

行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告

多孔質吸音材與隔音障板組合之吸音與隔音特性研究

計劃編號：NSC 90-2611-E-002-023

國立台灣大學造船及海洋工程學系

計劃主持人：王昭男

研究助理：阮建富

摘要

本文乃探討多孔材與隔音板組合材料之吸音與隔音特性。我們利用 Biot 彈性理論建立多孔材兩端應力與速度之矩陣轉換關係，進而計算聲音入射此組合材料之吸音率與穿透損失。文中亦進行實驗測量單層鋁板與不同厚度、密度多孔材組合之穿透損失，實驗結果與理論計算值相似，故可證明此理論模式的正確性。最後我們再針對不同的組合方式作材料吸音與隔音效果之分析。

一、前言

由於多孔材內部纖維之幾何結構十分複雜，故聲音在多孔材中的波傳特性不易求得，因此 Zwicker 和 Kosten 首先分別對黏性與熱效應在圓形管柱中的影響建立一簡單的模型[1]，Stinson 進而提出黏性與熱效應之關係以估算管中流體之有效密度與體積模數[2]，Attenborough 亦對多孔材進行微觀的討論，提出了楊氏係數、蒲松比、體積密度、孔隙率、曲折度及流動阻抗之參數[3]。然而上述之研究皆假設材料為剛性結構體，Biot 在 1956 年提出充滿流體之多孔彈性體的波傳理論[4-5]，Brekovskikh 也在 1960 年為彈性固體中的速度與壓力關係建

立一轉換矩陣[6]，之後 Allard 等人則以彈性理論建立多孔材的轉換矩陣關係[7]。

文中隨著不同的多孔材與隔音板之組合方式，建立材料間速度與應力關係之轉換矩陣，估算聲音任意角度入射此複合材料之吸音率與穿透損失，並與實驗結果比較驗證之。

二、彈性多孔材理論分析

依據 Biot 之推導，在多孔材中的應力與應變關係可表示為：

結構體：

$$t_{ij}^s = [(P - 2N)_r^s + Q_r^f] u_{ij} + 2N e_{ij}^s$$

流體：

$$t_{ij}^f = (-W p) = Q_r^f + R_r^s$$

其中 N 為材料的剪力模數， P 、 Q 、 R 為彈性係數，可由 Biot 所提出的三個實驗來估算[8]。此外 Biot 亦引入在流體與結構體間有慣性力相互作用的觀念，此慣性力與流體之黏性無關，可表示為

結構體：

$$q_i^s = (\dots_1 + \dots_a) \ddot{u}_i^s - \dots_a \ddot{u}_i^f$$

流體：

$$q_i^f = -\dots_a \ddot{u}_i^s + (W \dots_0 + \dots_a) \ddot{u}_i^f$$

而與流體黏性相關之作用力項可表示為

$$X_i = -t\omega^2 G(\tilde{S}) \frac{\partial}{\partial t} (\dot{u}_i^s - \dot{u}_i^f)$$

將這些作用力分別代入運動方程式中，得到一組方程式如下：

結構體：

$$\begin{aligned} & -\tilde{S}^2 (\tilde{\dots}_{11} \mathbf{u}^s + \tilde{\dots}_{12} \mathbf{u}^f) \\ & = (P - N) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^s + N \nabla^2 \mathbf{u}^s + Q \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^f \end{aligned}$$

流體：

$$\begin{aligned} & -\tilde{S}^2 (\tilde{\dots}_{22} \mathbf{u}^f + \tilde{\dots}_{12} \mathbf{u}^s) \\ & = R \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^f + Q \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^s \end{aligned}$$

如同在彈性固體的情況一樣，可利用純量與向量位移勢能分別得到多孔材中壓縮波與剪力波之波動方程式。

假設結構體與流體之純量位移勢能為 ζ^s 與 ζ^f ，因此 $\mathbf{u}^s = \nabla \zeta^s$ 且 $\mathbf{u}^f = \nabla \zeta^f$ ，則運動方程式成為

$$\begin{aligned} & -\tilde{S}^2 (\tilde{\dots}_{11} \zeta^s + \tilde{\dots}_{12} \zeta^f) = P \nabla^2 \zeta^s + Q \nabla^2 \zeta^f \\ & -\tilde{S}^2 (\tilde{\dots}_{22} \zeta^f + \tilde{\dots}_{12} \zeta^s) = R \nabla^2 \zeta^f + Q \nabla^2 \zeta^s \end{aligned}$$

