行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※
※　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　※
※　層變流域中孤立波間之交互作用研究　※
※　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　※
※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

計畫類別：☑個別型計畫　　□整合型計畫

計畫編號：NSC－90－2611－E002－020

執行期間：　90 年 8 月 1 日至 91 年 7 月 31 日

計畫主持人：孔慶華 教授

共同主持人：

本成果報告包括以下應繳交之附件：

□赴國外出差或研習心得報告一份

□赴大陸地區出差或研習心得報告一份

□出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份

□國際合作研究計畫國外研究報告書一份

執行單位：

中 華 民 國 91 年 7 月 31 日

層變流域中孤立波間之交互作用研究

The interaction effects of solitary waves in a stratified fluid

計畫編號 ： NSC90－2611－E002－020
執行期限 ：90 年 8 月 1 日至 91 年 7 月 31 日
計畫主持人 ： 孔慶華　國立台灣大學造船及海洋工程研究所教授

一、中文摘要

關鍵詞：*孤立波，新布氏方程式，非線性效應，分散效應*

欲探討層變流域中孤立波(internal solitary wave)間之交互作用，必須對於長波現象進行分析，特別是長波方程式之推演與選擇，更是對於孤立波交互作用的分析有決定性的影響。本研究將針對精度至四階之新布氏方程式進行推導，並從其中選擇最佳化之長波方程式，以達到最精確預估波浪機制的目的。

二、英文摘要

Keywords ： *solitary wave, new-Boussinesq type equations, nonlinear effects, dispersive effects*

In present study, considering the equity of nonlinear effects and dispersive effects, we'll derive a fourth-order Boussinesq-type equations in terms of a velocity potential at an arbitrary water depth for further investigation of solitary waves passing over a sloping beach. The classical $O(\mu^2)$ Boussinesq equations are derived based on the average horizontal velocities that are hard to apply into practical cases. On the contrary, our $O(\mu^4)$ equations are largely convenient in practical uses than the classical $O(\mu^2)$ one.

三、研究方法及內容

3.1 控制方程式與邊界條件

首先將各重要變數無因次化如下

$$\left.\begin{array}{lll} x = k_0 x', & y = k_0 y', & z = h_0^{-1} z' \\ t = k_0 (g h_0)^{0.5} t', & \eta = a_0^{-1}\eta', & h = h_0^{-1} h' \end{array}\right\} \quad (1)$$

控制方程式與邊界條件可表示如下

$$\mu^2 \nabla^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad at \quad -h \le z \le \varepsilon\eta \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \mu^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon \nabla\Phi \cdot \nabla\eta \right) \quad at \quad z = \varepsilon\eta \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\mu^2 \left(\nabla\Phi \cdot \nabla h \right) \quad at \quad z = -h \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \eta + \frac{\varepsilon}{2}\left[(\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0$$
$$at \quad z = \varepsilon\eta \quad (5)$$

此處 $\varepsilon = h_0 a_0^{-1}$ 和 $\mu = k_0 h_0$ 為代表非線性及分散性之兩個參數。對於弱非線性條件而言，必須滿足 $\varepsilon = \mu^2 < 1$ 此關係。將式(2)由 $z = -h$ 積分至 $z = \varepsilon\eta$，並考慮式(3)及式(4)之邊界條件，我們可得

$$\nabla \cdot \int_{-h}^{\varepsilon\eta} \nabla\Phi \, dz + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

以上即為控制方程式與邊界條件。

3.2 理論解析

令速度勢Φ為

$$\Phi(x,y,z,t)=\sum_{n}^{\infty}\mu^{2n}\Phi_n(x,y,z,t) \quad (7)$$

將式(7)代入式(2)及式(4)，則 Φ_0、Φ_1、Φ_2 可表示為

$$\Phi_0=\Phi_{00}(x,y,t) \quad (8.a)$$

$$\Phi_1=\Phi_{10}(x,y,t)-z\nabla\cdot(h\nabla\Phi_{00})-\frac{z^2}{2}\nabla^2\Phi_{00} \quad (8.b)$$

