

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

孤立波與近岸斜坡互制之研究

The study of solitary waves passing a sloping beach

計畫類別：☒個別型計畫 ☐整合型計畫

計畫編號：NSC 89-2611-E-002-053

執行期間：89年8月1日至90年7月31日

個別型計畫：計畫主持人：孔慶華
共同主持人：

整合型計畫：總計畫主持人
子計畫主持人

處理方式：☒可立即對外提供參考
☐一年後可對外提供參考
☐兩年後可對外提供參考

執行單位：台灣大學造船及海洋工程學系

中華民國90年7月

孤立波與近岸斜坡互制之研究

The study of solitary waves passing a sloping beach

計畫編號：NSC89-2611-E002-053

執行期限：89年8月1日至90年7月31日

計畫主持人：孔慶華 國立台灣大學造船及海洋工程研究所教授

一、中文摘要

關鍵詞：孤立波，新布氏方程式，非線性效應，分散效應

孤立波(solitary wave)是近海中長波現象中最具代表性的波浪。本研究計畫擬由研究孤立波通過等斜度斜坡的行為模式進而模擬近岸波浪之發展情形。由於要有效率且正確的模擬此一非線性的波浪問題，推導出適當的淺水區長波方程式變成為本計畫的重點。

在前人的研究中，考慮非線性校應急分散效應且精度至二階的布氏方程式是常見的長波方程式之一，然由於使用上必須考慮平均水平流速，不能夠以任意水深處的流速作為評估的參數，因而有其使用上的侷限性。本計畫將嘗試推導以任意水深處之勢函數為變數的四階新布氏方程式，以作為爾後各學者專家鑽研近海流況的重要參考。

二、英文摘要

Keywords: *solitary wave, new-Boussinesq type equations, nonlinear effects, dispersive effects*

As well-known, solitary waves are the most common waves for describing the phenomenon of waves in shallow water.

In present study, considering the equity of nonlinear effects and dispersive effects, we'll derive a fourth-order Boussinesq-type equations in terms of a velocity potential at an arbitrary water depth for further investigation of solitary waves passing over a sloping beach. The classical $O(\mu^2)$ Boussinesq equations are derived based on the average horizontal velocities that are hard to apply into practical cases. On the contrary, our $O(\mu^4)$ equations are largely convenient in practical uses than the classical $O(\mu^2)$ one.

二、研究方法及內容

2.1 控制方程式與邊界條件

首先將各重要變數無因次化如下

$$x = k\hat{x} \quad y = k\hat{y} \quad z = h_0^{-1}\hat{z} \quad t = k(gh_0)^{0.5}\hat{t} \quad (1)$$

且流速、波高及壓力亦可表示為

$$\begin{aligned} u &= a_0^{-1}h_0(gh_0)^{-0.5}\hat{u} \\ v &= a_0^{-1}h_0(gh_0)^{-0.5}\hat{v} \\ w &= a_0^{-1}h_0^2k(gh_0)^{-0.5}\hat{w} \\ \eta &= a_0^{-1}\hat{\eta} \\ h &= h_0^{-1}\hat{h} \\ p &= (\rho ga_0)^{-1}\hat{p} \end{aligned} \quad (2)$$

且勢函數滿足

$$\nabla\Phi = (u, v) \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = w \quad (3)$$

則控制方程式及邊界條件可表如下

$$\mu^2 \nabla^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{at } -h \leq z \leq \varepsilon \eta \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \mu^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon \nabla \Phi \cdot \nabla \eta \right) \quad \text{at } z = \varepsilon \eta \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\mu^2 (\nabla \Phi \cdot \nabla h) \quad \text{at } z = -h \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \eta + \frac{\varepsilon}{2} \left[(\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad \text{at } z = \varepsilon \eta \quad (7)$$

對(4)式積分並考慮邊界條件(5)式及(6)式後可得

$$\nabla \cdot \int_{-h}^{\varepsilon \eta} \nabla \Phi dz + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

