 0$ ，故存在有相似解。將液柱高度 $h(t, z)$ 以不同的 F_i 在不同的時間，於等流量與等液柱高度的情況下分別做圖 3.11、圖 3.12，可以看出當 F_i 較大時，液柱會增長的較快。在等流量及等液柱高度的情況下，將液柱尖端位置 l 與時間 t 的關係分別做圖 3.13 及圖 3.14。可以看出在等流量時 $l(t) \propto t^{3/5}$ ；而在等液柱高度時 $l(t) \propto t^{1/2}$ ，這和之前求相似解時所預測的結果相符合，也同時證明本文在數值計算上的正確性。

(3) 線性剪應力分佈 ($S = c_3 + c_4 \cdot z$)

在實際情況上，液面的剪應力是由渠道中液體的流動與氣體的流動彼此間交互作用而產生，所以剪應力的分佈應是液態流與氣態流耦合的結果。為了簡化問題，茲假設液面剪應力呈線性分佈。根據蘇頌凱君[13]的研究， F_i 與 S 與之間的關係可以下式的線性關係來描述：

$$F_i = 0.1363 - 1.4277 \cdot S(z) \quad (3.63)$$

而當 F_i 為 z 的函數時，則 $\frac{\partial F_i}{\partial z} \neq 0$ ，此時 Eqn.(2.17) 不存在有相似解，需要以數值方法來求解。同時為了與蘇君的研究結果相互印證，剪應力分佈將採用以下四個函數

$$S = 0.0 + 0.1 \cdot z \quad (3.64)$$

$$S = 0.075 - 0.1 \cdot z \quad (3.65)$$

$$S = -0.1 + 0.1 \cdot z \quad (3.66)$$

$$S = 0.0 - 0.1 \cdot z \quad (3.67)$$

其中 Eqn.(3.64) 與 Eqn.(3.67) 表示液面從無剪應力分佈開始，分別受到沿 $+z$ 與 $-z$ 方向漸增的剪應力分佈；Eqn.(3.65) 則表示液面受到一與流向反向且逐漸減弱的剪應力分佈；而 Eqn.(3.66) 表示液面受到一與流向同向且逐漸減弱的剪應力分佈。

將 Eqn.(3.64) 的剪應力分佈，在等流量時的液柱高度 $h(t, z)$ 與尖端位置 $l(t)$ 分別做圖 3.15、圖 3.16；在等液柱高度時分別做圖 3.17、圖 3.18。由圖 3.16(b) 與圖 3.18(b) 發現液柱高度隨時間的變化在等流量與等液柱高度時不再是 $l(t) \propto t^{3/5}$ 與 $l(t) \propto t^{1/2}$ ，而是 $l(t) \propto t^{0.498}$ 與 $l(t) \propto t^{0.371}$ 。

以 Eqn.(3.65) 的分佈做圖 3.19-3.22，這時尖端位置的變化在等流量與等液柱高度時分別為 $l(t) \propto t^{0.499}$ 與 $l(t) \propto t^{0.417}$ 。

以 Eqn.(3.66) 的分佈做圖 3.23-3.26，這時尖端位置的變化在等流量與等液柱高度時分別為 $l(t) \propto t^{0.621}$ 與 $l(t) \propto t^{0.540}$ 。

以 Eqn.(3.67) 的分佈做圖 3.27-3.30，這時尖端位置的變化在等流量與等液柱高度時分別為 $l(t) \propto t^{0.678}$ 與 $l(t) \propto t^{0.589}$ 。

由以上的液柱高度變化可以得到一些結論：

- (1) 當剪應力與流向反向時($S > 0$)，例如 Eqn.(3.64)與 Eqn.(3.65)，液柱的成長會趨於緩和；而當剪應力與流向同向時($S < 0$)，例如 Eqn.(3.66)與 Eqn.(3.67)，液柱的成長將增快。
- (2) 當剪應力與流向反向且逐漸變小或剪應力與流向同向且逐漸變大時， $h(t, z)$ 的分佈會有由凸面逐漸變成凹面的趨勢。
- (3) 計算所得的結果均與蘇君[13]的結果相符合，驗證了本文所採用的數值方法的精確可信，因此將在下一章應用於具有熱傳及蒸發的問題上。

第四章 渠道熱傳的效應與影響

4-1 基本假設

在工業的實際應用上，熱與流之間的關係是密不可分的；參考圖 4.1，當楔型渠道的壁面處有熱能傳入渠道內時，將使渠道內的流體在液面處汽化為蒸氣，而影響傳輸現象及液柱的行進。除了之前在計算流場時所作的假設之外，在此也要增添幾個基本假設：

- (1) 假設各熱傳係數例如熱擴散係數 α' 為常數。
- (2) 渠道壁面傳入的熱能完全由流體在液面處蒸發所帶走，即忽略渠道內流體的內能變化。
- (3) 考慮 Pe 數 (Peclet Number) 很小的情況，可忽略熱對流的效應。

因為 $Pe = \frac{VL}{\alpha}$ ，可以視為熱對流與熱傳導的比值，當 Pe 數很大時表示熱對流的效應遠大於熱傳導；反之，當 Pe 數很小時，表示熱傳導的效應遠大於熱對流，可忽略熱對流的效應。

4-2 液柱高度與尖端位置的變化

參考圖 4.1，當楔型渠道壁面處有熱能以 $\tilde{q} \text{ (kJ/m}^2 \cdot \text{sec)}$ 的熱傳率傳入時，將使流體在液面處蒸發成蒸氣，由質量守恆可以得到以下的關係式

$$\rho \cdot \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \tilde{t}} \cdot dZ + \rho \cdot d(\tilde{A} \cdot \bar{V}_z) + d\dot{m}_e = 0 \quad (4.1)$$

其中 $\dot{m}_e$ 指液面處所蒸發的質量流率 (kg/sec)。

由熱力學可知，在一個開放系統中

$$\dot{Q} - \dot{W} = \Delta \dot{H} \quad (4.2)$$

如之前所作的基本假設，當渠道壁面傳入的熱能能夠完全由流體在液面處蒸發所？走時，Eqn.(4.2) 可以改寫成

$$2R_s \cdot \tilde{q} \cdot dZ = d\dot{m}_e \cdot h_{fg} \quad (4.3)$$

其中 R_s 為截面上液柱在壁面的接觸長度，可以經由幾何上的計算得到

$$R_s = H \cdot f \cdot \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \alpha} - \frac{2\cos \theta \cos \delta_0}{\sin \alpha} + 1 \right)^{1/2} \quad (4.4)$$

由 Eqn.(4.3) 可得

$$d\dot{m}_e = \frac{2R_s \cdot \tilde{q}}{h_{fg}} dZ \quad (4.5)$$

將 Eqn.(4.5) 代入 Eqn.(4.1) 後可整理出

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\partial(\tilde{A} \cdot \bar{V}_z)}{\partial Z} - \frac{2R_s \cdot \tilde{q}}{\rho \cdot h_{fg}} \quad (4.6)$$

再將 Eqn.(4.4) 代入 Eqn.(4.6)，同時加以無因次化，可以得到

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial(A \cdot \bar{v}_z)}{\partial z} - 2h \cdot f \cdot \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \alpha} - \frac{2\cos \theta \cos \delta_0}{\sin \alpha} + 1 \right)^{1/2} \cdot \dot{q} \quad (4.7)$$

其中

$$\dot{q} = \frac{L_0}{H_0 \cdot W_0 \cdot \rho \cdot h_{fg}} \cdot \tilde{q} \quad (4.8)$$

再將 Eqn.(2.11)、Eqn.(2.15) 代入 Eqn.(4.7)，可以得到

$$\frac{\partial(F_A \cdot h^2)}{\partial t} = \frac{\partial(F_A \cdot F_i \cdot h^2 \cdot h_z)}{\partial z} - 2h \cdot f \cdot \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \alpha} - \frac{2\cos \theta \cos \delta_0}{\sin \alpha} + 1 \right)^{1/2} \cdot \dot{q} \quad (4.9)$$

又由於先前曾經提過的，在固定 α 與 θ 的情況下， F_A 將為定值，故

Eqn.(4.9) 可以整理為

$$2 \frac{\partial h}{\partial t} = 2F_i \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial F_i}{\partial z} \cdot h \cdot \frac{\partial h}{\partial z} + F_i \cdot h \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \kappa \cdot \dot{q} \quad (4.10)$$

其中

$$\kappa = \frac{2f \cdot \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \alpha} - \frac{2\cos \theta \cos \delta_0}{\sin \alpha} + 1 \right)^{1/2}}{F_A} \quad (4.11)$$

當 α 與 θ 為定值時， κ 將為一常數。

熱傳效應對液柱行進及尖端位置的影響即可由 Eqn.(4.10) 計算得之。由於 Eqn.(4.10) 為一非線性的偏微分方程式，因此將以數值計算來模擬；其處理方式及邊界條件的選取和第 3-5 節所述相似，唯一的差異是當計算等流量階段時，流量為一定值的限制條件將改寫為

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{l(t)} h^2(z, t) dz + 2f \cdot \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \alpha} - \frac{2\cos \theta \cos \delta_0}{\sin \alpha} + 1 \right)^{1/2} \cdot \\ \dot{q} \int_0^{l(t)} h(z, t) dz = \text{constant} \end{aligned} \quad (4.12)$$

其中等號左邊第二項為工作液體在液面的蒸發量。

4-3 結果與討論

為了探討壁面熱傳與液面蒸發效應對液柱行進與尖端位置的影響，本文將變化 $\tilde{q}$ 值的大小來進行有系統的分析。同時為了模擬在電子熱傳應用中開啟與關閉 (on-off) 的效應，本文亦將以週期性的熱傳函數來探討不同頻率的熱傳量對傳輸現象的影響。

(1) 定值熱傳量 $\dot{q}$

當選取一微小的 $\dot{q}$ 值，如 $\dot{q}=0.001$ 、 0.005 或 0.01 ，計算後並加以做圖，可以發現 $h(t,z)$ 的變化與之前無熱傳效應時相似，在此以 $\dot{q}=0.01$ 為代表將液柱高度 $h(t,z)$ 在等流量階段及等液柱高度階段分別做圖於圖 4.2 及圖 4.3，並將尖端位置 l 與時間 t 的關係在等流量階段及等液柱高度階段做於圖 4.4 及圖 4.5。計算結果顯示，當壁面有熱傳同時液面有液體蒸發時，液柱行進的速度將會減緩，且 $\dot{q}$ 值愈大，液柱的行進速度就愈緩慢。此外，由上一章得知，液柱的增長與時間具有 $l(t) \propto t^\zeta$ 的關係，而 ζ 值將隨 $\dot{q}$ 值的遞增而遞減，其間的關係如圖 4.6 所示。由該圖可推知，當 $\dot{q}$ 大到某值之後，液柱將停滯不前。而在等液柱高度階段時所能達到的最大 $\dot{q}$ 值會大於等流量階段時的最大 $\dot{q}$ 值。

(2) 週期性熱傳量 $\dot{q}(t)$

當 $\dot{q}$ 為時間 t 的函數時，假設此函數為

$$\dot{q}(t) = q_0 \cdot \left(\frac{\cos(\omega \cdot (t-1)) + 1}{2} \right) \quad (4.13)$$

其中 $t=1$ 為熱傳的啟始時間，此時液柱的啟始形狀由相似解求得； q_0 為傳入熱能的振幅； ω 為頻率。將 Eqn.(4.13) 做圖 4.7 可以看出在不同頻率時 $\dot{q}$ 值隨時間的變化。接著選取 $q_0=0.02$ ，並選取 $\omega=0.1$ 、 1 、 10 和 50 ，將等流量階段及等液柱高度階段的計算結果分別做圖於圖 4.8、圖 4.9、圖 4.10 及圖 4.11，藉以觀察不同的 ω 對液柱高度與尖端位置變化的影響，並和之前 $\dot{q}=0.01$ 定值熱傳量時比較。

當壁面熱傳及液面蒸發成週期性的振盪型式時，液柱的行進速度也會是週期性的振盪型式。若將週期性的熱傳效應與相當的定值熱傳效應(平均熱傳量相等)相較，可以發現不論是在等流量階

段或是等液柱高度階段，除低頻時，週期性熱傳效應對液柱行進的影響有可能較之於定值熱傳效應為小外，在中頻與高頻的熱傳情況，週期性的熱傳效應與定值的熱傳效應對液柱的平均行進速度則具有相同的影響。雖然如此，比較圖 4.8 與圖 4.10 可發現，當受熱傳與液面蒸發效應的影響時，液柱在等流量階段的行進速度要比在等液柱高度階段的行進速度來得小，也就是說液柱的行進受熱傳與蒸發的影響在等流量階段要比在等液柱高度階段來得大。

此外，由圖 4.12 可知，當壁面熱傳量與液面蒸發量不致太大時，液柱似乎更快由等流量階段過渡到等液柱高度階段，但是當熱傳量及蒸發量逐漸增大時，由於工作液體的不斷蒸發，液面未必能夠維持在原來的高度。因此當渠道壁面有較大熱能傳入時，等液柱高度階段可能不復存在。

第五章 結論與建議

本文主要探討壁面熱傳與液面蒸發效應對楔型渠道流的影響。由於此時液柱高度 $h(t, z)$ 並不存在有解析解，因此本文以數值方法來求解，並分析不同型態的熱傳函數 $\dot{q}$ 對於液柱移動與尖端位置的影響。其結論如下。

- (1) 由於受渠道壁面熱傳 $\dot{q}$ 以及液面蒸發的影響，液柱的行進速度將趨緩；當 $\dot{q}$ 及蒸發量增大至某一程度時，液柱將停止行進。
- (2) 等流量階段所能計算的熱傳 $\dot{q}$ 值較等液柱高度階段所能計算的熱傳 $\dot{q}$ 值為小，亦即在等流量階段時，較小的熱傳量及液面蒸發量即可使液柱停滯不前。這是因為在計算等液柱高度階段時，將液柱進口 ($Z=0$) 高度固定在某一定值，無形間加強了液柱前進的驅動力。
- (3) 當壁面熱傳及液面蒸發成週期性的振盪型式時，液柱的行進速度也將成週期性的振盪型式。
- (4) 若將週期性的熱傳效應與相當的定值熱傳效應(平均熱傳量相等)相較，可以發現不論是在等流量階段或是等液柱高度階段，除低頻時，週期性熱傳效應對液柱行進的影響有可能較之於定值熱傳效應為小外，在中頻與高頻的熱傳情況，週期性的熱傳效應與定值的熱傳效應對液柱的平均行進速度則具有相同的影響。雖然如此，比較圖 4.8 與圖 4.10 可發現，當受熱傳與液面

蒸發效應的影響時，液柱在等流量階段的行進速度要比在等液柱高度階段的行進速度來得小，也就是說液柱的行進受熱傳與蒸發的影響在等流量階段要比在等液柱高度階段來得大。

雖然本文主要研究壁面熱傳與液面蒸發對楔型渠道流的影響，但是並未考慮流場與溫度場的耦合現象，因此未來的研究可從這方面著手，使研究工作更符合實際狀況。此外目前的研究對於流場的啟始階段仍然未加以考慮，若能以數值模擬的方式，對流場從啟始階段開始模擬，相信會對楔型渠道流能有更深入和完整的瞭解。

參考文獻

1. Concus, P. and Finn, R., 1974, On Capillary Free Surfaces in the Absence of Gravity. *Acta. Math.*, Vol. 132, pp. 177-198.
2. Concus, P. and Finn, R., 1974, On Capillary Free Surfaces in a Gravitational Field. *Acta. Math.*, Vol. 132, pp. 207-223.
3. Ayyaswamy, P. S., Catton, I., and Edwards, D. K., 1974, Capillary Flow in Triangular Grooves. *Trans. ASME: J. Appl. Mech.*, Vol. 41, pp. 332-336.
4. Ransohoff, T. C. and Radke, C. J., 1988, Laminar Flow of a Wetting Liquid along Corners of a Predominantly Gas-Occupied Noncircular Pore. *J. Colloid Interface Sci.*, Vol.121, pp. 392-401.
5. Ma, H. B., Peterson, G. P., and Lu, X., 1994, The Influence of Vapor-Liquid Interactions on the Liquid Pressure Drop in Triangular Microgrooves. *Intl J. Heat Mass Transfer.*, Vol. 37, pp. 2211-2219.
6. Peterson, G. P. and Ma, H. B., 1996, Analysis of Countercurrent Liquid-Vapor Interactions and the Effect on the Liquid Friction Factor. *Exp. Thermal Fluid Sci.*, Vol. 12, pp. 13-24.
7. Peterson, G. P. and Ma, H. B., 1997, Laminar Friction Factor in Micro-scale Ducts of Irregular Cross Section. *Microscale Thermophysical Eng.*, Vol. 1, pp. 253-265.
8. Peterson, G. P. and Ma, H. B., 1996, Theoretical Analysis of the Maximum Heat Transport in Triangular Grooves: A Study of Idealized Micro Heat Pipes. *J. Heat Transfer.*, Vol. 118, pp. 731-739.
9. Peterson, G. P. and Ma, H. B., 1997, Temperature Variation and Heat Transfer in Triangular Grooves with an Evaporating Film. *J.*

- Thermophysics and Heat Transfer*. Vol. 11, No. 1, pp. 90-97.
10. Mittelman, H. D. and Zhu, A., 1996, Capillary Surfaces with Different Contact Angles in a Corner. *Microgravity Sci. Technol.*, IX/1, pp. 22-27.
 11. Weislogel, M. M. and Lichter, S., 1998, Capillary Flow in an Interior Corner. *J. Fluid Mech.*, Vol. 373, pp. 349-378.
 12. Weislogel, M. M., 1996, Capillary Flow in an Interior Corner. PhD Thesis, Northwestern Univ.
 13. Song-Kai, Su., 2002, Theoretical Analysis of Transient Capillary Flow in a Wedge. M.S. Thesis, Department of Mechanical Engineering, National Taiwan University.
 14. Stephan, P.C., and Busse, C.A., 1992, Analysis of the Heat Transfer Coefficient of Grooved Heat Pipe Evaporator Walls. *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 35, No. 2, pp. 383-391.
 15. Xu, X., and Carey, V. P., 1990, Film Evaporation from a Micro-Grooved Surface-An Approximate Heat Transfer Model and Its Comparison with Experimental Data. *J. Thermophysics*, Vol. 4, No. 4, pp.512-520.
 16. Ha, J. M., and Peterson G. P., 1994, Analytical Prediction of the Axial Dryout Point for Evaporating Liquids in Triangular Microgrooves. *ASMS J. Heat Transfer*, Vol. 116, pp. 498-503.
 17. Catton, I. and Stroes, G. R., 2002, A Semi-Analytical Model to Predict the Capillary Limit of Heated Inclined Triangular Capillary Grooves. *J. Heat Transfer.*, Vol. 124, pp.162-168.