$$\begin{aligned}\Phi_2=&\Phi_{20}(x,y,t)+z\Big[-\nabla\cdot(h\nabla\Phi_{10})-\frac{h^2}{2}\nabla^2\nabla\cdot(h\nabla\Phi_{00})\\&-\frac{h^3}{6}\nabla^2\nabla^2\Phi_{00}-h\nabla\nabla\cdot(h\nabla\Phi_{00})\cdot\nabla h\\&+\frac{h^2}{2}\nabla\nabla^2\Phi_{00}\cdot\nabla h\Big]\\&-\frac{z^2}{2}\nabla^2\Phi_{10}+\frac{z^3}{6}\nabla^2\nabla\cdot(h\nabla\Phi_{00})\\&+\frac{z^4}{24}\nabla^2\nabla^2\Phi_{00}\end{aligned} \quad (8.c)$$

令 Φ_m 為任意水深處 $z=z_m(x,y)$ 之勢函數，並將式(8)代入式(7)，並令 $z=z_m$，可得

$$\begin{aligned}\Phi_m=&\Phi_{00}+\mu^2\Big[\Phi_{10}-z_m\nabla\cdot(h\nabla\Phi_{00})-\frac{1}{2}z_m^2\nabla^2\Phi_{00}\Big]\\&+\mu^4\Big\{\Phi_{20}+z_m\Big[-\nabla\cdot(h\nabla\Phi_{10})\\&-\frac{h^2}{2}\nabla^2\nabla\cdot(h\nabla\Phi_{00})-\frac{h^3}{6}\nabla^2\nabla^2\Phi_{00}\\&-h\nabla\nabla\cdot(h\nabla\Phi_{00})\cdot\nabla h+\frac{h^2}{2}\nabla\nabla^2\Phi_{00}\cdot\nabla h\Big]\\&-\frac{z_m^2}{2}\nabla^2\Phi_{10}+\frac{z_m^3}{6}\nabla^2\nabla\cdot(h\nabla\Phi_{00})\\&+\frac{z_m^4}{24}\nabla^2\nabla^2\Phi_{00}\Big\}+O(\mu^6)\end{aligned} \quad (9)$$

故

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{00}=&\Phi_m+\mu^2\Big[z_m\nabla\cdot(h\nabla\Phi_m)+\frac{z_m^2}{2}\nabla^2\Phi_m\Big]\\&+O(\mu^4)\\\Phi_{10}=&O(\mu^2)\\\Phi_{20}=&O(\mu^4)\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

因此長波方程式可表為

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\eta}{\partial t}+\nabla\cdot[(h+\varepsilon\eta)\nabla\Phi_m]\\&+\mu^2\nabla\cdot\Big\{h\nabla\Big[z_m\nabla\cdot(h\nabla\Phi_m)+\frac{z_m^2}{2}\nabla^2\Phi_m\Big]\Big\}\\&+\mu^2\nabla\cdot\Big\{+\frac{h^2}{2}\nabla\nabla\cdot(h\nabla\Phi_m)-\frac{h^3}{6}\nabla\nabla^2\Phi_m\Big\}\\&+\varepsilon\mu^2\nabla\cdot\Big\{\eta\nabla\Big[z_m\nabla\cdot(h\nabla\Phi_m)+\frac{z_m^2}{2}\nabla^2\Phi_m\Big]\Big\}\\&+\mu^4\nabla\cdot\Big\{-\frac{h^3}{6}\nabla\nabla^2\Big[z_m\nabla\cdot(h\nabla\Phi_m)+\frac{z_m^2}{2}\nabla^2\Phi_m\Big]\\&h\nabla G_1+\frac{h^2}{2}\nabla G_2-\frac{h^4}{24}\nabla\nabla^2\nabla\cdot(h\nabla\Phi_m)+\frac{h^5}{120}\nabla\nabla^2\nabla^2\Phi_m\Big\}=0\end{aligned} \quad (11)$$

