計畫中文名稱: 直流無刷馬達自動化分析程式開發計畫

計畫英文名稱: Software Development of Design and Analysis Automation For DC Brushless Motor

摘要:

關鍵字: 直流無刷馬達，電磁有限元素分析，設計自動化

直流無刷馬達的設計與分析，由於驅動方式屬於交流驅動，轉子上又有永久磁鐵材料的使用，再加上，所使用的對象也多半是在伺服系統或是需要高單位重量輸出扭力的應用之中，因此，馬達的暫態與穩態性能以及各種參數的計算，便成爲非常重要的工作。此類工作之進行，需要馬達設計者在有限元素電磁分析，以及馬達設計方法與原理兩個領域上相當深入的專業知識，才能決定在分析過程之中邊界條件，Excitations，以及各種材料與非線性因子的設定。因此，本計畫之重點在於將所有的直流無刷馬達專業設計知識，以及有限元素分析的專業知識去做結合，再配合上馬達做有限元素電磁分析的特殊技術，整合成一套直接輸入馬達設計參數，便可以自動計算出馬達額定性能，TN 圖以及各種暫態響應等，並且自動建立設計診斷報表以及計算馬達效率值與效率分析報告。此一軟體的設計，可以使馬達設計者更爲專注於設計問題之本身，而非電磁學有限元素分析的技術之上。

ABSTRACT

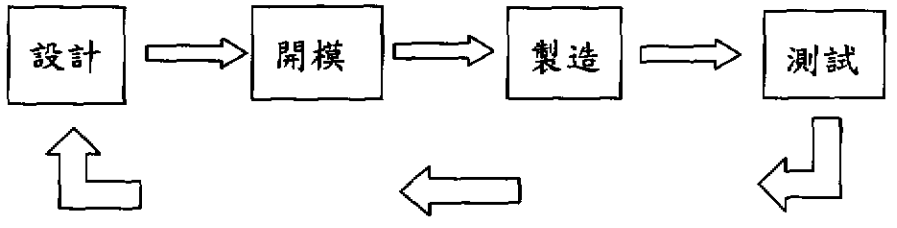
Keywords: DC Brushless Motor, EM Finite Element Analysis, Design Automation

Due to the AC driving pattern and permanent magnet on the rotor, the performance of dc brushless motor is very hard to compute. Also because this type of motor has good torque per unit weight output and mostly used in the servo system, the transient and steady state performance usually require good precise analysis. The requirement of using EM finite element analysis is obvious. In order to accomplish the finite element analysis, a motor designer required to be an expert in both the motor design and finite element analysis area. The designers are required to be able to assign boundary conditions, excitations, material properties and be able to consider all kinds of nonlinear effects. In this project, we are going to integrate the advanced motor design knowledge, EM finite element analysis knowledge, and all the important technical tips about using FEM to do motor analysis. The motor design engineers can simply enter the motor geometry parameters or performance requirements to find out the design of the motor. Also the FEM analysis will be done automatically by converting the designer's parameters into load and boundary conditions. After the analysis, the software will automatically report all the transient and steady state perfomances of the motor, the TN curve as well as the diagnostic report and the efficiency analysis report. The designer can then concentrate on the motor design issue not the FEM technology issue.

1.前言

隨著時代的進步，人類對環境保護的要求越來越高，使得高效率，省能源，低噪音，且對周遭環境不造成電磁波干擾的馬達設計，成為不可或缺的條件。也因為地球村的概念，只要有品質好且價格合理，就可以接到來自各國的訂單。要達到上述條件，在馬達設計過程使用 CAE 軟體來輔助設計，成了必備的工具。

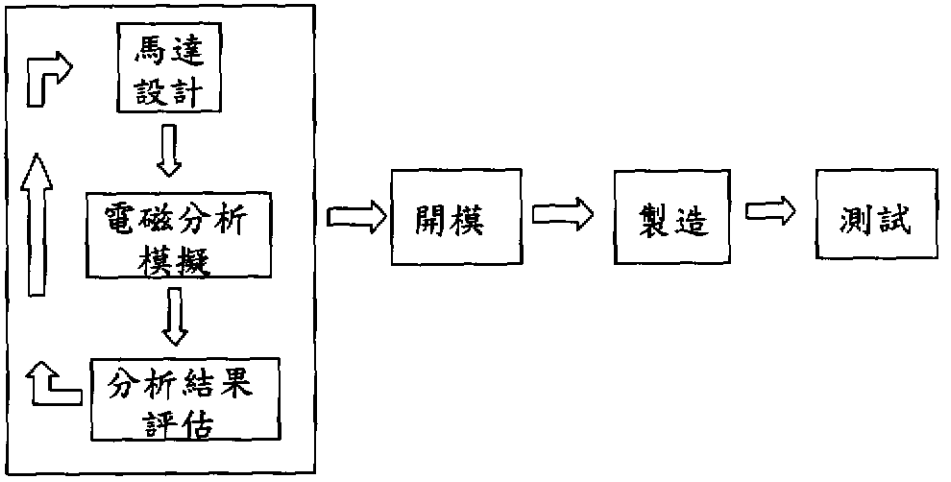
傳統上，先設計、接著開模製作雛形、雛形完成後再測試的製造流程，不符合要求再修改。這樣的設計過程不僅費時，且就算做出來測試結果，也常常只知道符合條件與否，而不知道為何符合條件，或為何不符合條件？就算要修正錯誤也不知道該怎麼修正。這樣的設計過程成本高又耗時，且很難做設計知識的累積。對一個專業馬達設計工程師的養成，需要花費 4、5 年的時間，甚至更長。這樣的一個設計方法，在講求速度，與講求知識累積的 21 世紀絕對沒有競爭力。



圖一、傳統設計製造流程

利用 CAE 分析軟體來輔助設計馬達，在近五年來以廣為大家所接受。利用 CAE 分析軟體來輔助設計馬達可在設計階段便得知設計的成

果，而不需等到測試時才知道設計的品質。其設計製造流程圖如圖二。



圖二、加入 CAE 分析的馬達設計製造流程

但利用 CAE 分析軟體來輔助設計馬達，需要跨領域的技術。需要的技術包括馬達設計本身，電磁學理論，以及有限元素分析。而也因為需要以上三種技術的整合，使得馬達 CAE 分析技術不易建立。且因為一般的電磁分析軟體其模擬得到的資料，常常不是馬達設計者所需要的資訊。這是因為一般的電磁分析軟體其目的是設計來作電磁分析，而不是專為馬達設計者所量身製造，使用馬達設計者所熟悉的資料以及語言。因此設計一套專為馬達設計者量身定製，結合馬達專業知識，電磁學理論，以及有限元素分析的技術而成的馬達設計自動化軟體的專案乃孕育而生。

2. 馬達設計自動化

2.0 馬達設計自動化目標

馬達設計自動化軟體希望達到的目標如下：

1、提升馬達設計的品質與速度。

2、簡化設計流程，讓馬達設計者專心於馬達設計工作。

3、加速馬達設計工程師的養成時間。

4、馬達設計技術與知識的累積。

要達到以上的目標，首先我們需在軟體中整合馬達設計的專業知識，讓不同馬達的軟體設計流程與介面盡量一致，接著自動做有限元素的設定與模擬，並將電磁分析的結果資料轉換為馬達設計者真正瞭解與使用的資料。至於第四項的目標就需要與 PDM（Product Data Management）結合，透過對分析過程、分析結果、製造過程、測試報告等資料的收集與分析，養成對馬達設計甚至製造的全面瞭解。

馬達設計模組在設計此軟體的過程規劃為兩個大模組，一為馬達設計模組，一為有限元素電磁分析模組。

2.1 馬達設計模組

馬達設計模組需要的技術概分如下：

1、對各種不同馬達的設計與工作原理的瞭解。

目前馬達按照其工作原理不同，可以分為直流無刷馬達、交流感應馬達、直流馬達、步進馬達、磁阻馬達等。若按運動方式可分為旋轉馬達或直線馬達，而旋轉馬達若按其旋轉部分在內部或外部，又可分為內轉子與外轉子馬達。

2、各種不同繞線方式所造成不同的電流分佈。

目前較常用的繞線方法有三種，分別為波繞、疊繞與中心繞線。

3、磁鐵外型與擺置。

直流無刷馬達直流馬達和步進馬達都使用到磁鐵，而磁鐵的外型與擺置方式將造成磁通的流動方式與分佈情形不同，進而影響馬達的設計結果。

4、矽鋼片形狀與尺寸。

矽鋼片形狀尺寸與磁鐵一樣，不同的設計會影響到馬達的設計結果。

5、與驅動器的結合。

馬達設計和驅動事實上是兩個不同的領域，但在設計過程兩者又息息相關，若能將兩者結合，則馬達設計部門和驅動部門，將合作更

為融洽，設計的過程也可同步進行。不會驅動部門要等設計部門出來成品才能測試，若有問題則需重新設計馬達。

6、效能的評估與顯示的方式與種類。

效能的評估與顯現方式，對馬達分析自動化佔有重要的地位，傳統的CAE分析工具因為沒有顯現出實際馬達設計者需要的資料，使得馬達設計者很難評估其設計結果。

7、材料資料庫的建立。

資料庫的建立主要是方便分析者在分析時對於矽鋼磁鐵甚至導線材的選擇，並增加模擬的準確性。這方面也可與歐磊公司的OLE PDM結合。

2.2 有限元素電磁分析模組

1、與馬達分析模組的介面。

此部分需處理使用者在馬達分析模組所設計與選擇的資料，轉換成電磁有限分析的資料。

2、邊界條件(Boundary Condition)的設立。

在做有限元素分析時，因為在解稀疏矩陣(Sparse Matrix)有奇異點（Singularity）的問題，所以需要下邊界條件。

3、Excitation 的設立。

Excitation 在電磁分析裡，包括電流或電壓的輸入，以及磁鐵的存在。電流和電壓的輸入，結合馬達的繞線方法（疊繞中心繞或波繞等）和線圈圈數，則可計算出電磁分析的 Excitation。而磁鐵的材料與方向和形狀也要轉換成電磁分析的Excitation。

4、網格(Mesh)的建立。

網格的目的是將馬達細分成一堆小小的元素，以方便分析。目前較常用的網格在2D為三角形與四邊形網格，在3D為四面體與六面體。

5、解題器(Solver)。

Solver 主要是結合將網格所分出來的小元素，按照電磁分析的理論，一一填入一個稀疏矩陣(Sparse Matrix)方程式內，並將

Excitation 的值填入方程式的右手邊（right hand side)。接下來解此稀疏矩陣，就可以得到其電磁分析的解。

6、後處理器(Post Processor)。

後處理器的功能是將電磁有限元素分析解題器解出來的結果（磁位能）轉換為馬達設計者熟悉的資料(磁通分佈，磁通向量，扭力，cogging torque，扭力對速度分佈圖，馬達線圈電阻和電感值等等…)。

7、Viewer

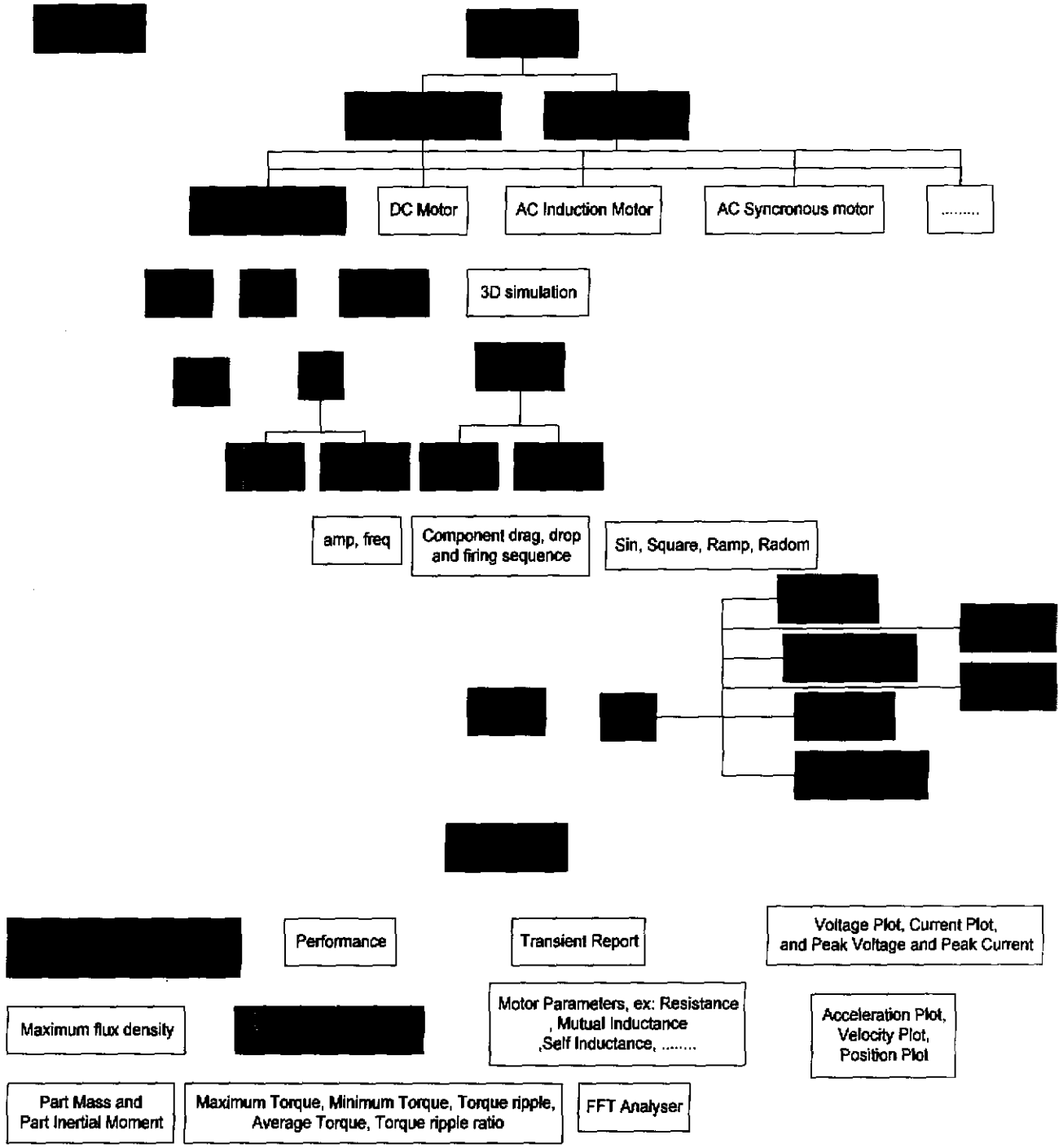
Viewer 主要是把馬達設計者想要看的圖顯現出來，因為馬達會被分解成很多小元素，為了加速繪製這些眾多小元素，必須用 OpenGL 來寫 Viewer。

8、Report

Report 的目的和 Viewer 相同，是將資料整合成馬達設計者可以分析的資料，而這些資料可以用 PDM 管理，甚至可以加上評估報告，修正方法或經理意見等等…。

以上是設計馬達自動化軟體所需的技術簡介，後面我們會有更為詳細的技術資料。在介紹更細節的技術資料前，先介紹程式的精神與流程。

軟體規格



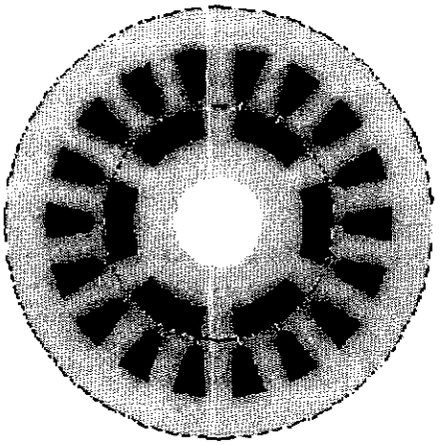
程式架構方塊圖

第一部份：幾何驅動

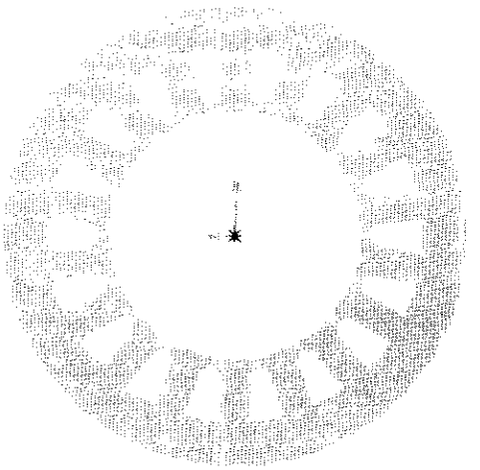
我們設計此一軟體之目的是在於簡化馬達設計工程師在做馬達分析的過程。同時，也希望程式能將大多數的馬達分析邊界條件，Excitation，網格密度與型式等做專業性的調整，設定與判斷。

直流無刷馬達的參數設計

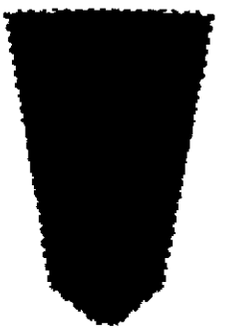
圖二所示為馬達的組立圖幾何。我們可以針對馬達中的各零件去做幾何尺寸輸入介面，並且加以尺寸之輸入。圖三中所示即為定子外形，圖四中所示為定子槽電流，圖五為氣隙部份，圖六為永久磁鐵以及 Bonding 材料，矽鐵件則如圖七所示。



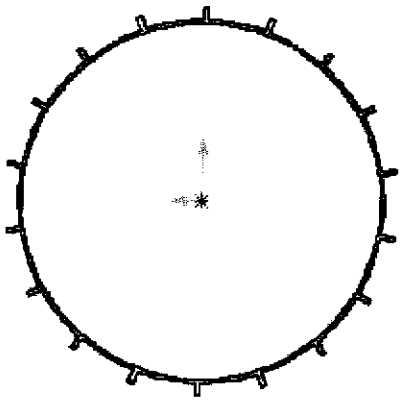
圖二. 直流無刷馬達組立幾何



圖三. 定子件幾何

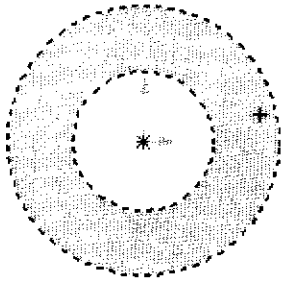


圖四. 定子齒槽幾何



圖五. 氣隙幾何

圖六. 永久磁鐵以及 Bonding 材料幾何



圖七. 轉子幾何

對於直流無刷馬達而言，從以上的幾何之中，我們可以歸納出以下幾項幾何參數去做為幾何輸入資料的依據:

1. 馬達總長
2. 定子外徑
3. 定子內徑
4. 定子軛厚度
5. 定子齒寬
6. 定子齒數
7. 定子槽寬

8. 定子齒鞋參數一
9. 定子齒鞋參數二
10. 轉子永久磁鐵數
11. 轉子永久磁鐵外徑
12. 轉子永久磁鐵內徑
13. 轉子鐵心外徑
14. 轉子鐵心內徑

根據以上的幾何參數，我們可以決定出直流無刷馬達的幾何外形。

材料庫的建立

材料庫所設定的參數包括了 Conductivity, Reluctivity, Permeability, Coercivity, BH curve, density 以及其他的一般材料性質。所有的材料是以資料庫的方式去做儲存之後，再設計使用者介面去加以存取。

✧ 以下是材料庫資料結構的詳細規格

[Material_Name, Density_Unity, ElectroMagnetic_Unit, Linearity_Check,

Density, PermeabilityX, PermeabilityY, PermeabilityZ, ConductivityX, ConductivityY, ConductivityZ, CoercivityX, CoercivityY, CoercivityZ, ElectroMagnetic_BH_Point_No, Magnet_BH_Point_No,

ElectroMagnetic_BH_Data_Point, B_Data(), H_Data]

資料是以冒號加以分開

0	Material_Name	字串
1	Density_Unity	整數
2	ElectroMagnetic_Unit	整數
3	Linearity_Check	整數
4	Density	Double
5	PermeabilityX	Double
6	PermeabilityY	Double
7	PermeabilityZ	Double
8	ConductivityX	Double
9	ConductivityY	Double
10	ConductivityZ	Double
11	CoercivityX	Double
12	CoercivityY	Double
13	CoercivityZ	Double
14	ElectroMagnetic_BH_Point_No	整數

15 B_Data() Double
16 H_Data() Double

邊界條件以及材料性質的檔案格式

此一檔案格式之建立主要是為了與有限元素解題器之間去做檔案資訊之溝通而設計的。這是由於在每一個不同 Region 之中的材料，以及不同幾何邊線上的邊界條件等等都不會在網格產生器之中去加以儲存。因此必須直接通知 Solver 相關資訊，以順利結合幾何，邊界條件以及材料的資訊。

下面是資料結構的順序:

[EM_Unit_System, Mass_Unit_System, Region_number,Material_number, Boundry_Type_Number]

Region_Id, Material_ID, Current_Density, Magnetizaion_Type, DirX, DirY, NS_Direction

…

…

…

…

Material_Id ,Material_Type ,ux ,uy ,uz ,mx ,my ,mz ,dx ,dy ,dz ,density Num_of_*BH*points

B( ),H( )

….

….

…. 註: 線性材料時，則每有第二與第三行

….

….

….

Boundary_Condition_Type_Id, Boundary_Type, Number_of_edge

Edge_id, boundary_value

…

….

EM_Unit_system as Integer: 儲存 solver 中所使用的單位系統.

FEM_SI: 0

FEM_Gauss:1

Mass_Unit_Syatem as Integer:

FEM_KGM3 : 0 kg/m^3

FEM_GCM3 : 1 g/cm^3

FEM_LBIN3 : 2 lb/in^3

Region_Number as Integer: 網格產生器所產生的區域數

Material_Number as Integer: 所需要使用到的材料種類數目

Boundary_Type_Number as Integer: 所使用到的邊界條件型式的數目

Region_Id as Integer: 區域之識別碼

Material_Id as Integer: 材料的識別碼

Current_density as double:區域之電流密度.

Magnetization_type as integer: 記錄永久磁鐵之磁性方向向量座標

FEM_RECT 0: 直角座標

FEM_RAD 1: 極座標

DirX, DirY as double: 極座標系統原點

Material_Type as Integer: 材料型式

FEM_LPLOLC 0 : 線性材料, 輸入 ux, uy, uz, mx, my, mz, dx, dy, dz.

FEM_NLPLOLC 1: 非線性鐵材, 輸入 dx, dy, dz, 再讀下一行，至少三行去儲存磁鐵的 BH 曲線圖

Ux, uy, uz as double: permeablity of x, y, z.

Mx, my, mz as double: coercivity of x, y, z

Dx, dy, dz as double: conductivity of x, y, z

Density as double: Mass density

Num_Of_BHCurve as integer: Points on BH Curve.