表 1 在 $\alpha = 45^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $S = 0.0$ 時， $\bar{w}$ 與 F_i 隨 m 值增加的收斂情況。

m	$\bar{w}$	F_i
10	0.003425	0.1356
20	0.003440	0.1362
30	0.003443	0.1363
40	0.003444	0.1364
50	0.003444	0.1364

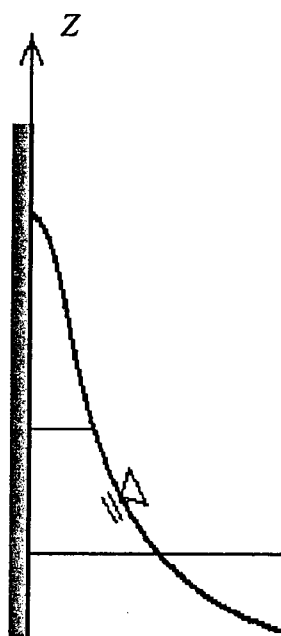
表 2 在 $S=0.0$ 時， F_i 隨著 α 與 θ 的變化。

	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 10^\circ$	$\theta = 20^\circ$
α	F_i	F_i	F_i
5	0.1584	0.1588	0.1593
10	0.1520	0.1524	0.1531
15	0.1459	0.1464	0.1475
20	0.1407	0.1413	0.1427
25	0.1363	0.1372	0.1388
30	0.1329	0.1340	0.1360
35	0.1303	0.1317	0.1341
40	0.1285	0.1302	0.1331
45	0.1275	0.1297	0.1331
50	0.1272	0.1300	0.1342
55	0.1277	0.1313	0.1363
60	0.1288	0.1336	0.1397
65	0.1306	0.1371	0.1446
70	0.1330	0.1422	
75	0.1358	0.1494	
80	0.1388		
85	0.1415		
	$\theta = 30^\circ$	$\theta = 40^\circ$	$\theta = 50^\circ$
α	F_i	F_i	F_i
5	0.1598	0.1605	0.1612
10	0.1540	0.1550	0.1561
15	0.1487	0.1500	0.1514
20	0.1442	0.1458	0.1475
25	0.1407	0.1425	0.1444
30	0.1381	0.1402	0.1423
35	0.1365	0.1388	0.1411
40	0.1359	0.1385	
45	0.1363	0.1391	
50	0.1378		
55	0.1405		
	$\theta = 60^\circ$	$\theta = 70^\circ$	$\theta = 80^\circ$
α	F_i	F_i	F_i
5	0.1620	0.1629	0.1641
10	0.1573	0.1588	
15	0.1530	0.1548	
20	0.1493		
25	0.1464		

表 3 在 $S = 0.0$ 時， $\frac{F_i \cdot \sin^2 \alpha}{f}$ 隨著 α 與 θ 的變化。

	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 10^\circ$	$\theta = 20^\circ$
α	$\frac{F_i \cdot \sin^2 \alpha}{f}$	$\frac{F_i \cdot \sin^2 \alpha}{f}$	$\frac{F_i \cdot \sin^2 \alpha}{f}$
5	0.0126	0.0124	0.0118
10	0.0218	0.0215	0.0204
15	0.0270	0.0275	0.0260
20	0.0316	0.0311	0.0292
25	0.0333	0.0326	0.0303
30	0.0332	0.0325	0.0299
35	0.0319	0.0311	0.0282
40	0.0295	0.0286	0.0254
45	0.0264	0.0255	0.0219
50	0.0228	0.0218	0.0178
55	0.0189	0.0178	0.0135
60	0.0149	0.0137	0.0089
65	0.0111	0.0098	0.0044
70	0.0075	0.0060	
75	0.0045	0.0027	
80	0.0021		
85	0.0005		
	$\theta = 30^\circ$	$\theta = 40^\circ$	$\theta = 50^\circ$
α	$\frac{F_i \cdot \sin^2 \alpha}{f}$	$\frac{F_i \cdot \sin^2 \alpha}{f}$	$\frac{F_i \cdot \sin^2 \alpha}{f}$
5	0.0109	0.0095	0.0078
10	0.0185	0.0159	0.0127
15	0.0234	0.0197	0.0150
20	0.0258	0.0211	0.0152
25	0.0264	0.0207	0.0134
30	0.0253	0.0186	0.0102
35	0.0229	0.0153	0.0056
40	0.0195	0.0110	
45	0.0153	0.0058	
50	0.0106		
55	0.0054		
	$\theta = 60^\circ$	$\theta = 70^\circ$	$\theta = 80^\circ$
α	$\frac{F_i \cdot \sin^2 \alpha}{f}$	$\frac{F_i \cdot \sin^2 \alpha}{f}$	$\frac{F_i \cdot \sin^2 \alpha}{f}$
5	0.0058	0.0036	0.0012
10	0.0089	0.0046	
15	0.0096	0.0033	
20	0.0081		
25	0.0048		

(a)



(b)

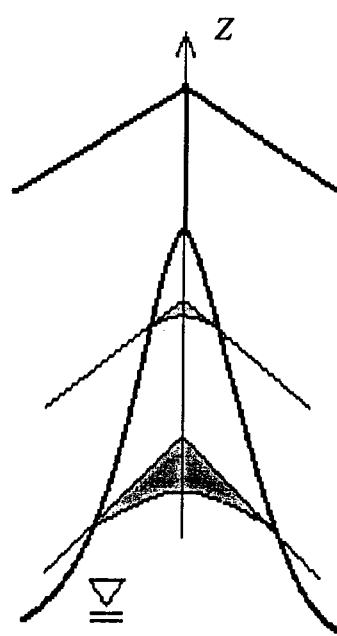


圖 1.1 渠道與流體關係示意圖；(a) 側視圖；(b) 斜上視圖。

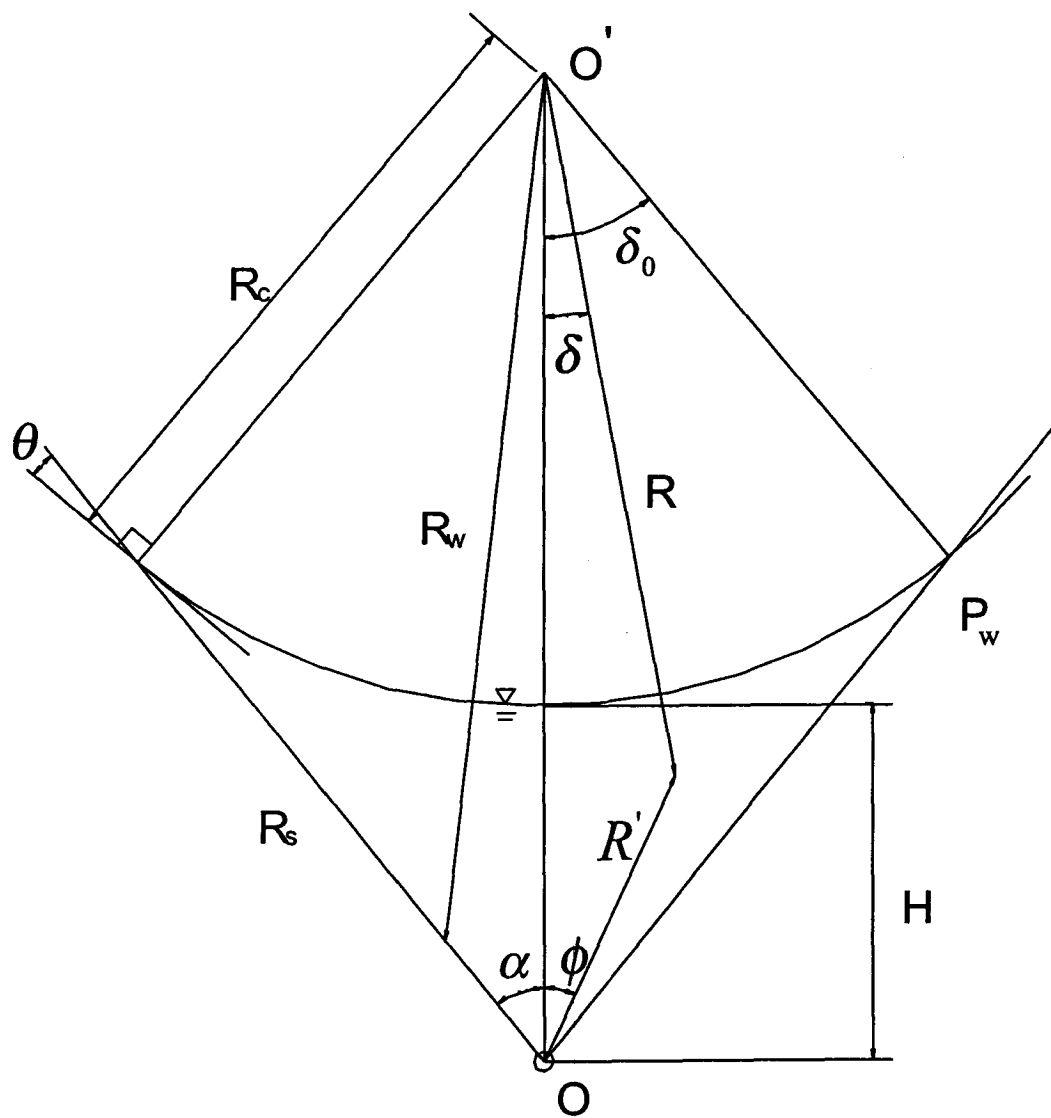
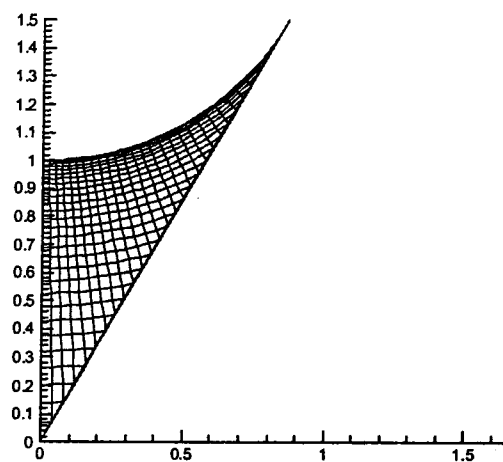
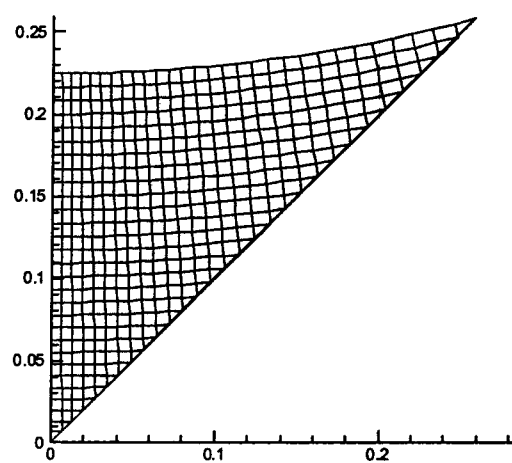


圖 1.2 楔型渠道截面圖。

(a)



(b)



(c)

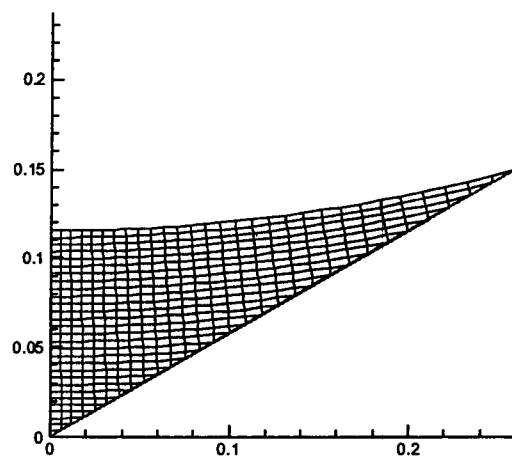
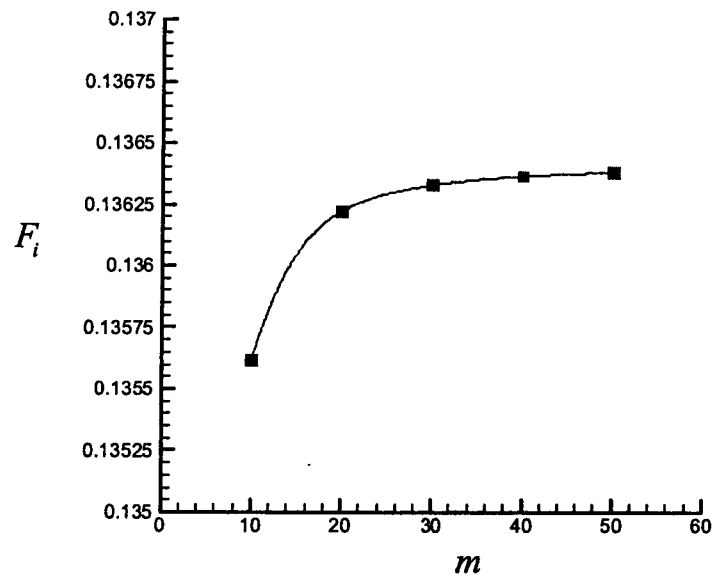


圖 3.1 格點系統；(a) $\alpha = 30^\circ, \theta = 0^\circ$ ；(b) $\alpha = 45^\circ, \theta = 30^\circ$ ；
(c) $\alpha = 60^\circ, \theta = 15^\circ$ 。

(a)



(b)

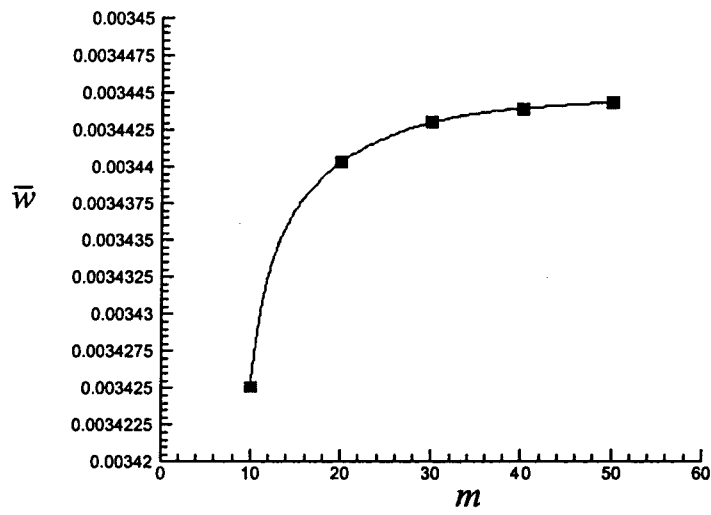
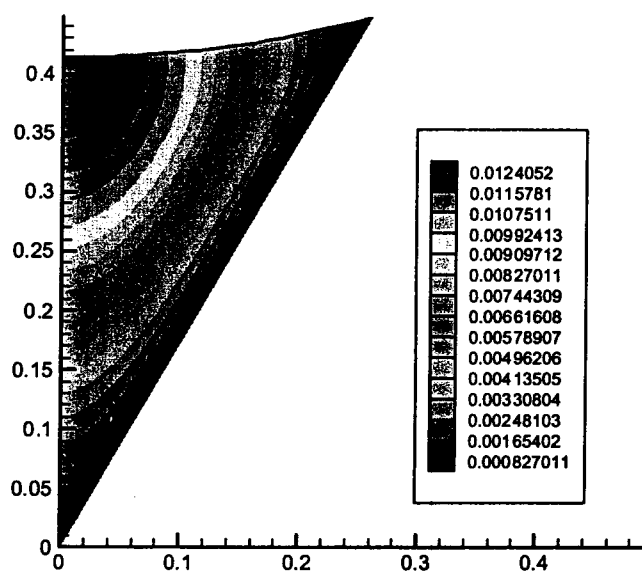


圖 3.2 格點數 m 值之收斂測試， $\alpha = 45^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ 及 $S = 0.0$ ；
(a) F_i 與 m ；(b) $\bar{w}$ 與 m 。

(a)



(h)

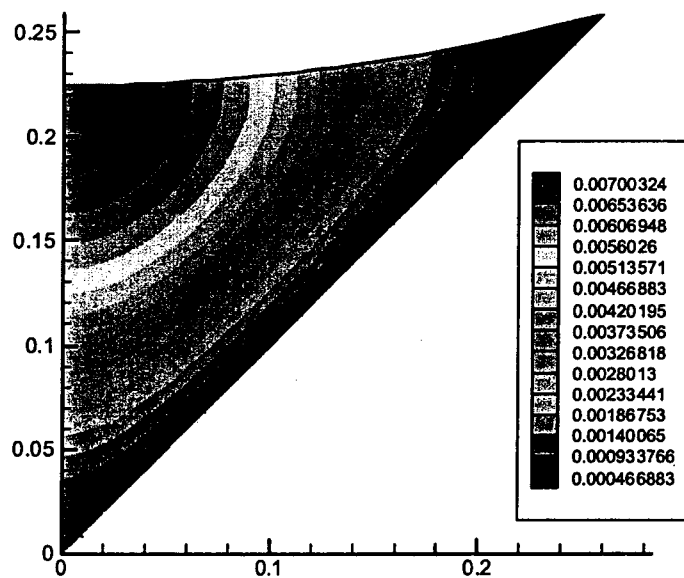
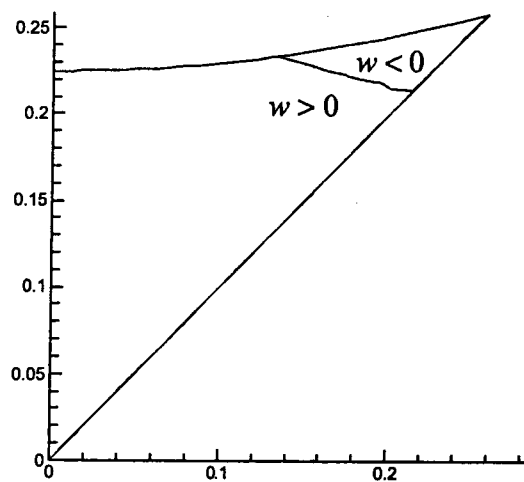
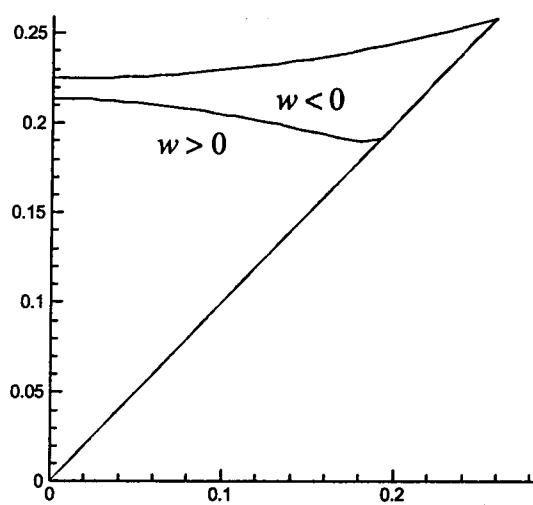


圖 3.3 液柱截面速度 w 分佈， $S=0$ ；(a) $\alpha = 30^\circ$ ， $\theta = 45^\circ$ ；
(b) $\alpha = 45^\circ$ ， $\theta = 30^\circ$ 。

(a)



(b)



(c)

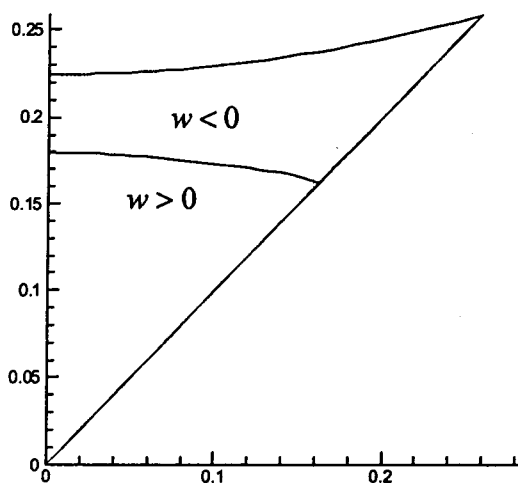


圖 3.4 液柱截面速度 w ， $\alpha=45^\circ$ ， $\theta=30^\circ$ ；(a) $S=0.05$ ；
(b) $S=0.075$ ；(c) $S=0.1$ 。

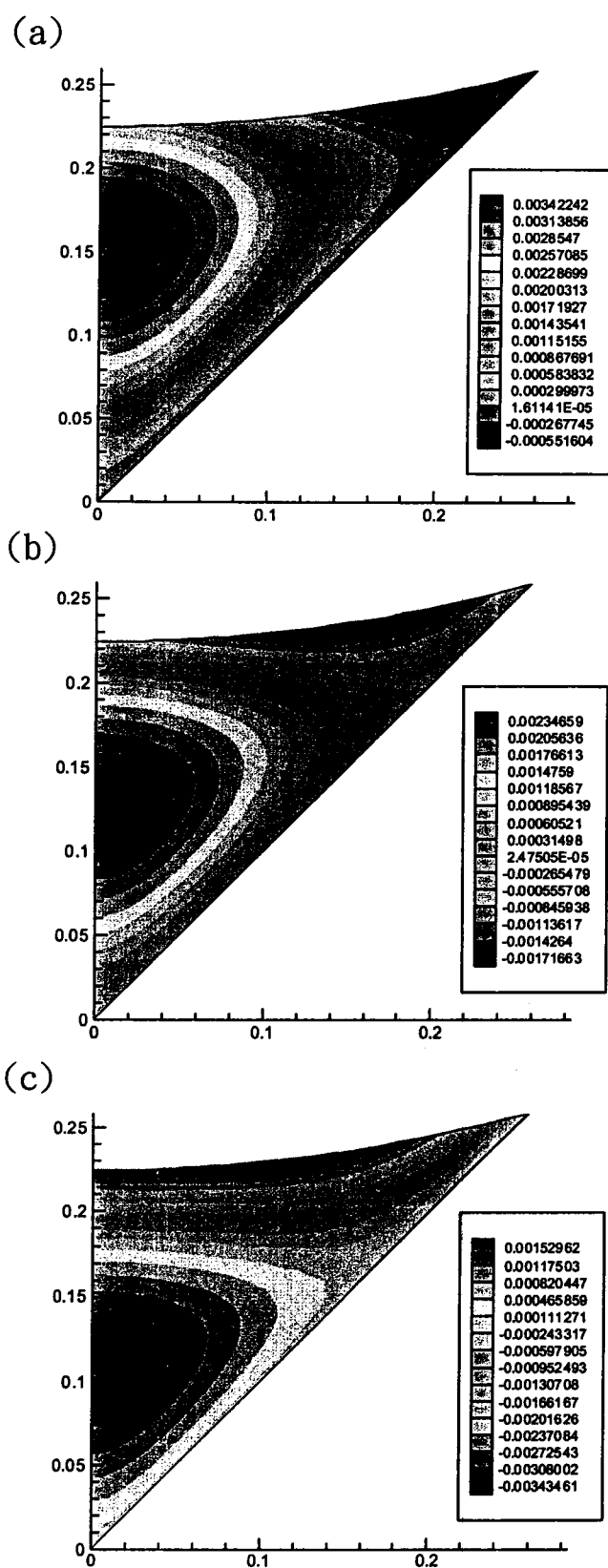
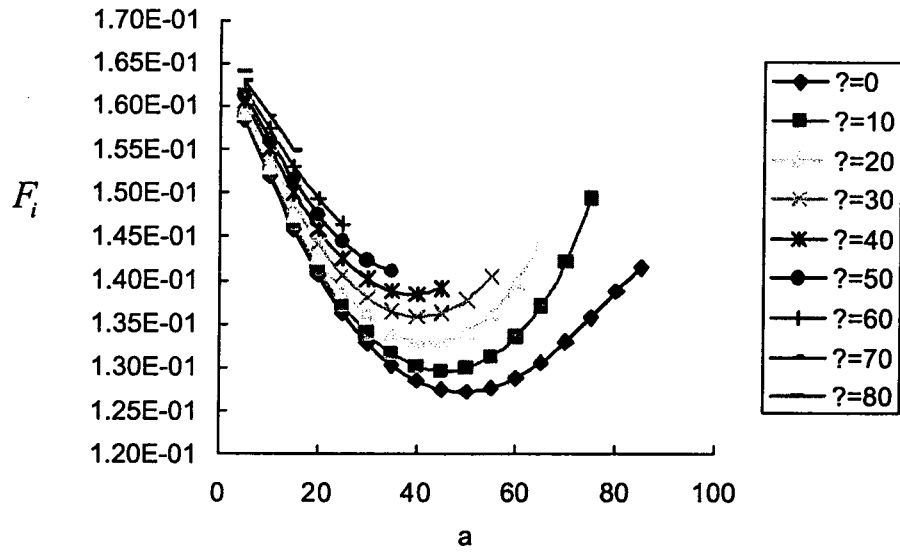