及

$$\begin{aligned}&\eta+\frac{\partial\Phi_m}{\partial t}\\&+\mu^2\Big[z_m\nabla\cdot\Big(h\nabla\frac{\partial\Phi_m}{\partial t}\Big)+\frac{z_m^2}{2}\nabla^2\Big(\frac{\partial\Phi_m}{\partial t}\Big)\Big]+\frac{\varepsilon}{2}(\nabla\Phi_m)^2\\&+\mu^4\Big\{z_mG_3+\frac{z_m^2}{2}\nabla^2\Big[z_m\nabla\cdot\Big(h\nabla\frac{\partial\Phi_m}{\partial t}\Big)+\frac{z_m^2}{2}\nabla^2\Big(\frac{\partial\Phi_m}{\partial t}\Big)\Big]\\&-\frac{z_m^3}{6}\nabla^2\nabla\cdot\Big(h\nabla\frac{\partial\Phi_m}{\partial t}\Big)-\frac{z_m^4}{24}\nabla^2\nabla^2\Big(\frac{\partial\Phi_m}{\partial t}\Big)\Big\}\\&+\varepsilon\mu^2\Big\{\frac{1}{2}[\nabla\cdot(h\Phi_m)]^2-\eta\nabla\cdot\Big(h\nabla\frac{\partial\Phi_m}{\partial t}\Big)\Big\}=0\end{aligned} \quad (12)$$

其中 G_1、G_2 及 G_3 為與深度 z 有關的變數。(11)式及(12)式即為以任意水深處

之速度勢為變數之長波方程式。現在考慮定水深且流場為二維流場，並令水深參數 $m=\frac{z_m}{h}$（$-1\le m\le 0$），則上二式可改寫為

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[(h+\varepsilon\eta)\frac{\partial\Phi_m}{\partial x}\right]+\mu^2h^3H_1\frac{\partial^4\Phi_m}{\partial x^4}$$

$$+\mu^4h^5H_2\frac{\partial^6\Phi_m}{\partial x^6}+\varepsilon\mu^2h^2H_3\frac{\partial}{\partial x}\left[\eta\frac{\partial^3\Phi_m}{\partial x^3}\right]=0$$

(13)

$$\frac{\partial\Phi_m}{\partial t}+\eta+\mu^2h^2H_3\frac{\partial^3\Phi_m}{\partial x^2\partial t}+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial\Phi_m}{\partial x}\right)^2$$

$$+\mu^4h^4H_4\frac{\partial^5\Phi_m}{\partial x^4\partial t}+\varepsilon\mu^2\left[h\eta\frac{\partial^3\Phi_m}{\partial x^2\partial t}+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2\Phi_m}{\partial x^2}\right)^2\right]=0$$

(14)

其中

$$H_1=\frac{1}{2}m^2+m+\frac{1}{3} \qquad (15.a)$$

$$H_2=\frac{5}{24}m^4+\frac{5}{6}m^3+\frac{7}{6}m^2+\frac{2}{3}m+\frac{2}{15} \qquad (15.b)$$

$$H_3=\frac{1}{2}m^2+m \qquad (15.c)$$

$$H_4=\frac{5}{24}m^4+\frac{5}{6}m^3+m^2+\frac{1}{3}m \qquad (15.d)$$

(11)、(12)式及(13)、(14)式即為以任意水深之速度勢為變數之弱非線性長波方程式，在此吾人稱其為「新布氏方程式」。

四、新布氏方程式之線性探討

為求得最佳化長波方程式組，在此節吾人將探討新布氏方程式之五項線性因子，並由此決定出最佳化方程式。將前述之新布氏方程式略去非線性項之後，可得

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial^2\Phi_m}{\partial x^2}+\mu^2H_1\frac{\partial^4\Phi_m}{\partial x^4}+\mu^4H_2\frac{\partial^6\Phi_m}{\partial x^6}=0$$

(16)

$$\frac{\partial\Phi_m}{\partial t}+\eta+\mu^2H_3\frac{\partial^3\Phi_m}{\partial x^2\partial t}+\mu^4H_4\frac{\partial^5\Phi_m}{\partial x^4\partial t}=0$$

(17)

