

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

銀行債券組合 VaR 的統計分配與波動性 The Statistical Distribution and Volatility of Bond Portfolio VaR for Banks

計畫類別：☒ 個別型計畫 ☐ 整合型計畫

計畫編號： NSC 90-2416-H-002-004

執行期間： 90 年 8 月 1 日至 91 年 7 月 31 日

計畫主持人：郭震坤

共同主持人：

計畫參與人員：

本成果報告包括以下應繳交之附件：

- ☐ 赴國外出差或研習心得報告一份
- ☐ 赴大陸地區出差或研習心得報告一份
- ☐ 出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
- ☐ 國際合作研究計畫國外研究報告書一份

執行單位：國立台灣大學國際企業學系

中華民國 91 年 10 月 31 日

摘要

由於金融機構傳統的資產負債管理 (ALM) 應用歷史成本以及依賴長期預測，較難對市場的波動性作有效的因應，RiskMetrics (1996) 提議一個依市場波動性估計來計算損失估計值的觀念，此即風險值 (Value at Risk, VaR)。一般而言，VaR 用來管理短期 (1-10 天) 的市場風險。

VaR 計算方法傳統上有歷史模擬法、變異數-共變數法 (VC)、及蒙地卡羅模擬法 (MC) 等三種方法，但各機構之作法互有差異。此三種方法之相同點在對正常情況下的報酬率分配作假設。相對傳統方法而言，新近發展的極值理論 (EVT) 法偏重報酬率極端值的分配。

本研究以 Vlaar (2000) 所提 VaR 計算方法之比較架構，結合 Login

(2000) 提出之極值理論 VaR 模型，檢測本國銀行固定收益資產組合之特性，試尋最適本地市場之 VaR 計算方法。本研究參考 2000 年 12 月 31 日國內公私立銀行資產組合中的票券/債券比例，及台灣 1993 年 10 月 1 日至 2002 年 4 月 30 日之資料進行各種 VaR 值的計算，比較不同的 VaR 計算方法。研究顯示，在變異數隨時間變化的設定下，大部分結合變異數-共變數法與蒙地卡羅模擬法 (VC-MC 組合法) 的分配假設，以及 EVT 法，都可應付實際的風險值要求。單純的 MC 及 VC 計算方法則會有低估現象。此外，本研究也發現較複雜的 GARCH 模型似未較能描述研究期間的利率波動性。

關鍵詞：變異數-共變數法，蒙地卡羅模擬法，極值理論

Abstract

Traditional Asset and Liability Management (ALM) uses accrual accounting rather than marking all positions to market. Another criticism comes from the reliability of long term forecasts used in ALM. Due to the alleged deficiencies, Value at Risk (VaR) was proposed as an alternative to ALM. VaR estimates the implied changes in portfolio value by the estimated portfolio volatility. In general, VaR is used to manage short-term (1 - 10 days) market risk.

There are three basic methods for computing VaR measures: historical simulation, variance-covariance matrix (VC), and Monte Carlo simulation (MC) methods. However, banks are permitted to use combinations or variations of these methods for VaR reporting. This research combines the Vlaar (2000) framework to compare various VaR computing methods, and Login (2000) proposal to apply EVT to VaR estimation, to identify the proper assumptions and parameters specification for the VaR computing in Taiwan. The extreme value theory (EVT) method is based on the distribution describing only the behavior of extreme returns.

Using the actual portfolio weight held by local banks on December 31, 2000, and data from October 1, 1993 to April 30, 2002, we find that for models with time-varying variances, methods that combine variance-covariance and Monte Carlo methods, as well as EVT method, provides better results. Simple VC or MC method leads to under-estimation of VaR. Furthermore, we find that the more complicated GARCH models seem unable to completely capture the interest rate volatility over the studying period.