圖 3.5 液面處有剪應力作用下的截面速度 $\bar{w}$; (a) $S=0.05$;
(b) $S=0.075$; (c) $S=0.1$ 。

(a)



(b)

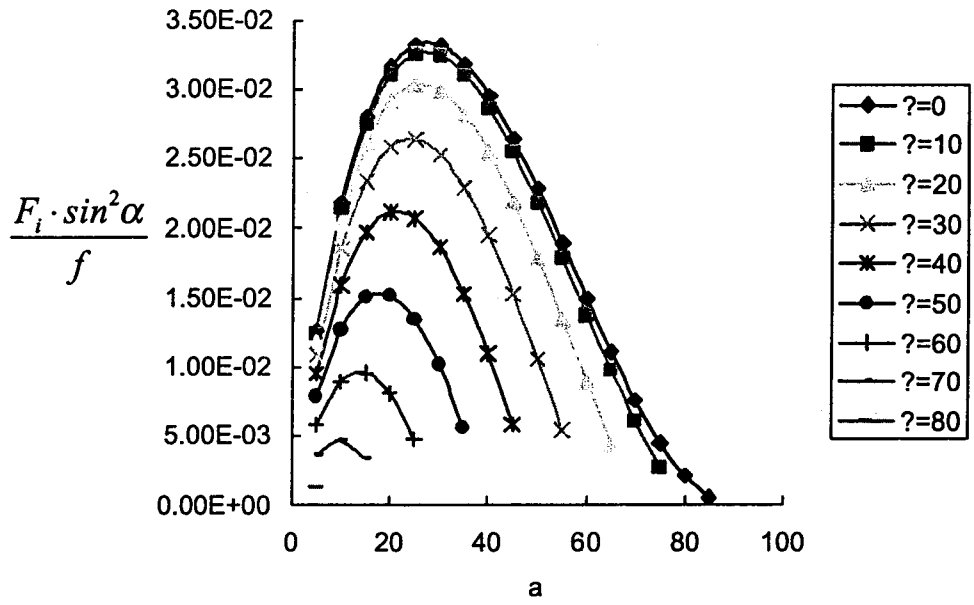
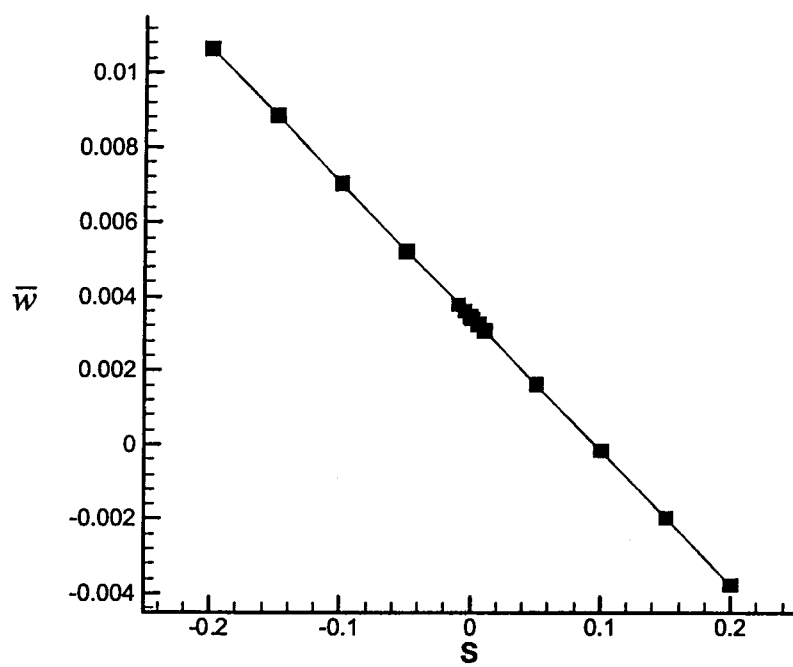


圖 3.6 α 與 θ 的關係， $S=0$ ；(a) F_i ；(b) $\frac{F_i \cdot \sin^2 \alpha}{f^2}$ 。

(a)



(b)

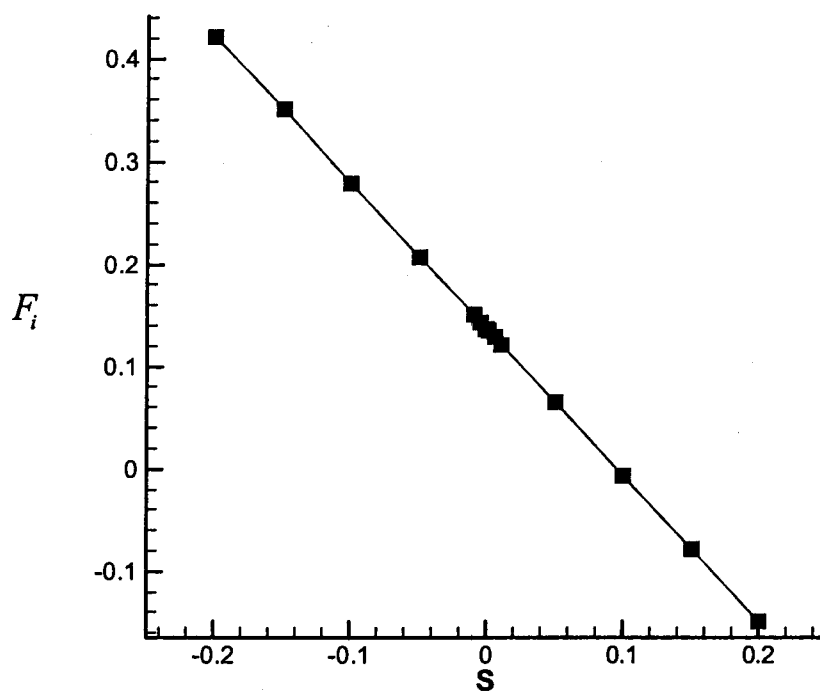


圖 3.7 S 的關係圖(a) $\bar{w}$; (b) F_i 。

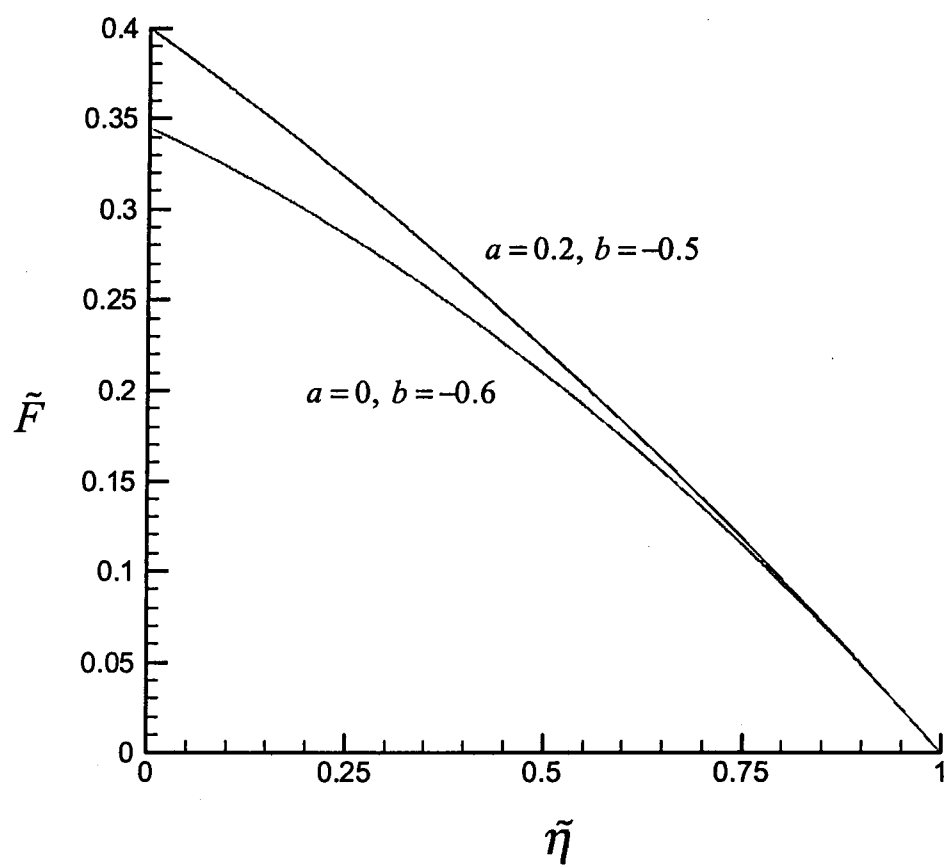


圖 3.8 相似解 $\tilde{F}$ 與 $\tilde{\eta}$ 。

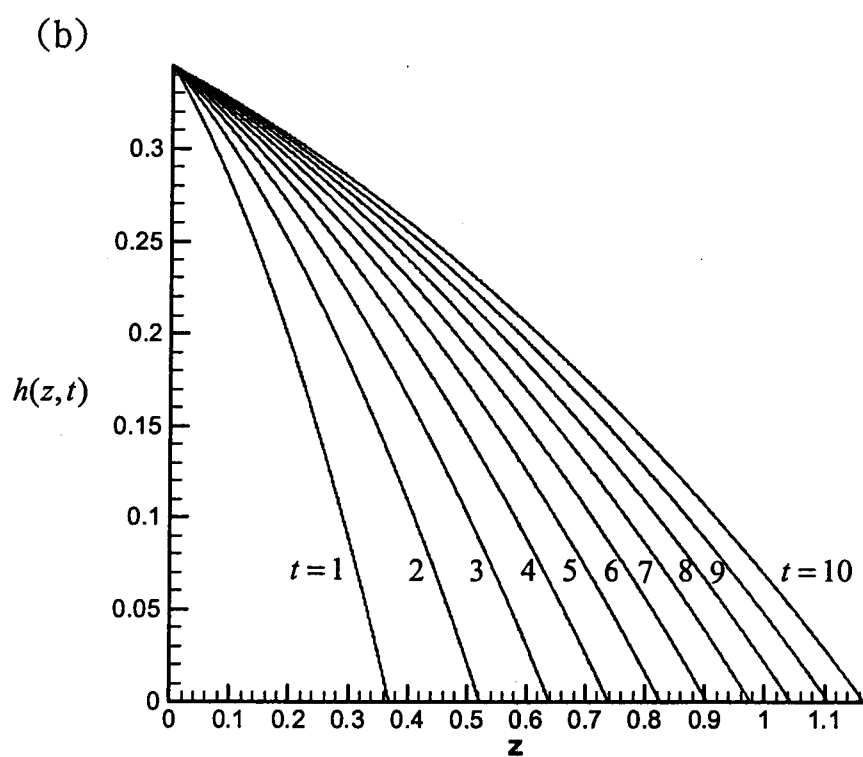
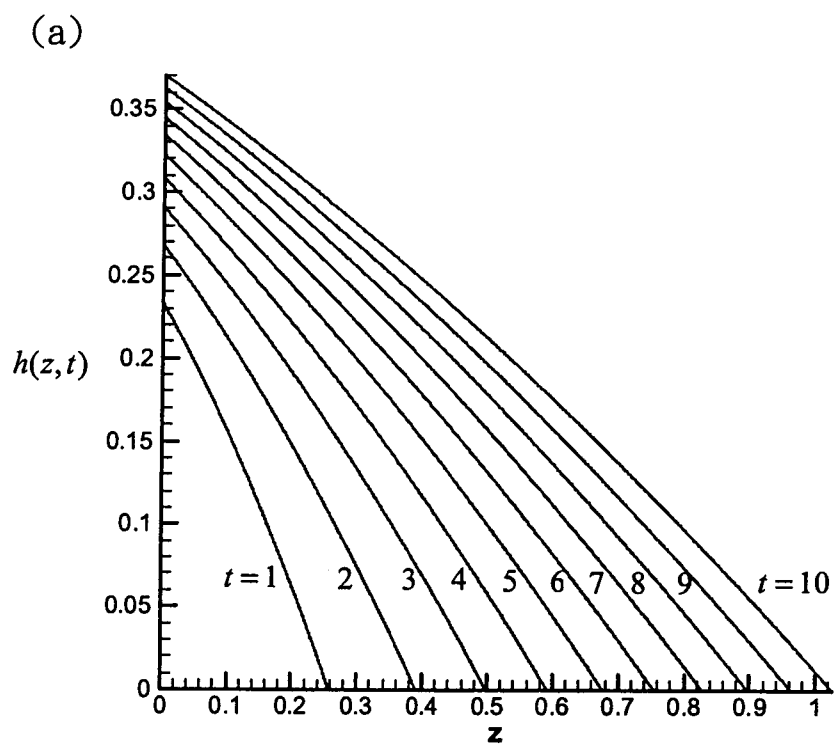


圖 3.9 液柱高度圖， $\alpha = 45^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $S = 0$ ；(a) 等流量階段；
(b) 等液柱高度階段。

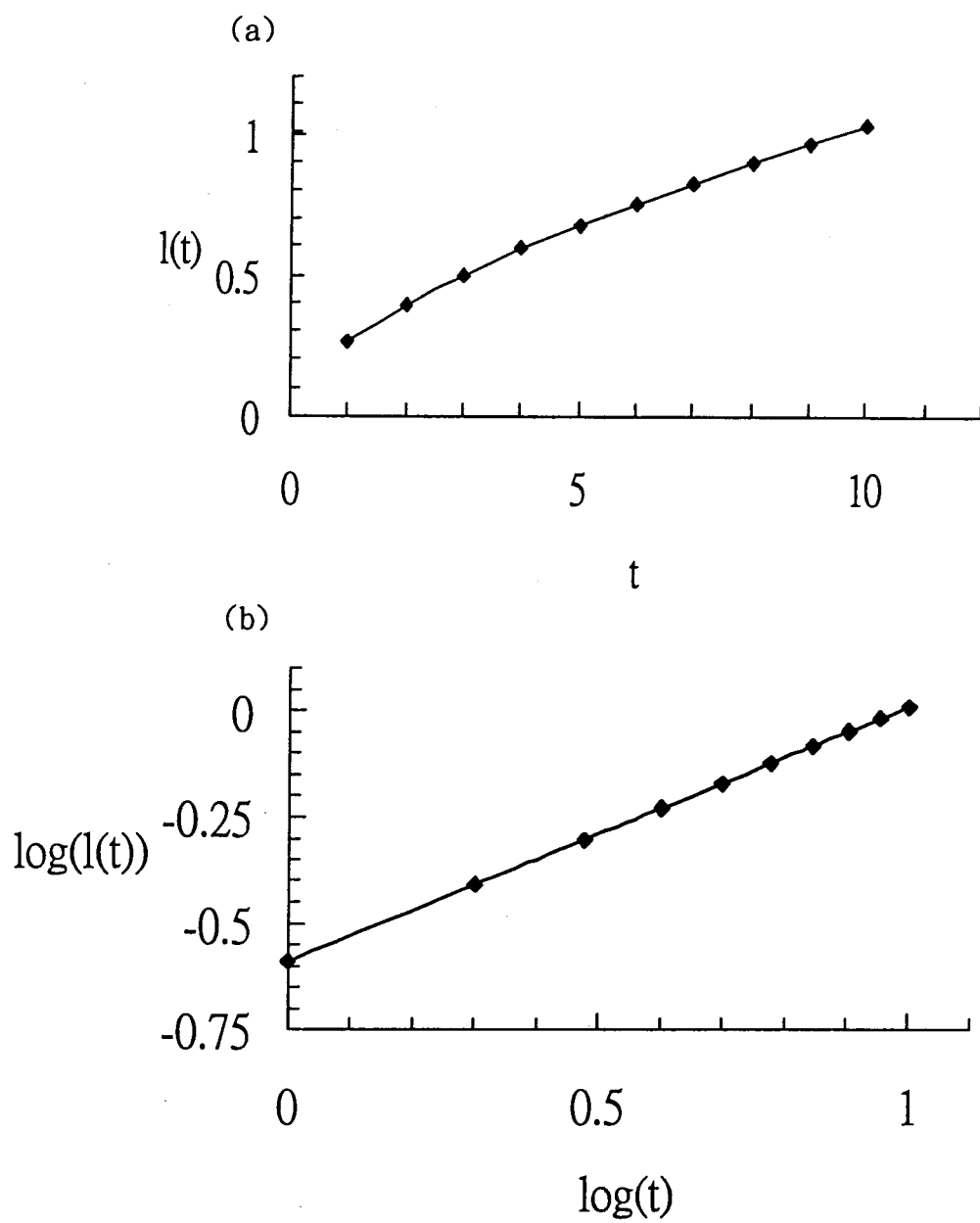


圖 3.10 等流量階段的液柱尖端位置圖， $\alpha = 45^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $S = 0.0$ ；(a) $l(t)$ 與 t ；(b) $\log(l(t))$ 與 $\log(t)$ 。

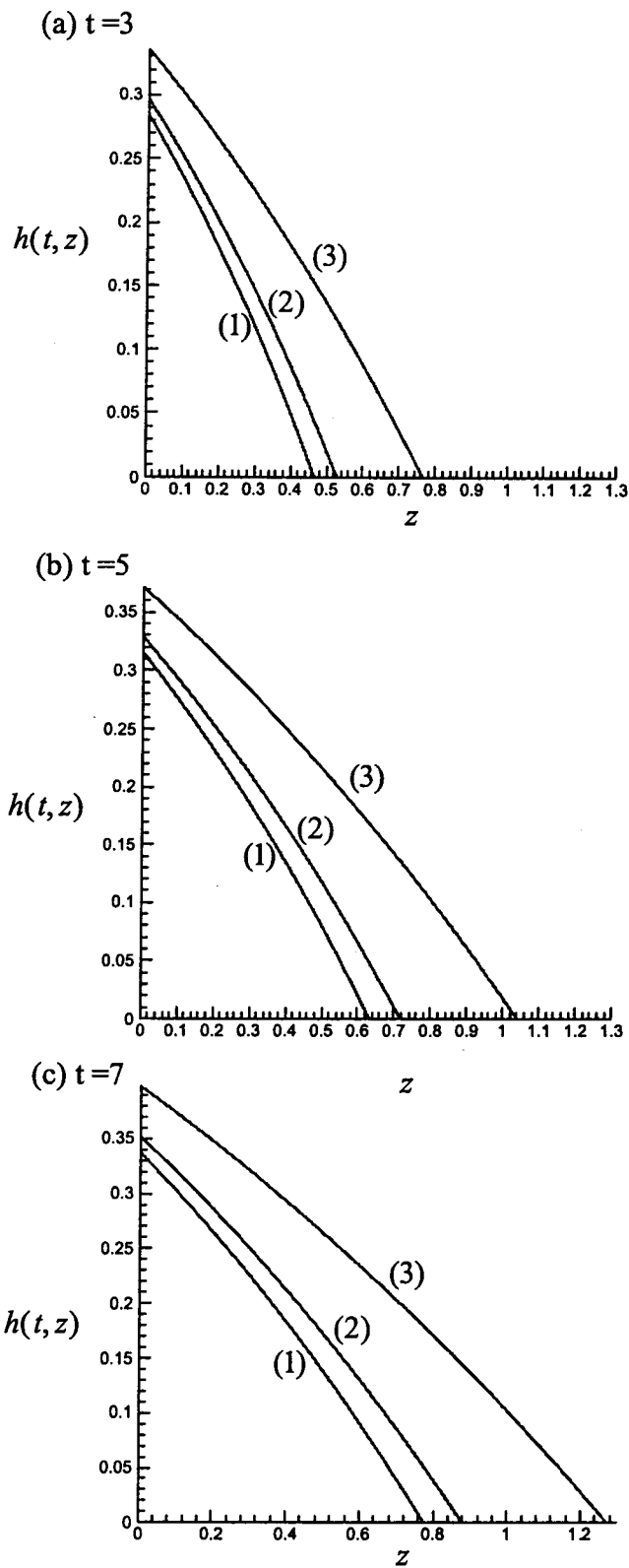


圖 3.11 在等流量階段， $h(z, t)$ 與 t 和 F_i 的變化；(a) $t=3$ ；
(b) $t=5$ ；(c) $t=7$ ；(1) $F_i=0.1221$ ；(2) $F_i=0.1506$ ；(3) $F_i=0.2791$ 。