求解此聯立方程式可得兩特徵值(此即為兩壓縮波之複數波數的平方值)與兩特徵向量，進而可得到此兩壓縮波之特徵阻抗 (characteristic impedance)。

相同的若假設結構體與空氣之向量位移勢能為 \mathbf{E}^s 與 \mathbf{E}^f ，即 $\mathbf{u}^s = \nabla \times \mathbf{E}^s$ 且 $\mathbf{u}^f = \nabla \times \mathbf{E}^f$ ，則運動方程式成為

$$\begin{aligned} & -\tilde{S}^2 (\tilde{\dots}_{11} \mathbf{E}^s + \tilde{\dots}_{12} \mathbf{E}^f) = N \nabla^2 \mathbf{E}^s \\ & -\tilde{S}^2 \tilde{\dots}_{22} \mathbf{E}^f - \tilde{S}^2 \tilde{\dots}_{12} \mathbf{E}^s = 0 \end{aligned}$$

合併整理得到

$$\nabla^2 \mathbf{E}^s + \frac{\tilde{S}^2}{N} \begin{pmatrix} \tilde{\dots}_{11} & \tilde{\dots}_{22} & -\tilde{\dots}_{12} \\ & & \tilde{\dots}_{22} \end{pmatrix} \mathbf{E}^s = 0$$

利用此方程式亦可求得剪力波之特徵值。

由前述之推導可知聲音在多孔材中傳播，有三種波存在(兩個壓縮波及一個剪力波)，若吸音材為有限厚度，則有反射波形成，因此需選用六個獨立之物理量來描述在聲波在有限厚度吸音材兩邊之關係，此亦下節所要討論之轉換矩陣。

三、轉換矩陣求反射、穿透係數

轉換矩陣 (transfer matrix) 是為建立材料邊界與邊界間的應力、速度關係。有了此轉換矩陣，我們可以任意組合材料，求得聲音在此複合材中的波傳特性，對於材料反射及穿透係數的估算，更是快速、便捷許多。

(1) 多孔材之轉換矩陣

由上節我們可知彈性多孔材內可有兩個壓縮波及一個剪力波，若考慮其反射波，其位移勢能可表示為

$$\begin{aligned} \zeta_i^s &= A_i \exp(j\omega t - k_{i3}x_3 - k_i x_1) + \\ & A_i' \exp(j\omega t + k_{i3}x_3 - k_i x_1) \quad i=1,2 \end{aligned}$$

剪力波：

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2^s &= A_3 \exp(j\omega t - k_{i3}x_3 - k_i x_1) + \\ & A_3' \exp(j\omega t + k_{i3}x_3 - k_i x_1) \end{aligned}$$

文中並未以六個波的振幅為其特徵物理量，吾人另外取六個獨立的物理量，分別為在結構體的二個應力與速度及在流體的壓力與速度，來表示多孔材內的波傳特性。

如圖 1 所示

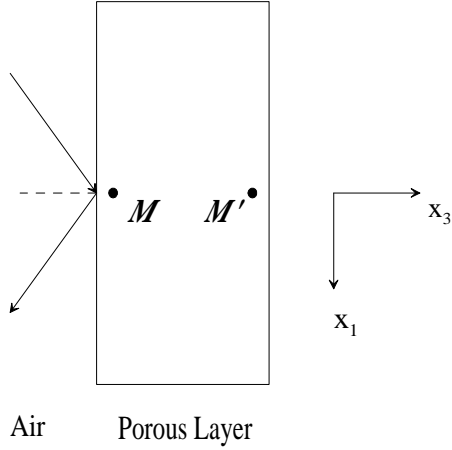


圖 1 多孔材兩端之應力與速度關係

在 M 點之特徵物理量可寫成一矩陣為

$$V(M) = [v_1^s \quad v_3^s \quad v_3^f \quad t_{33}^s \quad t_{13}^s \quad t_{33}^f]^T$$