B( ), H( ) as double: B(num_of_BHCurve), H(num_of_BHCurve)

Boundary_condition_type_id as Integer: 邊界條件型式

Number_of_edge as integer: 使用同一邊界條件的邊界數量

Edge_Id as Integer:將網格產生器結果關連到邊界條件的識別碼

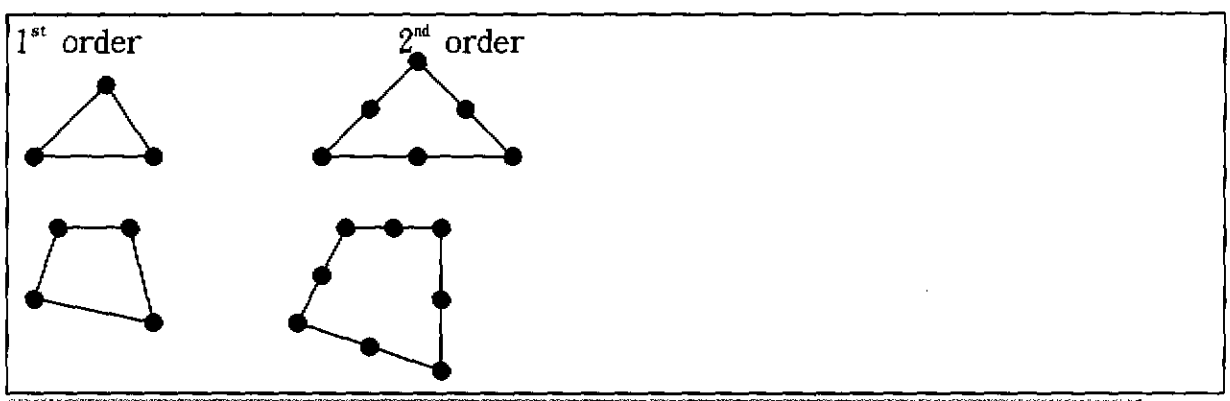
Boundary_value as double: 邊界條件值

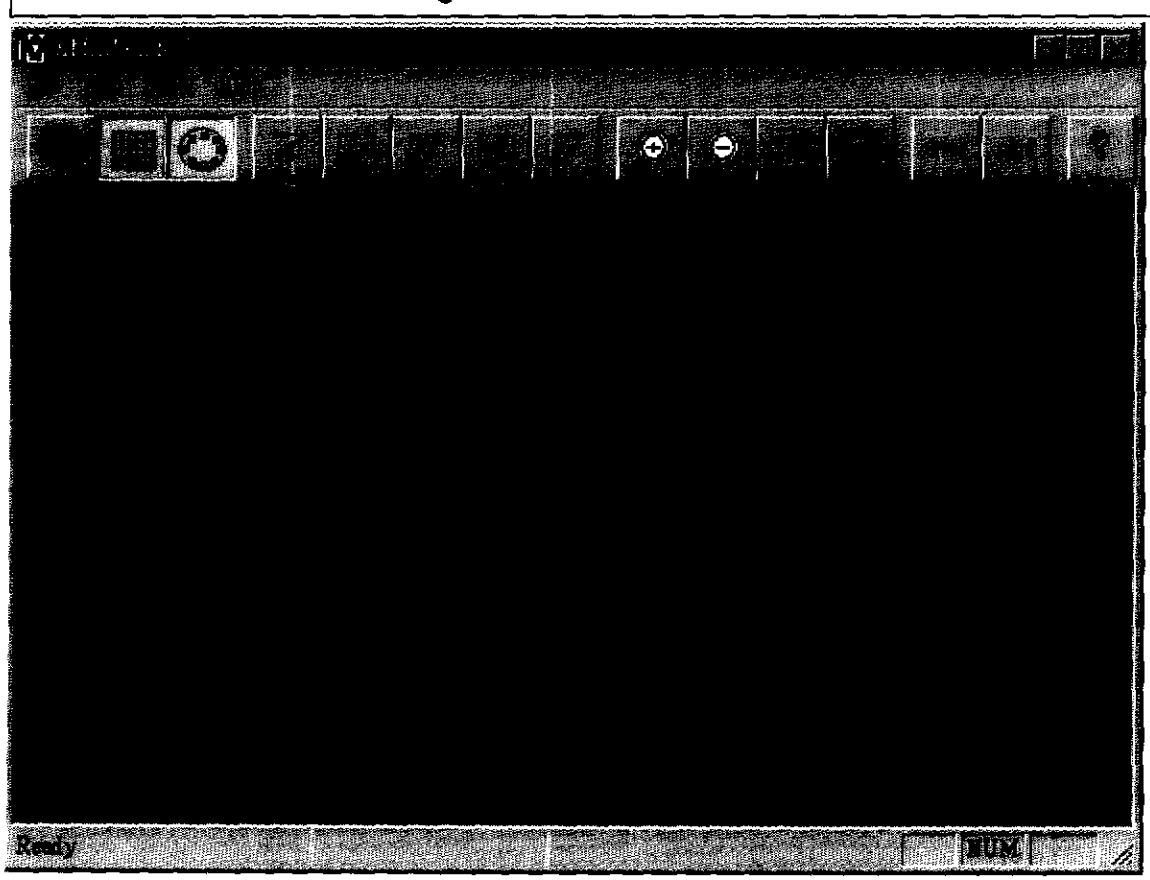
後處理器設計

- ✧ 使用 OPEN GL
- ✧ 繪出幾何，網格，分析結果
- ✧ 使用 OCX 技術並且包成 DCOM

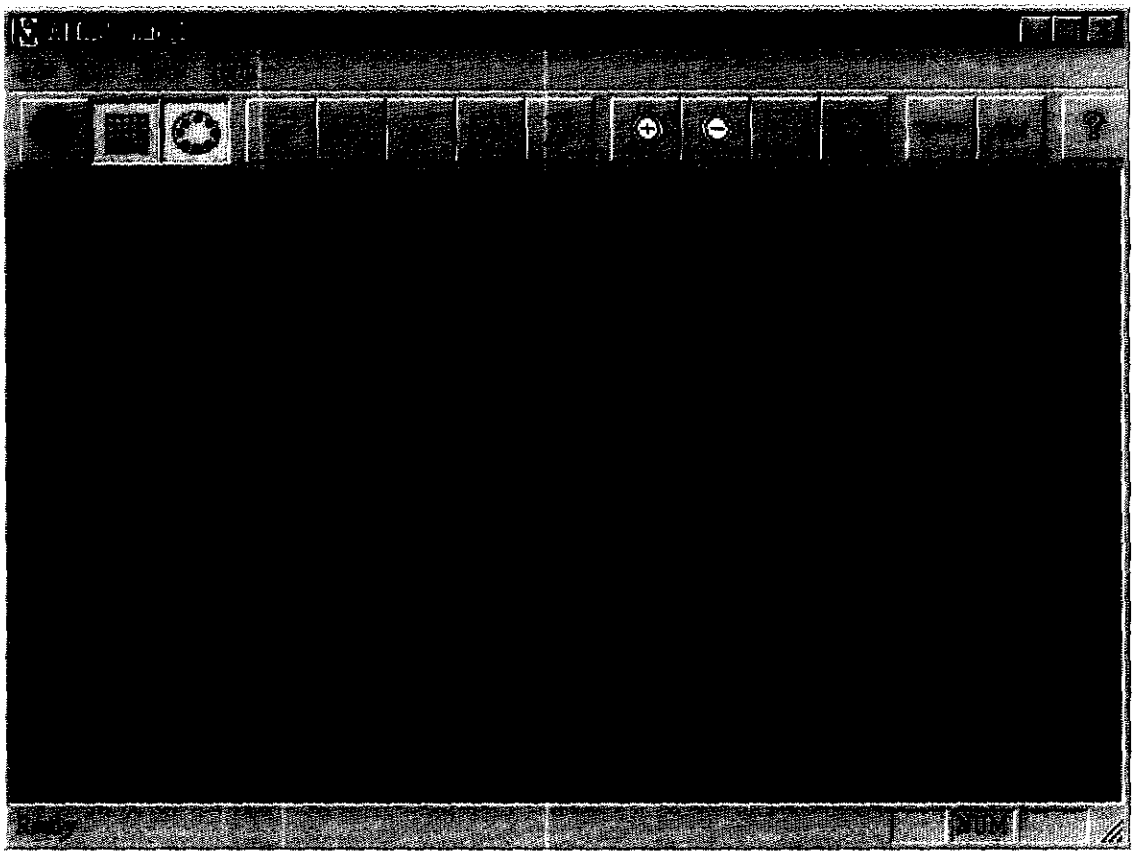
後處理器規格

1. 網格的處理: 可同時處理如下圖所示之網格: node as figure.





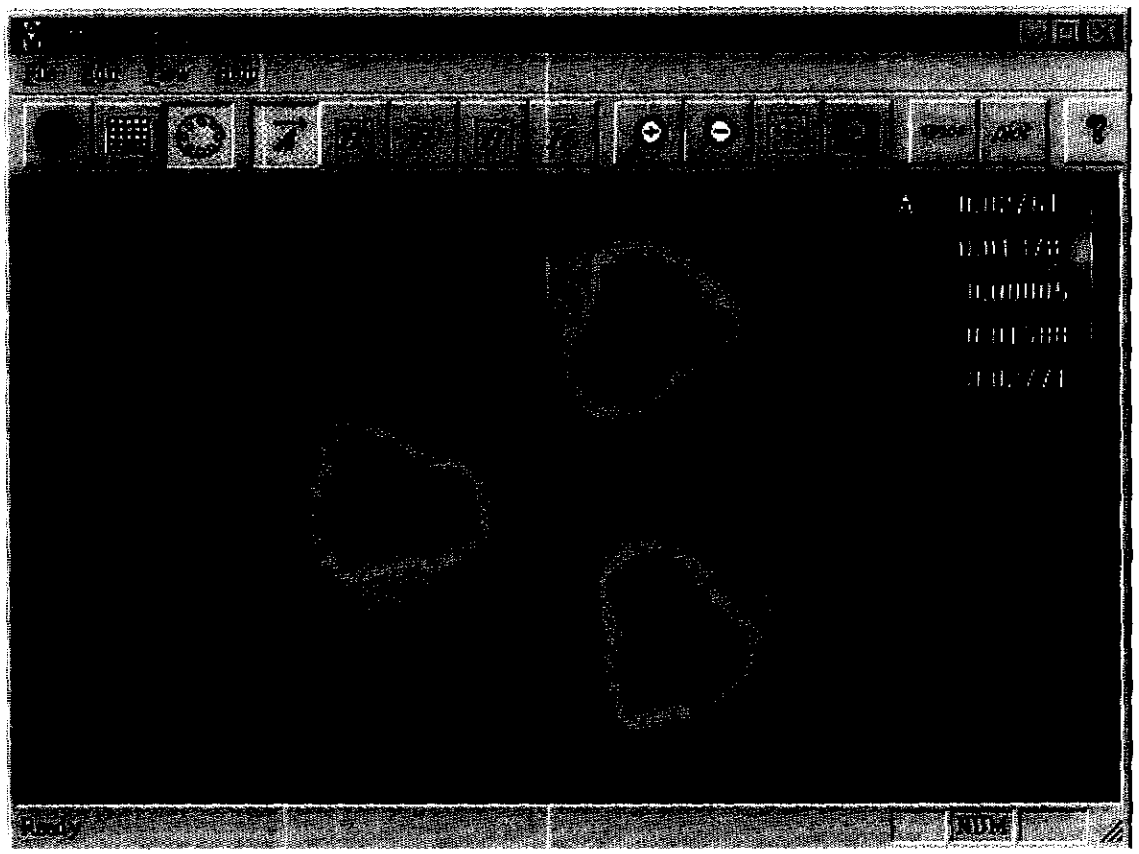
1st order triangular element in postprocessor



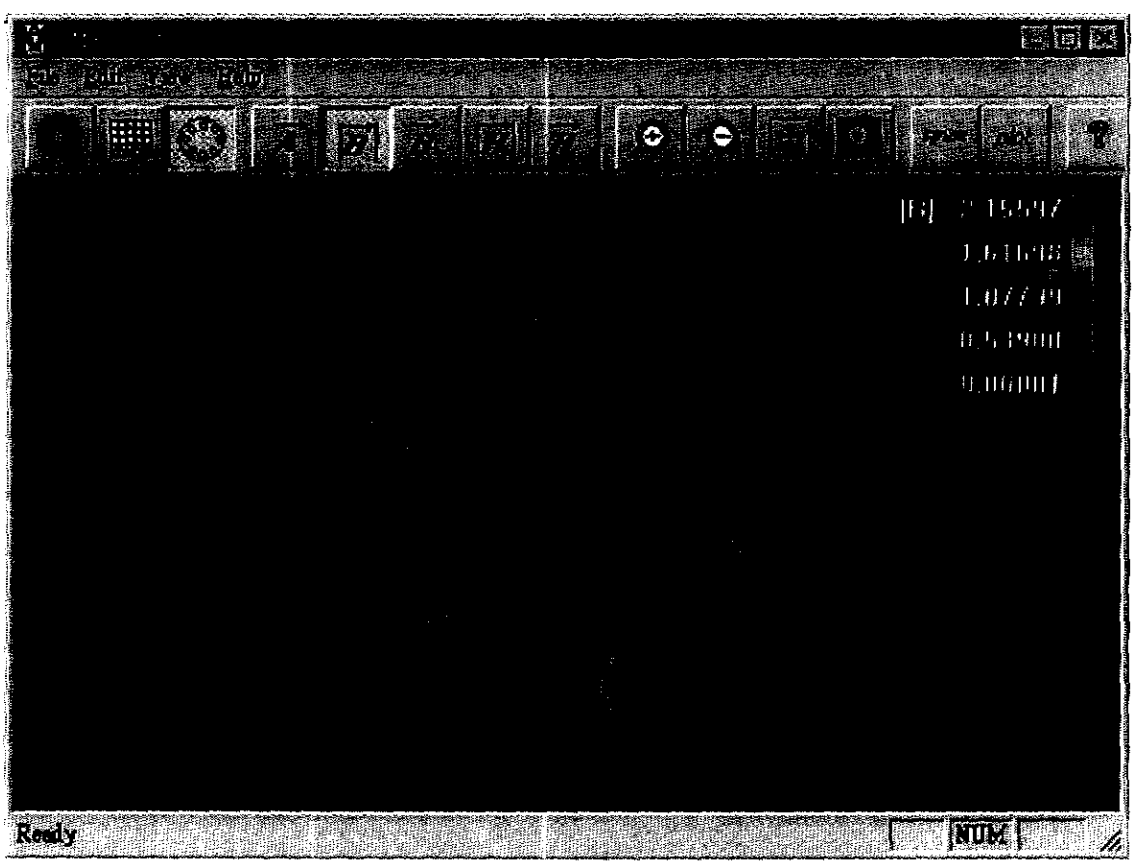
2nd order triangular element in postprocessor

2.繪製馬達幾何圖

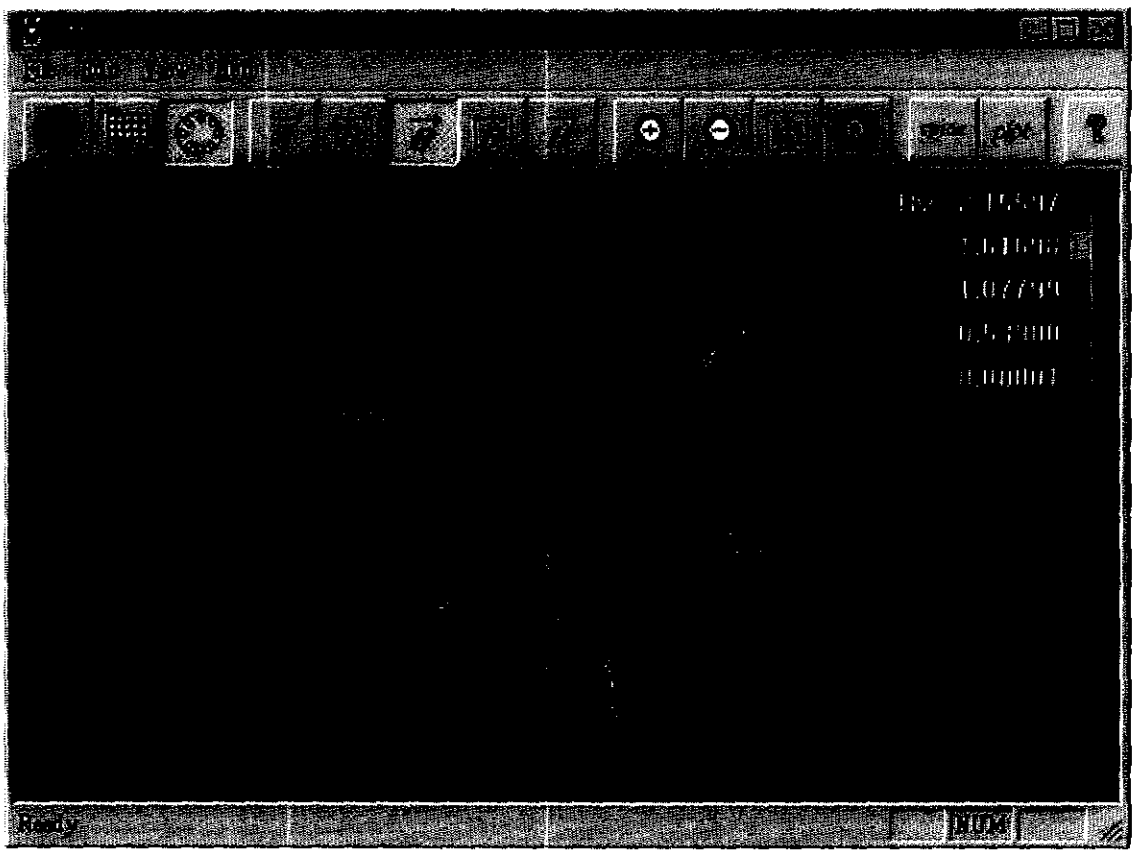
3 繪製 Field Potential(A), Flux Vector(B), Flux Vector Magnitude(|B|) , Field Intensity Vector(H), Field Intensity Magnitude(|H|).



Field potential plot in postprocessor of 6 poles DC brushless motor



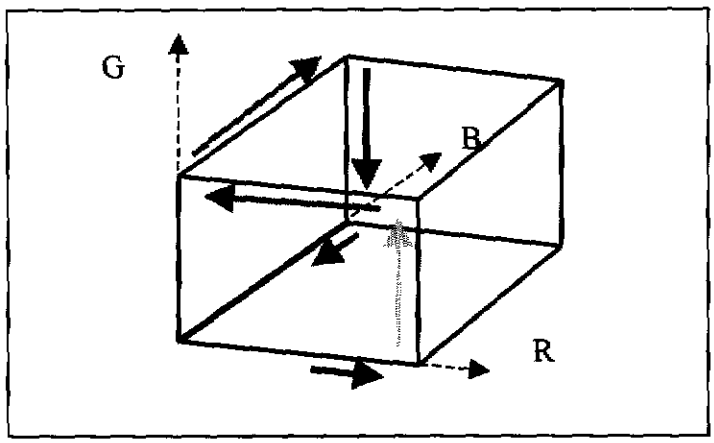
Magnetic flux magnitude plot in postprocessor of 6 poles DC brushless motor



Magnetic Flux Vector plot in postprocessor of 6 poles DC brushless motor

4. Color Map 規格

Color Index



Color mapping methodology

有限元素之解題器與網格產生法:
網格產生法將以過去兩年來計畫所執行之幾何建構成果,配合上在馬達電磁分析過程之中,馬達氣隙與各種材料的不同網格特性來做軟體的開發。有關詳細的氣隙模型建立原理,可以參考附件一。而 Solver 的處理則採用 FEM 基本原理,以及 NAG 的 Sparse Matrix 解題器來加以解決。

有限元素解題器與電路藕合求解
將完全參照以下之論文中的說明加以實現:
"A New method for coupling Finite Element Field Solutions with External Circuits and Kinematics", Gary Bedrosian GE Corporate Research & Development Schenectady, New York
我們將採用 Pspice 的原始碼,配合上本計畫執行之成果,建立一套可以藕合外接驅動電路以及馬達電磁特性以計算馬達穩態與暫態反應之軟體。

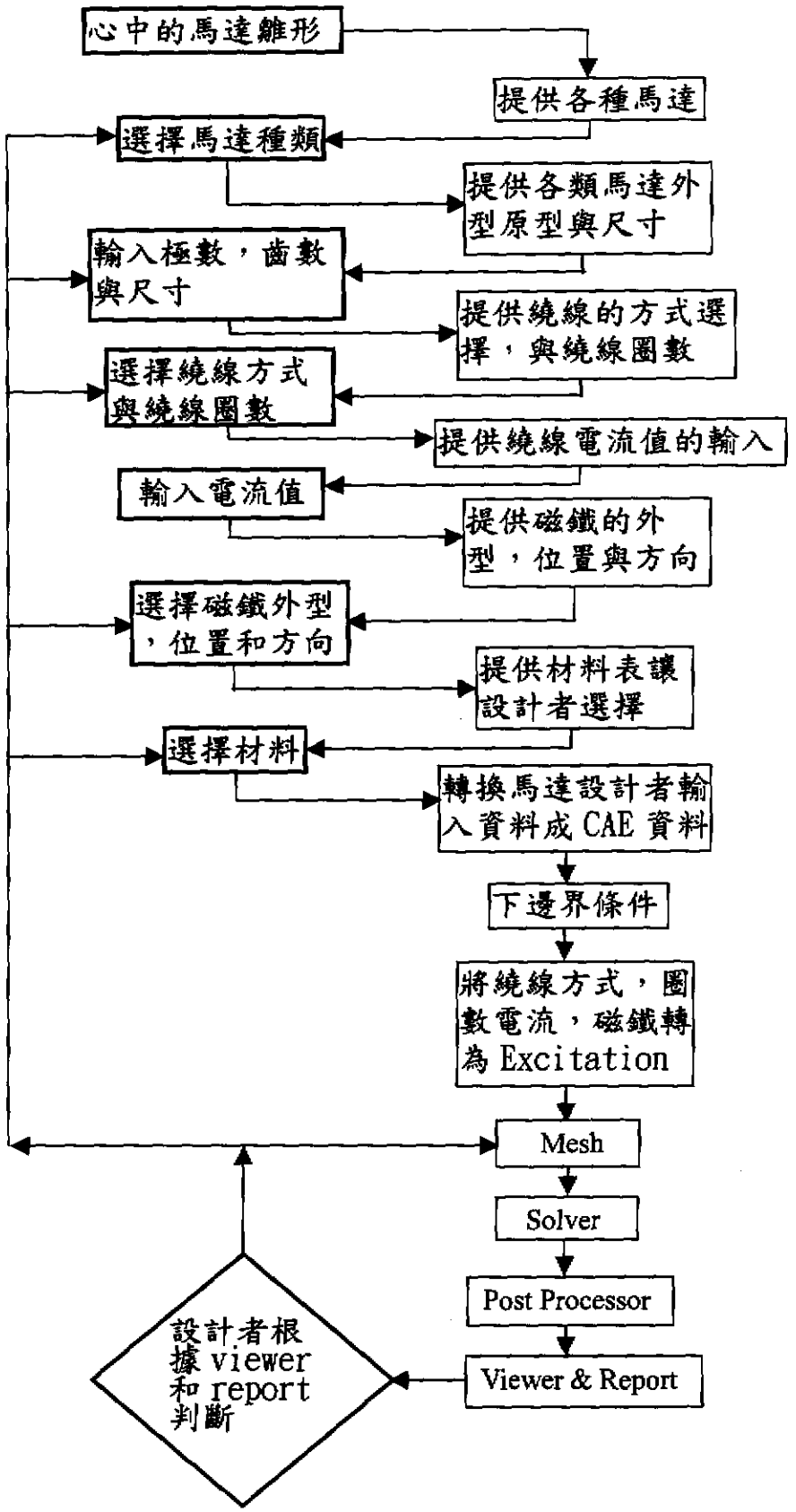
第二部份: 性能驅動
所使用之方法和第一部份之幾何驅動類似。但是使用者是直接輸入馬達的期望性能參數,並且從此性能參數去做 Analytical 的馬達尺寸計算。此部份之計算公式可以詳見
"機電與動力系統研究群期末報告",民國八十七年,台大慶齡工業研究中心。

在完成 Analytical 計算之後,我們可以將計算之幾何,代入系統之中去做有限元素分析,並且重新計算出精確的馬達性能參數,顯現給設計者參考,並且做為幾何參數修正之依據。

.馬達設計程式的流程規劃

首先介紹流程，程式設計的流程如下圖。在設計馬達時，設計者心中一定有個想設計的馬達規格，並決定何種馬達是設計者所想設計的。本專案的計畫是先提供四種馬達設計模組以供設計者選擇，分別是直流無刷馬達，直流馬達，交流感應馬達，磁阻馬達。選擇了馬達種類之後，我們將提供此類馬達的設計原型，和尺寸表，使用者可以輸入其所想要的尺寸，極數(Pole number)或槽數數(Solt Number)。有了尺寸之後接著選擇繞線方式，線圈圈數，與電流值。若此型馬達需要加入永久磁鐵，則選擇磁鐵形狀與擺設方式。接著選擇各部分的材料。有了以上的資料就可以進行分析了。分析出來的結果會顯現成圖形和報表方式，內部將有馬達設計者所需要評估一顆馬達好壞的資料。透過這些資料，馬達設計者可以判斷此設計是否符合？若不符合，設計者可以回到各個階段修改，並再次模擬。如圖所示，設計者可以改變網格大小，以使模擬精度提升。也可以更換材料，或改變永久磁鐵，改變尺寸，甚至換別種馬達來設計。馬達設計流程圖如圖三。

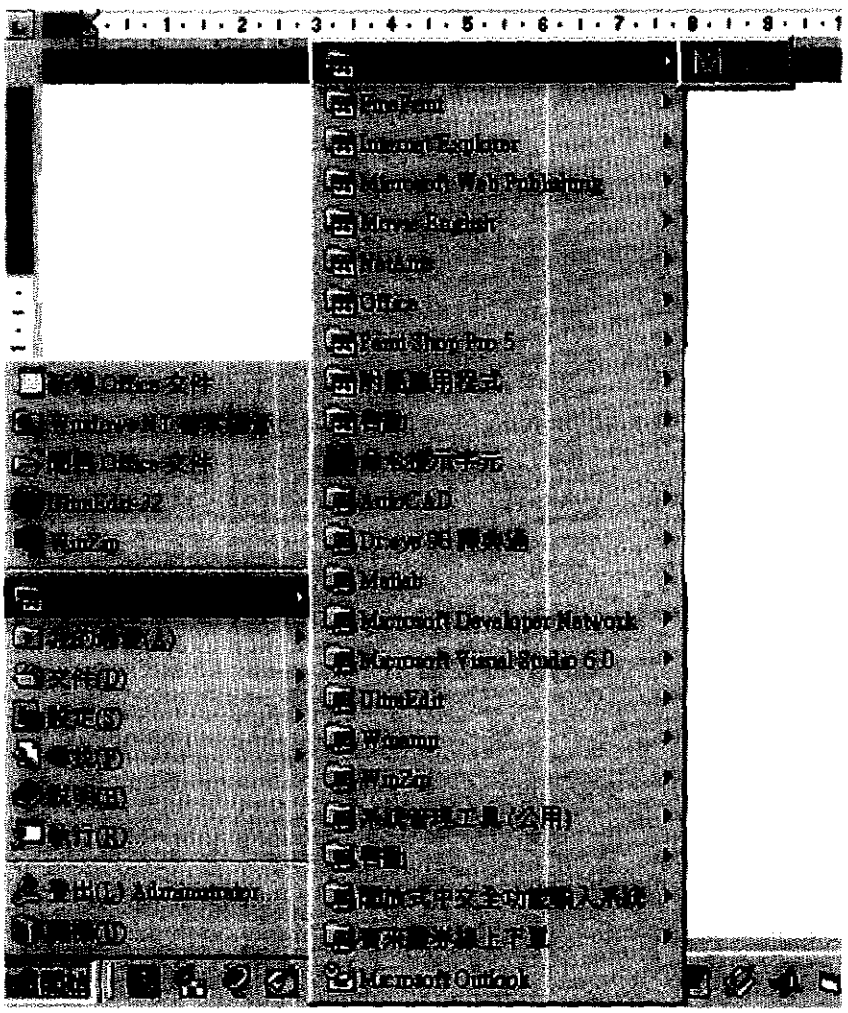
透過這樣的流程來建構馬達自動化分析軟體。對馬達設計者而言，幾乎不用考慮有限元素電磁分析的問題。馬達設計者要考慮的只是如何設計馬達，而不需考慮如何分析馬達。這樣可以減少設計者因為對有限元素電磁分析的不熟悉，導致出模擬結果的錯誤，並可以加快設計者的分析速度。而新進人員，也可以從本程式提供的流程，得到馬達設計的技術，進而透過反覆的模擬與比較模擬結果學習馬達設計的知識。