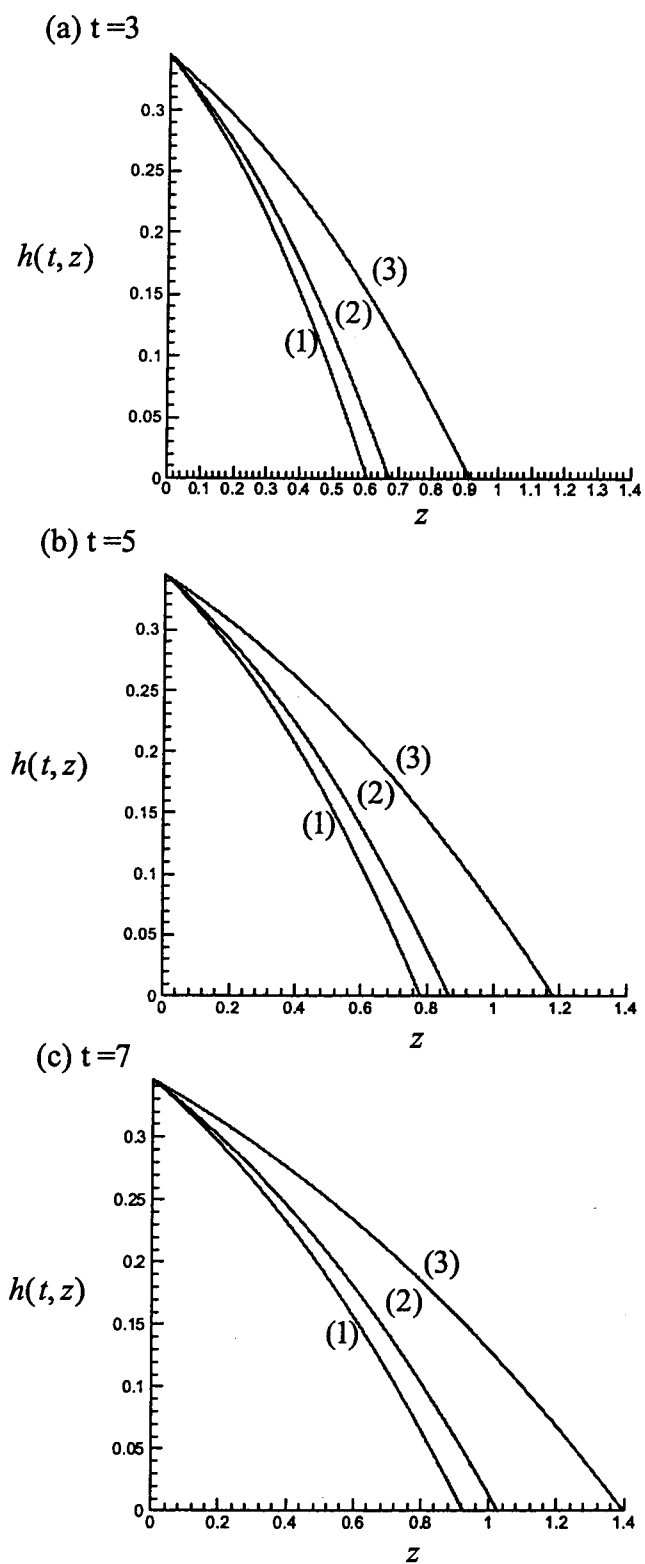


圖 3.12 在等液柱高度階段， $h(z, t)$ 與 t 和 F_i 的變化；(a) $t=3$ ；(b) $t=5$ ；(c) $t=7$ ；(1) $F_i=0.1221$ ；(2) $F_i=0.1506$ ；(3) $F_i=0.2791$ 。

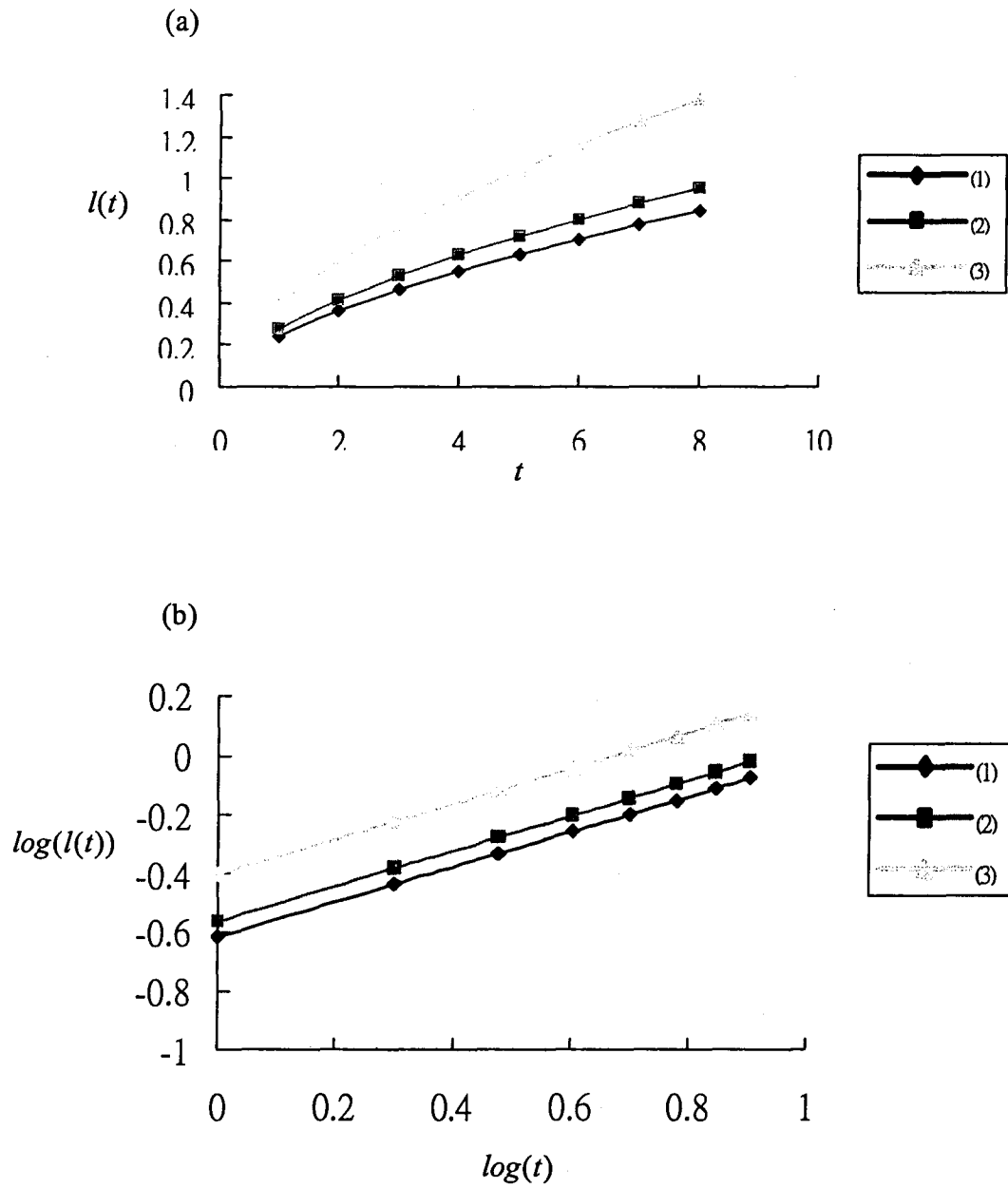


圖 3.13 在等流量階段， $h(z,t)$ 與 t 和 F_i 的變化；(a) $l(t)$ 與 t ；
(b) $\log(l(t))$ 與 $\log(t)$ ；(1) $F_i = 0.1221$ ；(2) $F_i = 0.1506$ ；(3) $F_i = 0.2791$ 。

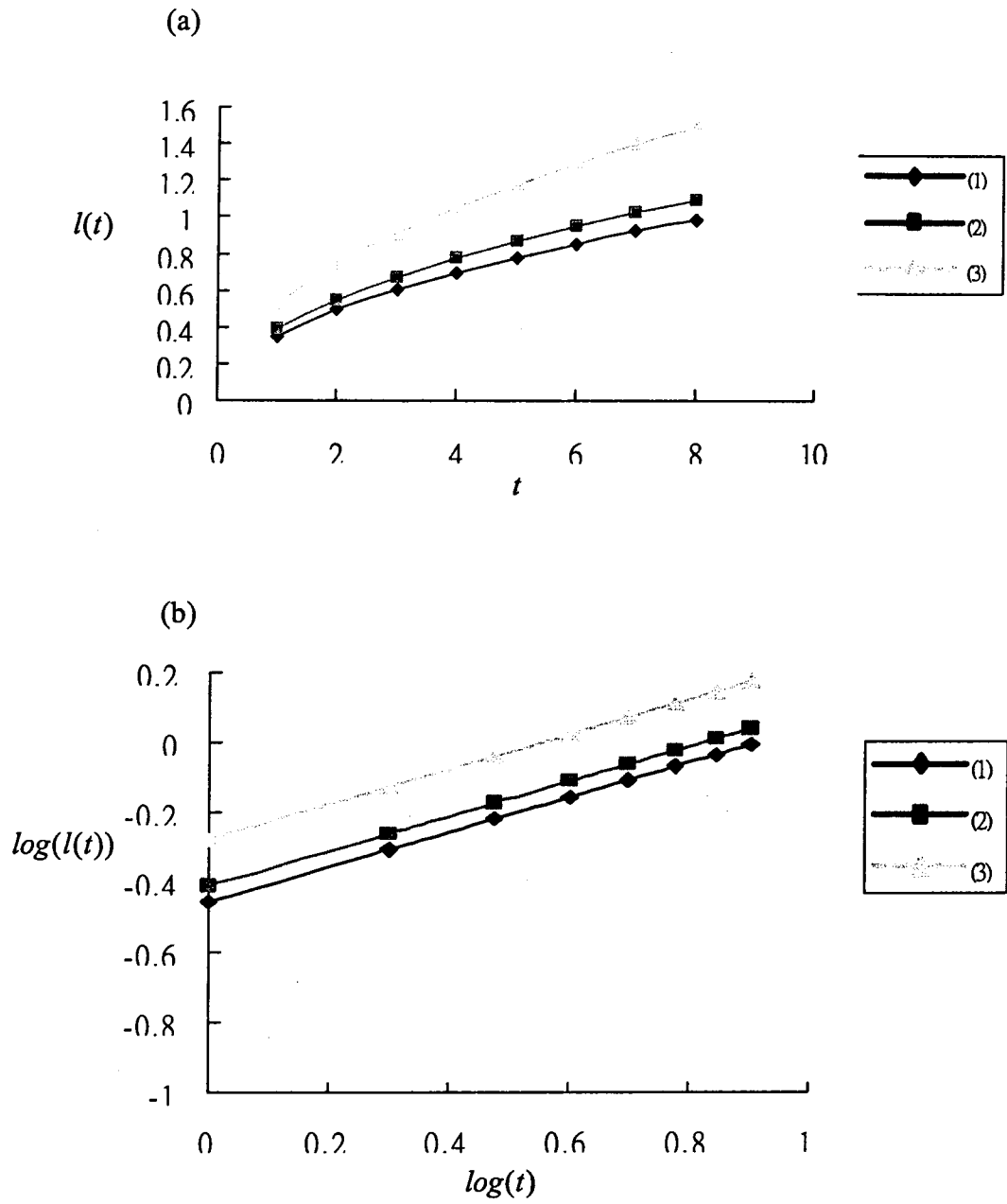


圖 3.14 在等液柱高度階段， $h(z,t)$ 與 t 和 F_i 的變化；(a) $l(t)$ 與 t ；(b) $\log(l(t))$ 與 $\log(t)$ ；(1) $F_i = 0.1221$ ；(2) $F_i = 0.1506$ ；(3) $F_i = 0.2791$ 。

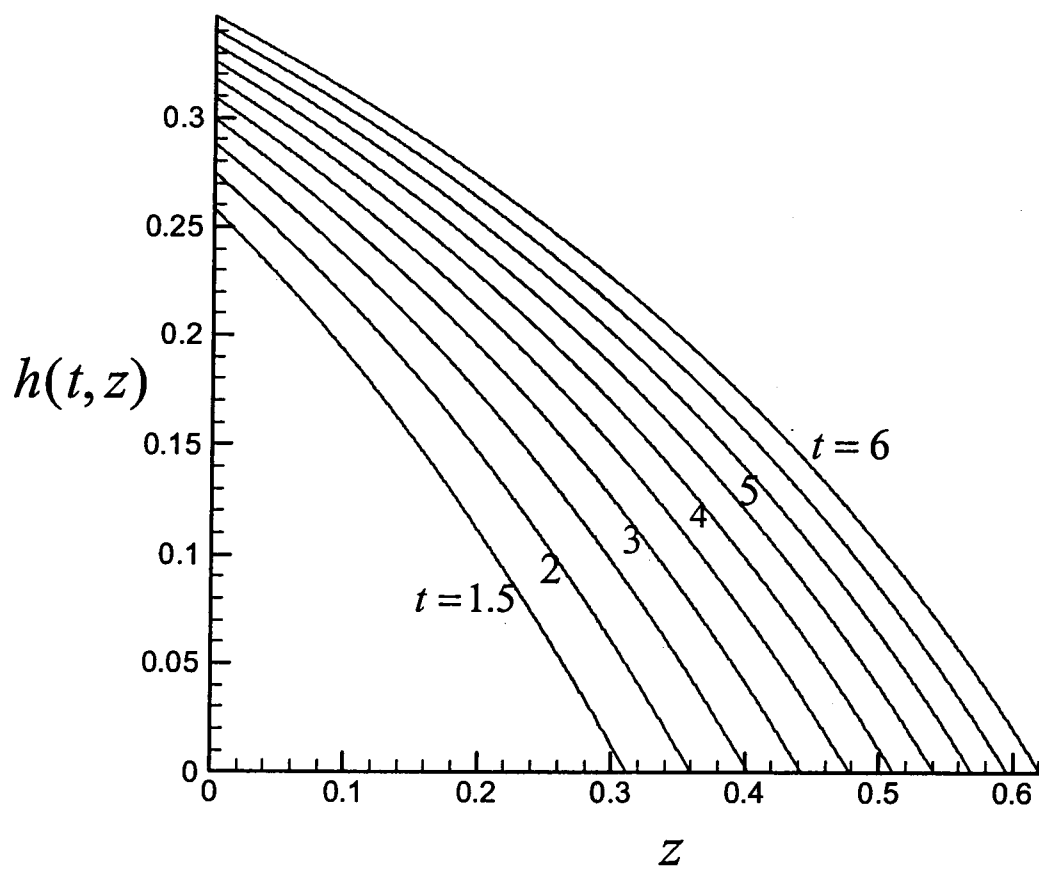


圖 3.15 液柱高度 $h(t, z)$ 在等流量階段的變化； $\alpha = 45^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $S = 0.0 + 0.1 \cdot z$ 。

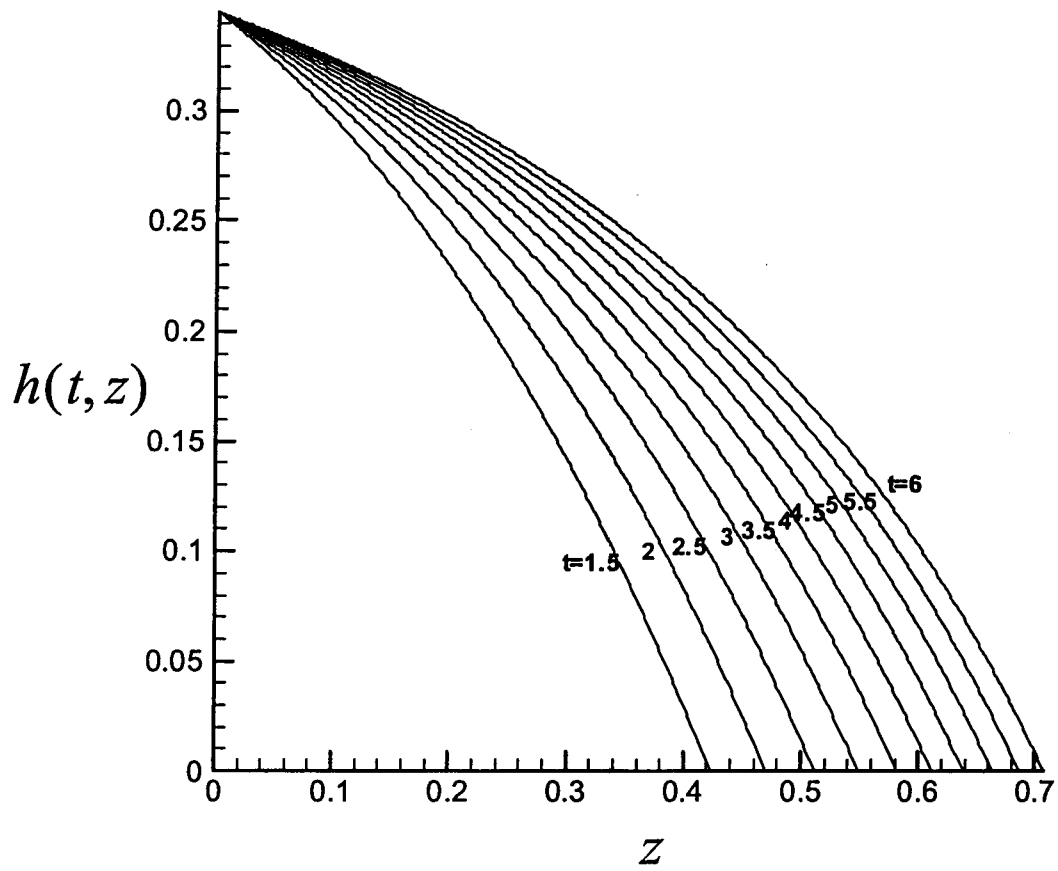


圖 3.16 液柱高度 $h(t, z)$ 在等液柱高度階段的變化；
 $\alpha = 45^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $S = 0.0 + 0.1 \cdot z$ 。

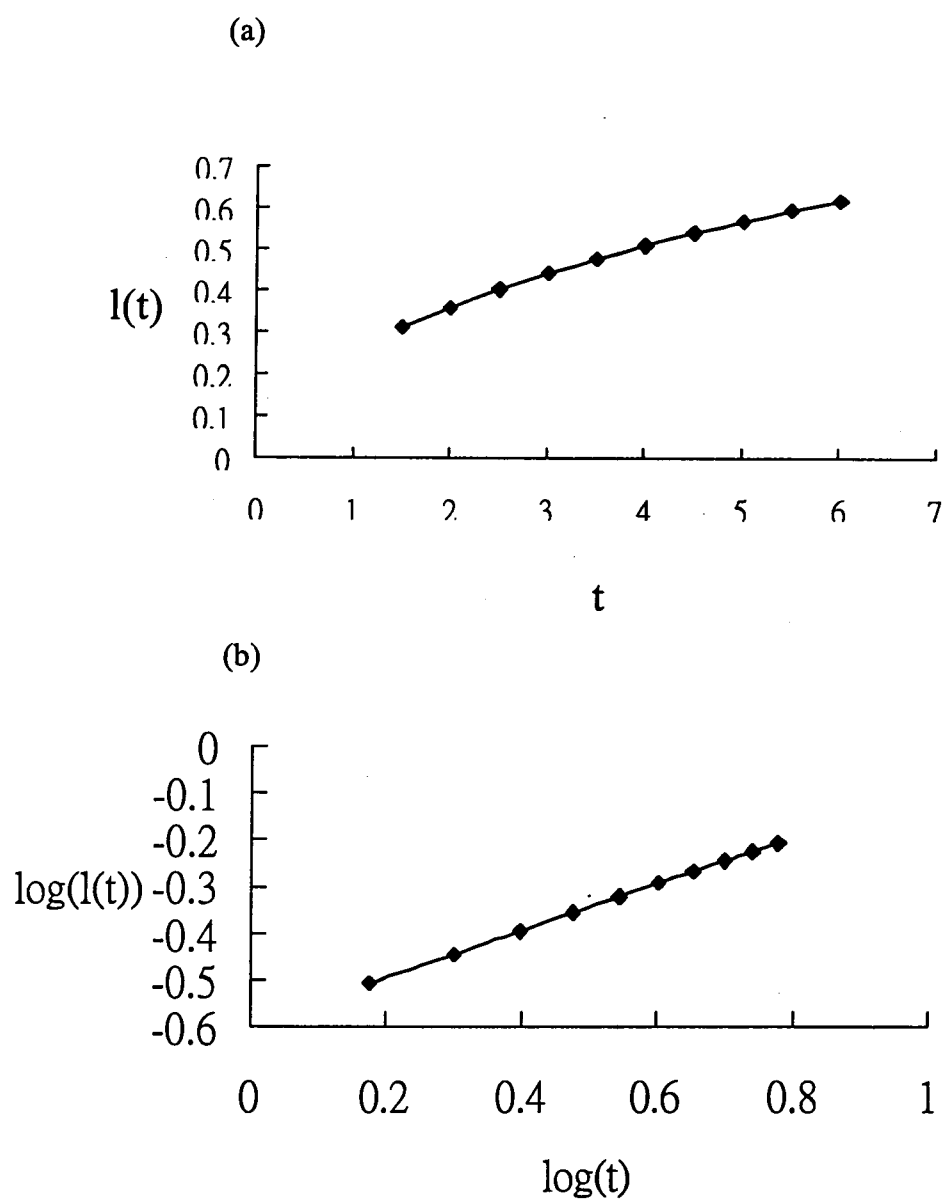


圖 3.17 $l(t)$ 與 t 在等流量階段的關係； $\alpha = 45^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $S(z) = 0.0 + 0.1 \cdot z$ 。