而在另一端邊界則為 $V(M')$ ，兩者間之關係可用一轉換矩陣 $[T]$ 來表示，即為 $V(M) = [T] V(M')$ 。

其推導的步驟約略為下，令一矩陣為 $A = [(A_1 + A_1') \quad (A_1 - A_1') \quad (A_2 + A_2') \quad (A_2 - A_2') \quad (A_3 + A_3') \quad (A_3 - A_3')]^T$ ，在 M 點建立此矩陣與多孔材中應力、速度所形成之特徵物理量之關係，即 $V(M) = [\Gamma(0)] A$ ；同理在 M' 點之矩陣關係亦可表示為 $V(M') = [\Gamma(l)] A$ 。所以多孔材兩端邊界 M 、 M' 的應力與速度關係可表示為 $V(M) = [\Gamma(0)] [[\Gamma(l)]^{-1} V(M')$ ，其轉換矩陣即為 $[T] = [\Gamma(0)] [[\Gamma(l)]^{-1}$ 。

同理聲音在流體（空氣、水）或彈性固體（鋁板、鐵板...）的轉換矩陣亦可如此推導出。

(2) 材料界面之轉換矩陣

如圖 2，對於不同材料之間的組合，其交界面亦可利用速度與應力的連續條件建立出一轉換矩陣。在彈性體與多孔材之交界面上需符合應力與

速度連續之條件，即

$$[I_{s,p}] V_s(C) + [J_{s,p}] V_p(D) = 0$$

$$\text{其中 } [I_{s,p}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[J_{s,p}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

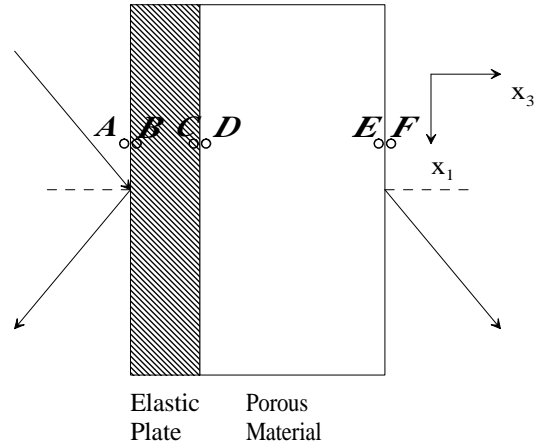


圖 2 不同材料之組合

假設在材料出射面之空氣為半無窮，則表面 F 點之阻抗等於空氣之阻抗，即 $Z_f = p(F) / v_3(F) = Z_c / \cos \theta$ 。

而在材料之入射表面 A 點，其壓力與速度的關係可用一表面阻抗來表示

$$p(A) - Z_a v_3(A) = 0$$

最後將所有的轉換矩陣整理成一組從 A 點到 F 點的矩陣方程，亦即

$$[D] V_D = 0$$

$$\text{其中 } V_D = [p(A) \quad v_3^f(A) \quad V(B) \quad \dots \quad V(E) \quad p(F)]$$

$v^T(F)^T$ 。欲得此連立方程式之解，方陣 $[D]$ 之行列式值必須為零，因此可計算出矩陣內之表面阻抗參數，進而求得此複合材的反射係數 R_a ，再配合穿透係數 $T(\theta)$ 與反射係數之關係

$$\rho(A)[T(\theta)/(1+R_a)] - \rho(B) = 0$$

結合前述矩陣即可求得單一角度入射之穿透係數，若考慮漫散入射則材料之穿透損失可表示為

$$TL = -10 \log_{10} 2 \int_0^{f/2} |T(\theta)|^2 \cos \theta \sin \theta d\theta$$

四、結果與討論

(1) 穿透損失

A. 實驗驗證

本文實驗旨在做隔音板與多孔材組合之穿透損失的測量。隔音板我們採用材質較輕的鋁板，厚度為 1.6mm，多孔材我們選取不同密度與厚度的玻璃棉(glass wool)。表 1 為玻璃棉在不同密度與厚度下，其流動阻抗與孔隙率之關係[11]，此外玻璃棉之曲折度、蒲松比及形狀因子乃參考 Allard[9] 之數據，剪力模數我們以 $10(1+0.1i)$ N/cm² 為參考值。