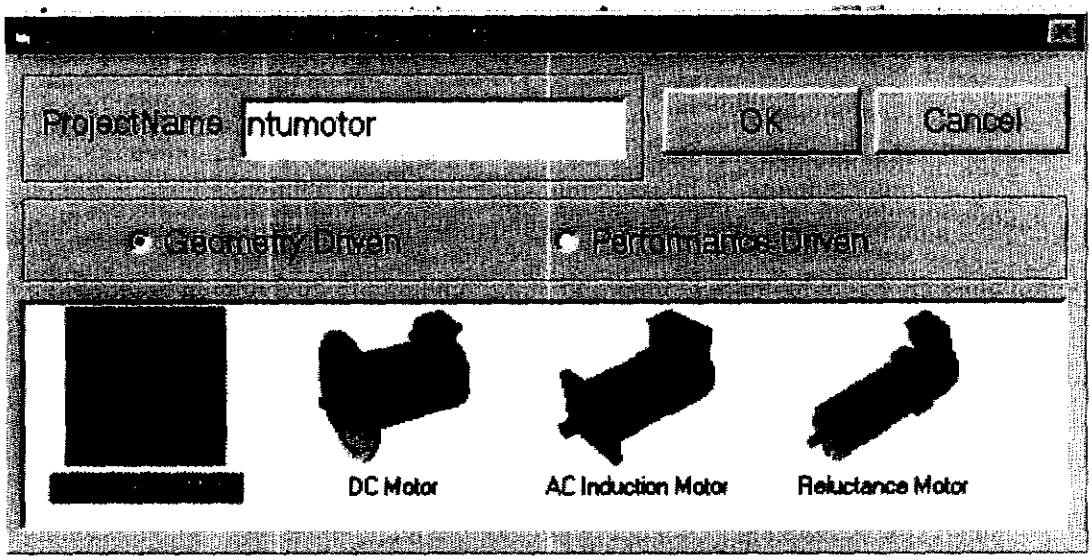
圖三、馬達設計自動化軟體流程圖

軟體使用說明:

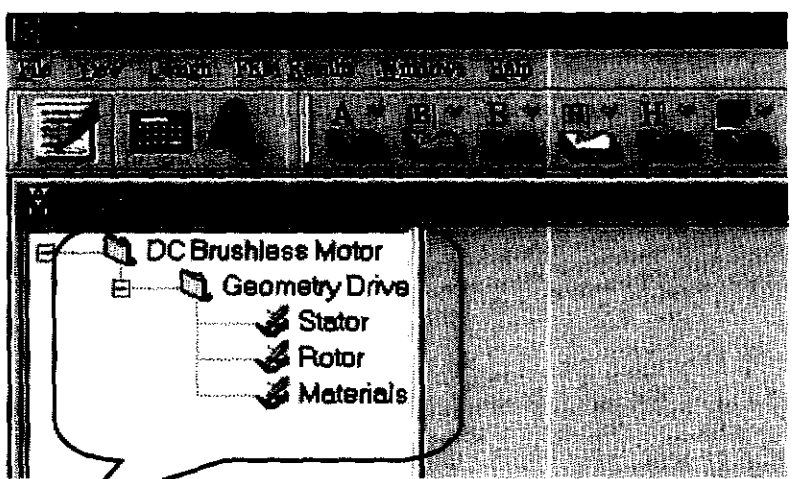
首先從 NT or Win98 的【開始】選項選擇【程式集】，接著找尋【AMAS】，並執行【AMAS】，如下圖所示。



2.接著可以看到 AMAS 的 login 畫面，如下圖。圖中顯示四種馬達，以及兩種設計方法。目前完成馬達種類完成 DC Blushless Motor，所以選擇 DC Blushless Motor。選擇設計方法為 Geometry Driven。並輸入欲設計馬達的 Project 名稱，如 ntumotor。按下 OK。

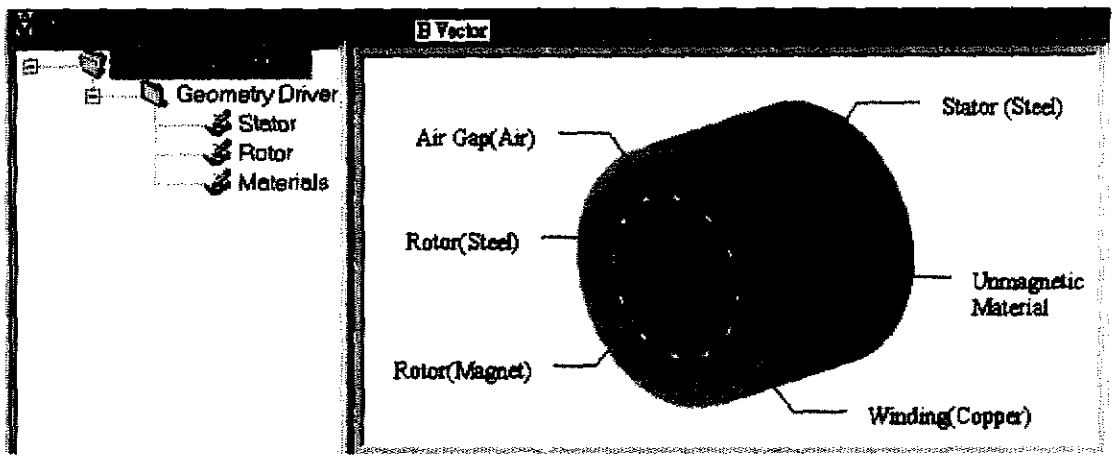


3.出現馬達主視窗，從下圖紅線註記處，可以看到馬達設計樹。此階段出現的是『Stator』,『Rotor』,『Materials』三個節點。

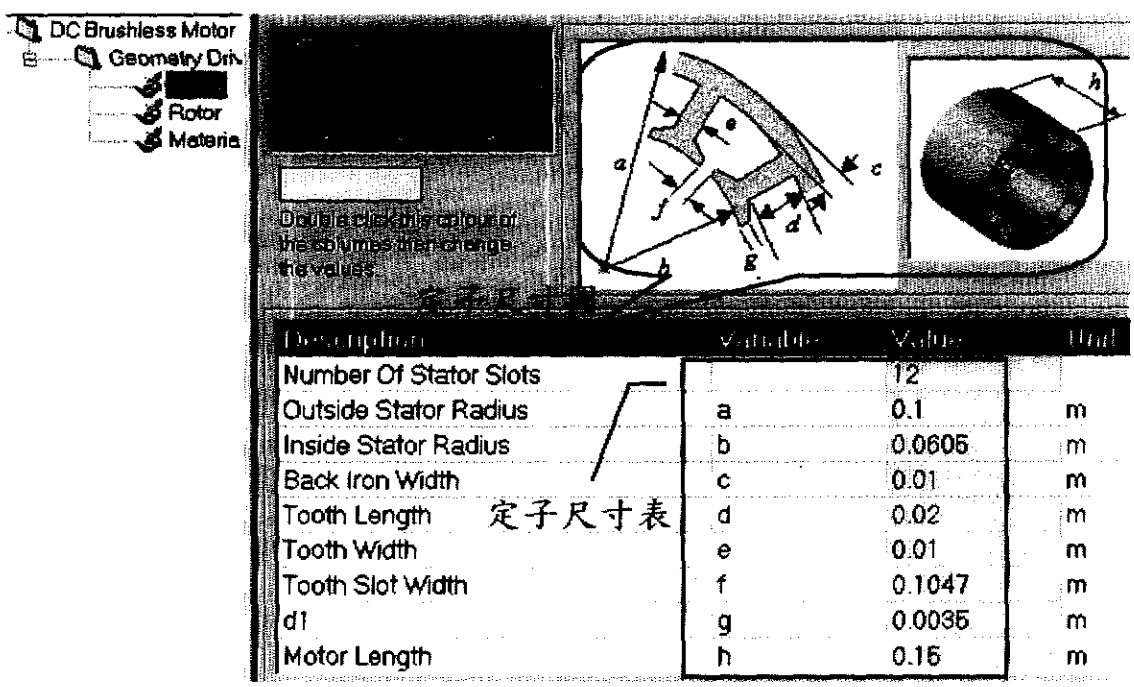


馬達設計樹

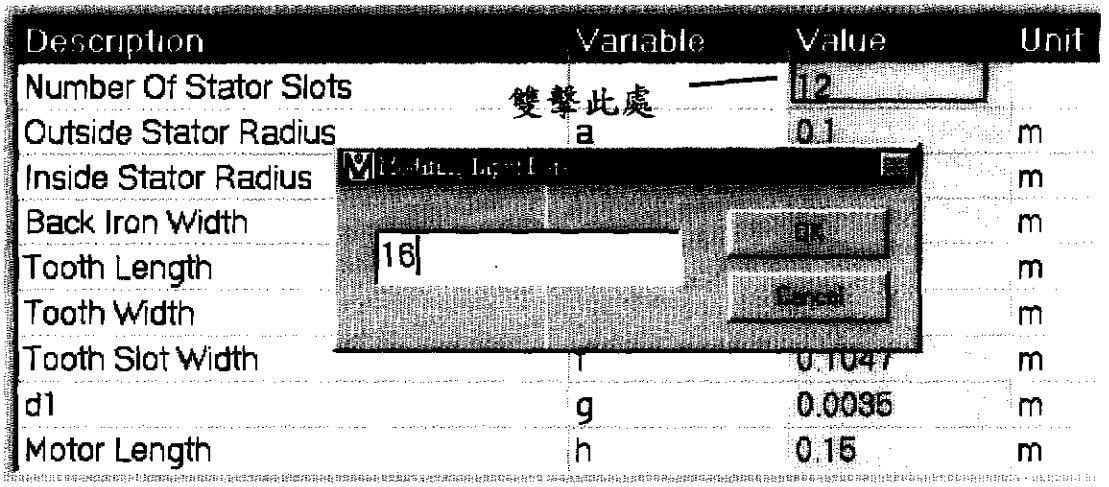
4.點選【DC Brushless Motor】可以看到此馬達的簡單幾何圖。目前只提供一種直流無刷馬達的 Template。如下圖。



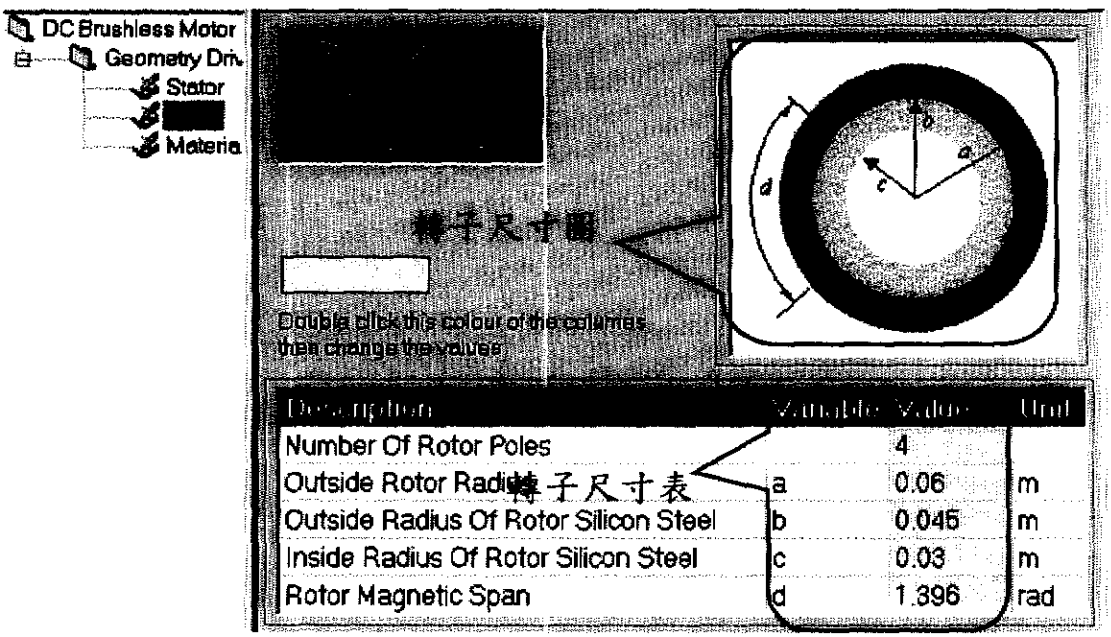
5.在此直流無刷馬達可以改變的幾何歸類為定子和轉子兩類，可以分別改變。若要改變定子尺寸可以點選【Stator】。如下圖所示。其中尺寸示意圖如紅色註記處。而定子尺寸表則如紫色註記處。



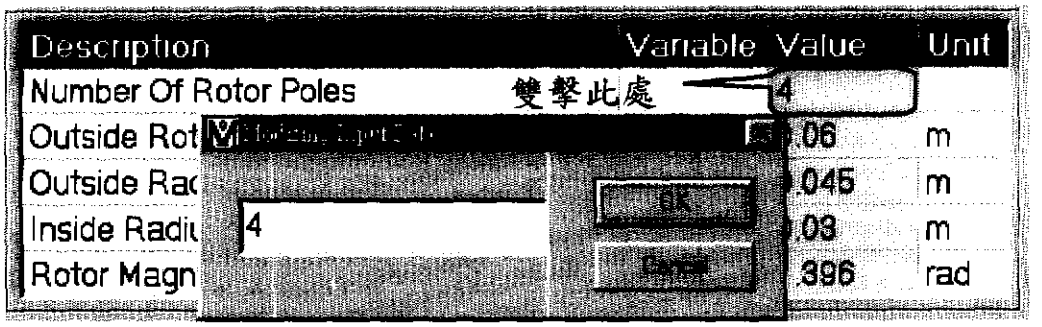
6.使用者可以更改尺寸，如定子的【Number of Stator Slots】等。雙擊所要更改的定子尺寸值（紫色區），則可出現修改對話盒讓馬達設計者修改尺寸。如下圖。



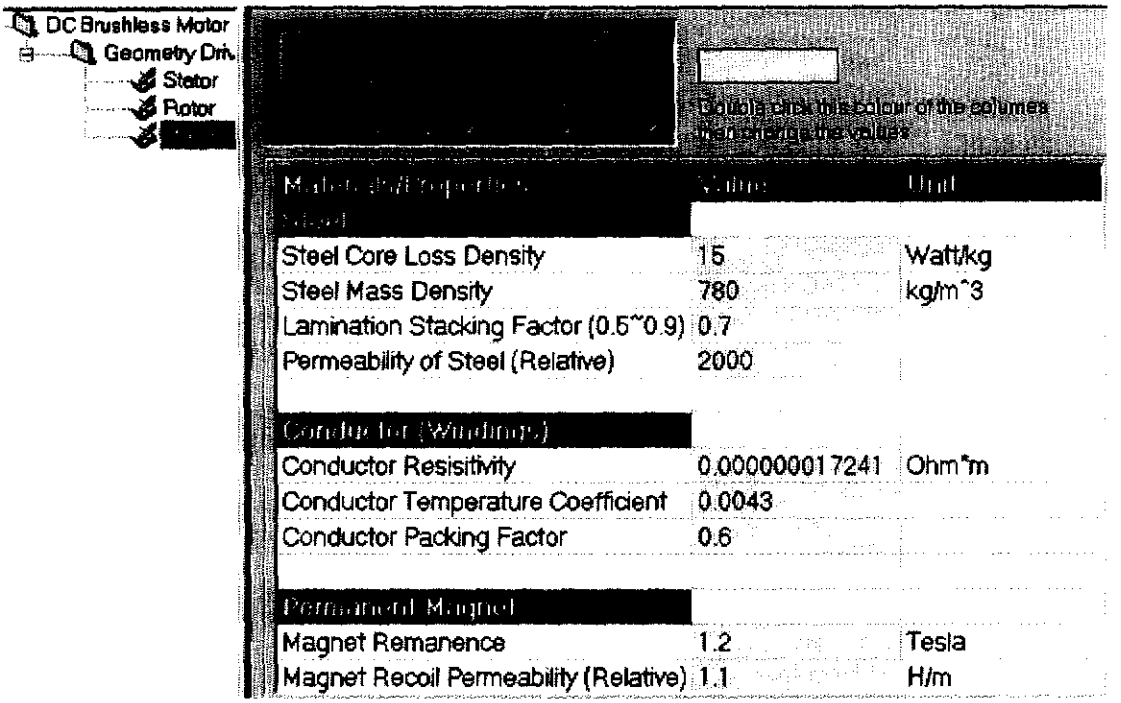
7. 若要改變轉子尺寸可以點選【Rotor】。如下圖所示。其中尺寸示意圖如紅色註記處。而轉子尺寸表則如紫色註記處。



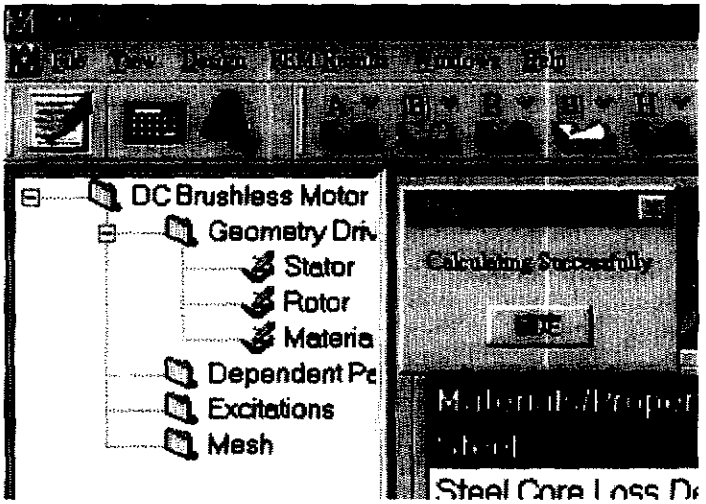
8.使用者可以更改尺寸，如轉子的【Number of Rotor Poles】等。雙擊所要更改的轉子尺寸值（紫色區），則可出現修改對話盒讓馬達設計者修改尺寸。如下圖。



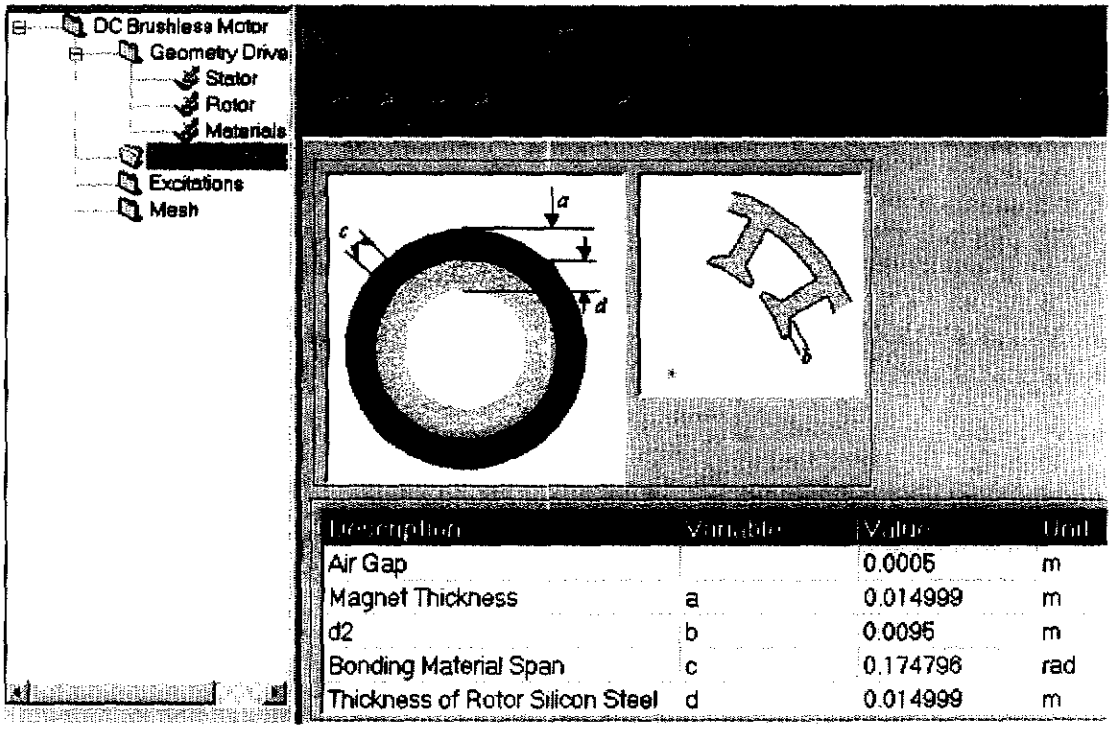
9.修改了馬達的幾何尺寸之後，可以更改馬達的材料特性。目前只提供線性模擬，所以材料的提供也只提供線性材料特性輸入。若要修改材料特性，可以選擇【Materials】節點，則出現如下圖的材料表單。若要修改材料質，可以點選粉紅色區。



10.有了馬達幾何圖，和材料特性表之後，可以選按如下圖紅色標記所示的計算機 button。此按鈕會計算出馬達幾何上的相依(dependent)尺寸。並在計算完後，顯現出【Dependent Parameters】,【Excitations】,【Mesh】三個節點。

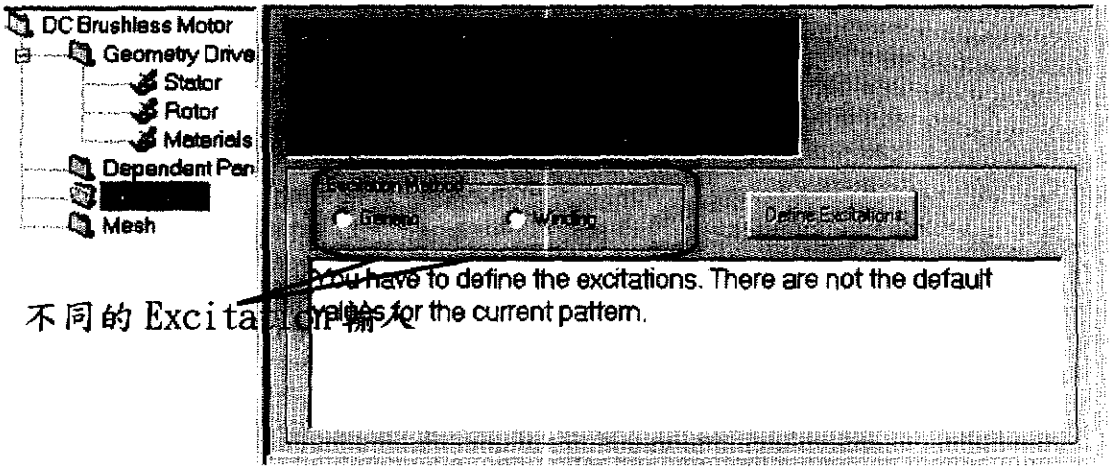


11.可以點選【Dependent Parameters】檢查馬達尺寸是否為設計者所期望之值。若不符可回到【Stator】或【Rotor】節點更改尺寸，在【Dependent Parameters】內無法更改馬達尺寸，因為其值非獨立參數（Independent）。