Keyword: Variance-Covariance

研究報告

VaR 計算方法傳統上有歷史模擬法等三種方法，共同點在於對正常情況下的報酬率分配做假設。相對傳統方法而言，EVT 法偏重報酬率極端值的分配。EVT 雖早於 1928 年即為 Fisher-Tippett 所提出，但直至 Login(2000)才應用在 VaR 的計算上(有關 EVT 的理論及實證文獻整理，詳見 Coronado(2001)的說明)。本研究以 Vlaar (2000) 所提 VaR 計算方法之比較架構，結合 Login (2000) 提出之極值理論 VaR 模型，檢測本國銀行固定收益資產組合之特性，試尋最適本地市場之 VaR 計算方法。

本研究對於利率預期模型的假設有以下兩種：

(1) Random Walk

假設 r_{it} 為時間 t 資產 i 的票券或公債利率，其中 $I = 1 - 8$ ，則

$$r_{it} = r_{i,t-1} + \varepsilon_{it},$$

其中 ε_{it} 隨不同的分配假設而異，但其變異數為 σ_{it}^2 。為方便起見，以下若利

率不限定是某資產 i 時，則不註下標 i 。

(2) AR(1)

$$\Delta r_{it} = \theta \Delta r_{i,t-1} + \varepsilon_{it},$$

其中 θ 為自我相關係數，

$$\Delta r_{it} = r_{i,t} - r_{i,t-1}.$$

對於變異數的分配則有以下假設：

(1) 常態分配 Naïve 變異數

σ_{it}^2 的估計方法為直接計算過去 250 天(約 1 年)利率變動的變異數，不作加權平均。

(2) 平滑法 decay factor 為 0.97 與 0.94

$$\sigma_{it}^2 = 0.97\sigma_{i,t-1}^2 + 0.03\varepsilon_{i,t-1}^2$$

$$\sigma_{it}^2 = 0.94\sigma_{i,t-1}^2 + 0.06\varepsilon_{i,t-1}^2$$

(3) 常態分配 n_GARCH(1,1)

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\varepsilon_{t-1}^2$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t u_t, u_t \sim N(0, 1)$$

(4) t 分配 t_GARCH(1,1)

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\varepsilon_{t-1}^2$$

$\varepsilon_t = \sigma_t u_t, u_t \sim t(0, v)$ ， v 為自由度，本文將參照 Vlaar 將 v 設為 5。

由於 t-GARCH 的估計較為複雜，因此本研究在 t-GARCH 的模擬參數值比照 Gaussian-GARCH，在隨機項才以 t 分配模擬。

VC-MC 結合法

在 VC-MC 結合法的 VaR 計算方面，Vlaar 首先模擬 10 天以來各資產利率的變化，則資產 i 的模擬 1 天利率變化為

$$\Delta \hat{r}_t = \hat{\sigma}_{t\Delta r} \varepsilon_{\Delta r}$$

其中 $\varepsilon_{\Delta r}$ 為期望值 $\Delta \bar{r}$ 之 Gaussian 或 t 機率分配， $\Delta \bar{r}$ 以最近 250 天之平均 Δr 估計。 $\varepsilon_{\Delta r}$ 是從假設之機率分配所模擬而得。

時間t時之持有期間1天總資產損益變化為:

$$- G\&L(t) = A^T \Omega A$$

(因利率上揚為資產損失，故加負號)

$$A^T = [\Delta \hat{r}_{\Delta r1} \times w1 \quad \Delta \hat{r}_{\Delta r2} \times w2 \dots \Delta \hat{r}_{\Delta r8} \times w8]$$

其中 $\Delta \hat{r}_{\Delta ri}$ 表利率i之模擬1天利率變化， $I = 1 \sim 8$ ，

Ω 為一 $N \times N$ 矩陣， N 為資產種類，在本研究 $N = 8$ 。其中矩陣元素(j, k)為不同資產利率變動的相關係數。因此不同的利率模型會有不同的相關係數矩陣。

$$\text{定義 } G\&L(10\text{day}) = \Sigma G\&L(t)$$

VC-MC 法的 VaR 即為 250 天 G&L (10day) 排序數列之 1% 值。

一般 EVT 理論

EVT 模型的極值機率分配有三種形式：Gumbel(第一類)、Frechet(第二類)、與 Weibull(第三類)。在 VaR 的應用上目前都假設為 Frechet(第二類)機率分配。