而在 18°C 之空氣，大氣壓力 $P_0=1.0132 \times 10^5$ Pa，密度 $\rho_0=1.213$ kg/m³，聲速 $c_0=342.2$ m/s，比熱比 $\gamma=1.4$ ，Prandtl 常數 $B^2=0.71$ ，空氣黏性係數 $\eta=1.84 \times 10^{-5}$ [10]。

由圖 3~圖 5 可看出當聲波在低頻時，其誤差值大多在 2 dB 上下，其理論計算之穿透損失與實驗數據的分布結果相近。而在高頻的部分，我們由圖可看出當密度為 24 K 與 32 K 時，其誤差值亦不大，約在 4~5 dB 上下；然而當密度為 48 K 時，其理論計算值比實驗數據高出許多。我們可由表 1 看出

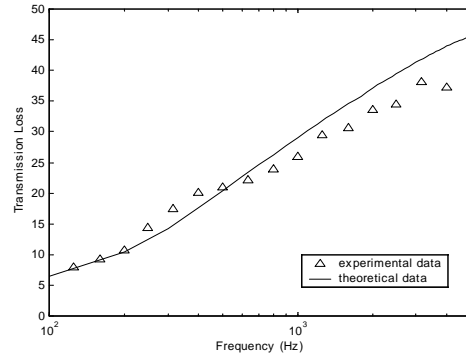


圖 3 厚度 25mm、密度為 24K 之穿透損失

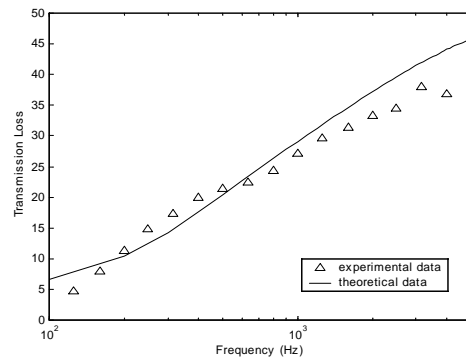


圖 4 厚度 25mm、密度為 32K 之穿透損失

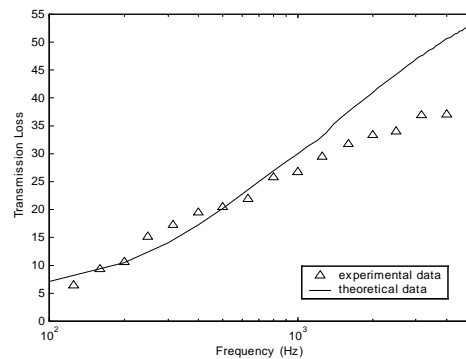


圖 5 厚度 25mm、密度為 48K 之穿透損失

我們所參考玻璃棉在厚度為 25 mm、密度為 48 K 的流動阻抗之數據比其他高出許多，此參考數據可能與我們實驗所用的玻璃棉材料特性有所差異，此外我們可由所有的圖看出，在高頻的實驗數據其穿透損失只能做到 38~40 dB 左右，這與我們的實驗配置、器材、無音箱的隔音效果或有關係，亦可能為我們所計算之數據比實驗值高出甚多的原因。

總括所有圖中其理論計算與實驗數據之穿透損失，我們可以驗證此套理論對於計算聲音的波傳特性，其可靠度還是非常高的。

B. 單層板與多孔材之組合

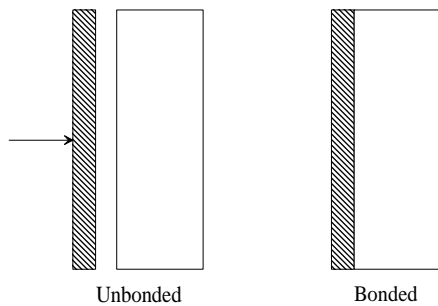


圖 6 單層隔音板與多孔材之組合

以下我們將討論圖 6 單層鋁板與多孔材組合之 bonded 與 unbonded 的隔音效果。多孔材的特性參數列於表 2 之材料 3，鋁板之 Young's modulus 為 $7 \times 10^{10} \text{Pa}$ ，Poisson ratio 為 0.33，密度 2700kg/m^3 ，厚度 1.27mm，在 unbonded 狀況下空氣層之厚度為 2mm。