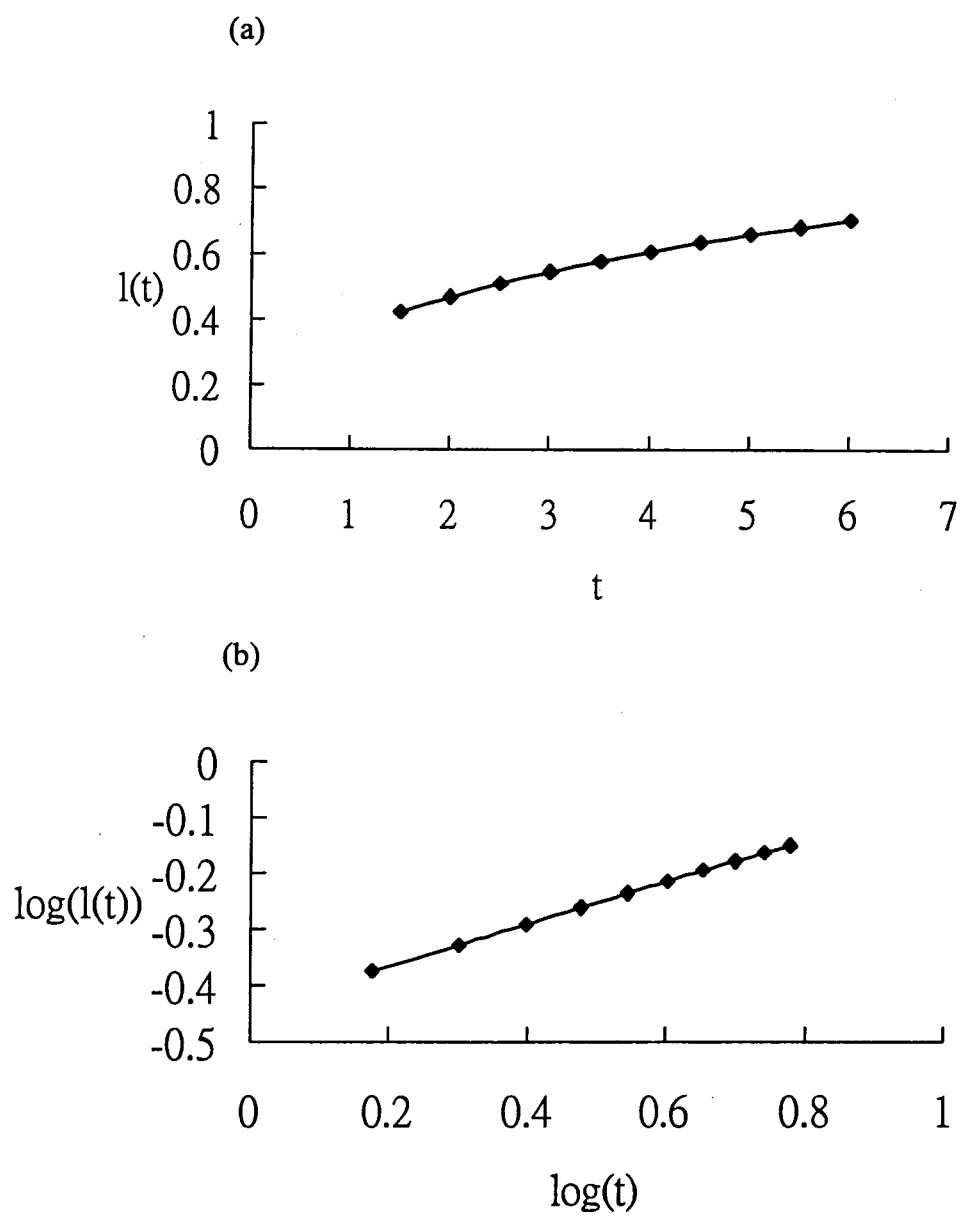


圖 3.18 $l(t)$ 與 t 在等液柱高度階段的關係； $\alpha = 45^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $S(z) = 0.0 + 0.1 \cdot z$ 。

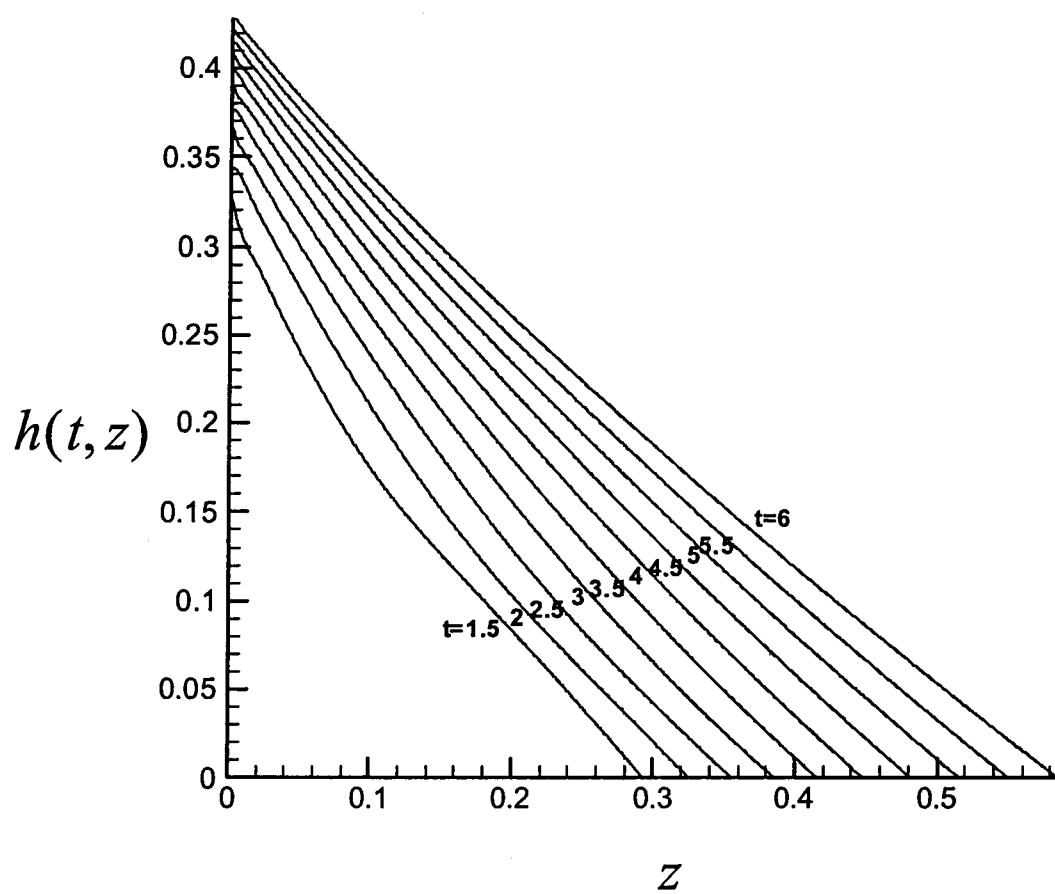


圖 3.19 液柱高度 $h(t, z)$ 在等流量階段的變化； $\alpha = 45^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $S = 0.075 - 0.1 \cdot z$ 。

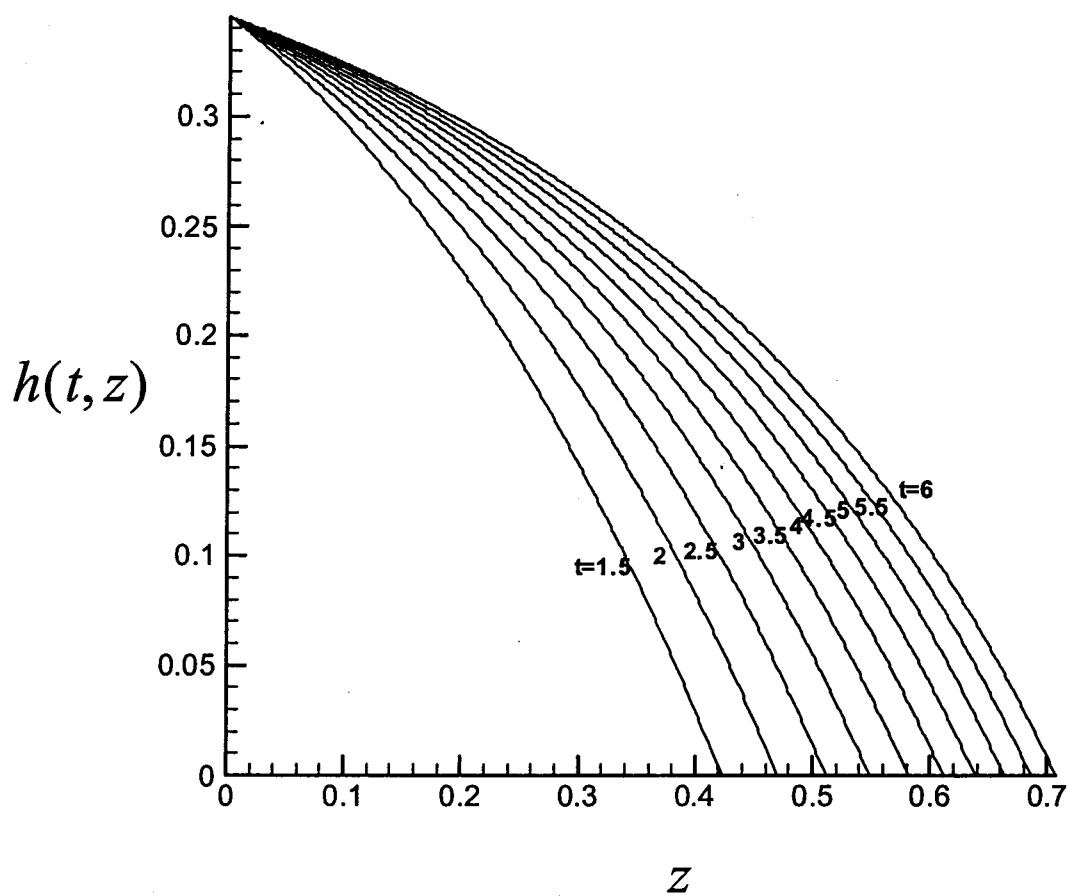


圖 3.20 液柱高度 $h(t, z)$ 在等液柱高度階段的變化；
 $\alpha = 45^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $S = 0.075 - 0.1 \cdot z$ 。

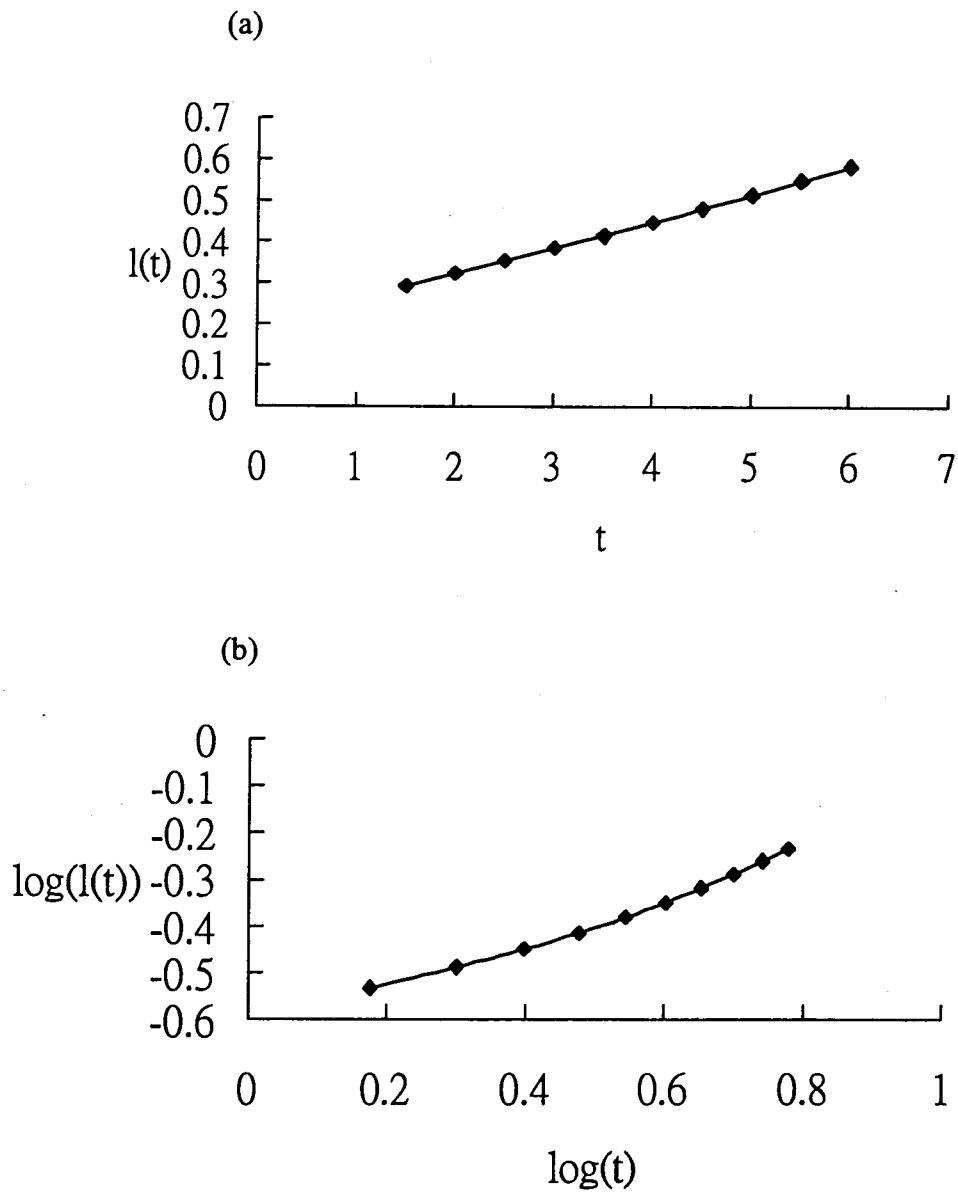


圖 3.21 $l(t)$ 與 t 在等流量階段的關係； $\alpha = 45^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $S(z) = 0.075 - 0.1 \cdot z$ 。

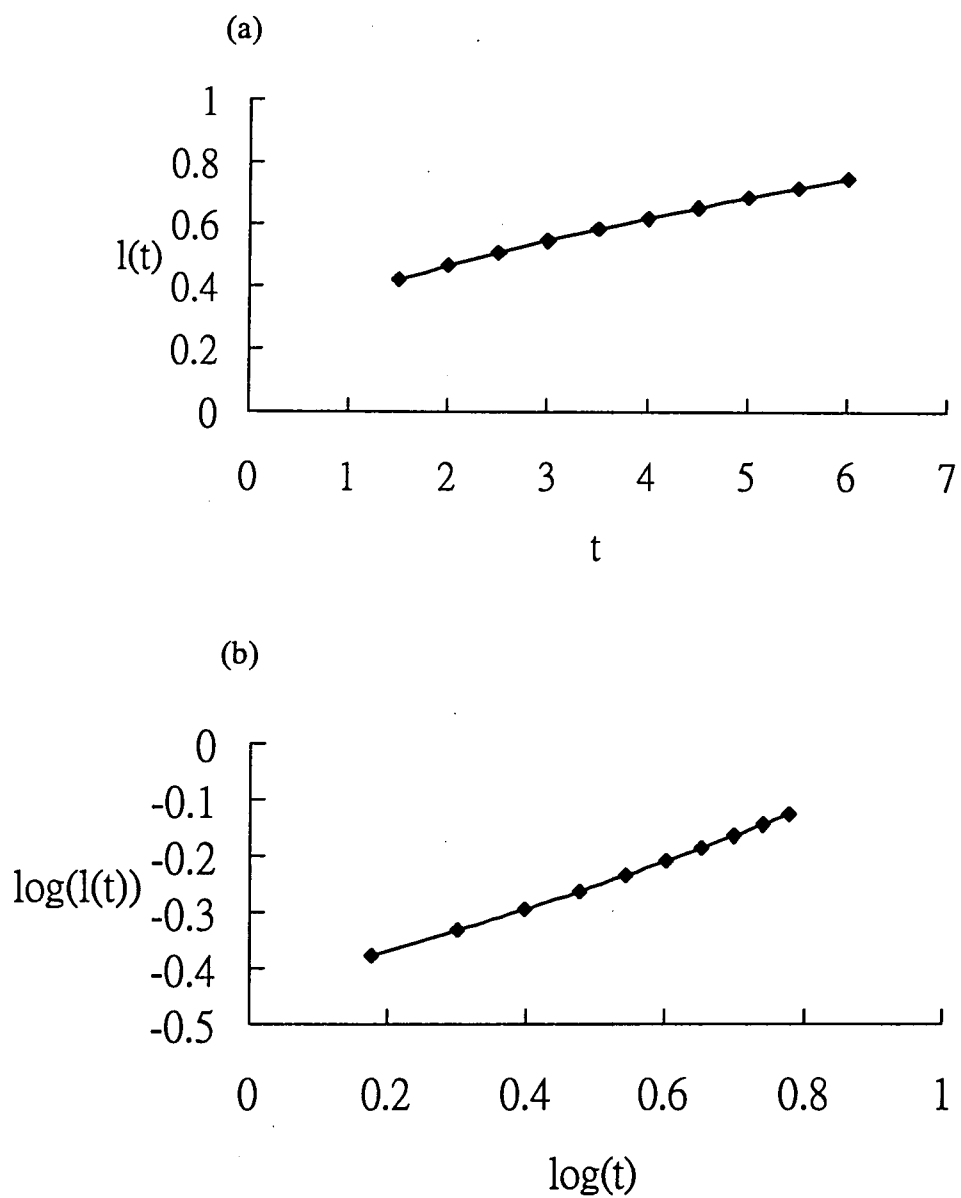


圖 3.22 $l(t)$ 與 t 在等液柱高度階段的關係； $\alpha = 45^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $S(z) = 0.075 - 0.1 \cdot z$ 。

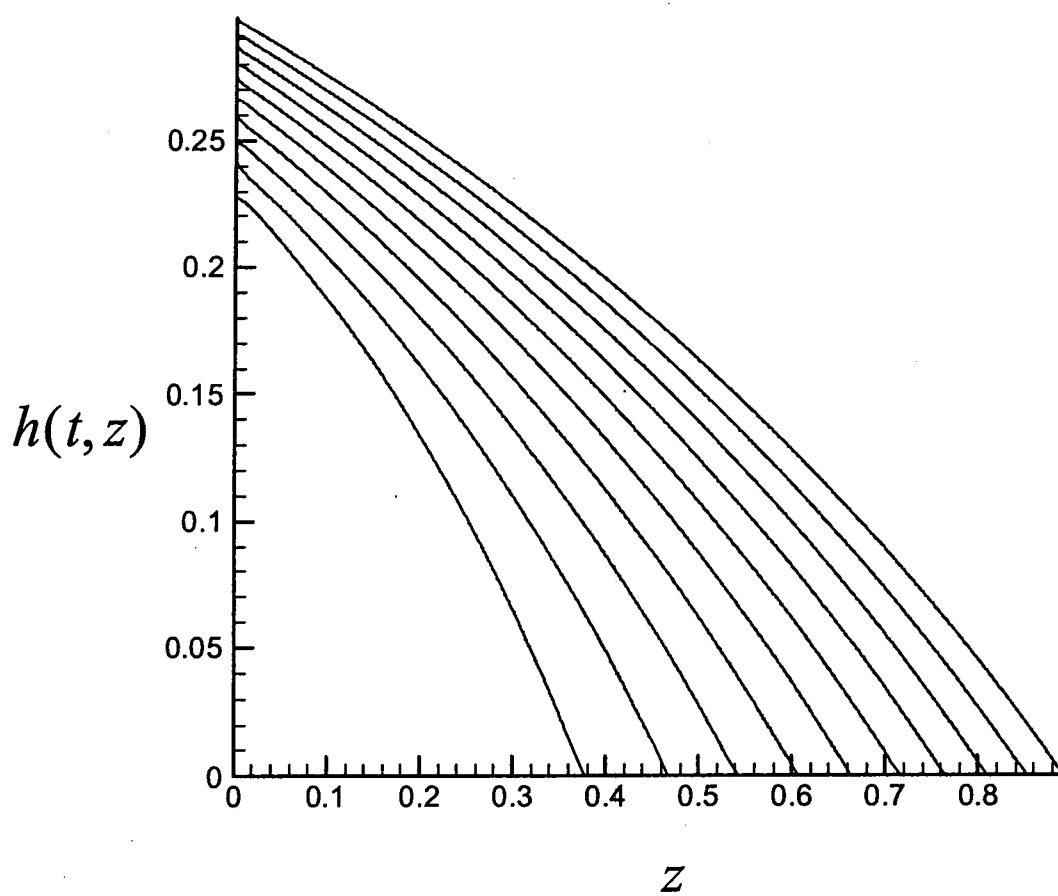


圖 3.23 液柱高度 $h(t, z)$ 在等流量階段的變化； $\alpha = 45^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $S = -0.1 + 0.1 \cdot z$ 。

