



# 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

## 研究計畫：部分稜形網格時域電磁分析法

### FDTD Method with Partial Prism-Grid

計畫編號：NSC 89-2213-E-002-025

執行期限：88年8月1日至89年7月31日

主持人：吳瑞北 國立台灣大學電機工程學系

#### 一、中文摘要

在本年度中，我們消除了混合時域有限差分與有限元素法 (Hybrid Finite Difference / Finite Element Time Domain method) 結合所產生的不穩定。時域有限差分與有限元素法均為穩定的方法，但兩者在結合時，由於時域有限差分法的場值在同一個網格中均為定值，而有限元素法的場值以線性有限元素基底展開，造成傳遞邊界的誤差，使得此兩種方法在結合時產生遲時振盪。為了使兩者的傳遞誤差減少，我們以階狀有限元素基底取代線性有限元素基底來配合時域有限差分法中均勻分佈的場值，巧妙的消除了遲時振盪。使得結合的方法能同時運用有限差分與有限元素兩種方法的好處，而維持計算的高精確性與效率，亦不會產生遲時不穩定。於未來改良與應用在適用於各種形狀的實際問題上，具有發展潛力。

關鍵詞：有限元素法、時域有限差分法、遲時不穩定、階狀有限元素基底。

#### Abstract

A novel method is proposed in this year to eliminate the late-time instability for hybrid Finite Difference/ Finite Element Time Domain method, although both methods are stable if employed separately. Finite difference time domain (FDTD) method assumes a uniform field distribution in one cell; nevertheless, finite element method (FEM) spans the field by linear basis. When updating the electric fields solved by the two methods at the overlapping boundary, error will be generated due to the differences of field distribution. In order to restrain this error, a novel piecewise constant basis is applied in place of linear basis to comply with the uniform field distribution of FDTD. Tactfully, late time instability can be

removed by such a marvelous basis. As a result, not only can this hybrid method be used to solve most electromagnetic problems with high accuracy, flexibility, and computing efficiency, but also its stability can be guaranteed.

*Keywords: finite-element method, finite-difference time-domain method, late time instability, piecewise constant basis.*

#### 二、緣由與目的

首度由 R. B. Wu 及 T. Itoh 發表於 1995 年的混合時域有限差分與有限元素法 (Hybrid FD/FETD method)[1]，運用於處理任意的結構之二維電磁散射問題，得到非常好的效果，並且繼續運用它解決三度空間的電磁問題[2]、[3]。

此方法成功地結合之前所述兩種方法的優點，利用傳統的 FDTD 方法，處理空間中大部份可矩形分割的一般區域，其擁有 FDTD 中易模擬、有良好精確度與吸收邊界條件的好處；而利用以邊緣電場為基底的有限元素(FETD)方法，處理靠近曲面邊界的區域。參考[1]、[2]兩文獻中，可看出它能適時地同時運用到兩種方法的好處，比較它初時數值模擬的結果，相較於以上其他方法，有較好的精確度、模擬的彈性和計算的效率。因此在解數值電磁問題上，此法已廣為受人重視，繼而有數篇文獻運用它來解實用問題[4]、[5]。

對於三維層狀之結構，在有限元素法計算區域，可採用新的柱形網格有限元素法 (Prism Finite Element Method)[3]、[5]，結合柱形網格有限元素法與傳統的時域有限差分法的方式，來處理截面為任意邊界 (arbitrarily curved boundary) 的各種層狀結構。比起傳統有限元素法，能大大降低記憶

體及執行時間的需求量。其數值結果證明此法亦具有高度的準確及可適性，而且同時，藉由計算複雜度(computational complexity)的分析，顯示此法能幾乎和傳統的時域有限差分法具有相同的計算效率。

然而使用混合的時域有限差分與有限元素法，可能會面對一些困難，其中之一就是遲時(late time)會產生不穩定性現象[6]。在一些高Q系統中，遲時數值模擬結果對其電磁特性的探討是很重要的，吾人可以證現在純FDTD[7]和純FETD[8]都是穩定的，但模擬結果顯示在混合二個方法的重疊區域，會產生數值不穩定的錯誤[1]、[2]、[3]，並進而影響到所有區域之計算結果。這個不穩定的錯誤，所形成不正確的數值結果，應該被在不影響解的精確度下除去。

以往已有些方法提出來，嘗試解決遲時數值結果的不穩定現象。於文獻[9]中採用時域平均法(time average technique)來解決這問題，然而如此一來建立在低通濾波技術的時域平均法，會降低數值結果的準確性，特別對於計算中的高頻成分影響愈為嚴重。且這種時域平均法，使用時需選取一適當的平均參數，對於不同模型時，需選取用不同的時域平均參數，甚為不便；以及不能事先估計採用此法後可能造成的誤差量。