假設 r 為利率資產之損益變化， $x = (r - \beta)/\alpha$ ，其中 β 為 location 參數， α 為 scale 參數。

則 x 的累積機率函數 CDF 為:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp[-(1 + kx)^{1/k}] & \text{if } x < -1/k \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases},$$

x 機率密度函數 pdf 為

$$f(x) = (1 + kx)^{1/k-1} - \exp[-(1 + kx)^{1/k}]$$

$kx)^{1/k}]$ ，若 $k \neq 0$

r 的機率密度函數 pdf 為

$$f(r) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \left[1 + \frac{k(r - \beta)}{\alpha} \right]^{1/k-1} \exp \left\{ - \left[1 + \frac{k(r - \beta)}{\alpha} \right]^{1/k} \right\} & \text{if } k \neq 0 \end{cases}$$

Frechet 機率分配有三個參數需要估計，shape 參數 k 、location 參數 β 、以及 scale 參數 α 。在本章中利率模型假設 RW 對以上三種參數作估計。K 的非參數估計法有 Hill(1975)及 Pickands(1975)兩種方法，本研究採用 Hill 估計法(參考附錄一)。location 參數 β 、scale 參數 α 的估計用 MLE 方式(參考 Tsai, Times series of Financial Market(2002))。

在求出參數 α ， β ， k 之後，則

$$\text{VaR}_{\text{EVT}}(i) = \beta - \frac{\alpha}{k} \{1 - [-n \ln(1 - p)]^k\}, \quad I = 1 - 8,$$

即八種利率各算出一 VaR_{EVT} 值。

$$\text{VaR}(i) = \text{VaR}_{\text{EVT}}(i) \times w_i$$

則 EVT 法的 VaR 值為 $V^T \Omega V$ 。

其中 $V^T = [\text{VaR}(1) \text{VaR}(2) \text{VaR}(3) \dots \text{VaR}(8)]$ ， $\text{VaR}(i)$ 表示資產 i 之 VaR。

本研究資料範圍為 1993 年 10 月 1 日至 2002 年 4 月 30 日之 10、30、90、180 四種 CP(商業本票)初級市場利率、以及 2、5、10、15 年四種天期公債利率。由於 15 年期債券至 1995 年發行，因此之前的資料訂為 10 年期債券利率固定加碼。由以上利率模擬 8 種利率之資產組合，計算持有期間 10 天信賴區間 99% 的 VaR。我們以 Vlaar 所用的資產組合法，以該資產的利率

變動幅度乘上權數為該資產的損益。當利率走向與八種利率資產反向時,例如利率皆反向變動 100bp,則資產損失為\$100。但和 Vlaar 不同的是本研究固定八種利率資產的權數若屬貨幣市場則為 5%,若屬債券市場則為 20%,主要是考慮存續期間及資產組合平均分配。而 Vlaar 的權數是以模擬 25 組資產而得。

本研究以 2000 年 12 月 31 日的國內一般銀行的資產組合中的票券/債券比例,得出高、中、低三個比例:6、3.5、2.5。配合票券與債券存續期間的不同,將資產組合分配金額分為 w_H 、 w_M 、 w_L 三種組合:

$$w_H = [w_1, w_2, \dots, w_8] = [\$5 \ \$5 \ \$5 \ \$5 \ \$20 \ \$20 \ \$20 \ \$20]$$

$$w_M = [\$2.7 \ \$2.7 \ \$2.7 \ \$2.7 \ \$22.3 \ \$22.3 \ \$22.3 \ \$22.3]$$

$$w_L = [\$2 \ \$2 \ \$2 \ \$2 \ \$23 \ \$23 \ \$23 \ \$23]$$

故當 10 天期利率上揚 10bp, 2 年期債券利率下跌 15bp, 其餘資產利率不動時,則此資產組合 w_H 之損益變動為:

$$\$5 \times (-0.10) + \$20 \times 0.15 = -\$3.5(\text{元})$$

實證結果

各種方法所計算的 VaR 值如下:

VaR 方法	利率模型	變異數模型	VaR-H	VaR-M	VaR-L
實際值			40.853	33.029	30.870
歷史模擬法			46.371	36.633	34.014
VC 法	RW	Naive	31.658	23.785	22.028
		Decay 因子 0.97	28.618	21.441	23.788
		Decay 因子 0.94	27.021	20.538	22.838
		n_GARCH	22.073	16.661	15.328
		t_GARCH	26.465	19.906	18.327
	AR(1)	Naive	31.986	24.073	22.252
		Decay 因子 0.97	28.794	21.771	20.168
		Decay 因子 0.94	27.294	20.876	19.375
		n_GARCH	21.396	16.385	15.016
		t_GARCH	25.654	19.570	17.957
MC 法	RW	Naïve	28.197	20.544	18.829
		Decay 因子 0.97	24.598	18.163	16.741
		Decay 因子 0.94	23.104	17.232	15.941
		n_GARCH	18.554	13.924	12.735
		t_GARCH	25.921	19.550	18.049
	AR(1)	Naïve	28.920	21.342	19.336
		Decay 因子 0.97	25.291	18.861	17.23
		Decay 因子 0.94	23.684	17.667	15.981
		n_GARCH	26.991	20.979	19.51
		t_GARCH	29.884	23.281	21.807
	RW	Naïve	41.290	30.290	27.959

結合法		Naïve	41.290	30.290	27.959
		Decay 因子 0.94	40.802	39.305	38.887
		N_GARCH	55.435	40.782	38.033
		T_GARCH	76.030	57.903	53.671
		Naïve	39.786	30.850	28.078
		Decay 因子 0.97	45.233	36.158	33.076
		Decay 因子 0.94	49.565	40.335	35.979
		n_GARCH	61.068	47.022	43.575
		t_GARCH	81.965	60.656	56.312
極值法			49.081	34.714	31.391

註：VaR_H 表示高票券比例之資產組合 VaR 值，VaR_M 表示中票券比例，VaR_L 表示低票券比例。

以上結果之說明如下：

一、由於傳統 VaR 的方法是基於特定假設下的一般報酬率分配，而極值理論(extreme value theory, EVT)的 VaR 則是在基於特定假設下的極端值報酬率分配，因此一般而言，EVT 法會有較大的 VaR 值。由實際結果也發現，EVT 法較它三種傳統法為佳。

二、Vlaar 提出的 VC-MC 結合法的 VaR 值隨變異數模型的假設差異很大，但除 RW 的 Naïve 模型外，結合法的 VaR 值都能應付實際風險值需求。且部分模型假設之 VaR 值還較 EVT 值為大，但也遠大於實際風險值，使得金融機構計算過多的市場風險。

三、進一步分析 VC-MC 結合法結果，變異數模型採用簡單的 J.P Morgan RiskMetrics 方法，即 decay factor 固定 0.97 或 0.94 即可應付實際風險值。且從實證結果的參數可發現，台灣利率變動不適合以 GARCH 模型來 model，因此不必採較複雜的 n_GARCH 甚至 t_GARCH 模型。

參考文獻

Basle Committee on Banking

Supervision, 1996. "Supplement to the Capital Accord to Incorporate Market Risks." Bank for International Settlements, Basle.

Bollerslev, T., 1986. "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity." *Journal of Economics*, Vol. 31, pp. 307-327.

Engle, R., 1982. "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation." *Econometrica*, Vol. 50, pp. 987-1007.

Engle, R.F., and J. Mezrich., 1996. "GARCH for Groups." *RISK*, pp. 36-40.

Hendricks, D., 1996. "Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data." *Economic Policy Review*, Federal Reserve Bank of New York, pp. 39-69.

Kuo, C.K., 1999. "Risk Management: VaR System Design and Parameter Estimation." Research report. NSC-88-2416-H-002-004

Login, F., M., 2000. "From Value at Risk to Stress Testing: The Extreme Value Approach." *Journal of Banking and Finance*, Vol. 24, pp. 1097-1130.

Lucas, A., 1997a. "Cointegration Testing Using Pseudo Likelihood Ratio Tests." *Economic Theory*, Vol. 13, pp. 149-169.

Lucas, A., 1997b. "Robustness of the Student t Based M-estimator." *Communications in Statistics; Theory and Methods*, Vol. 26.

Rachev, S., and Y. Tokat., 2000. "Asset and Liability Management: Recent Advances." Working Paper. Institute of Statistics and Mathematical Economics, University of Karlsruhe, Karlsruhe, Germany.

RiskMetrics, 1996. J.P.Morgan, Technical Document, 3rd ed.

Taylor, M.P., 1992. "Modeling the Yield Curve." *Economic Journal*, Vol. 102, pp. 524-537.

Vlaar, P.J.G., 2000. "Value at Risk Models for Dutch Bond Portfolios." *Journal of Banking & Finance*, Vol. 24, pp. 1131-1154.