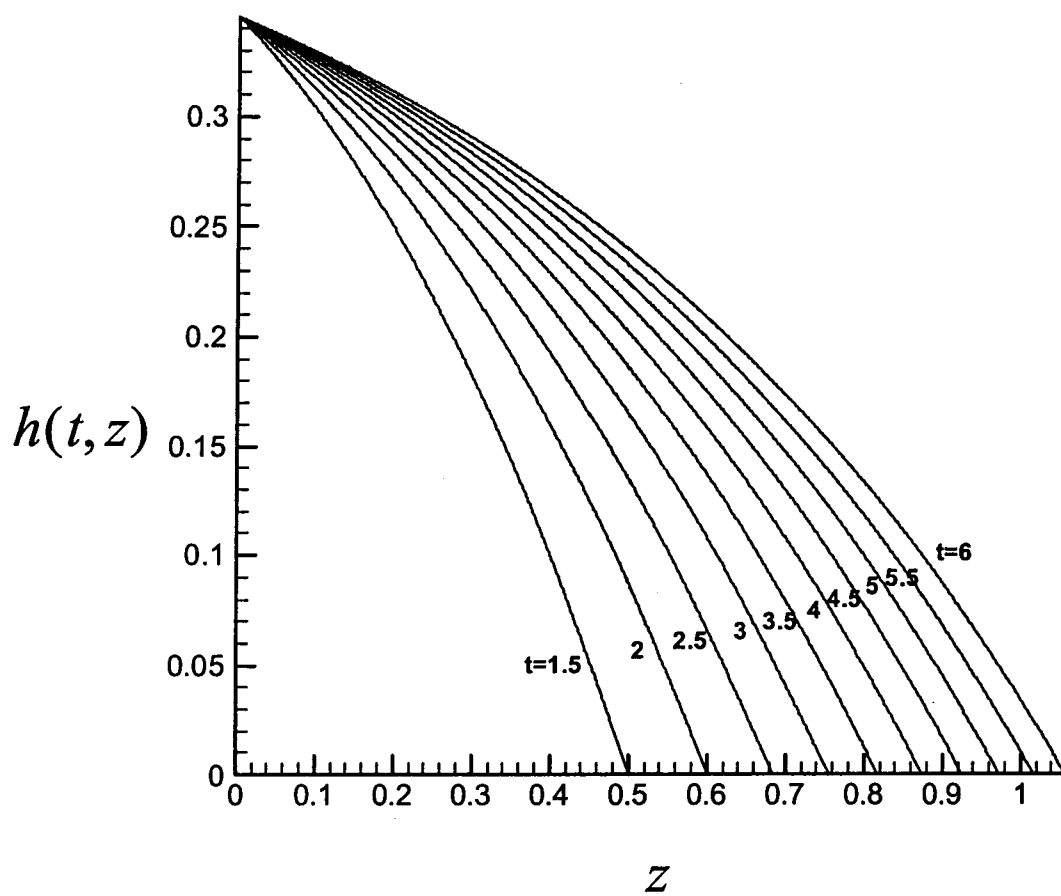


圖 3.24 液柱高度 $h(t, z)$ 在等液柱高度階段的變化；
 $\alpha = 45^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $S = -0.1 + 0.1 \cdot z$ 。

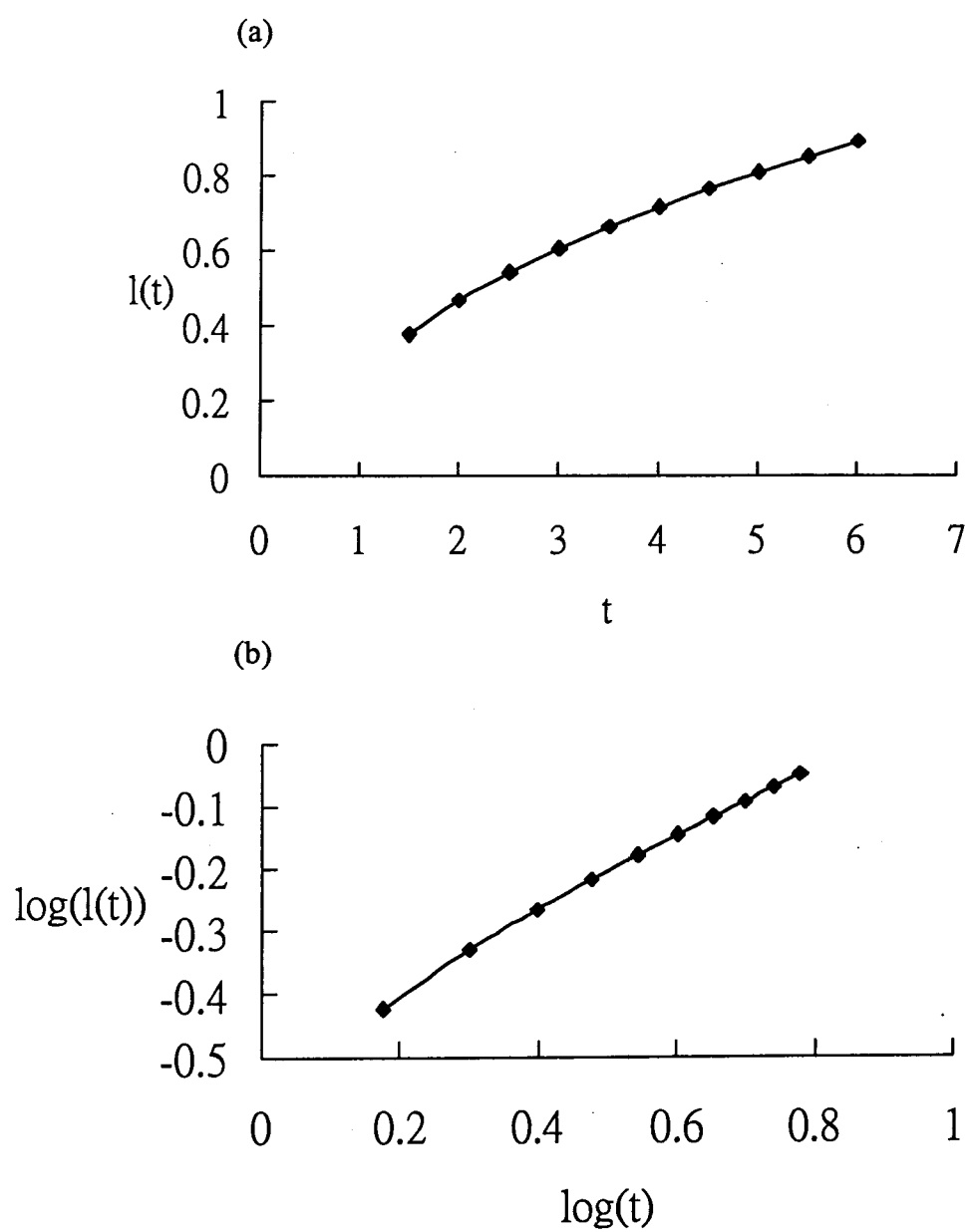


圖 3.25 $l(t)$ 與 t 在等流量階段的關係； $\alpha = 45^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $S(z) = -0.1 + 0.1 \cdot z$ 。

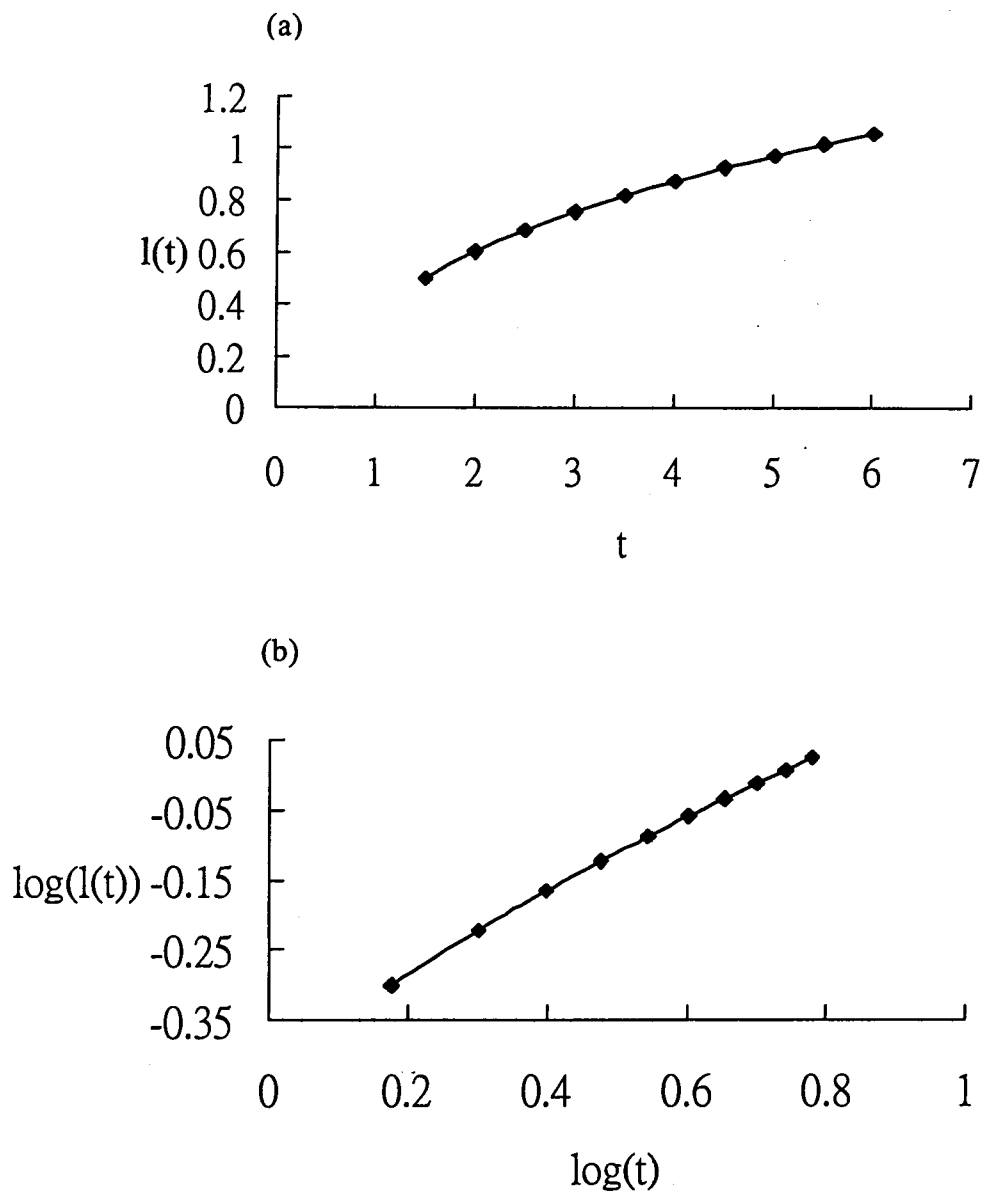


圖 3.26 $l(t)$ 與 t 在等液柱高度階段的關係； $\alpha = 45^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $S(z) = -0.1 + 0.1 \cdot z$ 。

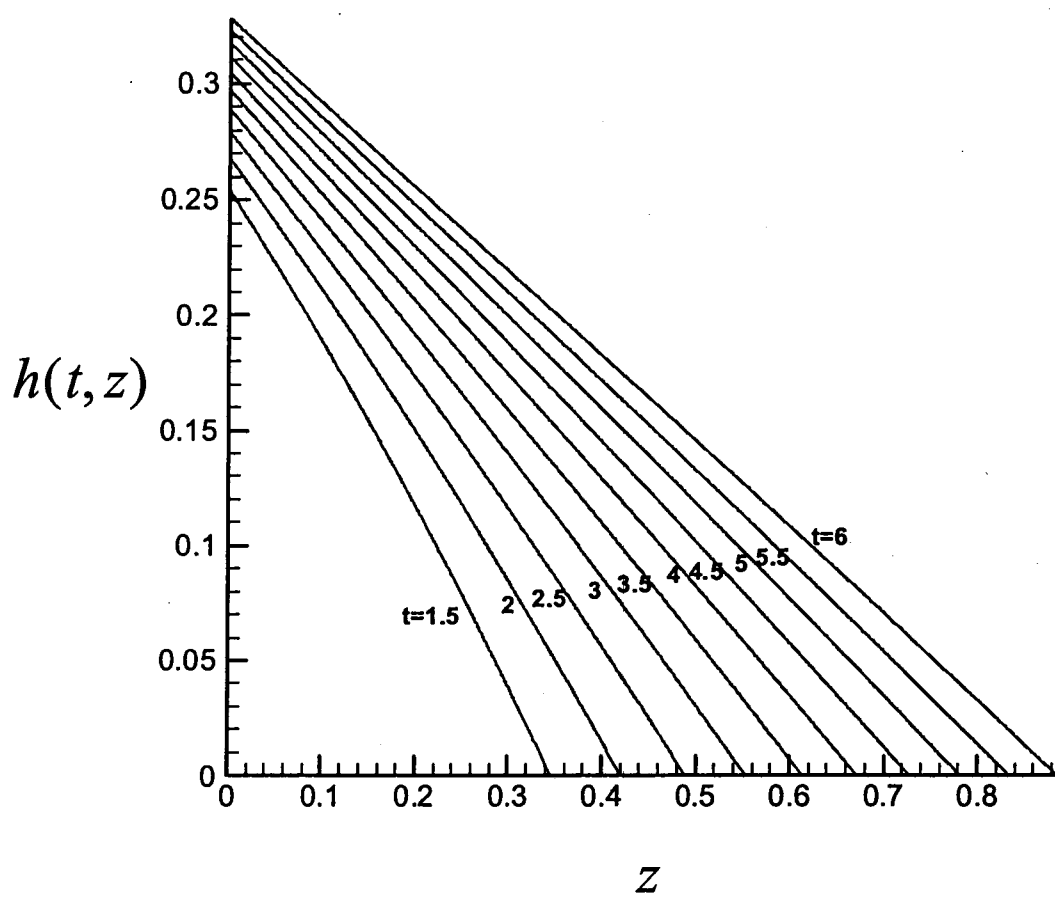


圖 3.27 液柱高度 $h(t, z)$ 在等流量階段的變化； $\alpha = 45^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $S = 0.0 - 0.1 \cdot z$ 。

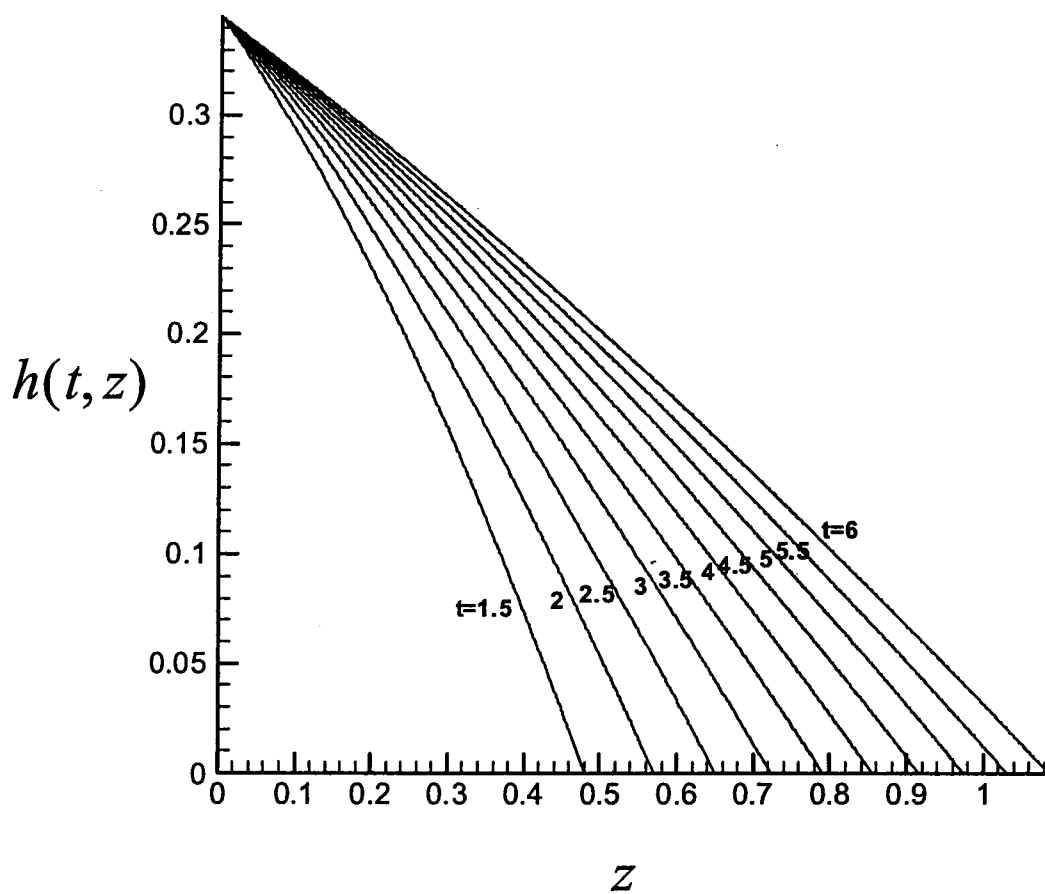


圖 3.28 液柱高度 $h(t, z)$ 在等液柱高度階段的變化；
 $\alpha = 45^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $S = 0.0 - 0.1 \cdot z$ 。

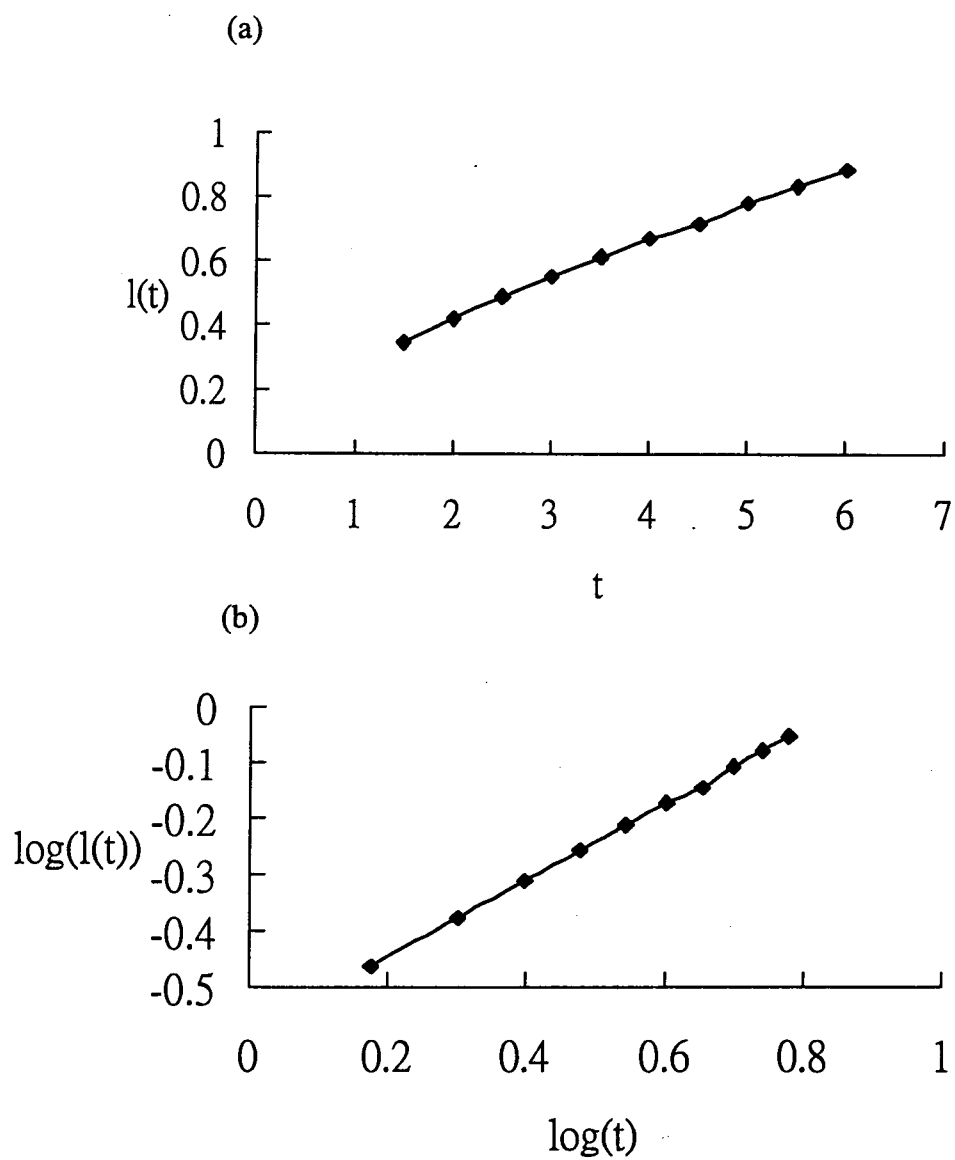


圖 3.29 $l(t)$ 與 t 在等流量階段的關係； $\alpha = 45^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $S(z) = 0.0 - 0.1 \cdot z$ 。