以往使用有限元素常用的是線性基底，二維時如附圖一，電場可表示成基底的線性組合。由於FDTD的場值在網格中為定值，兩種場值分佈的嚴重差異使得誤差在傳遞邊界上累積。為配合FDTD上均勻分佈的場形，我們選取新的在電場上階狀基底，如附圖二，注意其中O點取為三角形的外心。此時電場可由基底表示寫成

$$E_z(\vec{r}, t)\hat{z} = \sum_{j=1}^3 E_{z,j}(t)f_j(\vec{r})\hat{z}$$

$$f_j(\vec{r}, t) = \begin{cases} 1, & \vec{r} \text{ in region } \Omega \\ 0, & \vec{r} \text{ elsewhere} \end{cases}$$

注意新的基底能與FDTD中均勻分佈的場值吻合，故兩種方法在傳遞場值時不會累積

誤差。由實際的數值模擬中，我們可知此新基底成功的解決二維中數值模擬中遲時結果不穩定現象。

### 三、結果與討論

在二維TM Wave中，輸入一個高斯脈波於圓柱形狀介電物質問題如文獻[1]與附圖三。此時模擬參數為：圓柱形介電物質半徑 $r = 10$  (cm)，介電係數 $\epsilon_r = 4$ ，時間網格分割取使得 $\rho = c\Delta t / \Delta x = 0.5$ ，並且選取圓柱中心點A為觀察點。

我們採取階狀基底並考慮數種不同大小分割，觀測點亦取在圓柱中心A，但分割參數取 $\Delta x = \Delta y = 2, 1, 0.5$ , 或 $0.25$ cm，其初時模擬結果如附圖四，可看出時域上階狀基底亦有優良的精確度。至於在遲時響應方面，吾人分別使用傳統有限元素法的線性基底及本文所提出的階狀基底，取 $\Delta x = \Delta y = 1$ cm之計算結果如圖五所示，可以看出使用線性基底到6000個時刻( $c \cdot \text{time} = 3000$ cm)即已開始呈現明顯遲時不穩定現象，但使用本文所提出的階狀基底，則不論取用何種分割參數，模擬至20000個時刻(並未繪於此)，均未見遲時不穩定現象，顯見此法能有效解決遲時不穩定問題。

### 四、計畫成果自評

本計劃中所探討的混合時域有限差分與有限元素法，由理論與實例以及許多相關文獻裡，可看出它具有高度的準確性、可適性、計算效率。這些好處對於往後在處理複雜的任意形狀邊界之電磁問題，提供了方便而實用的解決之道。

而原來在混合時域有限差分與有限元素法，出現的遲時數值不穩定現象，我們在理論與模擬上，提供了解決不穩定現象的方法。如此能有效的解決二維數值模擬中長時不穩定現象，較以往採用時域平均法來的精準。但也產生非預期下的結果——較原有混合時域法有較大的誤差，導因於在模擬中，新的基底對於邊界附近場變化的模擬較原來線性基底沒有那麼精確。

在實際模擬上，許多不同的方法結合，

亦會產生或多或少的數值不穩定現象，本文所提出的方法希望亦能提供理論上與實做上，解決不穩定現象的思考途徑。未來，在處理常見的三維問題中，及對於處理層狀結構的柱形網格有限元素法，希望亦能靠此新基底，解決三維數值模擬遲時不穩定現象。

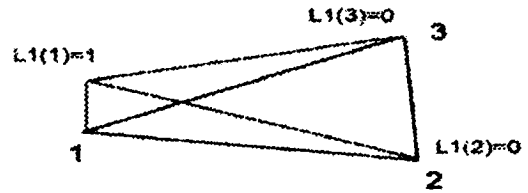
*Antennas Propagat.*, vol.47, pp.227-232, Feb. 1999.