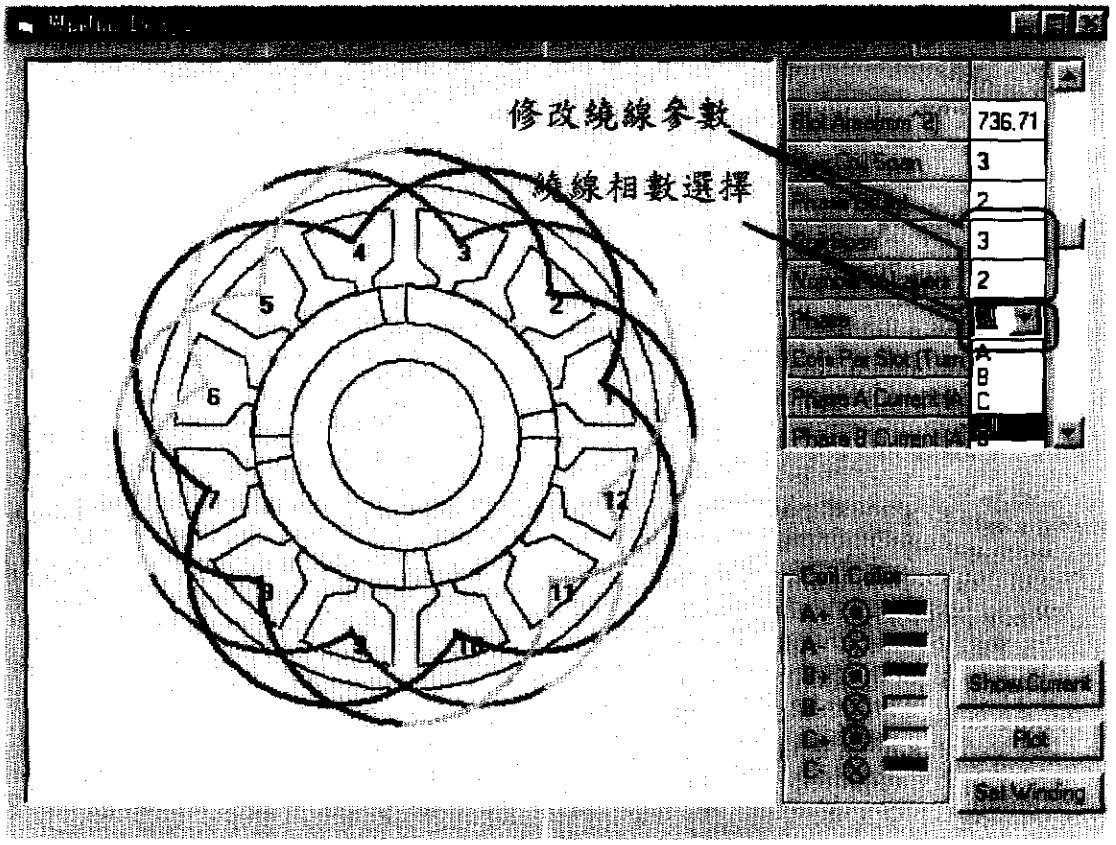


12.接著點選【Excitations】節點。此處可以設定電流得輸入值或更改馬達磁鐵強度。馬達電流值會影響扭力輸出。馬達電流分佈情形的輸

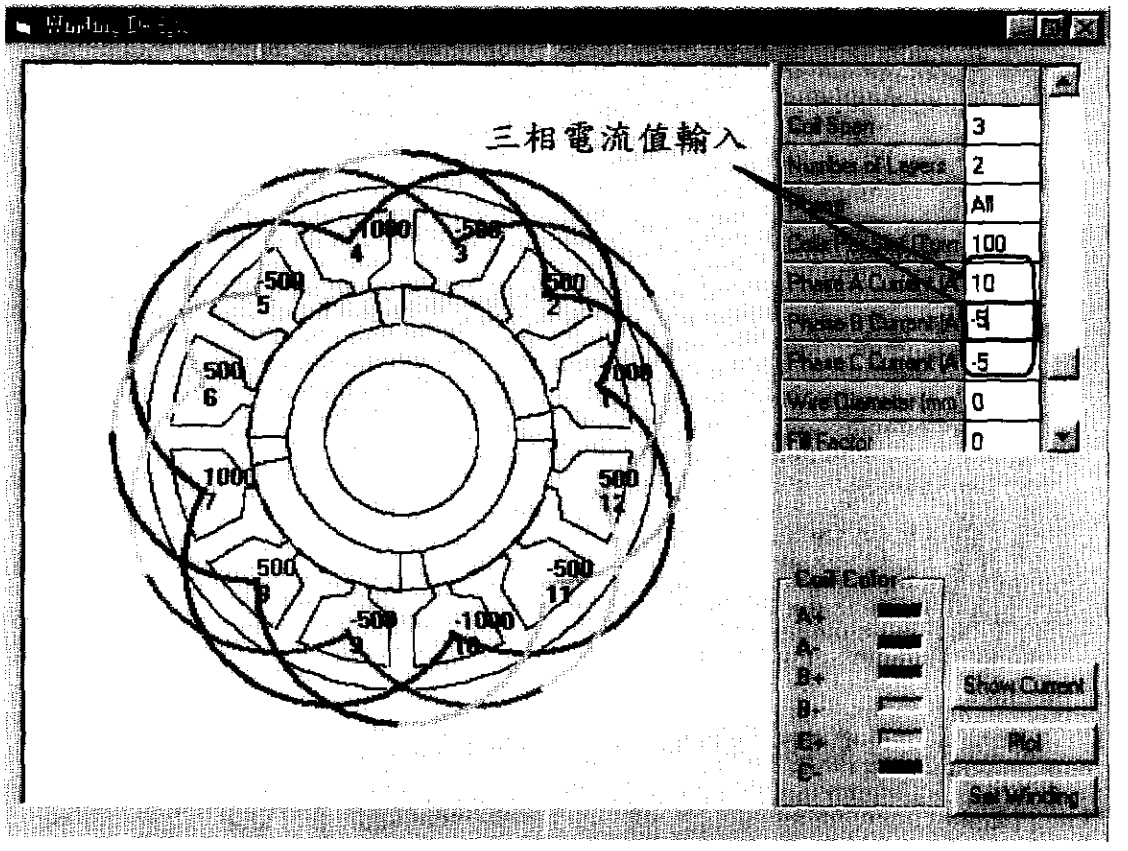
入可以分兩種方法。一為【Generic】，另一為【Winding】，可以視需要任選一種方法。如下圖所示。



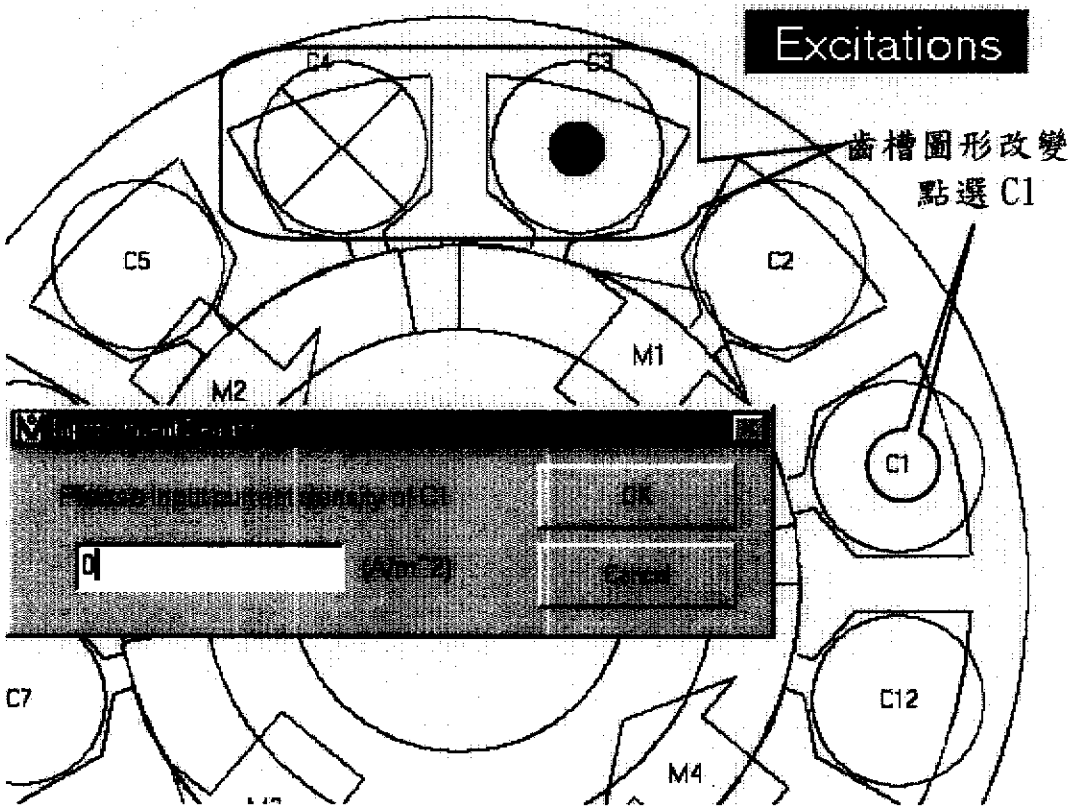
12-1(a).選擇【Winding】，再按下【Define Excitations】按鈕。此方法可以根據馬達的繞線方式來輸入馬達的電流分佈情形。目前馬達的繞線方式提供疊繞(lapping winding)。如下圖。馬達設計者可以輸入【Coil Span】，和【Number of Phase】來決定繞線方式。要輸入【Coil Span】或【Number of Phase】可以點選下圖紅色註記區。【Coil Span】的最大值不可超過【Max Coil Span】，如下圖顯示在此幾何下【Max Coil Span】可選擇 1,2,3。選擇完繞線參數後，可以按【Plot Button】，則可畫出繞線圖。畫繞線圖可以選擇只畫 A 相，B 相，C 相或三相皆畫（All），要選擇畫圖方式可以更改如紫色標註處的選項。

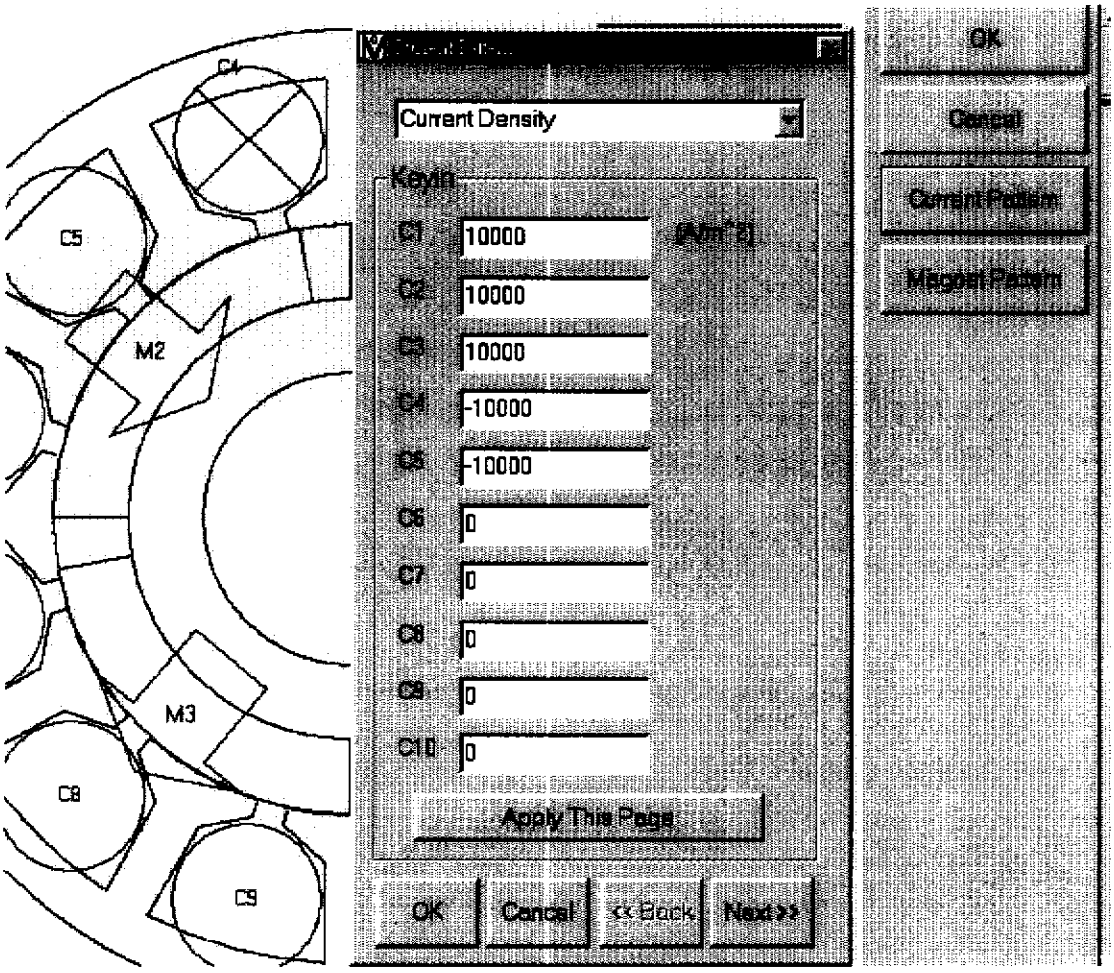


12-1(b).有了繞線方式，可以輸入各相的電流，三相電流其選項分別為【Phase A Current】,【Phase B Current】,【Phase C Current】。如紅色註記所示。 輸入之後，可以按【Show Current】按鈕。之後即可顯現出各齒槽的電流值分佈（非電流密度）。完成以上的設定可以按【Set Winding】按鈕，則完成電流 Excitation 設定。



12-2(a) 選擇【Generic】，再按下【Define Excitations】按鈕 。此方法可對每一個馬達的齒槽輸入馬達的電流密度分佈情形。如下圖所示。輸入電流密度的方法有二，1.點選各齒槽的電流值(如 c1，c2，c3…。)如紅色註記所示，並輸入電流密度值，輸入之後齒槽會根據輸入電流的正負而顯現出⊙或⊕。如紫色註記所示。如此可以對各個齒槽分別輸入電流密度。2.選按【Current Pattern】，則會出現電流輸入表單如下圖，輸入後按【OK】即可。

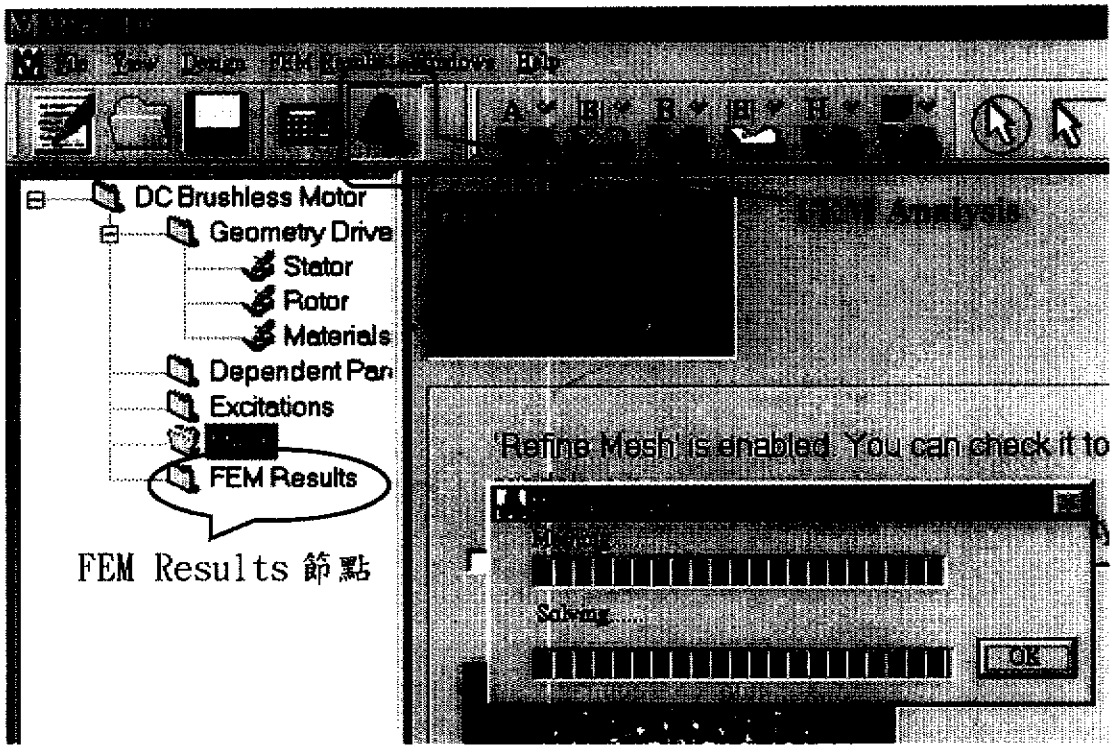

Excitations
齒槽圖形改變
點選 C1
C4
C3
C5
C2
M1
M2
C1
OK
Cancel
C7
C12
M4


C4
C5
M2
M3
C8
C9
Current Density
Keyin
C1 10000
C2 10000
C3 10000
C4 -10000
C5 -10000
C6 0
C7 0
C8 0
C9 0
C10 0
Apply This Page
OK
Cancel
<< Back
Next >>
OK
Cancel
Current Pattern
Magnet Pattern

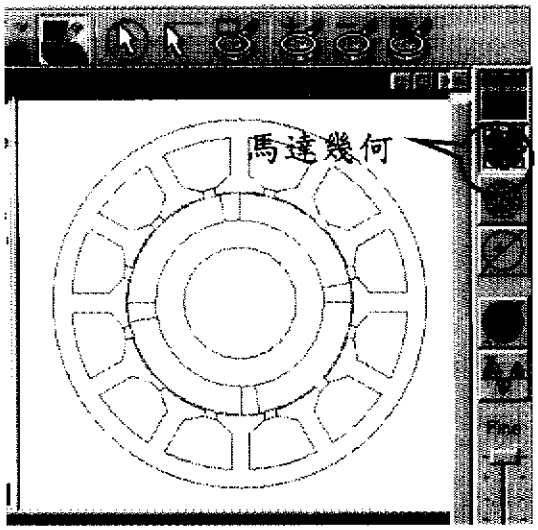
13.Mesh 節點目前未完成功能。

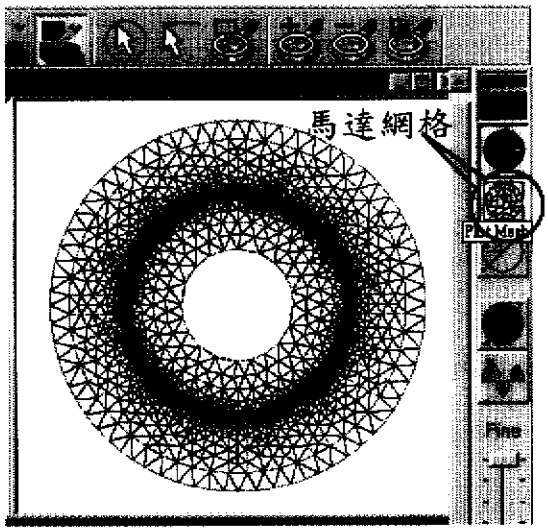
完成幾何、材料與 Excitations 之設定之後，則可做有限元素分析。

14.選按【FEM Analysis】按鈕，如下圖紅色註記所示。程式會自動做 Mesh 與 Solve。完成 Mesh 和 Solve 之後，按下 OK 按鈕，接著會在馬達設計樹多一個【FEM Results】，如紫色註記所示。至此完成所有模擬。接著可以看模擬結果。

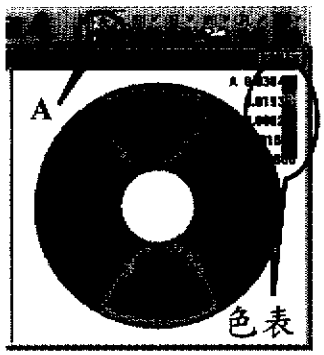


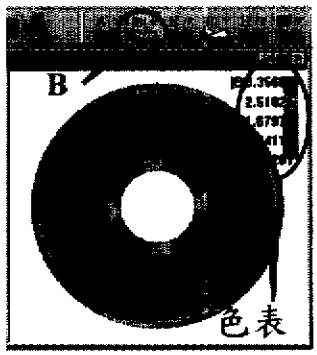
15.選按 FEM Results 則可觀看模擬的結果。選按紅色註記處，則可以顯示馬達幾何圖，與網格圖(Mesh)。如下圖。

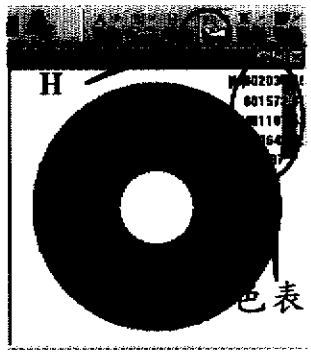


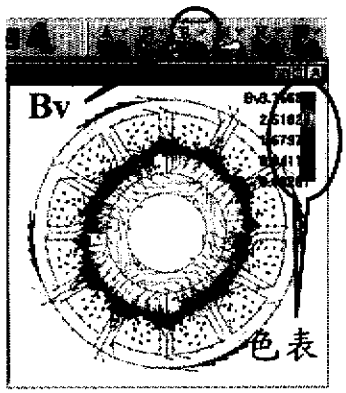


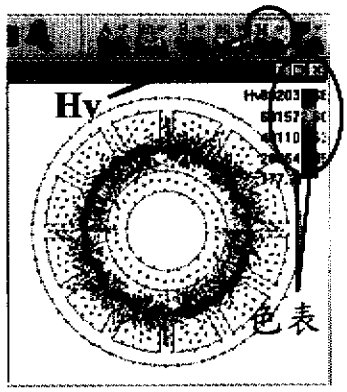
16.選按紅色註記處，則可以顯現磁位（A），磁通密度（B），磁場強度(H)，磁通向量（Bv），磁場強度向量(Hv)。分別如下圖所示。而於各圖的右上方還會出現色表與各個顏色相對的值。色表與其值顯示在紫色標註區。





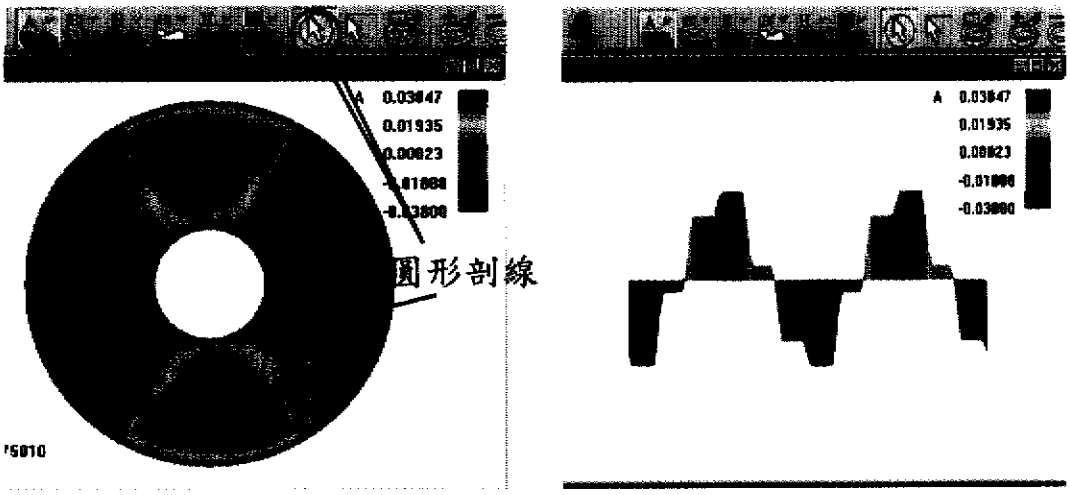




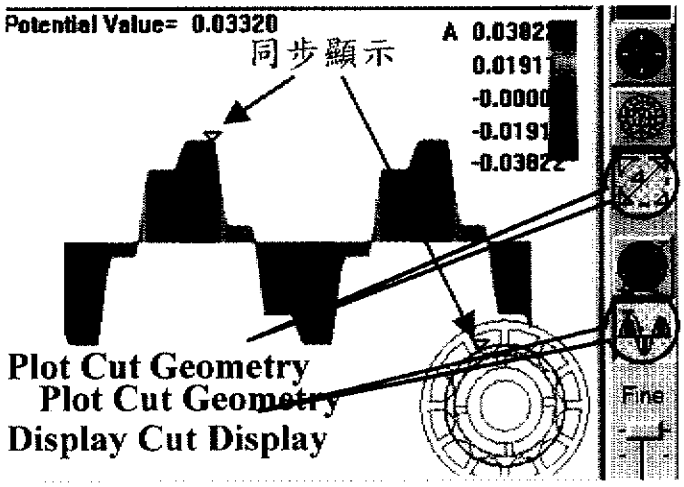


17.除了可以顯示馬達上的分佈值外，還可以對馬達做剖線，剖線可

以分為線形剖線與圓形剖線。圓形剖線的操作方法如下，首先按下圓形剖線的按鈕，接著用滑鼠控制圓形剖線的半徑，滑鼠移動剖線會跟著移動。當達到適合的半徑時，即可按下滑鼠左鍵。則會出現下右圖所示的圖形。



若欲清楚的看出各剖面位置相對的值，可以按下於紅色標記所指的【Plot Cut Geometry】按鈕，則可出現馬達幾何圖與剖線於右下圖。若再按下紫色標記所指的【Display Cut Value】，則可以同步顯示剖線上的值，與該值所在的位置。如下圖。



3 網格（Mesh）產生的技術

3.1 背景

有限元素法（FEM）是目前一些用來解決邊界值問題（BVP），重要的數值方法其中之一個。在運用有限元素法分析一個問題前，網格要先產生完成。2-D 的網格產生技術已被廣泛良好地研究且有處理複雜區域的軟體。

基本上，現有全部的有限元素網格產生技術分成七大類：平滑網格（Mesh Smoothing），映射元素（Mapped Element），保形映射（Conformal Mapping），拓撲分解（Topology Decomposition），節點連結（Node Connection），網格基礎（Grid-Based），和幾何分解（Geometry Decomposition）等方法[1]。在這七大類之中的後面四類有著全自動的演算法，這四類也是本節的重點。

【拓撲分解】的方法不能保證產生有品質的網格，所以，結合其他網格的改進和平滑化的演算法是必要的。【網格基礎】的方法能產生相當好的內部元素，但需要結合其他的方法以產生邊界元素。在【節點連結】的方法中，首先，節點以一般的間隔加在物體的邊界上，然後再產生內部的節點以滿足網格密度的需求，最後所有的節點連接起來以形成元素。【幾何分解】的方法是同時產生節點和元素，這一點和【節點連結】有一些不同；【幾何分解】先把原本的物體分爲凸面的部分，然後再把節點插入以滿足網格密度的分散[2]。

3.2 網格（Mesh）產生的特徵

我們採用【幾何分解】當作我們的演算法，而它主要的網格產生特徵爲：

- 在一般的區域產生 2-D 未結構化、Delaunay 的三角剖分
- 在區域中處理洞
- 處理由一種以上的材料所組成的區域
- 接受線和弧的片段
- 實行節點、元素和邊的的再計算，以減少 sparse matrix equations 的頻寬
- 內建有釋放格線的函式，以避免被圍繞超過七個和低於五個元素的節點產生。這個特徵結合了一個高品質的格線技術：Laplacian smoothing
- 實行 Laplacian smoothing
- 使用很簡單的 ASCII 檔案當作輸入
- 產生有著數值分析者所需要的全部資料的三種輸出檔案

3.3 網格產生的結構

3.3.1 網格資料成員的階層關係

在網格產生中的資料成員階層關係如 Fig. 2.1 所示：區域（Regions）由鏈所構成，鏈（Chains）由片段所構成，片段（Segments）由節點（Node）所構成。