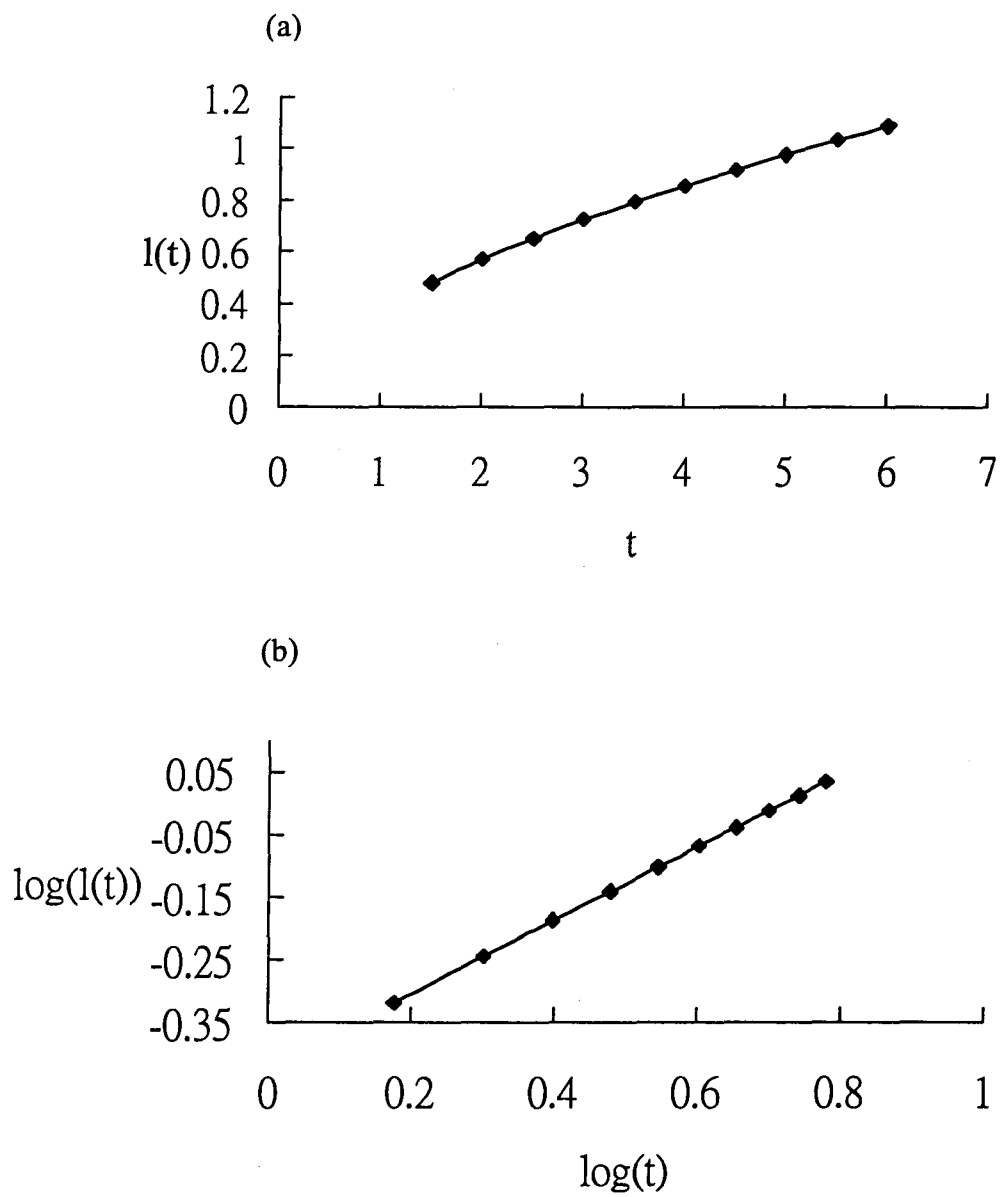


圖 3.30 $l(t)$ 與 t 在等液柱高度階段的關係； $\alpha = 45^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $S(z) = 0.0 - 0.1 \cdot z$ 。

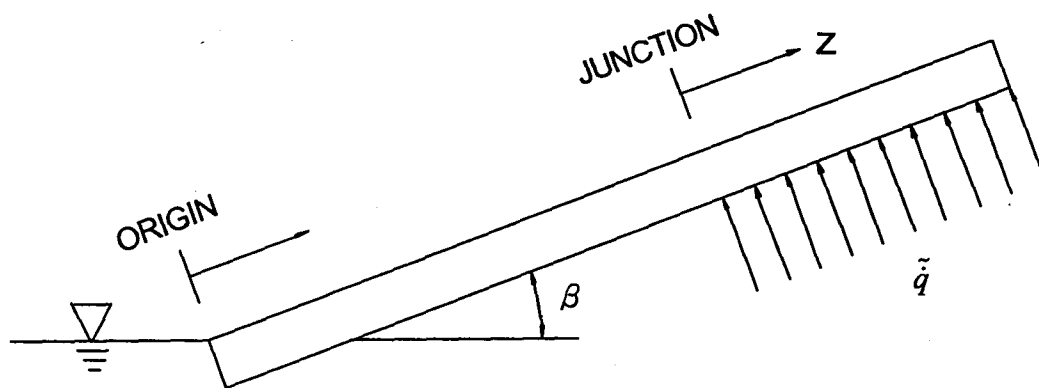


圖 4.1 楔型渠道壁面熱傳示意圖。

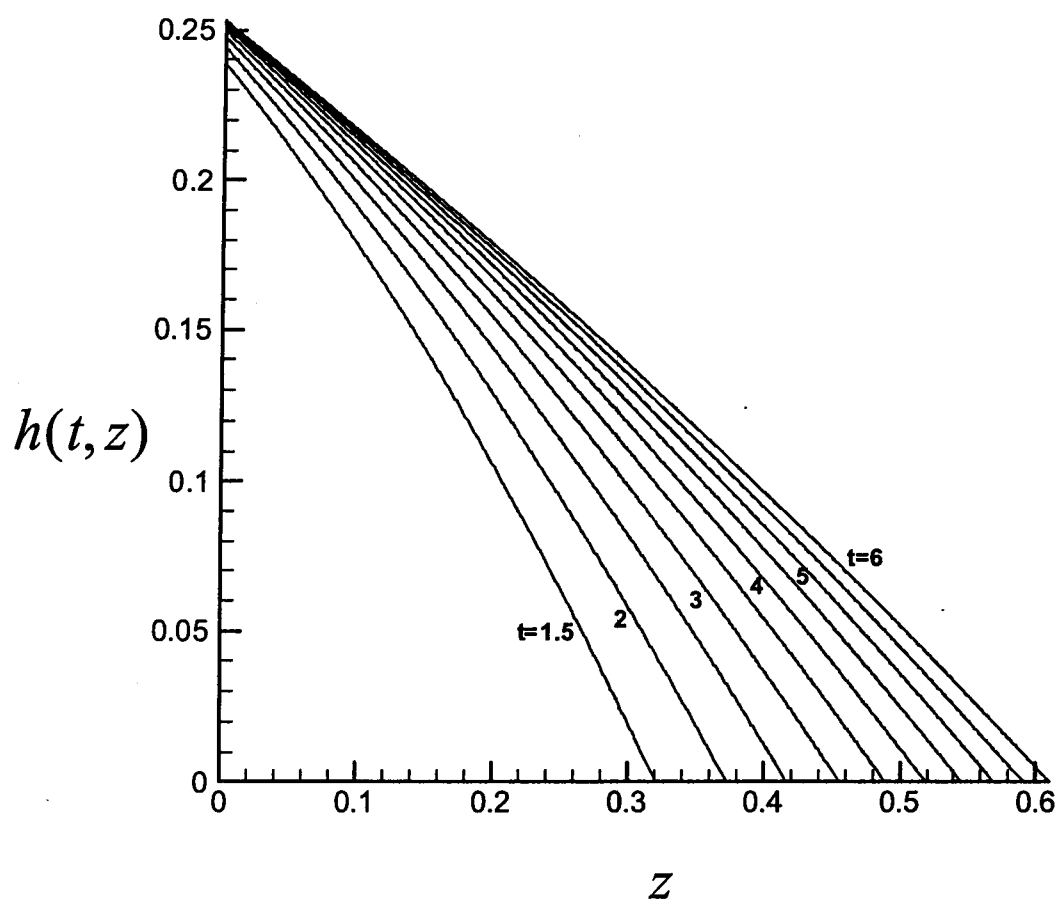


圖 4.2 液柱高度 $h(t, z)$ 在等流量階段的變化；定值熱傳 $\dot{q}=0.01$ 。

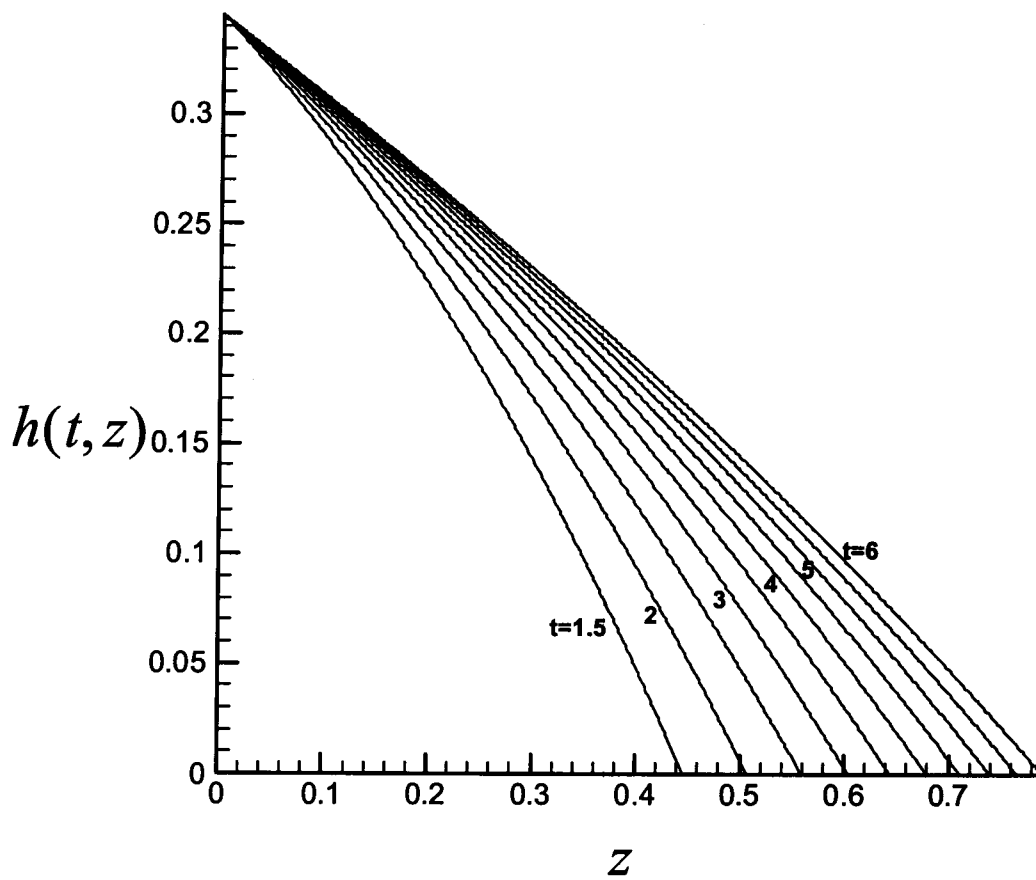


圖 4.3 液柱高度 $h(t, z)$ 在等液柱高度階段的變化；定值熱傳 $\dot{q} = 0.01$ 。

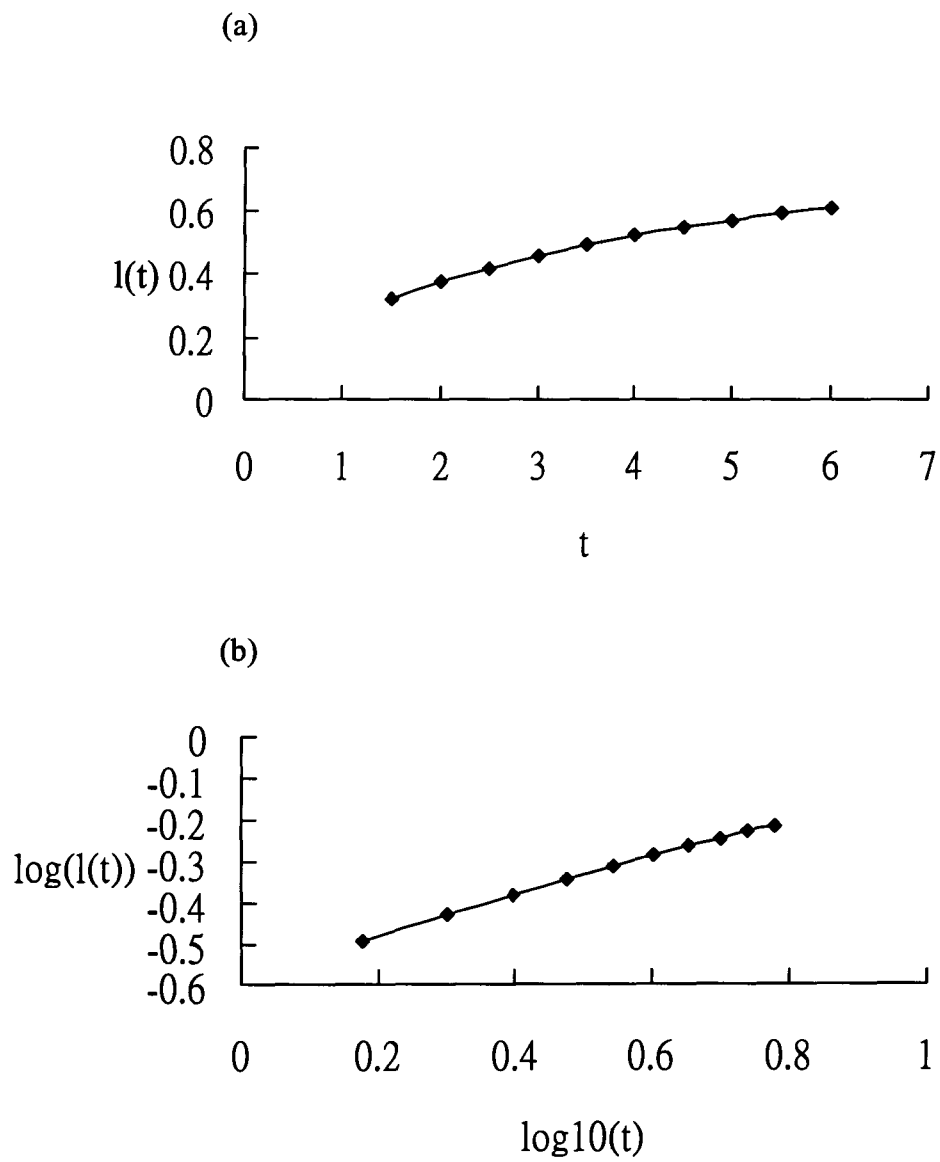


圖 4.4 $l(t)$ 與 t 在等流量階段的關係；定值熱傳 $\dot{q} = 0.01$ 。

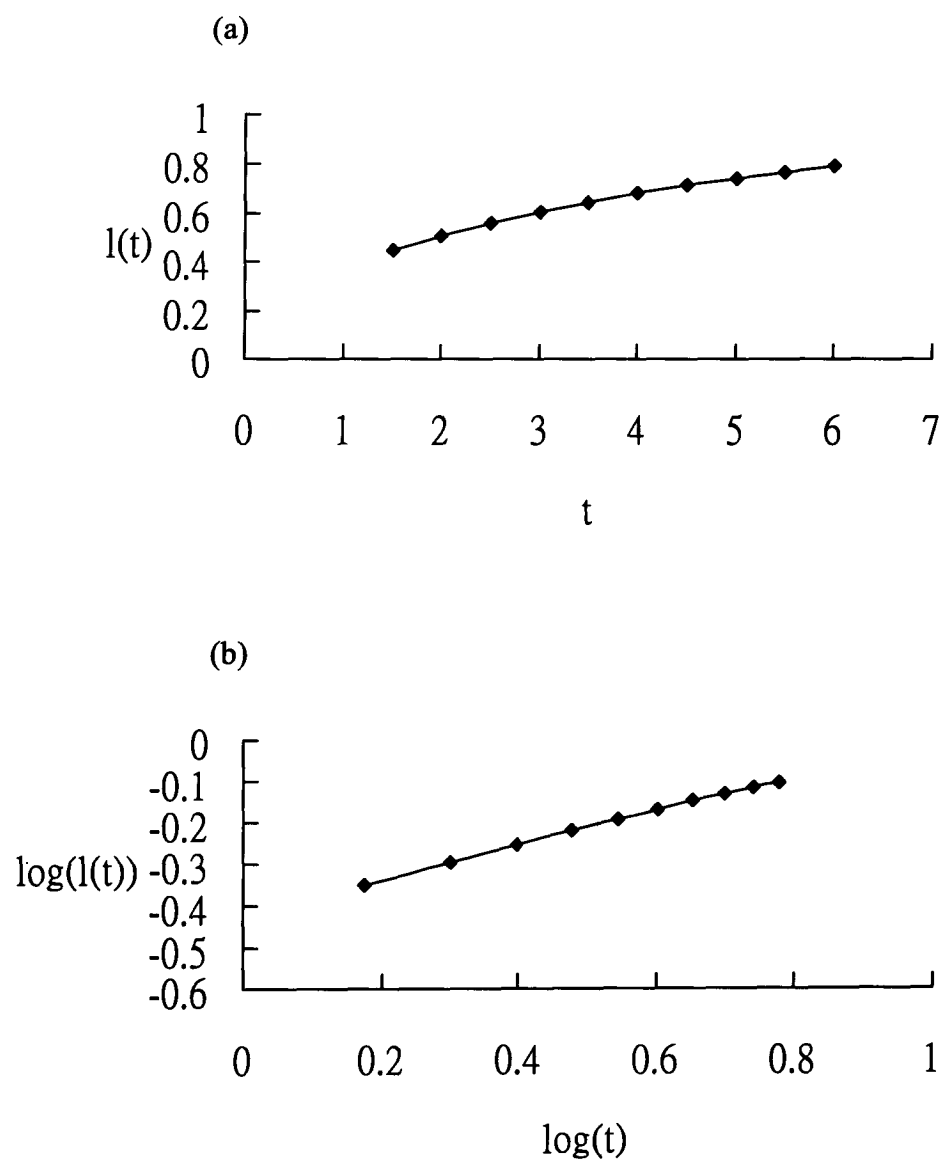
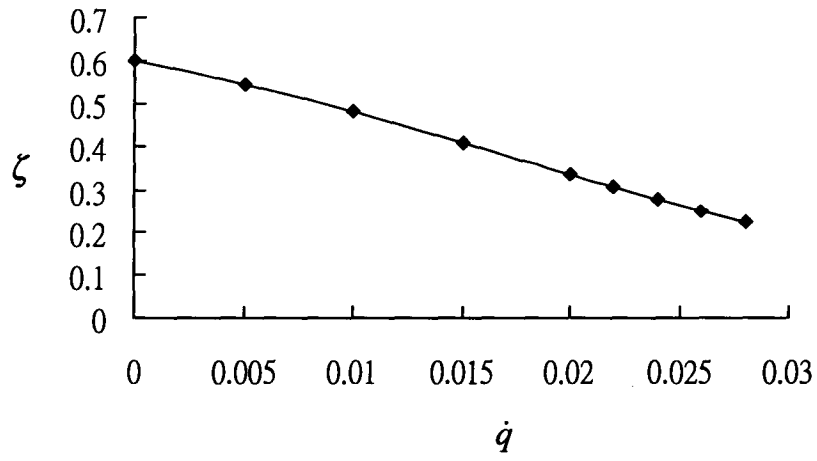


圖 4.5 $l(t)$ 與 t 在等液柱高度階段的關係；定值熱傳 $\dot{q} = 0.01$ 。

(a)



(b)

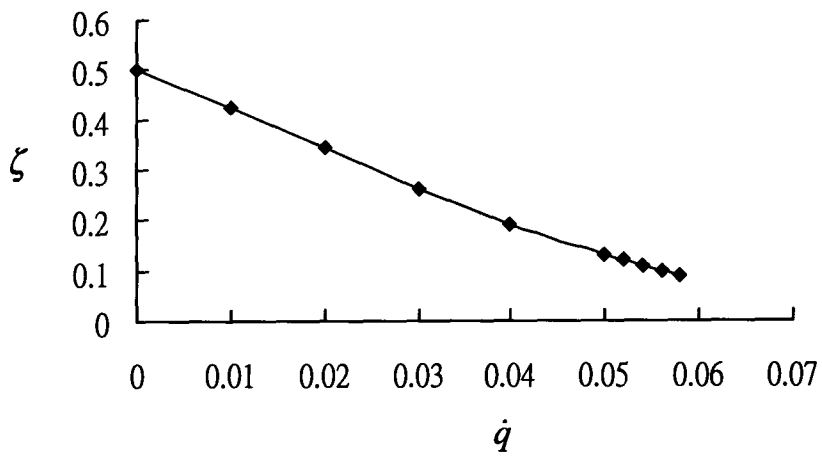
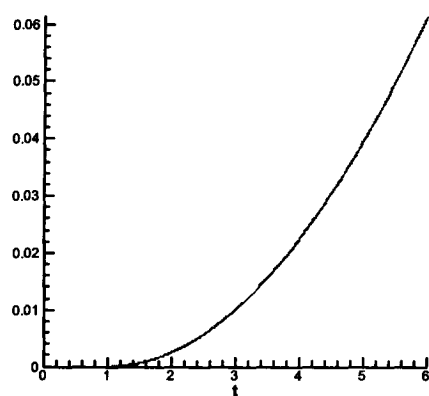
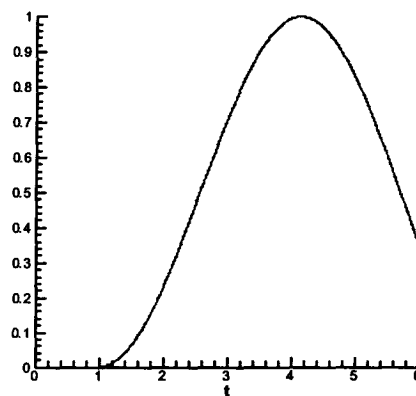