2.2 理論解析

令速度勢 Φ 為

$$\Phi(x, y, z, t) = \sum_0^\infty \mu^{2n} \Phi_n(x, y, z, t) \quad (9)$$

則由(4)式及(6)式可得

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} = -\nabla^2 \Phi_0 \quad \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} = -\nabla^2 \Phi_1 \quad \dots \quad \text{at } -h \leq z \leq \varepsilon \eta \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = -\nabla \Phi_0 \cdot \nabla h \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = -\nabla \Phi_1 \cdot \nabla h \quad \dots \quad \text{at } z = -h \quad (11)$$

故

$$\Phi_0 = \Phi_{00}(x, y, t) \quad (12a)$$

$$\Phi_1 = \Phi_{10}(x, y, t) - z \nabla \cdot (h \nabla \Phi_{00}) - \frac{z^2}{2} \nabla^2 \Phi_{00} \quad (12b)$$

將(12)式代入(9)式取精度至 $O(\mu^4)$ ，故可得 $z = z_m(x, y)$ 處之速度勢 Φ_m 為

$$\begin{aligned} \Phi_m = & \Phi_{00} + \mu^2 \left[\Phi_{10} - z_m \nabla \cdot (h \nabla \Phi_{00}) - \frac{1}{2} z_m^2 \nabla^2 \Phi_{00} \right] \\ & + \mu^4 \left\{ \Phi_{20} + z_m \left[-\nabla \cdot (h \nabla \Phi_{10}) - \frac{h^2}{2} \nabla^2 \nabla \cdot (h \nabla \Phi_{00}) \right] \right. \\ & \left. + \frac{h^3}{6} \nabla^2 \nabla^2 \Phi_{00} - h \nabla \nabla \cdot (h \nabla \Phi_{00}) \cdot \nabla h + \frac{h^2}{2} \nabla \nabla^2 \Phi_{00} \cdot \nabla h \right\} \end{aligned}$$

$$\left. - \frac{z_m^2}{2} \nabla^2 \Phi_{10} + \frac{z_m^3}{6} \nabla^2 \nabla \cdot (h \nabla \Phi_{00}) + \frac{z_m^4}{24} \nabla^2 \nabla^2 \Phi_{00} \right\} + O(\mu^6) \quad (13)$$

故

$$\begin{aligned} \Phi = & \Phi_m + \mu^2 \left[(z_m - z) \nabla \cdot (h \nabla \Phi_{00}) + \frac{1}{2} (z_m^2 - z^2) \nabla^2 \Phi_{00} \right] \\ & + \mu^4 \left\{ (z_m - z) \cdot \left[\nabla \cdot (h \nabla \Phi_{10}) + \frac{h^2}{2} \nabla^2 \nabla \cdot (h \nabla \Phi_{00}) \right] \right. \\ & - \frac{h^3}{6} \nabla^2 \nabla^2 \Phi_{00} + h \nabla \nabla \cdot (h \nabla \Phi_{00}) \cdot \nabla h \\ & \left. - \frac{h^2}{2} \nabla \nabla^2 \Phi_{00} \cdot \nabla h \right\} + \frac{(z_m^2 - z^2)}{2} \nabla^2 \Phi_{10} \\ & - \frac{(z_m^3 - z^3)}{6} \nabla^2 \nabla \cdot (h \nabla \Phi_{00}) - \frac{(z_m^4 - z^4)}{24} \nabla^2 \nabla^2 \Phi_{00} + O(\mu^6) \end{aligned} \quad (14)$$

由(14)式，可得

$$\Phi_{00} = \Phi_m + \mu^2 \left[z_m \nabla \cdot (h \nabla \Phi_m) + \frac{z_m^2}{2} \nabla^2 \Phi_m \right] + O(\mu^4) \quad (15a)$$