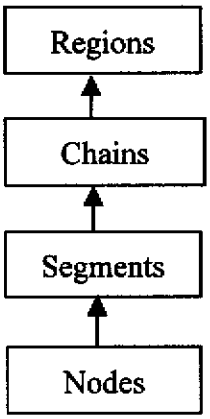


Figure 2.1 網格資料成員的階層關係

3.3.2 與網格產生器的傳遞

我們可以藉由 ASCII 檔案與網格產生器作溝通，輸入檔案的格式如 Table 2.1 所示：

Table 2.1 Input File Format

First line:	<number of nodes>
Following lines:	<node id> <x> <y> <triangle side> <boundary marker>
Next line:	<number of segments>
Following lines:	<segment id> <start point id> <end point id> <segment radius> <boundary marker>

註解以一個 # 字元開始和結束，且可插在輸入檔案的任何一個地方。輸入檔案要有一個副檔名爲 .d。

因爲階層的關係，所以我們以逆向的順序來解釋。首先，我們先解釋節點。表示一個節點(Node)需要五個資料包含有：<node id>，<x>，<y>，<triangle side>，和<boundary marker>。<node id> 是節點的 ID，<x>是節點的 X 座標，<y> 是節點的 Y 座標，<triangle side>表示在最後三角剖分含有節點的三角邊所要的長度，<boundary marker> 是一個標籤用來辨識那一些點和片段和邊界條件有關。

<triangle side>的值愈小，點周圍的網格就愈細。高度建議所有節點的這個值爲非零，否則網格產生器可能會掉進無窮迴圈。

表示一個邊(Edge)需要五個資料包含有：< segment id>, <start point id>, <end point id>, <segment radius>, 和<boundary marker>。<segment id> 是線段的 ID，<start point id>和<end point id> 分別紀錄起始點和終止點的 ID，<segment radius>表示線段的半徑。網格產生器能接受兩種線段爲直線和弧線。若線段是直線，那麼<segment radius>就設爲零。若線段是弧線，那麼線段的角度就少於 180^{o} 。若你有一個弧線大於 180^{o} 或者是一個圓，你可以把它們分成兩個弧線。<segment radius> 可以是正值或負值，演算法如 Figure 2.2 所示。若區域爲起始點和終止點構成，且線段的中心是正值，則線段半徑是正值，否則線段半徑是負值。

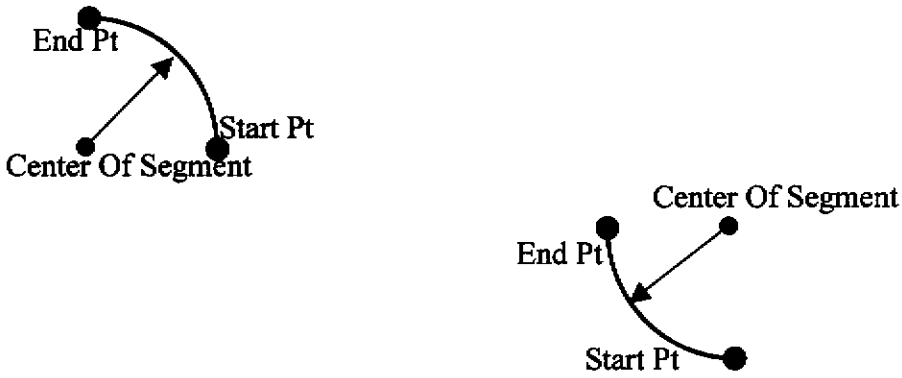


Figure 2.2 弧線的表示演算法的定義

鏈是由線段所構成。若最後一個線段終止點的 ID 等於此線段起始點的 ID，則這些線段屬於同一個鏈。我們可以循著線段直到終止點的 ID 會合起始線段的起始點 ID，則鏈會是封閉的。我們也可以有開放的鏈，且它們可以用來辨別鏈附近的網格密度。藉由這個方法，我們可以建構所有的線段到鏈。

封閉鏈的旋轉定義了網格產生的區域。若封閉鏈的旋轉是逆時針，則被鏈所包圍的區域是存在的且需要產生網格。否則區域爲不存在的且不需要產生網格。分辨旋轉的方向有一個簡單的方法。我們可以選擇積分由特定的鏈的每一邊的起始點到終止點所構成的區域中的任何一點。若所有的區域是正的就是實際存在的區域，否則是不存在的，如 Fig. 2.3 所示。

在圖中的網格區域介於兩個長方形之間。我們表示外面的長方形以逆時針的線段順序，而裡面的長方形以順時針的線段順序。外面長方形的所有區域是正的，而裡面長方形的區域是負的，如 Eq 2.1, Eq 2.2 所示。我可以知道這個區域是在這兩個長方形之間。

$$area(o12) + area(o23) + area(o34) + area(o41) = area(1234) > 0 \qquad (2.1)$$

$$area(o56) + area(o67) + area(o78) + area(o85) = -area(5876) < 0 \qquad (2.2)$$

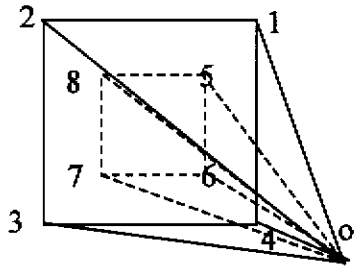


Figure 2.3 存在和不存在的區域

輸出的檔案包含有三種： node file、element file、和 side file。這三種檔案的副檔名，如 Table 2.2 所示：

Table 2.2 網格產生器的輸出檔的副檔名

node file	.coordsf
element file	.egraphf
side file	.s

這些副檔名會加在輸入檔的檔名。若你的輸入檔爲 NAME.d ，則下列的檔案會在網格產生之後建立起來：

- Node file (NAME.coordsf) 有如 Table 2.3 所示的格式。
- Element file (NAME.egraphf) 有如 Table 2.4 所示的格式。
- Side file (NAME.s) 有如 Table 2.5 所示的格式。

Table 2.3 Node file 的格式

first line	<number of nodes>
following lines	<x> <y> <boundary marker>

Table 2.4 Element file 的格式

first line	<number of elements> <number of nodes>
following lines	<node i> <node j> <node k> <region marker>

Table 2.5 Side file 的格式

first line	<number of sides>
following lines	<side number:> <node c> <node d> <boundary marker>

<node i>、<node j>、<node k> 是屬於 element 的 nodes，<region marker> 是 element 的標識，<node c>、<node d>是 side 的起始和終止點，<boundary marker> 用來分別是否爲 boundary side 。

3.4 三角網格產生的演算法 [3]

3.4.1 結構性（Structured）vs. 非結構性（Unstructured）

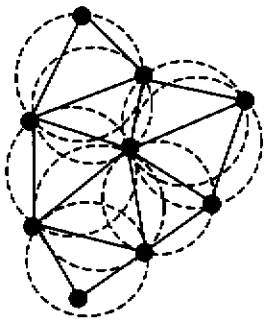
本章專注在非結構性的網格產生技術。嚴格的來說，一個結構性的網格可以藉由有著相同數目鄰近的 elements 所有的 interior nodes 來辨認。另一方面，非結構性的網格產生釋放了 node valence 的需求，並允許在單一個 node 有任意數目的 elements。三角形網格是一般最常用來當作非結構性網格的產生。

3.4.2 Delaunay 三角網格

迄今最普遍的三角網格產生技術是使用 Delaunay criterion [4]。The Delaunay criterion 有時候簡單的以"empty sphere" property 來陳述：任何節點不能在三角網格的外切圓內，如 Figure 2.4 所示。一個外切圓可被定義爲通過三角網格的三個頂點的圓。因爲在圖中的三角網格的外切圓不含其他三角網格的節點，所以 the empty circle property 會被保持。因爲 Delaunay 三角剖分獨一無二的幾何性質，所以它的網格產生總是唯一的。

Figure 2.4 Delaunay criterion mesh

The Delaunay criterion 本身並不是一個產生網格的演算法。它只提供了連結



到區域內的點的規範。正因爲如此，它需要提供一個方法以產生在幾何內的節點位置。一個典型的方法是首先，產生幾何形狀的邊界網格以提供初步的節點集

合。然後邊界節點根據 Delaunay criterion 產生三角剖分。節點就一個一個增量地插入網格中，當每一個新的節點插入時，重新定義區域的三角網格以維持 Delaunay criterion。這是一個方法用來定義內部節點的位置以分別 Delaunay 演算法與其他的演算法。

3.4.3 點的插入

最簡單的點插入方法是：從一般轉換特定節點密度的區域的網格點定義節點。爲了提供變換 element 的尺寸的方法，可以定義一個使用者定義的尺寸變換函式，且節點插入直到尺寸變換函式滿足。另一個方法是使節點遞迴地插入三角形新之中[5]。還有一個方法是定義 element 圓周中心的新節點 [6, 7。當遵照一個特定的插入順序，這個技術常被當作是 "Guaranteed Quality"當三角網格以一個最低限度的任意角度產生時 。類似圓周點插入的方法，Voronoi-segment 點插入方法在 Rebay[8]中有介紹。一個 Voronoi 線段可以當作是由兩個相鄰的三角四面體的圓周中心構成的直線線段。新的節點沿著 Voronoi 線段插入以滿足最佳的區域尺寸規範。這個方法傾向在每一個內部的節點以六個三角網格產生非常結構性的網格。另一個方法在 Marcum[9]中有介紹，它是一進階的節點插入方法。節點增量地插入，但是由邊界向內部插入。每一個面都要檢查以決定在已存在的 Delaunay 網格內部的第四個新節點的最佳位置。節點插入後與周邊做新的連結。這個方法傾向對網格產生有非常結構性的邊界良好排列的 elements 。INRIA[10] 用一個直觀的方法來沿著邊插入點。一個候補的頂點集合以特定的間隔比率沿著已存在的內部三角剖分邊排列產生。節點增量地插入，捨棄太靠近已存在的相鄰節點 。這個過程遞迴地重複直到背景的尺寸變換函式滿足。

3.5 網格的後端處理器

網格產生的演算法很少能沒有後端處理的形式能定義出最佳的網格以改善整個 elements 的品質。兩種主要的網格改善方法爲：smoothing and clean-up。Smoothing 包括任何當維持的連結性調整節點位置的方法。Clean-up 一般是指任何能改變 element 連結性的過程。

3.5.1 Smoothing

大多數的 smoothing 過程包含一些使個別節點復位的重複過程以改善區域的 elements 品質。一些多樣的 smoothing 技術已被提出。這些方法一般分類如下：

- Averaging methods
- Optimization-based methods

◆ Physically-based methods

3.5.1.1 Averaging Methods

在多樣的 smoothing 演算法之中，最簡單且直觀的就是 Laplacian smoothing [11] 。這個方法會在網格內部的任意節點平均位置放置節點由邊來連結。若做一點修正這個技術可以適用任意的 element 形狀。大多數 smoothing 的過程會在網格的內部節點重複幾次直到任何個別節點還未移動超過一特定公差。雖然它有一些問題，但實行起來較簡單且現在被廣泛的使用中。其他有多樣的類似 Laplacian 的 smoothing 技術，重複的節點復位是根據週邊的 nodes 和 elements 的幾何性質的加權平均。Canann [12] 提供了一個現被廣泛使用中的方法綜覽。Averaging methods 常給節點的移動一些限制的形式 。例如，因爲若單獨使用 Laplacian smoothing 有時候會傾向於反置或降低區域 element 的品質 ，唯若品質改善後，區域節點的品質在節點移動前和移動後做比較。這個通常當作限制的 Laplacian smoothing。Canann 在這個方法中提出了節點移動的規範 p。

3.5.1.2 Optimization-Based Methods

一些程式碼使用了最佳化的技術以改善 element 品質，而不靠探索式的 averaging methods 。Optimization-based smoothing 技術量測了週邊 elements 到 node 的品質，且嘗試藉由計算區域 element 品質的梯度相對於節點位置來最佳化。節點以梯度漸增方向移動直到到達最大限度。Canann and Freitag[13] 兩人提出 optimization-based smoothing 演算法。

當維持 optimization-based smoothing 技術時，提供了良好的網格品質，在標準的練習中，計算的時間一般很長。Canann and Freitag 兩人建議一個複合的 Laplacian/optimzation-based 分法。一般大多時間被擁護，只有當區域 element shape 矩陣低於某一個門檻才回復 optimization based smoothing 。

3.5.1.3 Physically-Based Methods

另一個重要的網格改善方法包含有根據模擬 Physically-Based 吸引或排斥力的節點復位。Lohner[14]模擬了鄰近節點間的力量，就像是一組彈簧的系統的互動 。Shimada [15] and Bossen[16] 把節點看做是復位後獲得平衡的汽球的中心。藉著改變分子間力量的大小和方向，可以達到不一樣的各向異性特徵和 element 的尺寸。

3.5.2 Clean－up

就像 smoothing，現今有多樣的方法藉由改變區域 element 的連結性，可使用來改善網格的品質。Cleanup methods 一般應用一些規範必須滿足區域的操作 。這規範一般可定義爲：1) shape improvement or 2) topological improvement。

除此之外，cleanup operations 一般不會單獨做，而是跟 smoothing 一起做。Freitag [17]描述如何有效率的結合 smoothing and cleanup 以改善整體的 element 品質。

3.5.3 Shape Improvement

對三角網格而言，簡單的對角交換常被實行。對每一個三角剖分內部的邊，可以檢查在什麼位置，邊會有效率的改善兩個相鄰三角網格整體的或使 shape metric 最小。The Delaunay criteria 也可用來決定邊的位置。它包含了交換兩個相鄰分享同一個邊的內部 elements。

在一些支援混合 element meshes 的應用程式中，通常使用兩個相鄰三角網格 element 的品質，而不使用較差的單一四邊形品質。如果是這樣的情形，所選擇的四邊形會被分開。

3.5.4 Topological Improvement

一個常用來改善網格的方法是嘗試使共享單一節點的邊的數目最佳化。這個方法有些時候當作是 node valence or degrade。這麼做是假設區域 element shapes 可以改善。對一個三角網格而言，它在一個節點有六個邊是最佳化的。不論何時總會有一個節點沒有理想的 valence，節點周圍 elements 的品質也不是最佳化的。對 elements 實行區域的轉換能改善 topology 和 element quality。一些方法已被提出來改善三角網格（triangle）[18]的 node valence 。

3.6 Refinement

Element refinement 的過程有很多種。以我們的目的而言，refinement 定義爲能有效率地降低區域 element 尺寸的操作方法。尺寸的減少是爲了擷取一些物理的現象，或是說它簡單地用來改善區域 element 的品質。一些 refinement 方法本身當作是網格產生的演算法。以大略的網格產生開始，一個 refinement 過程可以使用直到所要的節點密度達到。Refinement 演算法經常用來當作適應性解決過程的一部份，先前的結果可以提供 mesh refinement 一個準則。

3.6.1 Triangle Refinement

雖然有很多的方法定義出來，但兩個 triangle refinement 主要的方法包含：

- Edge bisection
- Point insertion

3.6.2 Edge Bisection

邊的對切包含了分開三角剖分個別的邊。因此，兩個相鄰三角網格的邊被分爲兩個。Rivara[19] 提出了根據三角網格的最長邊來分開邊的規範。

3.6.3 （點的插入）Point Insertion

有一個簡單的方法把元素變得更精細：插入一個單一的 node 到已存在元素的形心位置，可以把此三角形元素切割成三個，如 Fig. 2.5 所示。這個方法一般無法提供品質較好的元素，特別是在對某個問題作了幾次分析之後。若針對此問題要提高效率，可以使用 Delaunay approach，但會刪除掉原來 local 的元素而把新加入的 node 依照 Delaunay criterion 與其他元素的 node 相接。之前討論過的任何一種 Delaunay 插入點的方法都可以有效地把元素變得更精細。.

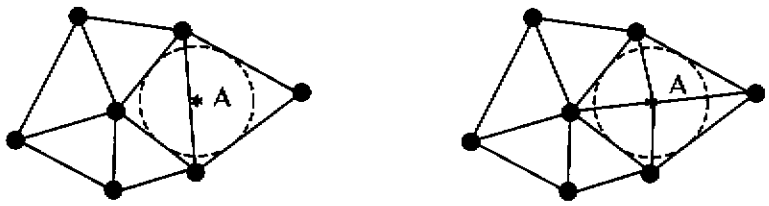


Figure 2.5 Example of Delaunay refinement, where point A is inserted

以上只簡短地介紹了在非結構性網格（unstructured mesh generation）產生時會遇到的主要問題與會使用到的演算法。有很多更重要的觀點我們並沒有提到。由於時間及空間有限，所以並不打算在這個課題作太深入的探討。然而把重心放在一些比較基礎的演算法及程序是我們主要的目的。通常在研究發展軟體時，我們很容易忘了去看看別人之前走過的路，或是看看是否手邊已經有可用的工具。因此

提供創新技術最有效率的方式是在之前所建立的基礎上作開發。我們必須承認在這領域中其他人的原創性，而且試著去改進它。

3.7 Renumber

重新編號（renumbering）是用來改變 node 與 element 在有限元素模型中的號碼。對 nodes 與 elements 重新編號可以使得各元素的辨識更容易，去除編號時造成的跳號問題，增進大型矩陣分解運算的效率。Nodes 的編號順序並不影響分析的結果，但會影響執行時間與記憶體的儲存。較常用的方法有下列三種：

- The sequential renumbering
- The bandwidth renumbering
- The wavefront renumbering

3.7.1 Sequential Renumbering Method

The sequential renumbering method 是最簡單的方法。把 nodes 和 elements 按照順序重新編號最主要目的是使其更容易辨識。Sequential renumbering 也可以用來處理在之前編號時有產生的跳號問題。

3.7.2 Bandwidth Node Renumbering

The bandwidth and wavefront renumbering 可以利用在分析中以提高分解大型矩陣的效率。can be used to improve the efficiency of the global matrix decomposition process performed during an analysis.
Total Bandwidth 的定義爲

$$Bandwith = Max(b_i)\Big|_{i=0,n} \tag{2.3}$$

其中 b_i 爲第 i 列的 bandwidth, bandwidth 指的是從該列對角線元素（包含）那一行開始到該列最遠的非零元素的那一行爲止總共的列數；n 爲矩陣方程式的數目。

可以使用 Bandwidth Node renumbering method 增進在分析中分解大型矩陣的效率。Bandwidth Node renumbering method 是用來最佳化 nodes 必須指定的階數，使得在分析模型時，分解大型矩陣集合的操作步驟數目達到最小。有許多有限元素分析套裝軟體使用一種技術分解大型矩陣集合，(剛性、質量、傳導性等...)，其計算效率直接與連接數，頻寬，相關。因此爲增進效率並節省時間，頻寬必須作最小化。

矩陣運算中，實際上用來運算的矩陣元素的數目稱爲 profile. The profile is the number of terms that are under the skyline of the matrix. 經由觀察，我們可得知

profile 爲所有 bandwidth 的和：

$$\Pr ofile = \sum_{n} bi \tag{2.4}$$

現在有限元素分析程式，大部分的矩陣分解運算都使用 profile 來運算，較少使用 bandwidth 作運算。

3.7.3 Wavefront Element Renumbering

波前元素的 renumbering 方法與 bandwidth 的 node renumbering 方法相似，都是爲了要減少在分析中分解整個矩陣集合所需操作的次數。Both are used to minimize the number of operations needed to decompose the assembled global matrices during an analysis.目前有幾個有限元素分析套裝軟體使用一種技術分解大型矩陣集合，這個方式可以不用在開始分解步驟前先把分析矩陣整個組合起來。There are several finite element commercial software which use a technique to decompose the large global matrices that eliminates the need to completely assemble the entire matrix before starting the decomposition procedure.爲方便說明起見，我們以 figure 2.6. 爲例。Figure 2.6(b) 顯示與 figure 2.6(a) 相同的 mesh 情形，但使用了 wavefront renumbering method 重新編號。此外，我們比較 figure 2.7 中的 fill-in 矩陣，發現 figure 2.7(b) 的 profile 較 figure 2.7(a) 來得小。在 Fig. 2.7 中，符號 "o" 表示該矩陣元素有被填入，符號 "x" 表示該矩陣元素沒有被填入；未用符號表示的元素亦表示沒有被填入。

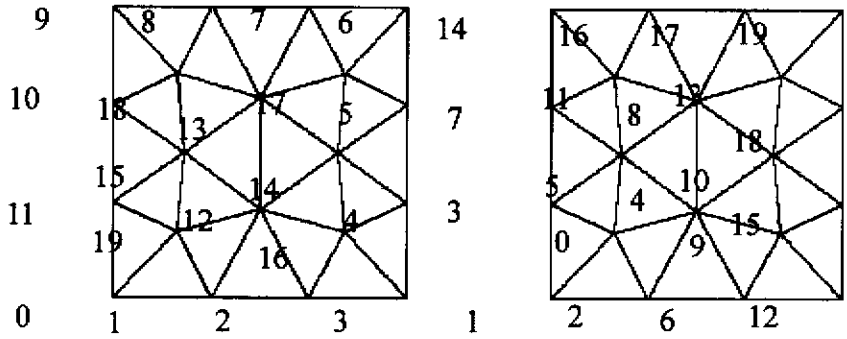
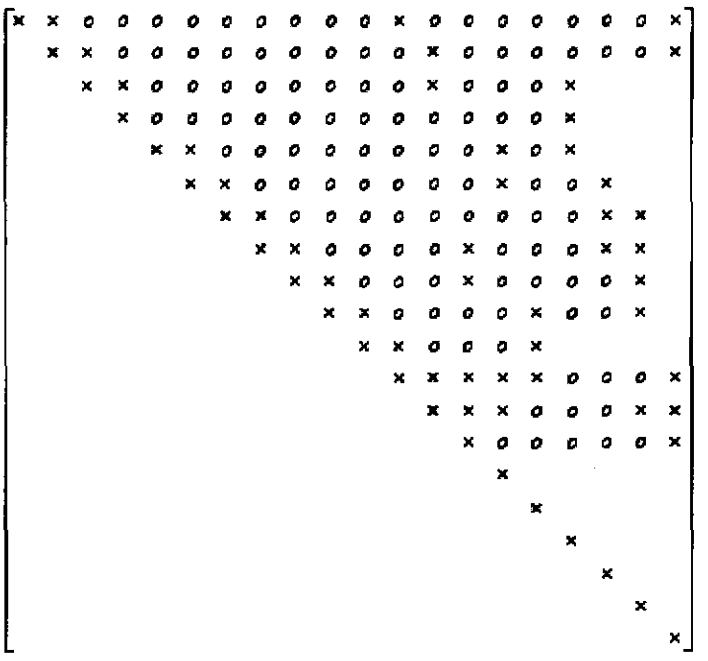
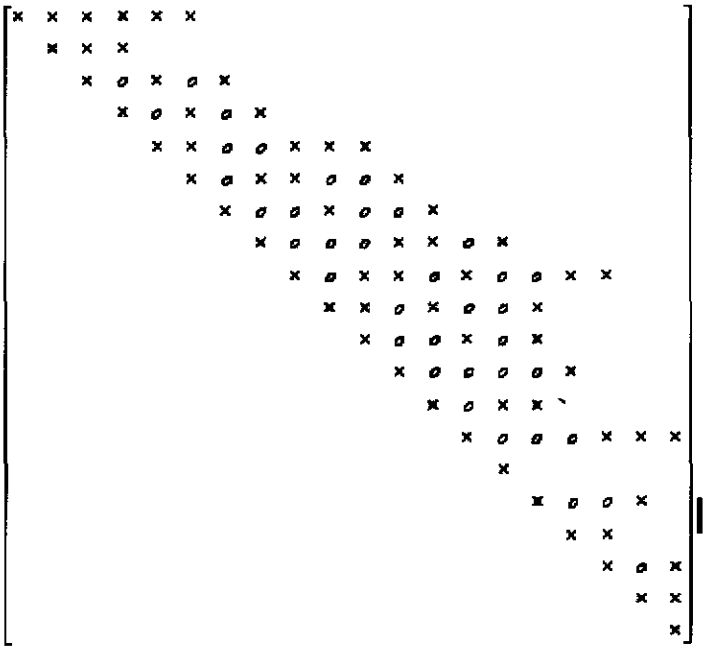


Figure 2.6 (a) the initial mesh number (b) the mesh after renumbering



(a)



(b)

Figure 2.7 (a) The fill-in matrix of initial mesh (b) The fill-in matrix of mesh after renumbering

3.8 Moving Band 技術

重新 mesh 一個 model 會花費很長的時間，而採用 "moving band" 技術可以改善[20, 21]. "Moving band" 所指的是一層氣隙元素。這層元素的其中一側屬

於轉動部分（轉子），另一側是屬於不動的部分（定子）。當轉子轉動時，我們只依照 Eq.(2.5) 轉動轉子的 nodes 而 "moving band" 部分的元素形狀則會如 figure 2.8(b)所示地改變。如果元素形狀嚴重扭曲變形，我們必須重新安排 figure 2.8(c) 中 "moving band" 相接部分的元素。在 figure 2.8(d) 和 figure 2.8(e) 中，我們把圖放大後發現相接部分的元素改變了。如：([1,4,2], [2,4,5], [2,5,3], [3,5,6]) 到([1,4,5], [1,5,2], [2,5,6], [2,6,3]). 使用這種方法，我們只需 mesh 一次。而且轉子 nodes 的轉動及重新安排 "moving band" 中的相接部分都只需花費極短的時間。