圖 8 為理論計算鋁板與表 2 之多孔材料 3 在 bonded 與 unbonded 下穿透損失對頻率的關係，與 Bolton 實驗之結果(圖 7)頗為相似，再度證實此理論亦可以準確估算材料的隔音率。

由圖 8 亦可看出在鋁板與多孔材之間加一層空氣層，在約 1kHz 頻率以下兩材料 bonded 的穿透損失比 unbonded 高；但在 1kHz 頻率以上 bonded 材料因為偶合效應 (coincidence) 而導致穿透損失下降，故在高頻時，unbonded 的組合材料其隔音效果比 bonded 好。

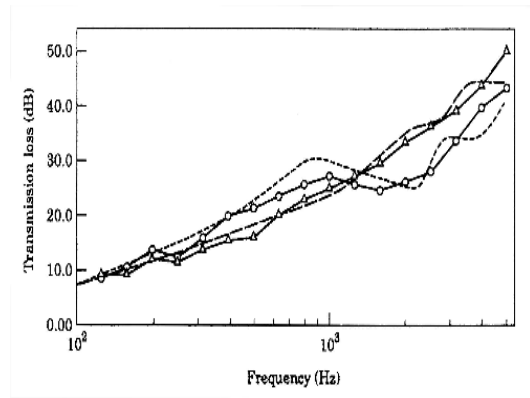


圖 7 鋁板與多孔材在 bonded 與 unbonded 狀況下實驗之穿透損失

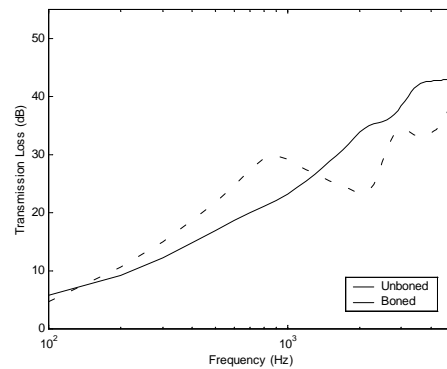


圖 8 鋁板與多孔材在 bonded 與 unbonded 狀況下計算之穿透損失

(2) 吸音率

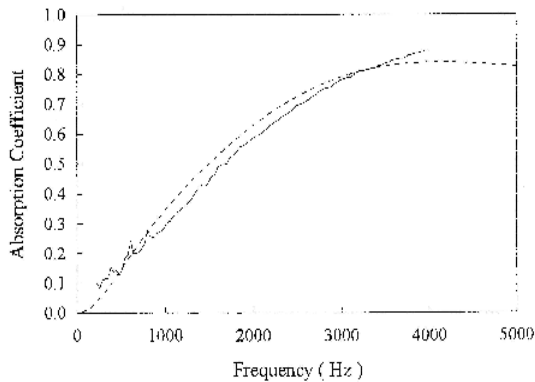
A. 實驗驗證

為驗證本文理論之正確性，文中選取文獻 11 所分析之多孔吸音材進行垂直入射吸音率之驗證(如圖 9 所示)，由圖形之比較可知本文之計算與實驗結果相近，同時與文獻 11 之分析亦相當吻合。