$$\Phi_{10} = O(\mu^2) \quad (15b)$$

$$\Phi_{20} = O(\mu^4) \quad (15c)$$

將上式結果代入(8)式，可得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(h + \varepsilon \eta) \nabla \Phi_m] \\ & + \mu^2 \nabla \cdot \left\{ h \nabla \left[z_m \nabla \cdot (h \nabla \Phi_m) + \frac{z_m^2}{2} \nabla^2 \Phi_m \right] \right\} \\ & + \mu^2 \nabla \cdot \left\{ + \frac{h^2}{2} \nabla \nabla \cdot (h \nabla \Phi_m) - \frac{h^3}{6} \nabla \nabla^2 \Phi_m \right\} \\ & + \varepsilon \mu^2 \nabla \cdot \left\{ \eta \nabla \left[z_m \nabla \cdot (h \nabla \Phi_m) + \frac{z_m^2}{2} \nabla^2 \Phi_m \right] \right\} \\ & + \mu^4 \nabla \cdot \left\{ - \frac{h^3}{6} \nabla \nabla^2 \left[z_m \nabla \cdot (h \nabla \Phi_m) + \frac{z_m^2}{2} \nabla^2 \Phi_m \right] \right. \\ & \left. h \nabla G_1 + \frac{h^2}{2} \nabla G_2 - \frac{h^4}{24} \nabla \nabla^2 \nabla \cdot (h \nabla \Phi_m) + \frac{h^5}{120} \nabla \nabla^2 \nabla^2 \Phi_m \right\} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

且(7)式可表為

$$\eta + \frac{\partial \Phi_m}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}
& + \mu^2 \left[z_m \nabla \cdot \left(h \nabla \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \right) + \frac{z_m^2}{2} \nabla^2 \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \right) \right] + \frac{\varepsilon}{2} (\nabla \Phi_m)^2 \\
& + \mu^4 \left\{ z_m G_3 + \frac{z_m^2}{2} \nabla^2 \left[z_m \nabla \cdot \left(h \nabla \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \right) + \frac{z_m^2}{2} \nabla^2 \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{z_m^3}{6} \nabla^2 \nabla \cdot \left(h \nabla \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \right) - \frac{z_m^4}{24} \nabla^2 \nabla^2 \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \right) \right\} \\
& + \varepsilon \mu^2 \left\{ \frac{1}{2} [\nabla \cdot (h \Phi_m)]^2 - \eta \nabla \cdot \left(h \nabla \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \right) \right\} = 0
\end{aligned} \tag{17}$$

其中 G_1 、 G_2 及 G_3 為與深度 z 有關的變數。(16)式及(17)式即為以任意水深處之速度勢為變數之長波方程式。現在考慮定水深且流場為二維流場，並令水深參數 $m = \frac{z_m}{h}$ ($-1 \leq m \leq 0$)，則上二式可改寫為

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(h + \varepsilon \eta) \frac{\partial \Phi_m}{\partial x} \right] + \mu^2 h^3 H_1 \frac{\partial^4 \Phi_m}{\partial x^4} \\
& + \mu^4 h^5 H_2 \frac{\partial^6 \Phi_m}{\partial x^6} + \varepsilon \mu^2 h^2 H_3 \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \frac{\partial^3 \Phi_m}{\partial x^3} \right] = 0
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} + \eta + \mu^2 h^2 H_3 \frac{\partial^3 \Phi_m}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial x} \right)^2 \\
& + \mu^4 h^4 H_4 \frac{\partial^5 \Phi_m}{\partial x^4 \partial t} + \varepsilon \mu^2 \left[-h \eta \frac{\partial^3 \Phi_m}{\partial x^2 \partial t} + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial x^2} \right)^2 \right] = 0
\end{aligned} \tag{19}$$

其中

$$H_1 = \frac{1}{2} m^2 + m + \frac{1}{3} \tag{20a}$$

$$H_2 = \frac{5}{24} m^4 + \frac{5}{6} m^3 + \frac{7}{6} m^2 + \frac{2}{3} m + \frac{2}{15} \tag{20b}$$

$$H_3 = \frac{1}{2} m^2 + m \tag{20c}$$

$$H_4 = \frac{5}{24} m^4 + \frac{5}{6} m^3 + m^2 + \frac{1}{3} m \tag{20d}$$

(16)、(17)式及(18)、(19)式即為以任意水深之速度勢為變數之弱非線性長

波方程式，在此吾人稱其為「新布氏方程式」。

2.3 分散關係式

將(18)式及(19)式還原為有因次之線性方程式組如下所示(此節為表示簡明起見，將略去有因次變數之“^”)。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial x^2} + h^3 H_1 \frac{\partial^4 \Phi_m}{\partial x^4} + h^5 H_2 \frac{\partial^6 \Phi_m}{\partial x^6} = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} + g \eta + h^2 H_3 \frac{\partial^3 \Phi_m}{\partial x^2 \partial t} + h^4 H_4 \frac{\partial^5 \Phi_m}{\partial x^4 \partial t} = 0 \tag{22}$$