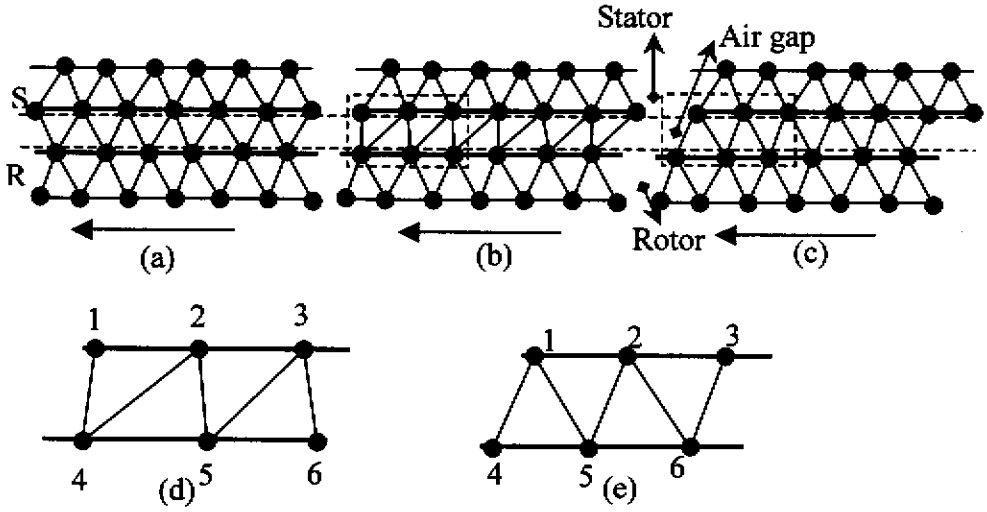


Figure 2.8 Moving Band 技術

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

接下來我們針對「Moving Band」方法作更詳細的說明。如果我們要使用「Moving Band」方法，首先必須確定在「Moving Band」layer 中的元素要幾乎都爲相同大小。因爲 mesher 在產生元素時是根據最小幾何及馬達中氣隙間隔長度的最小幾何，所以產生的氣隙區域元素大小會相似。如非這種情況，亦可產生

一個近似於元素大小的薄層來操作。接著我們必須把 mesh elements 的 nodes 區分爲三類。第一類爲 stationary group，第二類爲 moving band group，第三類爲 moving group.這三類相對應的區域顯示在 Fig. 2.9. 第一類 Stationary group 包含的是定子中的 nodes. 第二類 Moving band group 包含的是氣隙中的 nodes. 第三類 Moving group 包含的是轉子中的 nodes. 第一類的 nodes 和元素始終保持不變。第三類中，nodes 的座標系會依照 Eq.(2.5) 旋轉，而元素相接的部分亦保持不變。第二類則是由其他兩類所組成。靠近虛線 "S" 的 nodes 爲 stationary, 靠近虛線 "R" 的部分則會依照 Eq.(1)旋轉。我們把靠近虛線 "S" 的 nodes 稱爲 "S nodes", 靠近虛線 "R" 的部分稱爲 "R nodes". 第三類中，相接部分的元素會隨著轉動的角度而改變。Reconnection 的演算法說明如下。首先，必須先把 "S nodes" 和 "R nodes" 的角度 sorting 出來。爲了加快 sorting 速度，我們採用了 Shell sorting 演算法。第二，如果把轉子轉動 θ 角，也必須把 "R nodes" 轉動 θ 角。第三，比較 θ 與 "R nodes" 的角度，並找出最接近 θ 角的 node identity k. 最後，我們同樣採用 shifting "R nodes" identities by k 的方式，調整第三類中相接部分的元素。我們只需照著這些步驟旋轉馬達模型，而不需要每次旋轉都做 mesh 的動作。圖解步驟如 figure 2.10.所示。

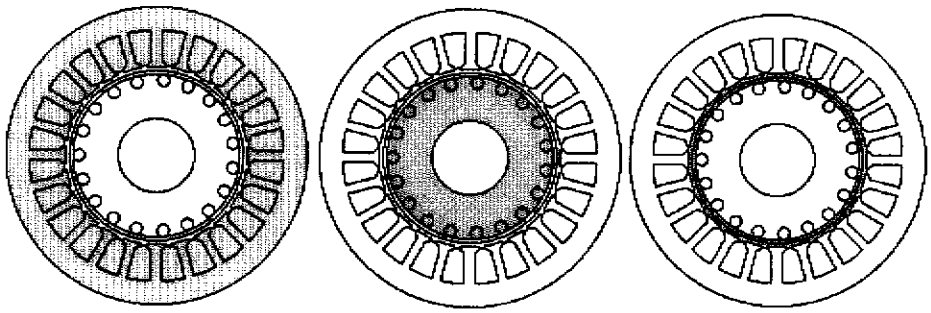


Figure 2.9 (a)Stationary region (b)Moving region (c)"Moving Band" region in electrical machines.

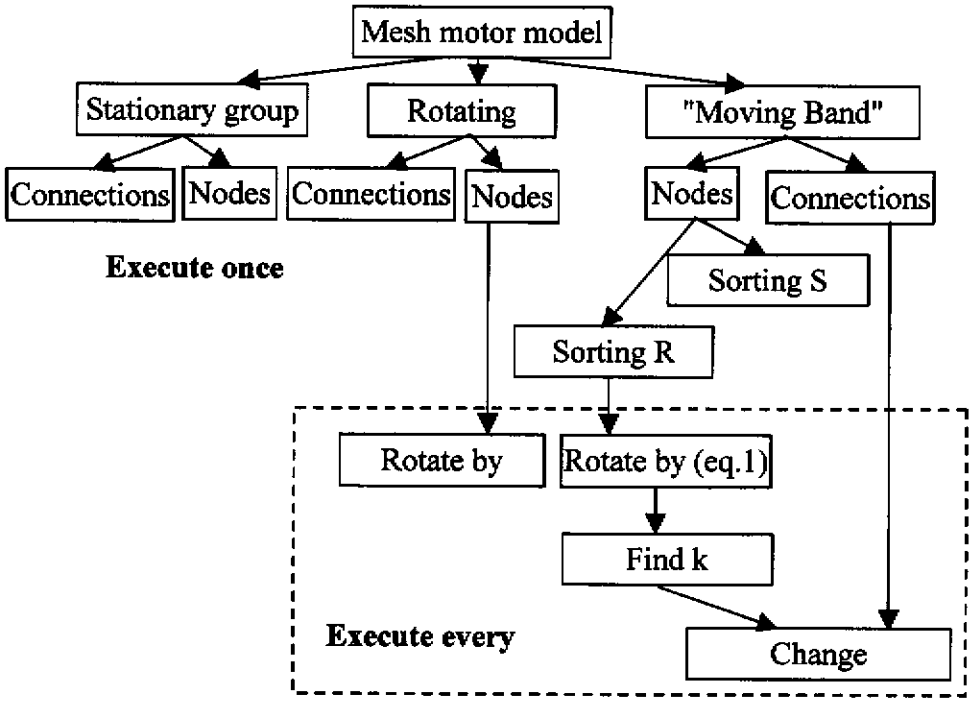
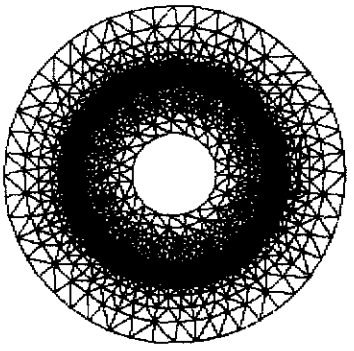
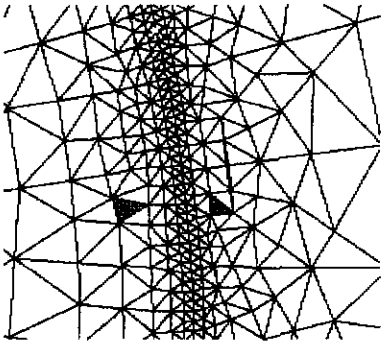


Figure 2.10 "Moving Band" 演算法

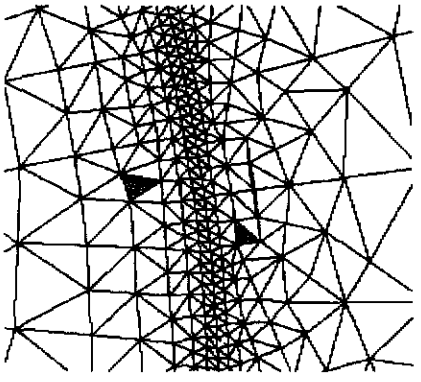
一般來說，如果三角形元素的任一個角都大於五度，其有限元素分析的結果幾乎是相同的。在使用了「Moving Band」的技術之後，可以得到三角形元素每個角的角度皆大於 5 度。在這篇論文當中，我們可以檢查在每次做完 rotation 後，「Moving Band」layer 中每個元素的任何一個角的角度，得到的最小一個角大約是 11 度。此結果遠大於 5 度，所以用此法分析，其精確度應是可接受的。馬達原型的 mesh 結果列於 Fig.2.11(a). 局部放大此圖，使得氣隙部分的 mesh 元素更明顯一點。Fig.2.11(b)顯示出 Fig.2.11(a)方框部分的放大結果。在 Fig. 2.11(c)~2.11(g)顯示 meshes 在使用「Moving Band」技術後轉動 2、4、6、8 及 10 度之結果。Fig.2.11(b)~2.11(g)中的兩個著色部分指出馬達定子跟轉子的相對位置。亮色部分的元素位於氣隙的區域。因爲定子區域的元素是靜止的，所以此部份的元素形狀維持不變。轉子區域的元素由於只做轉動，其形狀亦維持不變。而氣隙區域元素的形狀則會因爲轉動而改變。由 Fig. 2.11(b)~2.11(g)，我們可以看到使用「Moving Band」技術並不會造成氣隙區域部分三角形元素產生小角度。因此我們可以使用這項技術針對原來的 mesh 經過轉動後的情況作分析。



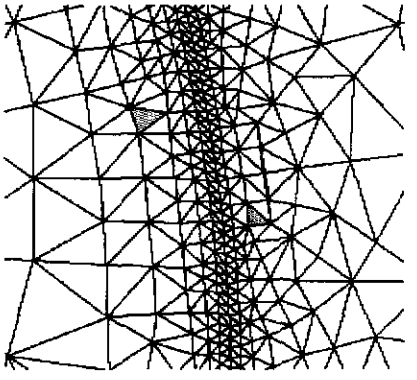
(a)



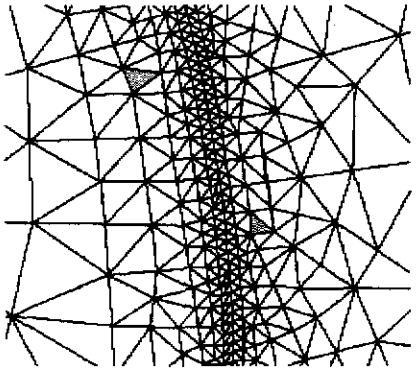
(b)



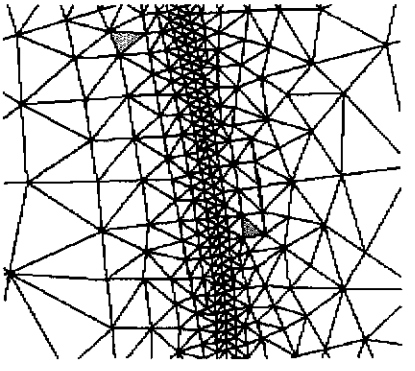
(c)



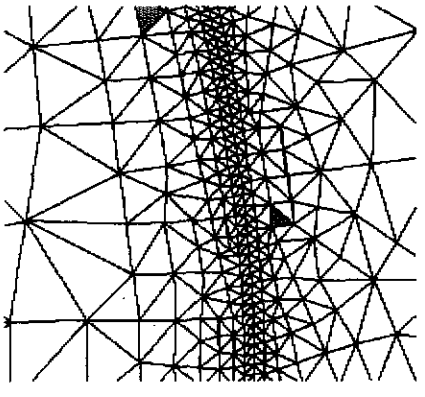
(d)



(e)



(f)



(g)

Figure 2.11(a) 馬達原型的 mesh 結果 (b) 初始的 mesh 情況 (c) 轉動 2 度後的 mesh (d) 轉動 4 度後的 mesh (e) 轉動 6 度後的 mesh (f) 轉動 8 度後的 mesh (g) 轉動 10 度後的 mesh

4 電磁有限元素分析

4.1 Maxwell Equation

Maxwell equation 可表示成

$$\nabla \times \hat{H} = \hat{J}_s \tag{3.1}$$

其中 $\hat{H}$ 爲磁場強度向量，$\hat{J}_s$爲電流密度向量

定義 flux potential 爲

$$\nabla \times \hat{A} = \hat{B} \tag{3.2}$$

其中 $\hat{A}$ 爲 flux potential，$\hat{B}$ 爲磁通量密度

爲了方便解釋起見，我們把「變量」跟「定量」分開討論如下：

4.1.1變量

先討論變量。磁通量密度 $\hat{B}$ 跟磁場強度 $\hat{H}$ 間的關係如下

$$\hat{H} = \nu \hat{B} \tag{3.3}$$

其中 ν 爲 magnetic reluctivity，爲導磁性 μ 的倒數
重寫 Maxwell equation 如下

$$\nabla \times \nabla \nu \times \hat{A} = \hat{J}_s \tag{3.4}$$

理論上，電流密度 J_s 包含三部份：一是來自電壓源，一是來自因磁通量變化所造成的電場，另一個是由於運動所產生的或說是因有速度而產生的電壓。因此，電流密度可表示爲

$$\hat{J}_s = \sigma \frac{\hat{V}_b}{l} - \sigma \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \sigma \hat{u} \times \hat{B} \tag{3.5}$$

其中 σ 爲導電率， $\hat{V}_b$ 爲導體兩端的電壓差，l 爲導體的軸長，$\hat{u}$ 爲導體相對磁通量密度 $\hat{B}$ 的移動速度。Fig.3.1 顯示了一個導體在磁通量密度 $\hat{B}$ 的磁場中運動的情形。Eq. (3.5) 適用在實心的導體並且也考慮了導體表面的因素。

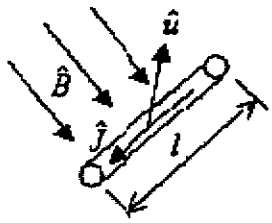


Figure 4.1 移動中的導體

使用一個定在該移動的物體上的座標系，則相對速度變成零。當 $\hat{u}$ 等於零，可消去 Eq. (3.5)的第二項，變成

$$\nabla \times \nabla \nu \times \hat{A} = \sigma \frac{\hat{V}_b}{l} - \sigma \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \tag{3.6}$$

實際上，馬達中存在有 stranded conductors。而此種導體因爲太細微而不能當成單一的 model。這個例子當中，我們可假設此區域不產生 eddy current ，所以此區域的電流密度爲均勻分布。因此方程式右手邊可令其等於平均電流密度 $\hat{J}$

$$\nabla \times \nabla \nu \times \hat{A} = \hat{J} \tag{3.7}$$

爲了把方程式變成唯一，我們再把 Eq. (3.4) 寫成

$$\nabla \times \nabla \nu \times \hat{A} + \sigma \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = \hat{U} \tag{3.8}$$

對實心導體的部分，

$$\hat{U} = \sigma \frac{\hat{V}_b}{l} \tag{3.9}$$

stranded conductor 的部分，

$$\hat{U} = \hat{J} \tag{3.10}$$

而

$$\sigma = 0 \tag{3.11}$$

使用二維近似的方式，則磁場的向量勢 $\hat{A}$ 與電流密度 $\hat{J}$ 只有軸向分量。所以我們由 Eq.(3.8) 可導出

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} = -U \tag{3.12}$$

在這篇論文中，是使用二維有限元素法來分析此電動機。

4.1.2 定量

定量的部分，在方程式右手邊加入了定量的磁力源。推導如下：

磁場強度是受材料特性及磁力線分布所影響。一般用來表示永久性磁鐵的 model 有兩種：磁化強度向量與等效的電流平板。雖然兩種方法切入點不同，但都會得到同樣的一組方程式。由直線的特性，Fig.(3.2)，我們只要知道直線斜率及 y 軸交點，即可定出此特性曲線（直線）。

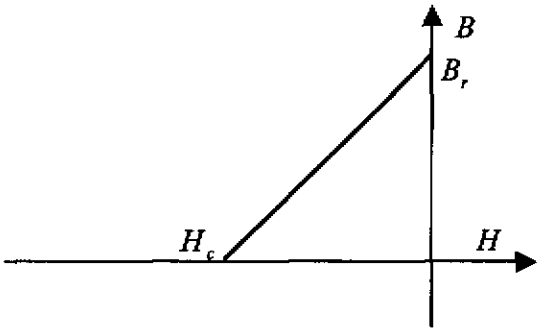


Figure 3.2 磁鐵特性的直線近似

因此

$$\hat{B} = \mu_0((1+\kappa)\hat{H} + \hat{M}) \tag{3.13}$$

其中 κ 爲 磁化率 (dimesionless), $\hat{M}$ 爲 is the 磁化強度向量 (amperes/meter)，$\hat{H}$ 爲外加磁場。爲簡化起見，我們把 Eq.(3.13) 寫成

$$\hat{H} = \nu(\hat{B} - \mu_0\hat{M}) \tag{3.14}$$

將 Eq.(3.14) 代入 Maxwell equation Eq.(3.1) ，同時把 $\hat{B}$ 用 Eq.(3.2) 取代，可得到

$$\nabla \times \nabla \nu \times \hat{A} = \hat{J}_s + \nabla \times (\nu\mu_0\hat{M}) \tag{3.15}$$

右手邊第二項可以把它想成是等效的磁力流。

4.1.3 靜態分析

如果只要得到穩態解，我們可以使用穩態分析。暫態與穩態的差異在於 $\sigma\frac{\partial A}{\partial t}$ 這一項。對靜態分析來說，此項可以去掉。

4.2 有限元素理論

最常用來推導有限元素方程式的兩種方法爲變分法及 Galerkin 法。而 Galerkin 法爲 MWR（the method of weighted residuals） 法其中一個特例。由於 Galerkin 法較被廣泛採用，所以本論文亦採用此法來推導。

MWR 法爲必須在整個所求的值域內， residual 在特定的某個權函數上投影之積分爲零。Galerkin 法選擇相同的權函數當成此法的型態函數（shape functions）。在變分 principle 已知的情況（例子）下，Galerkin 法所求得的方程式會與採用變分法所得到的有限元素方程式相同。這次我們同樣先從「變量」的部分談起。

4.2.1 Nonpermanent Material（變量）

使用 Galerkin 法，得到 residual 方程式如下

$$R=\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+U-\sigma\frac{\partial A}{\partial t} \tag{3.16}$$

其中 R 爲 residual.
乘上型態方程式（shape function）並且令其積分爲零。

$$\iint_{\Omega} NR\,dxdy=0 \tag{3.17}$$

將 R 以 Eq.(3.16)代入，

$$-\iint_{\Omega} N(\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2})dxdy+\iint_{\Omega}\sigma N\frac{\partial A}{\partial t}dxdy=\iint_{\Omega} NU dxdy \tag{3.18}$$

將左手邊的第一項作部分積分，

$$\iint_{\Omega} N(\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2})dxdy=\iint_{\Omega}\frac{1}{\mu}(\frac{\partial N}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\frac{\partial A}{\partial y})dxdy-\oint_{C}\frac{1}{\mu}N\frac{\partial A}{\partial n}dc \tag{3.19}$$

現在將 Eq.(3.19) 代入 Eq.(3.18) 並且把面積分改成極小積分區域元素的和，

$$\sum_n \{\frac{1}{\mu_e}\iint_{\Omega_e}(\frac{\partial N_e}{\partial x}\frac{\partial A_e}{\partial x}+\frac{\partial N_e}{\partial y}\frac{\partial A_e}{\partial y})dxdy$$
$$+\sigma_e\iint_{\Omega_e}N_e\frac{\partial A}{\partial t}dxdy-\frac{1}{\mu_e}\frac{\partial A}{\partial n}\oint_C N_e dc=U_e\iint_{\Omega_e}N_e dxdy \qquad (3.20)$$

Eq.(3.20)只需要計算所有元素的線積分，其中積分區域有一側與所求的區域範圍相同。因爲在積分區域內，兩個元素相接的邊界部分積分值可互相抵消，所以內部積分值爲零。一般我們使用 NBC（the Natural Boundary Condition）並且將邊界設爲 $\frac{\partial A}{\partial n}=0$. 如此一來 Eq.(3.20)左手邊最後一項可以去掉，然後將此式作積分。因爲第一階的三角形元素很容易說明，我們先來推導。之後再推導出其一般式

4.2.2 第一階三角形元素（First Order Triangular Element）

使用有限元素法，首先必須先對元素作 mesh 的動作。針對一個二維的模型，我們有許多形狀可以選擇，比說三角形或長方形。而且我們可以選擇元素所要近似的階數（approximation order）

考慮 Fig. 3.3 中的一個三角形元素 (ijk)，

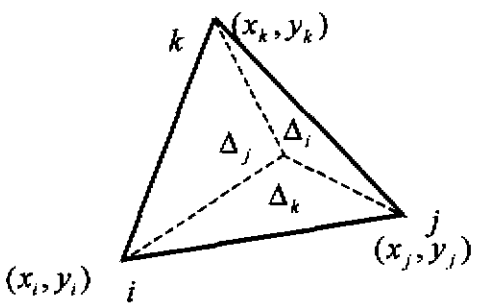


Figure 3.3 （第一階三角形元素）First order triangle

如果現在假設在元素中 potential 是線性變化，我們會得到何者是線性或第一階元素。在這個假設下，我們可以將這三角形中任何一個位置的 magnetic potential 表示爲

$$A=\frac{\Delta_i}{(\Delta_i+\Delta_j+\Delta_k)}A_i+\frac{\Delta_j}{(\Delta_i+\Delta_j+\Delta_k)}A_j+\frac{\Delta_k}{(\Delta_i+\Delta_j+\Delta_k)}A_k \qquad (3.21)$$

其中 A_i 爲 node i 的 potential value， A_j 爲 node j 的 potential value， A_k 爲 node k 的 potential value

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \tag{3.22}$$

$$\Delta_i = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \tag{3.23}$$

$$\Delta_j = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x & y \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \tag{3.24}$$

$$\Delta_k = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x & y \end{vmatrix} \tag{3.25}$$

再把 equation (3.21) 表示成

$$A = \frac{(a_i x + b_i y + c_i)A_i + (a_j x + b_j y + c_j)A_j + (a_k x + b_k y + c_k)A_k}{2\Delta} \tag{3.26}$$

其中

$$a_i = y_j - y_k \tag{3.27}$$

$$b_i = x_k - x_j \tag{3.28}$$

$$c_i = x_j y_k - x_k y_j \tag{3.29}$$

所以 Galerkin 法中的型態方程式（the shape function） N_e 可以表示爲

$$N_e(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{a_i x + b_i y + c_i}{2\Delta} \\ \dfrac{a_j x + b_j y + c_j}{2\Delta} \\ \dfrac{a_k x + b_k y + c_k}{2\Delta} \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

把 Eq.(3.26) 對 x 及 y 取導數，

$$\frac{\partial A_e}{\partial x}=\frac{\partial([\frac{a_i x+b_i y+c_i}{2\Delta}\quad\frac{a_j x+b_j y+c_j}{2\Delta}\quad\frac{a_k x+b_k y+c_k}{2\Delta}])}{\partial x}\begin{bmatrix}A_i\\A_j\\A_k\end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix}a_i & a_j & a_k\end{bmatrix}}{2\Delta}\begin{bmatrix}A_i\\A_j\\A_k\end{bmatrix} \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial A_e}{\partial y}=\frac{\partial([\frac{a_i x+b_i y+c_i}{2\Delta}\quad\frac{a_j x+b_j y+c_j}{2\Delta}\quad\frac{a_k x+b_k y+c_k}{2\Delta}])}{\partial y}\begin{bmatrix}A_i\\A_j\\A_k\end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix}b_i & b_j & b_k\end{bmatrix}}{2\Delta}\begin{bmatrix}A_i\\A_j\\A_k\end{bmatrix} \tag{3.32}$$

所以

$$\frac{\partial N_e}{\partial x}=\frac{\partial\begin{bmatrix}\frac{a_i x+b_i y+c_i}{2\Delta}\\\frac{a_j x+b_j y+c_j}{2\Delta}\\\frac{a_k x+b_k y+c_k}{2\Delta}\end{bmatrix}}{\partial x}=\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix}a_i\\a_j\\a_k\end{bmatrix} \tag{3.33}$$

$$\frac{\partial N_e}{\partial y}=\frac{\partial\begin{bmatrix}\frac{a_i x+b_i y+c_i}{2\Delta}\\\frac{a_j x+b_j y+c_j}{2\Delta}\\\frac{a_k x+b_k y+c_k}{2\Delta}\end{bmatrix}}{\partial y}=\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix}b_i\\b_j\\b_k\end{bmatrix} \tag{3.34}$$

再把 Eq.(3.20) 寫成矩陣型式

$$\sum_n(v[S_e]A+\sigma[T_e]\frac{\partial A}{\partial t})=\sum_n[Q_e]U \tag{3.35}$$

其中

$$S_{e,ij} = \iint_e ((\frac{\partial N}{\partial x})_i (\frac{\partial N}{\partial x})_j + (\frac{\partial N}{\partial y})_i (\frac{\partial N}{\partial y})_j) dxdy \tag{3.36}$$

$$T_{e,ij} = \iint N_i N_j dxdy \tag{3.37}$$

$$Q_{e,ij} = \iint N_i dxdy \tag{3.38}$$

Eq. (3.35) 中與時間有關的部分可以用 time stepping procedureru 將其離散化，如以可成功地推導出一個與時間相關之 dc 系統的解。時間相關變數 f 在 t_{k+1} 的瞬間被近似爲

$$f_{k+1} = f_k + f_k' h \tag{3.39}$$

其中 h 爲時間步進的間隔，f' 爲變數 f 的導數，
所以 Eq.(3.35) 經過處理後變成

$$\sum_n \nu[S_e] A_{k+1} + \sigma[T_e] \frac{A_{k+1} - A_k}{h} = \sum_n [Q_e] U_{k+1} \tag{3.40}$$

改寫 Eq.(3.40) 成爲

$$\sum_n (\nu[S_e] + \frac{\sigma[T_e]}{h}) \Delta A_{k+1} = \sum_n ([Q_e] U_{k+1} + \nu[S_e] A_k) \tag{3.41}$$

同時

$$A_k = \sum_k \Delta A_i \tag{3.42}$$

我們可以把 Eq.(3.41) 放入 the sparse matrix solver，然後得到每個時間點不同的 potential 值。如果把第 k 個步進時間前，每一個步進時間所得到的 magnetic potential 加總起來，可以得到 magnetic potential A_k.