圖 4.6 定值熱傳 $\dot{q}$ 與 ζ 關係圖；(a) 等流量階段；(b) 等液柱高度階段。

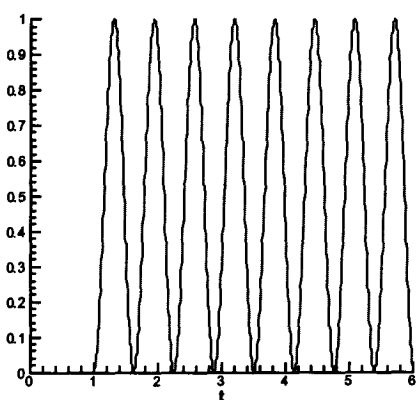
(a)



(b)



(c)



(d)

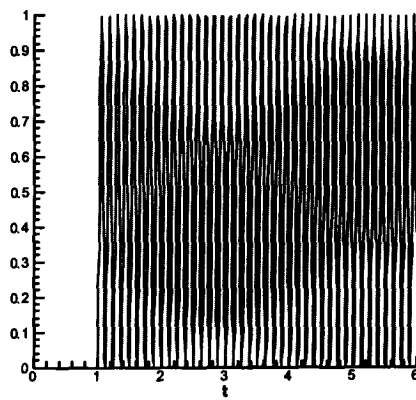


圖 4.7 渠道壁面熱傳 $\dot{q}$ 之函數；(a) $\omega=0.1$ ；(b) $\omega=1$ ；(c) $\omega=10$ ；(d) $\omega=50$ 。

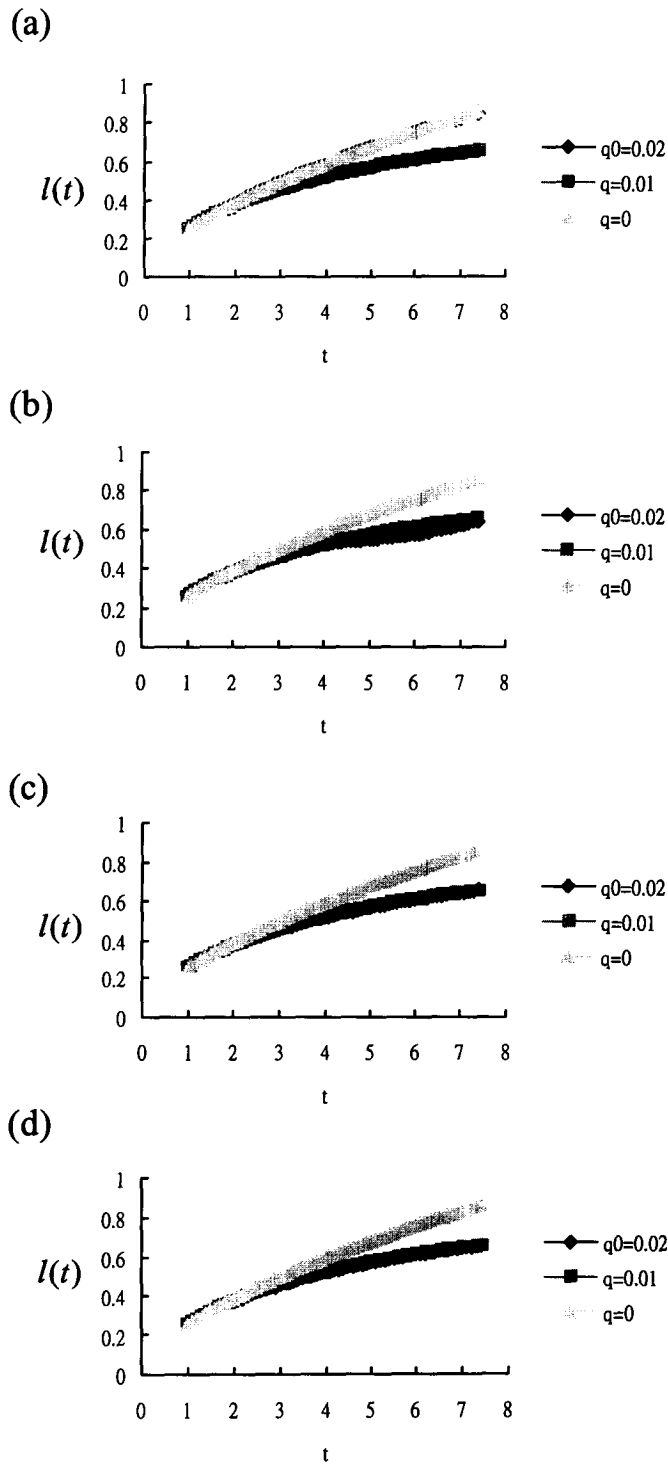


圖 4.8 週期性熱傳， $l(t)$ 與 t 在等流量階段的關係， $q_0=0.02$ ；
 (a) $\omega=0.1$ ；(b) $\omega=1$ ；(c) $\omega=10$ ；(d) $\omega=50$ ，淺色
 為定值熱傳 $\dot{q}=0.01$ ，淡色為無熱傳 $\dot{q}=0$ 。

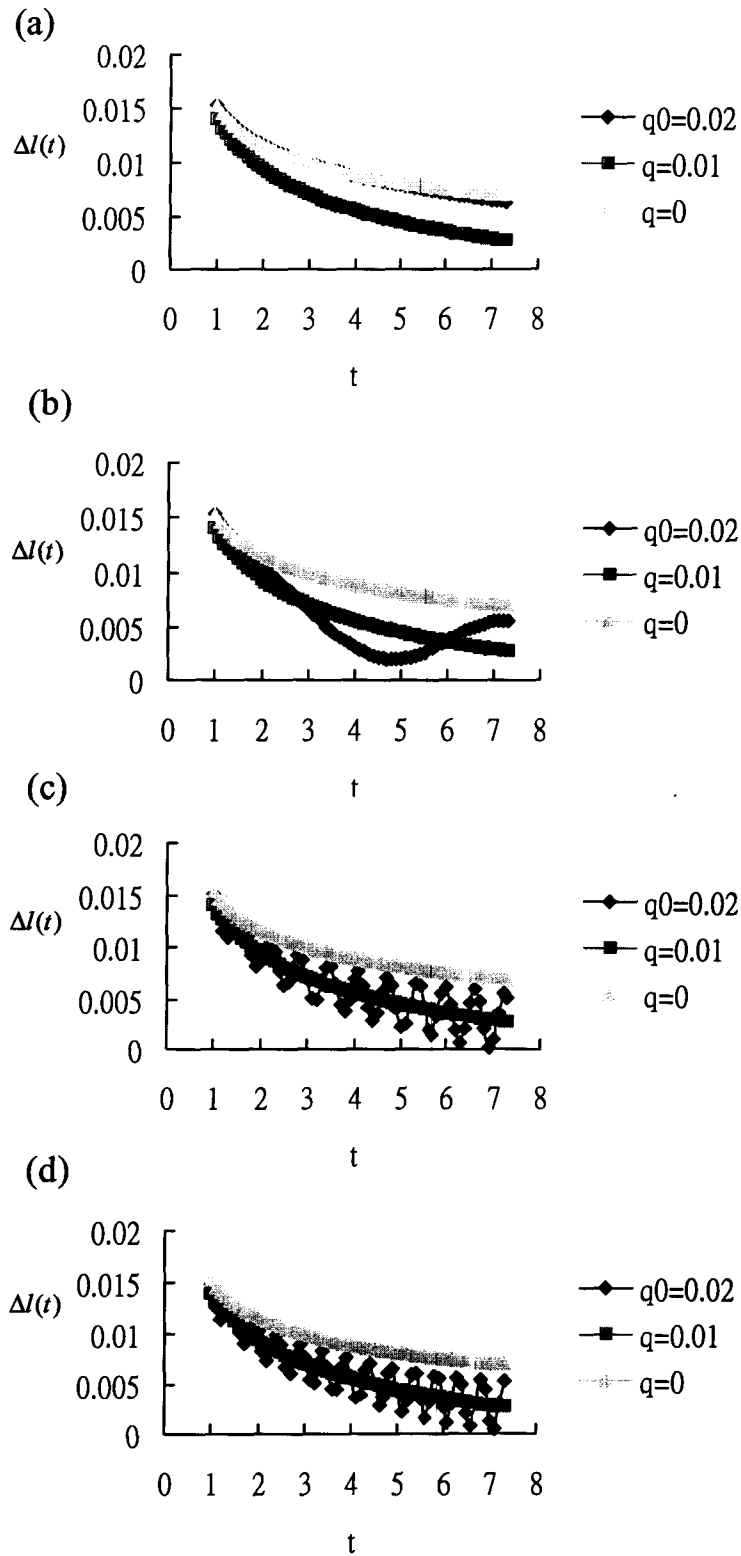


圖 4.9 週期性熱傳在等流量階段液柱前進速度， $q_0 = 0.02$ ；(a) $\omega = 0.1$ ；(b) $\omega = 1$ ；(c) $\omega = 10$ ；(d) $\omega = 50$ ，淺色為定值熱傳 $q = 0.01$ ，淡色為無熱傳 $q = 0$ 。

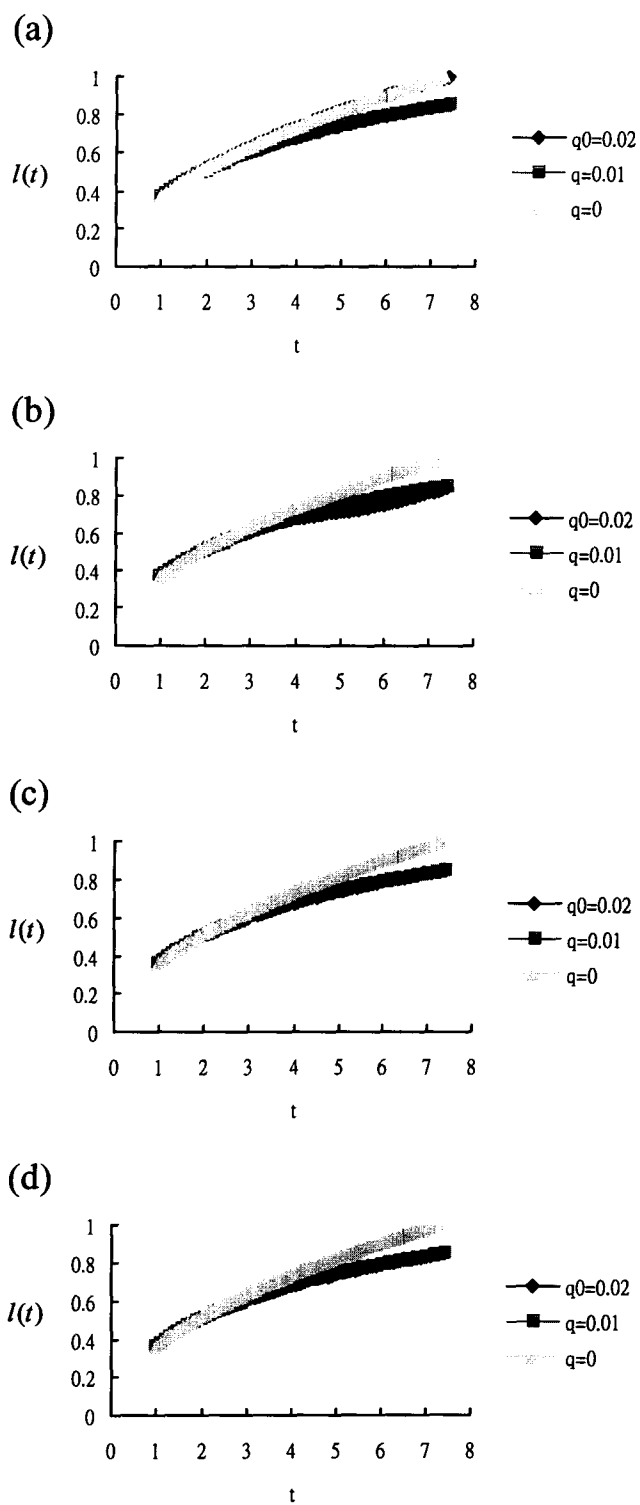


圖 4.10 週期性熱傳， $I(t)$ 與 t 在等液柱高度階段的關係， $q_0=0.02$ ；(a) $\omega=0.1$ ；(b) $\omega=1$ ；(c) $\omega=10$ ；(d) $\omega=50$ ，淺色為定值熱傳 $q=0.01$ ，淡色為無熱傳 $\dot{q}=0$ 。

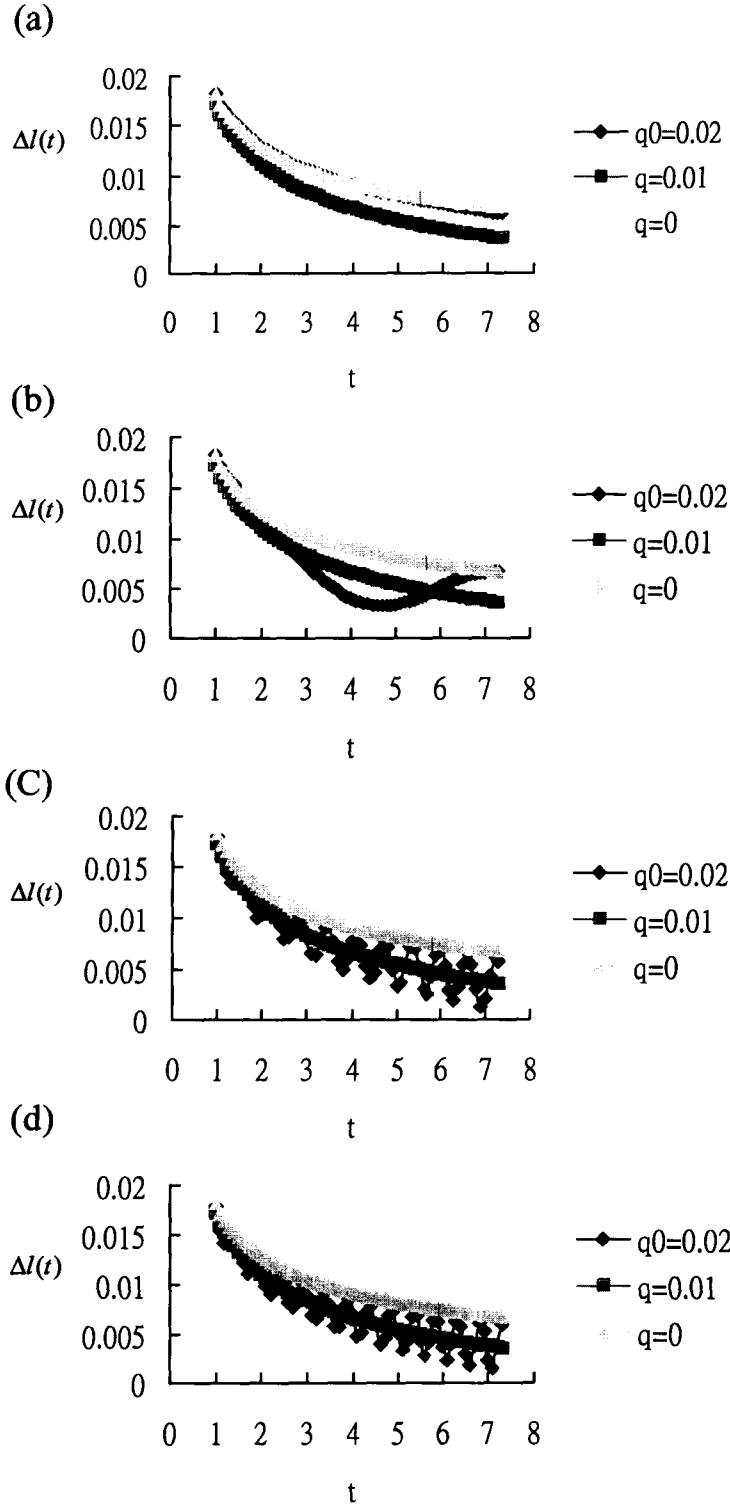


圖 4.11 週期性熱傳在等液柱高度階段液柱前進速度， $q_0 = 0.02$ ；
 (a) $\omega = 0.1$ ；(b) $\omega = 1$ ；(c) $\omega = 10$ ；(d) $\omega = 50$ ，淺色為
 定值熱傳 $q = 0.01$ ，淡色為無熱傳 $q = 0$ 。

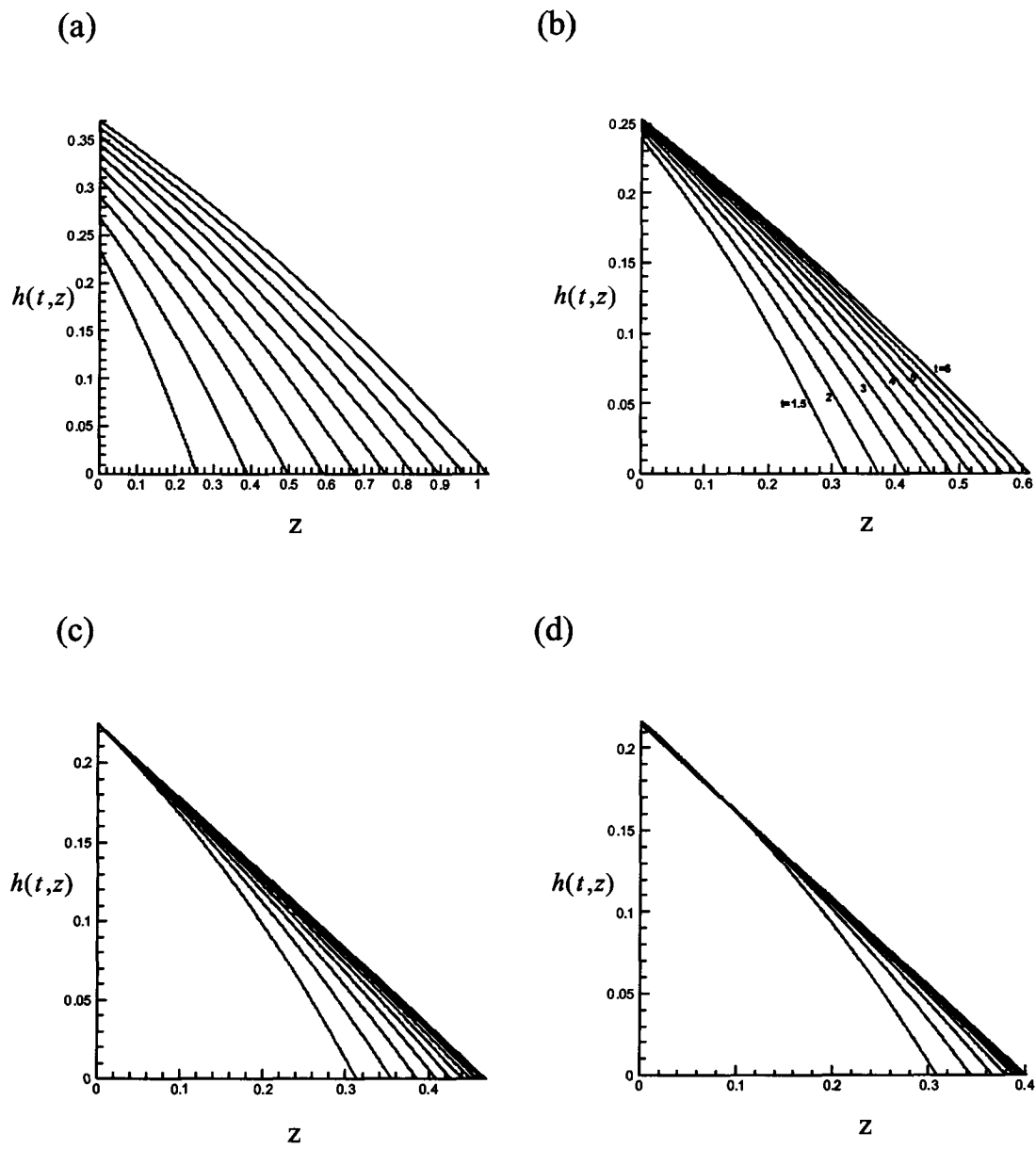


圖 4.12 液柱高度 $h(t, z)$ 在等流量階段的變化；(a) 無熱傳 $\dot{q}=0$ ；(b) 定值熱傳 $\dot{q}=0.01$ ；(c) 定值熱傳 $\dot{q}=0.02$ ；(d) 定值熱傳 $\dot{q}=0.026$ 。