由前述之分析方法可得分散關係式為

$$\omega^2 = g k^2 h \left[\frac{1 - H_1 (kh)^2 + H_2 (kh)^4}{1 - H_3 (kh)^2 + H_4 (kh)^4} \right] \tag{23}$$

或

$$C^2 = gh \left[\frac{1 - H_1 (kh)^2 + H_2 (kh)^4}{1 - H_3 (kh)^2 + H_4 (kh)^4} \right] \tag{24}$$

考慮 $kh < 1$ ，可得精度至 $O(\mu^4)$ 之分散關係式為

$$C^2 = gh \cdot \left[1 - \frac{1}{3} (kh)^2 + \frac{2}{15} (kh)^4 \right] + O(\mu^6) \tag{25}$$

2.4 新布氏方程式的適用範圍

「新布氏方程式」的最佳優點就是可將長波方程式的適用範圍擴至最廣。圖一表示了精度至 $O(\mu^2)$ 之「新布氏方程式」相速度 C_m 與線性史托克波相速度 C_{LS} 於不同水深中的關係。由此圖吾人可以發現傳統布氏方程式之相速度 C_B 和 C_{LS} 的差異性在 $kh=5$ 處會到達 26.8%，故傳統的布氏方程式並不適用於深水區。而由本文所推導而得的「新布氏方程式」，藉由比較 C_m 與 C_{LS} 的差異性，我們可以選擇適當的可以適當的 m 值，讓淺水區的「新布氏方程式」亦可適用於深水區，其

最適化情形將發生於 m 值為 -0.510 時。圖 2 則是精度至 $O(\mu^4)$ 之「新布氏方程式」相速度 C_m 與線性史托克波相速度 C_{LS} 於不同水深中的關係，其最適化情形將發生於 m 值為 -0.624 處。下表則為綜合比較關係表。

	最適化之 m 值	與線性史托克波最大差異值
$O(\mu^2)$ 相速度	-0.510	1.61%
$O(\mu^4)$ 群速度	-0.624	2.56%
$O(\mu^2)$ 群速度	-0.490	11.38%
$O(\mu^4)$ 群速度	-0.613	12.69%

$$0 < kh < 5$$

四、結論

任意水深處速度勢型態且精度至 $O(\mu^4)$ 之「新布氏方程式」，不但滿足於淺水區內可以更精準的描述波浪機制，藉由選取適當的水深參數 m 值，可以將其進一步應用至較深水域的情況。考慮在 $0 < kh < 5$ 的範圍時，當 m 值介於 -0.510 及 -0.490 時，可獲得精度至 $O(\mu^2)$ 之最適化長波方程式。而精度至 $O(\mu^4)$ 之「新布氏方程式」則在 m 值介於 -0.613 及 -0.624 時可獲得最適化長波方程式。在其餘不同水深處，亦可以藉由 m 值的選取而獲得該處之最適化長波方程式組。當最佳化長波

方程式尋得之後，便可以對孤立波進行進一步的探討。

五、附圖

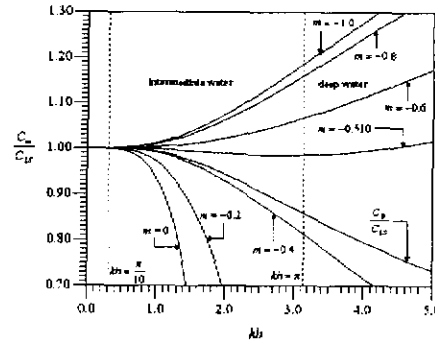


圖1. $O(\mu^2)$ 新布氏方程式與線性波關係

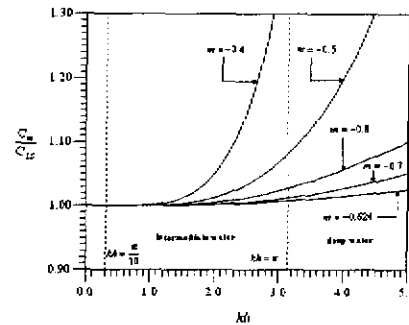


圖2. $O(\mu^4)$ 新布氏方程式與線性波關係