4.2.3 一般元素（General Element）

Eq.(3.41) 適用於三角形元素。如果元素不爲三角形元素，可以推導如下：
根據鏈微法則，將型態函數（shape function）對 x 及 y 取導數，

$$\begin{bmatrix} \partial N_e/\partial x \\ \partial N_e/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial N_e/\partial \xi \cdot \partial \xi/\partial x \\ \partial N_e/\partial \eta \cdot \partial \eta/\partial y \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

雖然 $\xi(x,y),\eta(x,y)$ 未知，但 $x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)$ 爲已知。所以可得到

$$\begin{bmatrix} \partial N_e/\partial \xi \\ \partial N_e/\partial \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial \xi & \partial y/\partial \xi \\ \partial x/\partial \eta & \partial y/\partial \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial N_e/\partial x \\ \partial N_e/\partial y \end{bmatrix} = \hat{J} \begin{bmatrix} \partial N_e/\partial x \\ \partial N_e/\partial y \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

改寫 Eq.(3.44) 爲

$$\begin{bmatrix} \partial N_e/\partial x \\ \partial N_e/\partial y \end{bmatrix} = \hat{J}^{-1} \begin{bmatrix} \partial N_e/\partial \xi \\ \partial N_e/\partial \eta \end{bmatrix} = \frac{conj(\hat{J})}{\det(\hat{J})} \begin{bmatrix} \partial N_e/\partial \xi \\ \partial N_e/\partial \eta \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

其中 $\hat{J}$ 爲 Jacobian 矩陣， "det" 運算子計算 $\hat{J}$ 的 determinant， conj( ) 爲 $\hat{J}$ 的 conjugate 運算子。關於如何計算 $\hat{J}$ 的反矩陣，請參考附錄 A 的程式碼。

4.2.4 定量（Permanent Material）

使用 Galerkin's 法，Eq.(3.15) 可寫成

$$\iint_{\Omega} N \cdot (\nabla \times \nu \nabla \times A) dxdy - \iint_{\Omega} N \cdot J_s dxdy - \iint_{\Omega} N \cdot (\nabla \times \nu \mu_0 M) dxdy = 0 \tag{3.46}$$

或

$$\iint_{\Omega} (\nabla \times \nu \nabla \times A).N dxdy - \iint_{\Omega} J_s.N dxdy - \iint_{\Omega} (\nabla \times \nu \mu_0 M).N dxdy = 0 \tag{3.47}$$

使用部分積分，並利用下列的向量恆等式

$$(\nabla \times F) \cdot G = \nabla \cdot (F \times G) + F \cdot (\nabla \times G) \tag{3.48}$$

同時

$$F = \nu\nabla \times A - \nu\mu_0 M \tag{3.49}$$

$$G = N \tag{3.50}$$

我們可以將第一項改寫成

$$\iint_{\Omega}(\nabla \times (\nu\nabla \times A) - \nu\mu_0 M) \cdot N dxdy =$$

$$\iint_{\Omega}(\nu\nabla \times A - \nu\mu_0 M) \cdot (\nabla \times N) dxdy + \iint_{\Omega} \nabla \cdot ((\nu\nabla \times A - \nu\mu_0 M) \times N) dxdy \tag{3.51}$$

使用散度定理把最後一項轉換成

$$\iint_{\Omega} \nabla \cdot ((\nu\nabla \times A - \nu\mu_0 M) \times N) dxdy = \oint_{C} \{(\nu\nabla \times A - \nu\mu_0 M) \times N\} \cdot n dC \tag{3.52}$$

其中 n 爲相對圍線 C 的法向向量，
利用

$$F \times G = -G \times F \tag{3.53}$$

$$(F \times G) \cdot T = F \cdot (G \times T) \tag{3.54}$$

我們可以把線積分改寫成

$$\oint_{C} \{(\nu\nabla \times A - \nu\mu_0 M) \times N\} \cdot n dC = \oint_{C} N \cdot \{(\nu\nabla \times A - \nu\mu_0 M) \times n\} dC \tag{3.55}$$

我們可以加上 （the homogeneous Neumann boundary condition）這個邊界條件，則括號內的量必須爲零。
方程式變成：

$$\iint_{\Omega} \nu(\nabla \times A) \cdot (\nabla \times N) dxdy = \iint_{\Omega} \nu\mu_0 M \cdot (\nabla \times N) dxdy + \iint_{\Omega} N \cdot J dxdy \tag{3.56}$$

已二維直角座標爲例，可得

$$\iint_{\Omega} \nu(\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial N}{\partial y}) dxdy = \iint_{\Omega} J \cdot N dxdy + \iint_{\Omega} \nu\mu_0 (M_x \frac{\partial N}{\partial y} - M_y \frac{\partial N}{\partial x}) dxdy$$

$$-\iint_{\Omega} N\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)dxdy+\iint_{\Omega}\sigma N\frac{\partial A}{\partial t}dxdy$$

$$=\iint_{\Omega} NUdxdy+\iint_{\Omega}\nu\mu_0\left(M_x\frac{\partial N}{\partial y}-M_y\frac{\partial N}{\partial x}\right)dxdy \tag{3.57}$$

比較 Eq.(3.57) 與 Eq.(3.20)，可以發現 Eq.(3.57) 多了一項，它是來自於 permanent magnet 這個定量。根據 Garlerkin 法，可推得

$$\sum_n\left(\nu[S_e]A+\sigma[T_e]\frac{\partial A}{\partial t}\right)=\sum_n[Q_e]U+\sum_n\nu\mu_0\left([P_{ex}]M_x-[P_{ey}]M_y\right) \tag{3.58}$$

其中

$$[P_{ex}]=\iint\frac{\partial N}{\partial y}dxdy \tag{3.59}$$

$$[P_{ey}]=\iint\frac{\partial N}{\partial x}dxdy \tag{3.60}$$

改寫 Eq.(3.58) 成

$$\sum_n\left(\nu[S_e]+\frac{\sigma[T_e]}{h}\right)\Delta A_{k+1}=\sum_n\left([Q_e]U_{k+1}+\nu[S_e]A_k\right)+\sum_n\nu\mu_0\left([P_{ex}]M_x-[P_{ey}]M_y\right) \tag{3.61}$$

而且

$$A_k=\sum_k\Delta A_i \tag{3.62}$$

我們可以把 Eq.(3.61) 代入 the sparse matrix solver，然後得到每個時間點不同的 potential 值。如果把第 k 個步進時間前，每一個步進時間所得到的 magnetic potential 加總起來，可以得到 magnetic potential A_k

4.2.5 磁通量密度（Magnetic Flux Density）

對於把二維的 Maxwell equation ，可以把 Eq.(3.2) 這個 Maxwell equation 寫成

$$B = \frac{\partial A}{\partial y} i - \frac{\partial A}{\partial x} j \tag{3.63}$$

如果我們使用第一階三角形元素，則可將 $\partial A/\partial x$ 以 Eq.(3.31)代入， $\partial A/\partial y$ 以 Eq.(3.32)代入，得到

$$B_e = \frac{\begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \end{bmatrix}}{2\Delta_e} \begin{bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{bmatrix} i - \frac{\begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k \end{bmatrix}}{2\Delta_e} \begin{bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{bmatrix} j \tag{3.64}$$

其中 B_e 爲元素的磁通量密度

在求得三角形元素每個 node 的場勢後，磁通量密度即可輕易地求得。以三角形元素爲例，元素的磁通量密度爲一常數。

4.2.6 扭矩（Torque）

因爲馬達模擬的目的就是要求得扭矩的值，因此我們要經由有限元素法來求得這個值。經由有限元素模型求此值常用的方法有 3 種如下：

- 安培定律（Ampere's Force Law）
- The Maxwell Stress Method
- 虛功法（The Virtual Work Method）

這三個方法各有其優缺點，接著簡單地介紹一下。這三各方法皆可求得在某一個物體上的作用力和。虛功法及 Maxwell Stress 法不能求得力量的分布，而安培定律（Ampere's force law）可以，但其在非磁性的導體上不適用。我們選擇 Maxwell Stress 法計算扭矩。以二維的例子，一般所熟知用 Maxwell Stress Tensor 的力量表示法如下

$$f_t = \frac{B_n B_t}{\mu_o} \tag{3.65}$$

$$f_n = \frac{B_n^2 - B_t^2}{2\mu_0} \tag{3.66}$$

其中 f_t 爲相對 Fig. 3.4 中圍線 C 在切線方向上的力量密度，f_n 爲相對圍線 C 在法線方向上的力量密度，B_n 爲相對圍線 C 在法線方向上的磁通量密度，B_t 爲相對圍線 C 在切線方向上的磁通量密度。

在 Eq.(3.63) 和 Eq.(3.64)中，我們須先求出法線與切線方向上的磁通量密

度。接著由 Eq.(3.62)，可輕易地求得 x 跟 y 方向上的磁通量密度，同時必須對磁通量密度的方向的角度改變作轉換的計算。

我們必須計算 Fig. 3.3 中作用在圍線 C 上的總扭矩。積分作用在圍線 C 上的作用力得到總力或總扭矩。

$$Tor = L\oint_C f_t * r^2 d\theta \tag{3.67}$$

其中 *Tor* 爲馬達所產生的扭矩（torque），L 爲馬達的軸長，r 爲圍線的半徑。欲查詢使用 Maxwell Stress Tensor Method 所會造成的誤差，請參考附錄 B.

二維的有限元素法的求解是將每個元素的磁場向量勢 A（magnetic vector potential）在 z 方向上的分量近似成一 m 階的多項式。經過微分計算後，磁通量密度的階數會少一階。這是通常使用 Maxwell stress 法求第一階元素時所會產生的數值誤差。

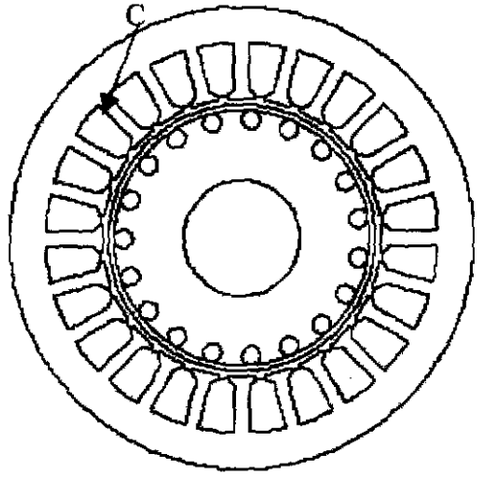


Figure 3.4 扭矩計算圍線（Torque Calculation Contour）

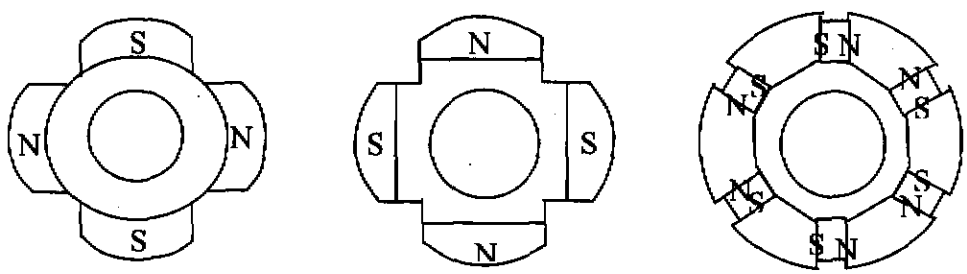
5. 直流無刷馬達的模擬結果（Simulation Results of DC Brushless Motors）

直流無刷馬達介紹 Introduction of DC Brushless Motors [51] [52]

一般直流無刷馬達可區分爲兩類。一類爲方波激磁式（square-wave excitation），另一類爲弦波激磁式（sine-wave excitation）。這兩類馬達的區別在於因繞線方式不同而造成磁通量分布的不同。These two categories of motors are different at the flux distribution pattern built by magnet. 方波激磁式馬達的反電動勢（back-EMF）通常被設計成梯形波。 The of square-wave excitation motor is

usually arranged to be trapezoidal. 弦波激磁式馬達的反電動勢（back-EMF）則爲正弦曲線。The of sine-wave excitation motor should be sinusoidal. 方波激磁式馬達的轉子如 Fig.6.1(a) 所示。弦波激磁式馬達的轉子如 Fig.6.1(b) 和 6.1(c) 所示。Fig.6.1(a) 中的轉子構造依繞線方向的不同，可形成方波或弦波不同的磁通量分布。can build the square or sine wave distributed flux according the magnetized direction. 若繞線爲徑向，其磁通量分布爲方形。If it is radial- magnetized, the flux will be square distributed. 若繞線爲平行方向，其磁通量分布爲正弦。If it is parallel-magnetized, the flux will be sinusoidal distributed.

在 Fig. 6.1(b)中，磁鐵厚度在磁化方向的改變自然地產生磁通量的剖面向是弦波的分布。在 figure 1.c 中，軟鐵的極端可產生剖面以提供可變的空隙長度。這個馬達的一個困難在於 cross-magnetization 的影響。我們的程式現在只有提供方波的激發形式。



(a) (b) (c)

Figure 6.1 Rotors commonly used in DC brushless motors

5.1.1 繞線的方法

線圈在電器機械的基本功能是單獨或外在線圈激磁產生磁場，進而在定子與轉子之間產生力矩。

若所有的線圈是被纏繞在同一個開槽或是在同一個磁區，此種繞線稱爲集中式繞線。而在定子端的集中式繞線通常稱爲直流式馬達，磁阻馬達或是步進馬達。當在機器上的線圈是以隔繞的方式分別纏繞在不同的開槽，則此種繞線方法稱爲分散式繞線。假如每一個分散式的繞線的線有不同的強度，則被稱之爲同中心。同中心的繞線通常會在空間中重疊。假如所有的線圈有相同的強度，則此種繞線稱爲疊繞或波繞，而這前提爲導體需被互相連接。當放置線圈在開槽之中，每一個線圈可能佔據整個或半個開槽。在方才所提的第一個例子稱爲單層，而第

二個例子稱爲雙層。

對於電器機械而言有很多繞線的方法。我們選擇疊繞，因爲它是發展電輔助繞線設計功具最通俗的方法和範例。以下是我們描述疊繞方法。

5.1.2 Coil Span

一個拇指的大小最大線圈跨度的習慣標準或繞線強度 σ_{max} 應該等於轉子極數除以定子槽數的罪小整數值 (Eq. 6.1)。線圈跨度可以選擇小於或等於最大的線圈跨度。假如選擇線圈跨度小於最大跨度，則稱它爲"short-pitching" 或是"chording"。也就是說線圈跨度不被相數所直接影響。因此我們可以得到理論公式如 (Eq. 6.1)所示。

$$\sigma_{max} = Max_Coil_Span = NLI\left[\frac{N_{slots}}{2p}\right] \qquad \text{(Eq. 6.1)}$$

此處的 "NLI" 意指 "下一個最小整數".

繞線應該盡可能的均勻且平坦的纏繞在定子圓周範圍的每一"相"上。這樣的設計將使轉子在任何的位置都能產生最高的導磁力矩。

5.1.3 繞線的表面配置和槽形整合

一個整合槽形定子是個槽數除以極數的整合數，目的在使極性強度是一個整合數的槽形強度。整合式槽形定子的的繞線自然是規則且有對稱性的：線圈自然便成一個群組，而每個群組通常關聯一個極。

一個碎片式的槽形定子有槽數除以及數的非整合數：舉例來說，一個 4-pole 的馬達包]含有15個槽其中每極有3.75個槽對一個單極的線圈群組沒有較理想的對稱性繞線。建立一個片段式的槽形繞線的分布提供了考慮其精巧度的範疇，對於所有的槽和極沒有一個單一程序去做成一個最佳的繞線。而雙層繞線有一個簡單的程序給定一個較通用的結果描述如下[51]。

第一步是去計算 slots/pole 以極最大的線圈跨度 σ_{max} 。 σ_{max} 是 slot/pitches 的整數， 而餘數則爲 slot/pitches 之後介於 0 和 1 的數。

$$\frac{N_{slots}}{2p} = \sigma_{max} + \varepsilon \qquad \text{(Eq. 6.2)}$$

線圈子序列的配置方法可被表示程爲 S_P ,的項，槽的數目從 "return" 線圈由目前的線圈開始計到 "go" 線圈至下一個線圈插入。 則 S_P 的值可表示爲

$$S_F = \begin{cases} \sigma_{\max} + 1, & if \quad \varepsilon \geq 0.5 \\ N_{ss} - \sigma_{\max}, & if \quad \varepsilon < 0.5 \end{cases} \qquad \text{(Eq. 6.3)}$$

這裡 N_{ss} 表示每個區域的齒槽數，定義如下：

$$N_{ss} = \frac{N_{slots}}{HCF[C_{ph}, p]} \qquad \text{(Eq. 6.4)}$$

這兩條方程式目的在試著減少相位移極相位誤差 。當 $S_F = \sigma_{\max} + 1$ 則繞線累進的且連序承接另外一個如此沿著正的方向(CCW)。 當 $S_F = N_{ss} - \sigma_{\max}$，則繞線是到退的且沿序著另外一個如此沿這複的方向(CW)。

5.1.4 A相與B相間槽的偏移量

在一個三相馬達的相位繞線應該被另一個所取代 120 度的電氣角。

假如 phase 1 從 slot 1 開始, 則 phase 2 的起始應該偏移 N_{offset} slots. 有時 120 度的電氣角不是一個整數的 slot 角, 我們可以定義 N_{offset} 如下

$$N_{offset} = \frac{1}{3}\frac{N_{slots}}{p} + k\frac{N_{slots}}{p}, \qquad k = 1,2,3\ldots \qquad \text{(Eq. 6.4)}$$

此處 N_{slots} 是齒槽數， p 是極數的對數; $N_{slots} / p * \theta_{slots}$ 等於 360 度的電器角, θ_{slots} 爲齒槽的周期角。.

我們解釋 (Eq. 6.4) 如下： 假如我們不能找出偏宜 slot1 120 度的槽角，則我們可以找到一個特定的槽，這個槽偏移 slot1 (120+k*360) 度的電器角。它仍然可以提供三相繞線的平衡。

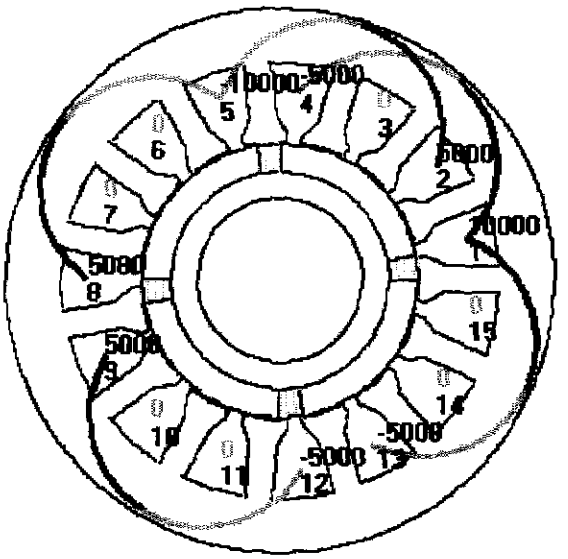


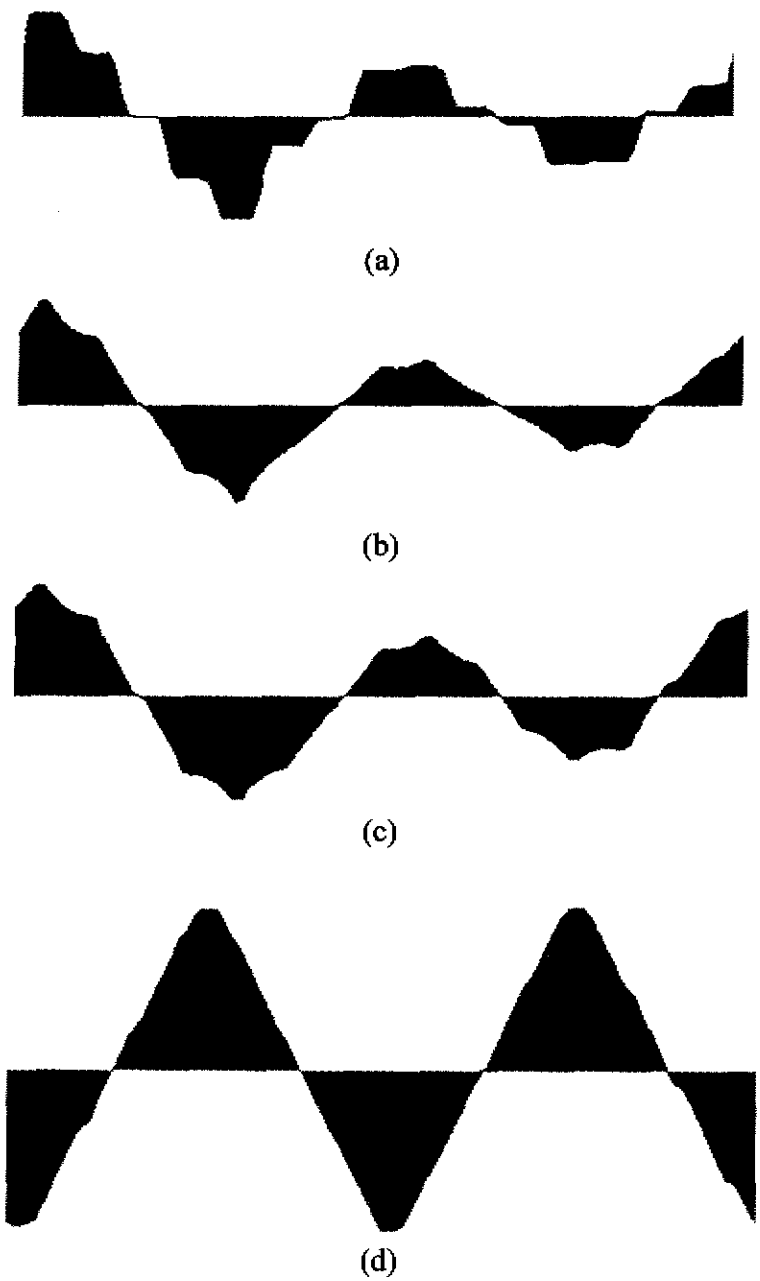
Figure 6.1 A prototype winding of an 15 slots and 4 ploes DC brushless motor

Table 6.1 The winding topology of a 15 slots and 4 poles dc brushless motor

"go"	1
"return"	4
"go"	8
"return"	5
"go"	9
"return"	12
"go"	1(16)
"return"	13
"go"	2(17)
"return"	5(20)

如 Fig. 6.1 所示, 此馬達有 15 定子槽以及 4 個轉子極數, 因此最大的線圈跨度等於 3 且線圈跨度的於數爲 0.75. 對一個單極線圈群組沒有一個較理想的對稱性繞線。假如我們按照以上的演算法，我們可以選定 S_F 爲 (3+1=4). 假如我們纏繞這個馬達兩層, 則每一個相位應該佔有 (15*2/3)=10 "1/2-slots" or 5 對 "go" 和 "return"。纏繞的技術是秀在 table 6.1。按照這纏繞的技術，則利用有限元數法分析場位能分布如 Fig. 6.2. 、 Fig. 6.2(a), 、6.2(b), 以及 6.2(c)所示, 磁通

量的分布取決於定子激磁電流的大小。在 Fig. 2(d), 磁通量的分布是受激於轉子的磁性。



(a)

(b)

(c)

(d)

Figure 6.2 (a) Flux potential distribution at the slot position when only A phase is excited. (b) Flux potential distribution at the air gap position when only A phase is excited. (c) Flux potential distribution at air gap position when three-phase currents are excited. (d) Flux potential distribution at air gap when only magnet is excited.

5.2 DC 無刷馬達的模型

我們模仿 DC 無刷馬達， 如 Fig. 6.3 所示，以二維有限元素法來分析：.

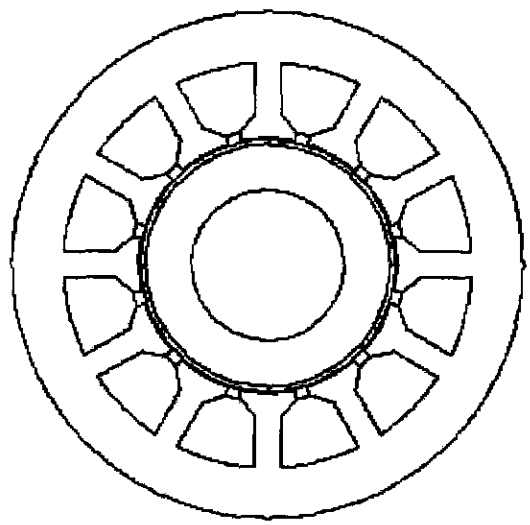


Figure 6.3 DC brushless motor 2D model

DC 無刷馬達的幾合參數如 table 6.2, table 6.3, 和 table 6.4.所示，它們分別是定子參數，轉子參數以及各自獨立的參數。這些參數對應如 Fig. 6.5-6.7.