### 五、參考文獻

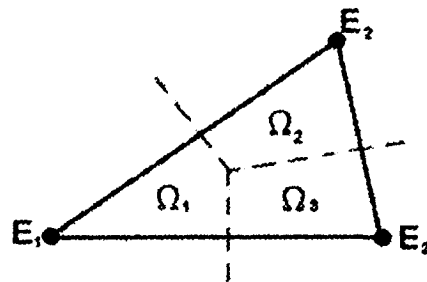
- [1] R. B. Wu and T. Itoh, "Hybridizing FD-TD analysis with unconditionally stable FEM for objects of curved boundary," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, pp.833-836, May 1995.
- [2] R. B. Wu and T. Itoh, "Hybrid finite-difference time-domain modeling of curved surfaces using tetrahedral edge elements," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol.45, pp.1302-1309, Aug. 1997.
- [3] C. T. Hwang, S. G. Mao, R. B. Wu, and C. H. Chen, "Partially prism-gridded FDTD analysis for layered structures of transversely curved boundary," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol.48, pp.339-345, March 2000.
- [4] S. Selleri, J. Y. Dauvignac, G. Pelosi, and C. Pichot, "Comparison between FDTD and hybrid FDTD-FETD applied to scattering and antenna problems," *Microwave Optical Tech. Lett.*, vol.18, pp.247-250, July 1998.
- [5] S. G. Mao, C. T. Hwang, R. B. Wu, and C. H. Chen, "Analysis of coplanar waveguide-to-coplanar stripline transitions," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol.48, pp.339-345, Jan. 2000.
- [6] 黃傑超，含部分有限元素之時域有限分法，*博士論文，國立台灣大學，民國八十八年五月*
- [7] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems in isotropic media," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol.14, pp. 302-207, May 1966.
- [8] J. F. Lee, and A. Cangellaris, "Time-domain finite-element methods," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol.47, pp.430-441, March 1997.
- [9] C. T. Hwang and R. B. Wu, "Treating late time instability of hybrid finite element/ finite difference time domain method," *IEEE. Trans.*

### 六、附圖

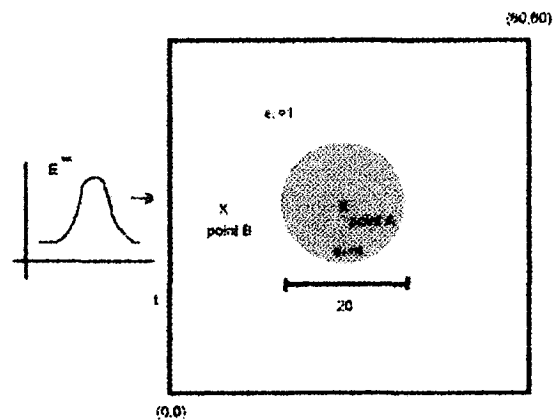
Basis L1



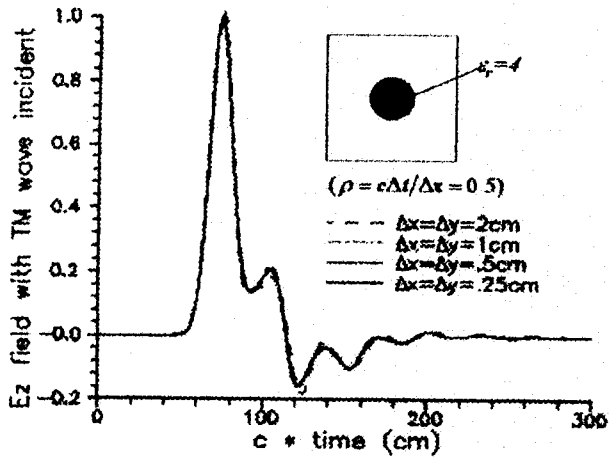
圖一、線性有限元素基底



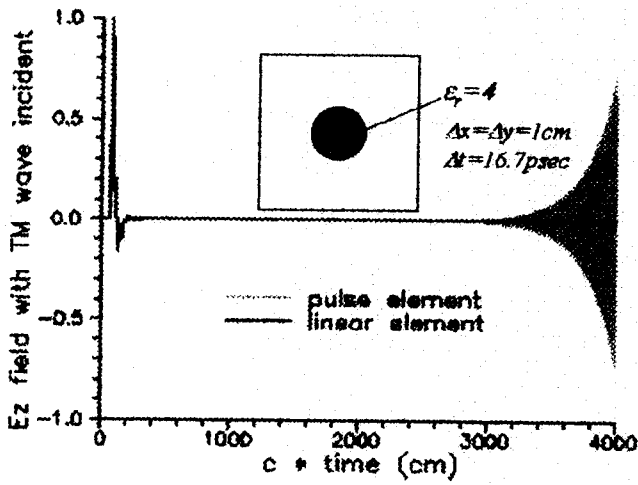
圖二、階狀有限元素基底。



圖三、二維 TM Wave 入射於圓柱介電物質  
高斯平面波入射於半徑十公分的圓柱介電體 ( $\epsilon_r=4$ )，介質圓柱體置於模擬域 60cm x 60cm 中央。



圖四、階狀有限元素初時數值結果誤差變化  
各種空間分割為參數，而對時間單位  
取 16.7psec。



圖五、階狀有限元素遲時數值結果  
(橫軸時間單位  $\Delta t = 16.7\text{psec}$ )。