故分散關係式及群波速度可表為

$$C(m,\mu)=\left[\frac{1-H_1\mu^2+H_2\mu^4}{1-H_3\mu^2+H_4\mu^4}\right]^{0.5} \qquad (18)$$

$$C_g(m,\mu)=\sqrt{\frac{1-H_1\mu^2+H_2\mu^4}{1-H_3\mu^2+H_4\mu^4}}$$

$$\left[\frac{1-2H_1\mu^2+(3H_2-H_4+H_1H_3)\mu^4-2H_2H_3\mu^6+H_2H_4\mu^8}{(1-H_1\mu^2+H_2\mu^4)(1-H_3\mu^2+H_4\mu^4)}\right]$$

(19)

且水粒子水平速度與垂直速度分別為

$$F_H(m,z,\mu)\equiv\frac{\Phi_x(m,z,\mu)}{\Phi_x(m,0,\mu)}$$

$$=\frac{1-\left(H_3-\frac{z^2}{2}-z\right)\mu^2+\left(H_4+\frac{z^4}{24}+\frac{z^3}{6}-\frac{H_3z^2}{2}-H_1z\right)\mu^4}{1-H_3\mu^2+H_4\mu^4}$$

(20)

$$F_V(m,z,\mu)\equiv\frac{\Phi_z(m,z,\mu)}{\Phi_z(m,0,\mu)}$$

$$=\frac{(z+1)\mu^2+\left(\frac{z^3}{6}+\frac{z^2}{2}-H_3z-H_1\right)\mu^4}{\mu^2-H_1\mu^4}$$

(21)

且自由液面之水粒子軌跡為

$$F_T(m,\mu)\equiv\frac{1}{\mu}\frac{\Phi_z(m,0,\mu)}{\Phi_x(m,0,\mu)}=\frac{\mu-H_1\mu^3}{1-H_3\mu^2+H_4\mu^4}$$

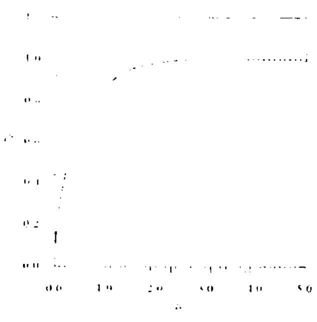
(22)

將以上五種線性因子綜合考量，並與線性史托克波(linaer Stokes theory)進

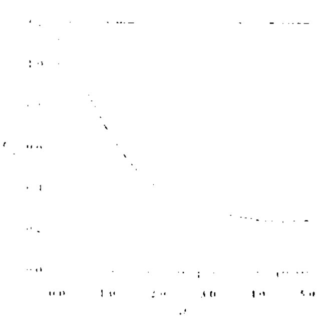
行比較，即可求得最佳化之長波方程式組。

五、結論與討論

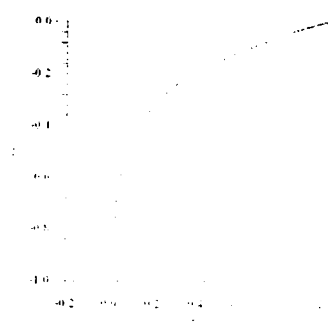
首先將五種線性因子之圖形描繪如下



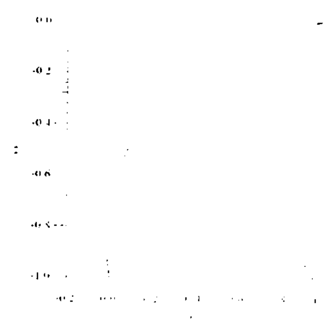
圖一、相位速度比較圖



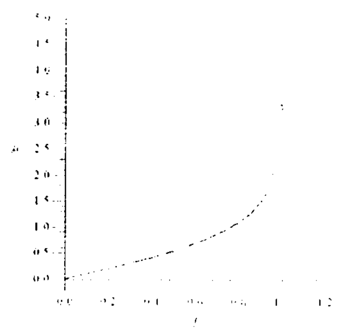
圖二、群波速度比較圖



圖三、水粒子水平速度比較圖



圖四、水粒子垂直速度比較圖



圖五、水粒子軌跡比較圖

由前節之分析可知可得當 $m=-0.617$ 時，可得最佳化之長波方程式組