Table 6.2 Geometry Parameters of Stator

Geometry Parameter	*Variable Name*	*Value*

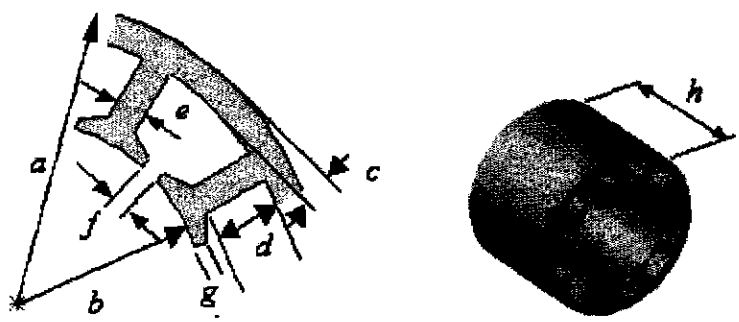
Number of Stator Slots		12
Stator Outer Radius	a	0.1 (m)
Stator Inner Radius	b	0.0505 (m)
Back Iron Width	c	0.02 (m)
Tooth Length	d	0.02 (m)
Tooth Width	e	0.01 (m)
Slot Open Width	f	0.1047 (rad)
D1	g	0.0035 (m)
Motor Length	h	0.1 (m)

Table 6.3 Geometry Parameters of Rotor

Geometry Parameter	*Variable Name*	*Value*
Number of Rotor Poles		4
Rotor Outer Radius	a	0.05 (m)
Outer Radius of Silicon Steel	b	0.048 (m)
Inner Radius of Silicon Steel	c	0.03 (m)
Rotor Magnetic Span	d	1.396 (rad)

Table 6.4 Dependent Geometry Parameters

Geometry Parameter	*Variable Name*	*Value*
Air Gap Width		0.0005 (m)
Magnet Thickness	a	0.002(m)
D2	b	0.0095 (m)
Bonding Material Span	c	0.174796 (rad)
Thickness of Rotor Silicon Steel	d	0.018 (m)



(a) (b)

Figure 6.5 Parameters of Stator Geometry

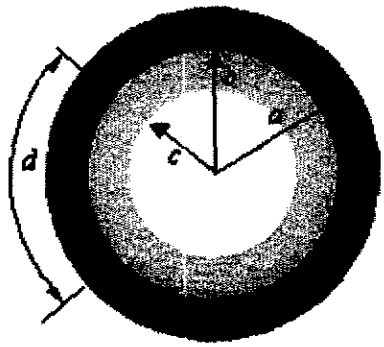
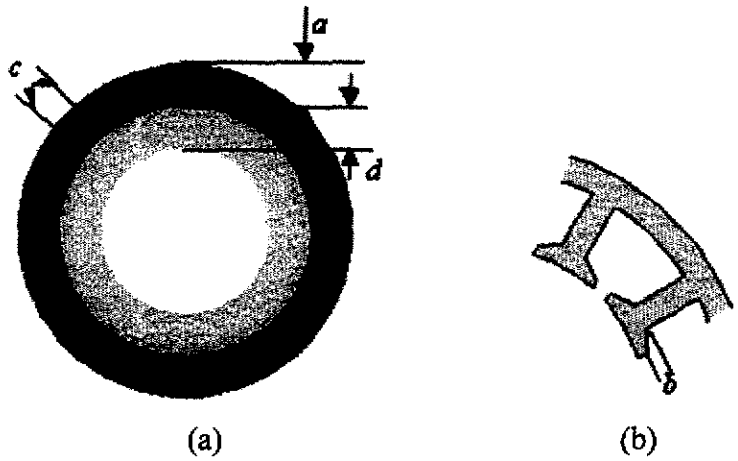


Figure 6.6 Parameters of Rotor Geometry



(a) (b)

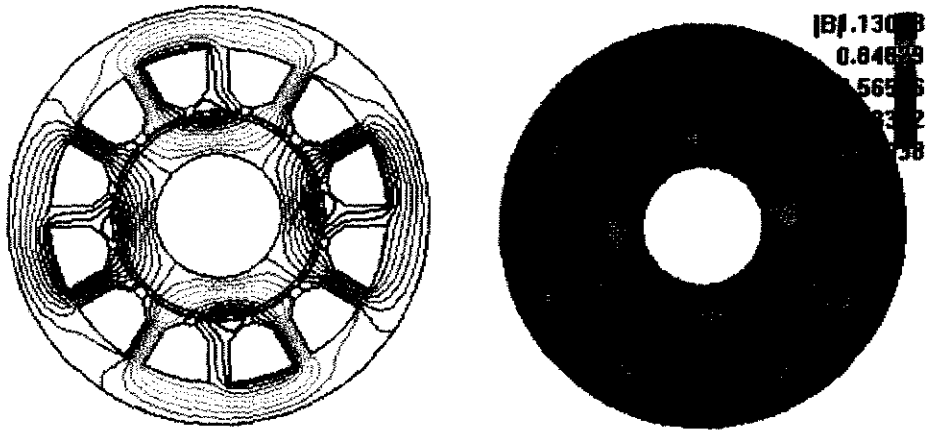
Figure 6.7 Dependent Parameters of Motor Geometry

5.3 Cogging Torque 齒槽寬度

在生產電器機械最大的目的就是盡可能達到高力矩低震動。 一個微小的脈動對電器機械而言都是震動或雜訊的來源，而且也增加伺服系統設計的困難度。而脈動力矩，通常包含 cogging torque 和 commutation torque 的組成，可能不利於速度控制以及位置控制的效能。克服 cogging torque,有很多種方法。我們將介紹兩個廣爲使用的方法，作爲我們模仿的標準。 其一爲改變齒槽寬度：其二使得 slot/pole 比例爲非整數。

以前一個馬達模型爲基礎所做的磁場分布分析如 Fig. 6.8 所示。我們得到一組 cogging torque 相對於 定子位置如 Fig. 6.9.所示， 馬達被設計要有一個 rating torque 大約 80 牛頓-米。 由比對 ripple torque 以及 rating torque，此比例大約爲 13%。雖然這是較通俗 slot/pole 的結合，但是這不是好的設計方法。 爲了減低 cogging torque，減少齒槽寬度是一個方法。 Fig. 6.10 顯示出針對三個不同的齒槽寬度其 cogging torque 的諧和頻普。因爲馬達齒槽與極數的最小公倍數爲 12, 最大的力矩 ripple 頻普將顯示在 12 如 Fig. 6.10.所示。而三個不同的齒槽寬度

如 Fig. 6.11.所示，且齒槽寬度的值顯示在 table 6.5.。



(a) (b)

Figure 6.8(a) Field potential distribution (b) Flux density distribution of DC brushless motor with 12 slots and 4 poles

我們發現減少齒槽寬度也會一並減低最大諧和力矩。假如減少齒槽寬度，則磁力迴路的磁阻變化率也會減少。因此 cogging torque 也會減低.。利用這個方法 cogging torque 實質上不會減輕。

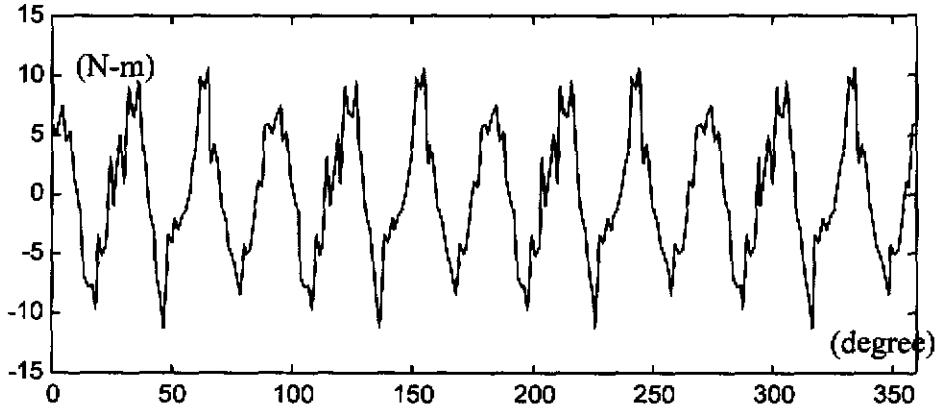


Figure 6.9 Cogging Torque of 12 stator slots and 4 rotor poles

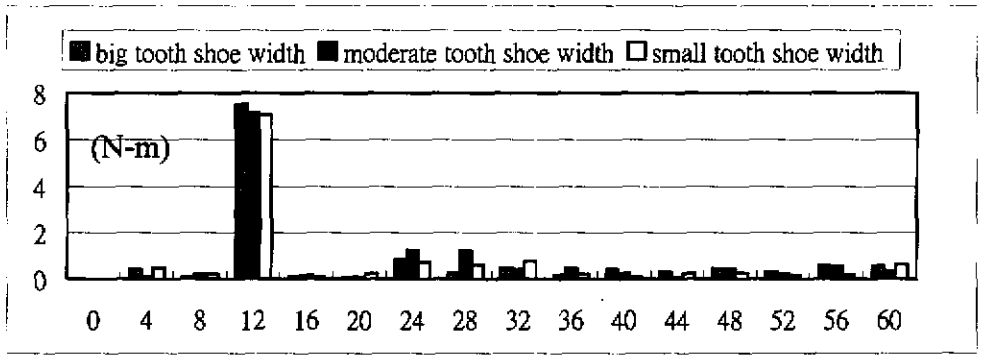


Figure 6.10 Spectrum of a DC brushless motor with 12 stator slots and 4 poles

Table 6.5 Values of three different slot open widths

Type	*Slot Open Width (m)*
Big	0.2094
Moderate	0.1047
Small	0.0524

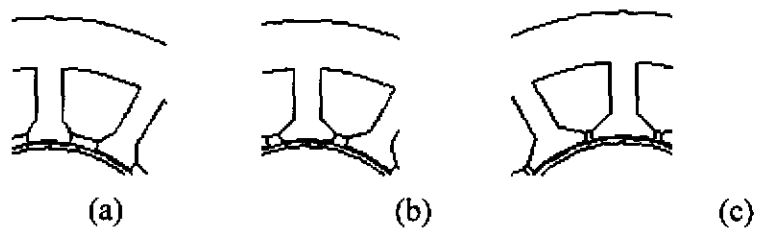
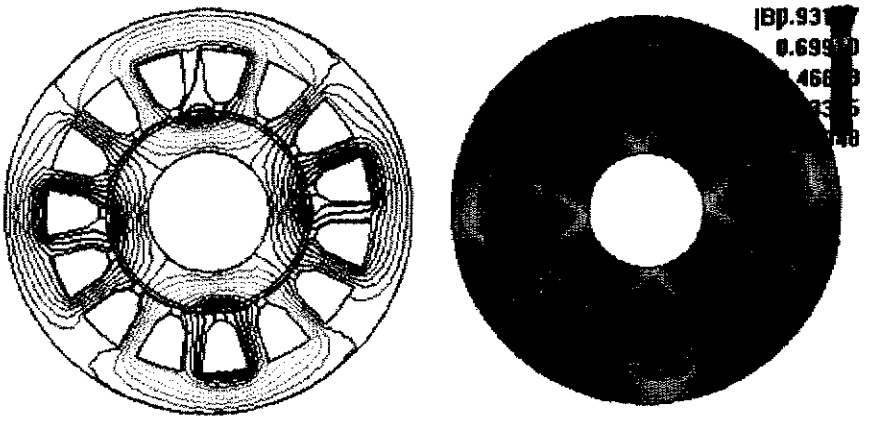


Figure 6.11 (a) large slot open width. (b) moderate slot open width (c) small slot open width.

5.4 Cogging Torque with Slot/Pole Ratio

我們能夠選擇 slot/pole 比值爲非整數，來實質的減少 cogging torque。假如我們只是改變定子的齒槽數爲 15 且維持其他的的參數相同， 我們可得到磁場的分布如(Fig. 6.12(a)) 以及磁場強度分布如 (Fig. 6.12(b))。我們可以比較 cogging torque 與前一個例子如 Fig. 6.13.所示，我們發現 torque ripple 減少 的重大意義。這個馬達也是被設計爲 80 牛頓-米的額定力矩，而 cogging torque 以

及額定力矩的比例大約爲 1.72%.但有些爭議， 因爲在前一個例子 12/4 (slots/poles) ，cogging torque 和額定力矩 的比例大約爲 13%。



(a) (b)

Figure 6.12 (a) Field potential distribution (b) flux density distribution of DC brushless motor with 15 slots and 4 poles

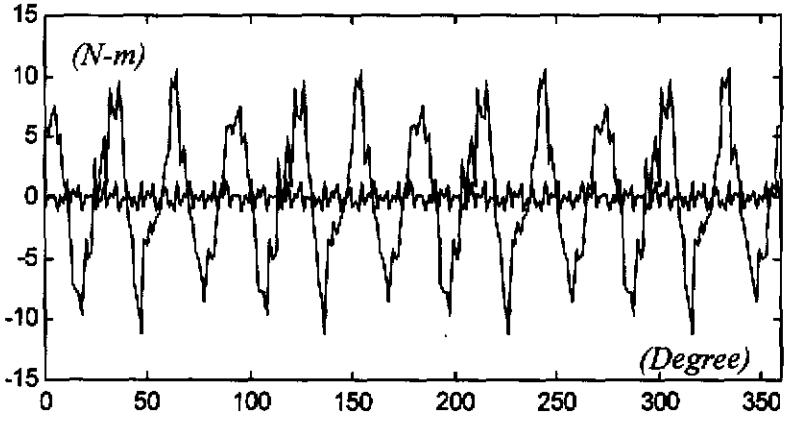


Figure 6.13 Comparision of cogging torque between (12 slots / 4 poles) and (15 slots / 4 poles)

由 cogging torque 的頻普分析，我們發現最大的諧和 cogging torque 是在 60 如 Fig. 14. 所示而 60 是極數 4 和槽數 15 的最小公倍數。

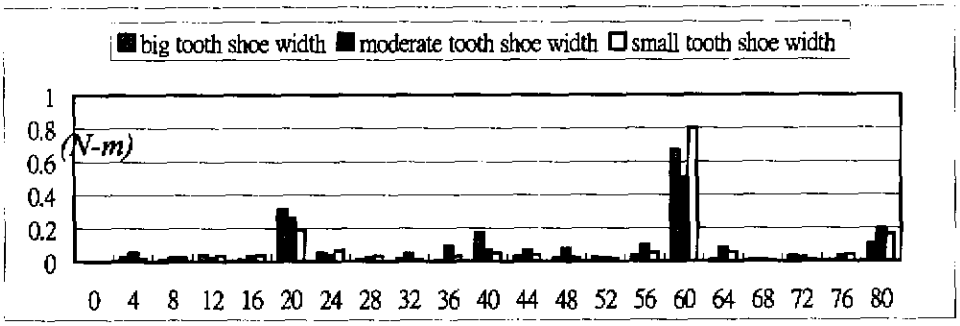


Figure 6.14 Spectrum of a DC brushless motor with 15 stator slots and 4 poles

5.5 Load Simulation

因爲馬達是一個方波 DC 無刷馬達，我們使用三相 full-bridge 迴路去驅動以方波電流激磁的馬達。輸入電流的型式如 Fig. 6.15.所示， 而輸入電流爲 10 A。我們分析兩個例子， 第一個例子的幾何參數列於 table 6.1-6.4. 而第二個例子的參數大致上與例一相同，除了齒槽數爲 15。

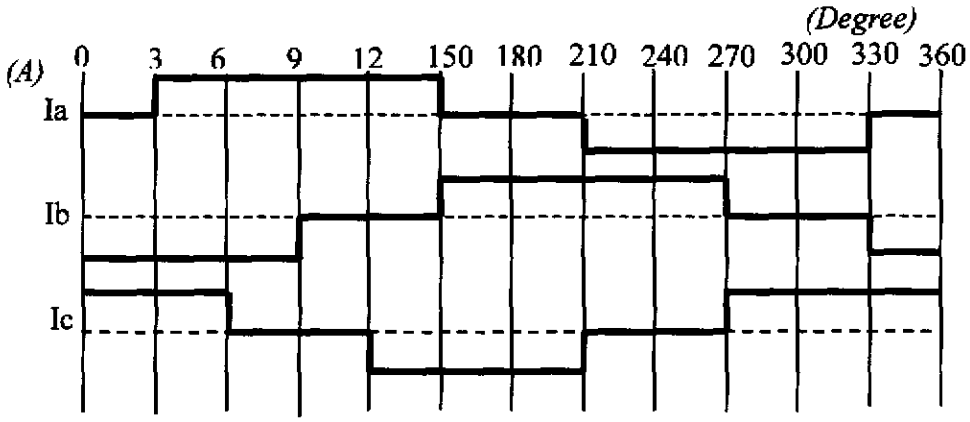
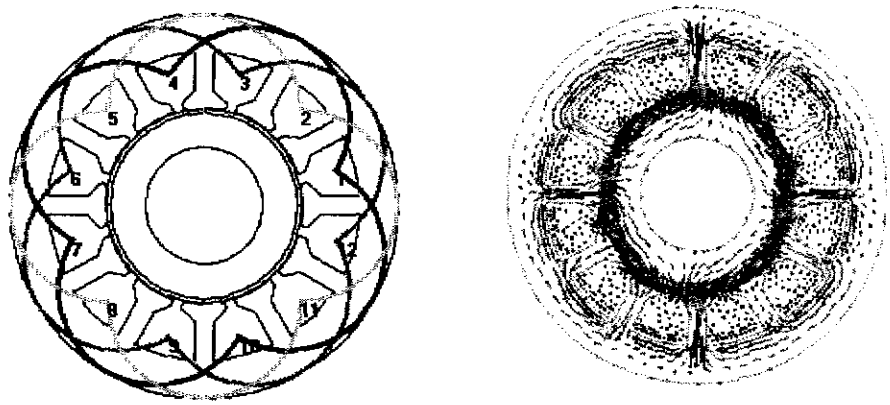


Figure 6.15 Input current sequences of DC brushless motor

第一個例子，馬達有 12 slots 和 4 poles; 繞線的方法爲 Y connected。我們以三向方波電流來操作馬達其繞線如 Fig. 6.16(a)所示。從 6.2 節，我門知道馬達的 slots 將產生 cogging torque。它是由轉子磁極非均勻的磁通分布所造成的。 當我們輸入三相電流，它們也會貢獻出額外的磁通。磁通流量如 Fig. 6.16(b)所示。轉動一圈的力矩總合如 Fig. 6.17.所示。平均力矩爲 45.2192 牛頓-米。我們希望固定電流的輸入能夠得到固定電壓。因位諧和力矩不是所需要的，所以我們展示出"諧和力矩"/"直流力矩" 比例如 Fig. 6.18.所示， 從 Fig. 6.18, 我門知到這最大的諧和型態爲 12；12 是 12 和 4 的最小公倍數。諧和型態爲 12 時，力矩的比

例爲 0.25，這顯示出如此不是好的設計。



(a) (b)

Figure 6.16 (a) Winding pattern (b) Flux flow of DC brushless motor with 12 slots and 4 poles

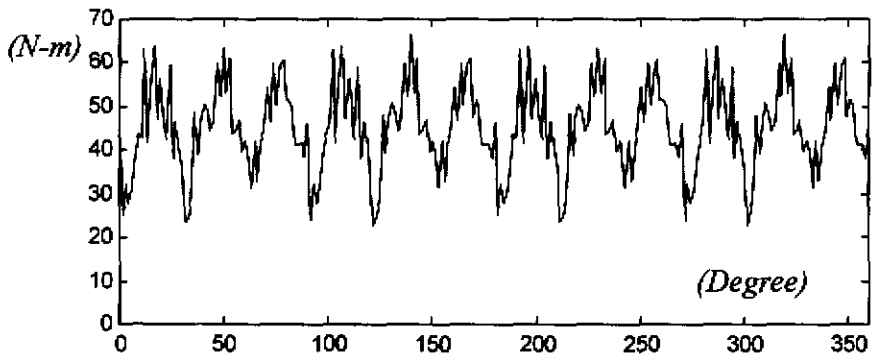


Figure 6.17 Torque values in one revolution

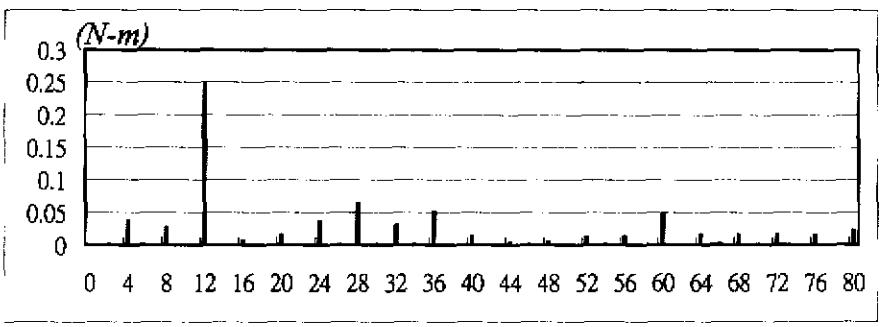


Figure 6.18 Spectrum of a loaded DC brushless motor with 12 stator slots and 4 poles

從之前的章節，在有負載的情況下我們知道最大的諧和力矩比例爲 0.25。對一個好的設計而言，這個值太大了。我們可以改變齒槽數去減輕諧和力矩。我

們選擇 15-slots 和 4-poles DC 無刷馬達作爲我們第二個例子。與第一個例子相同的是，我們一樣以三向方波電流來操作馬達。馬達的繞線如 Fig. 6.19.所示。 而轉動一圈的力矩總合如 Fig. 6.20.所示。平均力矩爲 39.65 牛頓-米。 因爲 slots 和 poles 的比值爲 3.75，沒有一種繞線方式可以得到均勻的磁場分布。在 6.2 節所提到的，齒槽或輸入電流將導致 torque ripple。我們發現在第二個例子的 cogging torque (如 Fig. 6.13 所示)是較小的。從 Fig 6.21,我們發現最大的 torque harmonic 在 12 所組成，而不是在 60，這顯示出最主要的 ripple torque 是由相位電流所產生，而 4 poles 和 3 phases 的最小公倍數爲 12。harmonic torque 在 60 大約是 1.33 牛頓-米 ，這相當於是 39.65 牛頓-米的 0.03556 倍。在無載的情況下它也大於 cogging torque 。它是由 4 poles, 15 slots 和 3 phase currents 的最小公倍數所組成的。在 60 的位置相位電流依然貢獻 harmonic torque。 所以 ripple torque 在 60 有負載的情況下，是大於 ripple torque 在 60 無載的情況。

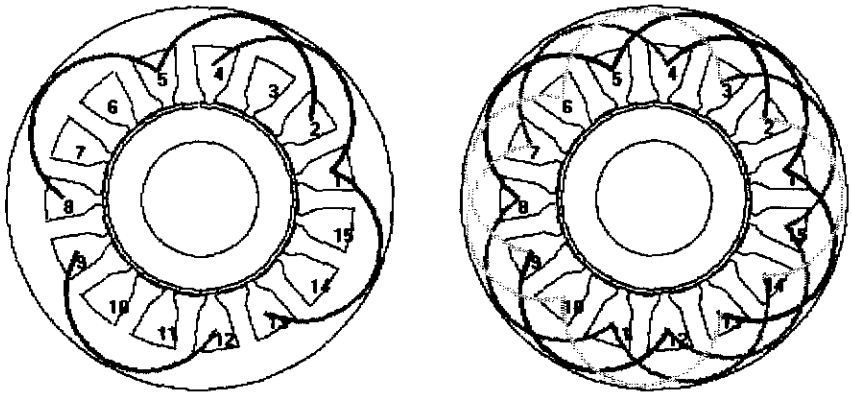


Figure 6.19 (a) Winding pattern (b) Flux flow of DC brushless motor with 15 slots and 4 poles

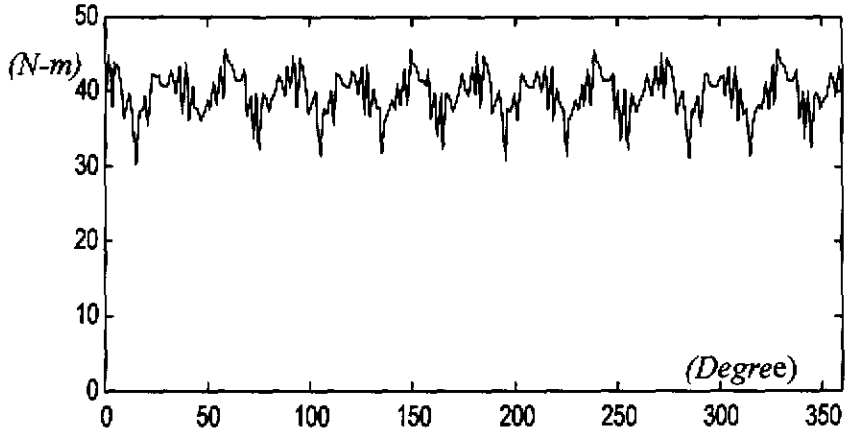


Figure 6.20 Torque values of a DC brushless motor with 15 slots and 4 poles in one revolution

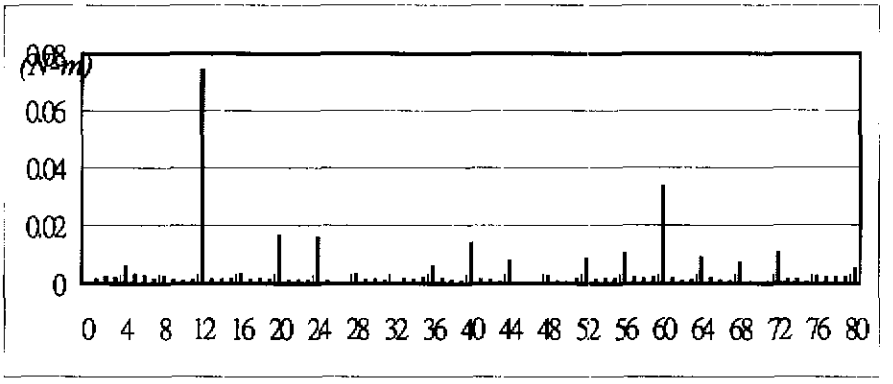


Figure 6.21 Spectrum of a loaded DC brushless motor with 15 stator slots and 4 poles