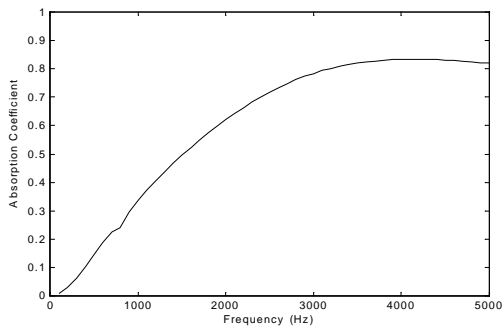
B. 密度變化之影響

我們以表 1 中厚度為 50 mm、密度為 24 K、32 K、48 K 的玻璃棉來進行分析。由圖 10 我們可以看出當密度越高時，多孔材的吸音率亦有提高，但其

效果影響並不明顯。



(a) Ref. [11] 實驗一，理論計算-----



(b) 本文之計算結果

圖 9 彈性理論計算材料之吸音率與文獻[11]之實驗數據比較圖

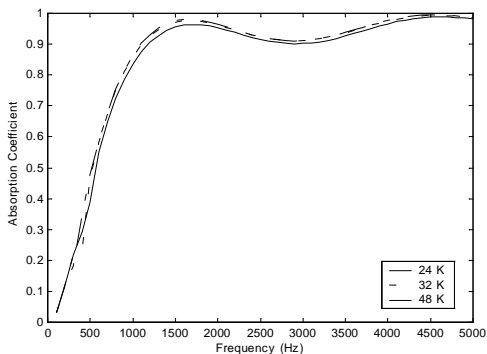


圖 10 多孔材在不同密度下之吸音率

C. 厚度變化之影響

我們以表 1 中密度為 32 K、厚度為 25 mm、50 mm 之玻璃棉來作吸音率之比較。圖中可以明顯看出增加材料厚度時，對於多孔材料在低頻範圍

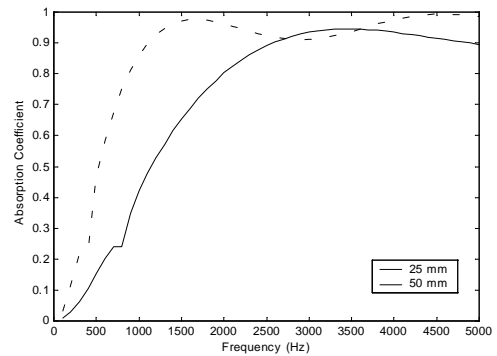


圖 11 多孔材在不同密度下之吸音率

有良好的吸音效果。此外材料在低頻之吸音率有共振現象，此乃剪力模數所致。

五、結語與展望

本文在彈性多孔材之轉換矩陣的建立，為估算組合材料的吸音與隔音性能上，提供一個非常方便且有效的方法，且先經由理論性的估算，不但符合經濟效益，對於材料的吸音與隔音特性亦能有事前的了解與設計。

在 Boit 彈性理論中之彈性係數 P 、 N 、 Q 、 R 的值因材料而異，通常要進行多個實驗之量測，在本文中擬採已發表之數值代入分析，且因僅討論流體之介質為空氣，故算式可予以簡化，因此分析結果與實驗驗證或有些許之誤差。故對於材料特性的研究，可為未來繼續發展的方向，以期可以將此套理論發展的更完整，進而延伸至水下材料的吸音與隔音特性。

參考文獻

1. Zwicker, C. and Kosten, C. W., Sound Absorbing Materials., Elsevier, New York (1949).
2. Stinson, M. R., The propagation of

- plane sound wave in narrow and wide circular tubes, and generalization to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape., J. Acoust. Soc. Amer., 89, 550-558 (1991).
3. Attenborough, K., Acoustical characteristics of porous materials., Physics Reports., 82, 179-227 (1982).
 4. Biot, M. A., The theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range., J. Acoust. Soc. Amer., 28, 168-178 (1956).
 5. Biot, M. A., The theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. High frequency range., J. Acoust. Soc. Amer., 28, 179-191 (1956).
 6. Brekhovskikh, L. M., Waves in Layered Media., Academic Press, New York (1960).
 7. Allard, J. F., Champoux, Y. and Depollier, C., Modelization of layered sound absorbing materials with transfer matrices., J. Acoust. Soc. Amer., 82, 1792-1796 (1987).
 8. Biot, M. A. and Willis, D. G., The elastic coefficients of the theory of consolidation., J. Appl. Mechanics, 24, 594-601 (1957).
 9. Allard, J. F., Depollier, C., Guignouard, P. and Rebillard, P., Effect of a resonance of the frame on the surface impedance of glass wool of high density and stiffness., J. Acoust. Soc. Amer., 89, 999-1001 (1991).
 10. Gary, D. E., American Institute of Physics Handbook, McGraw-Hill, New York (1981).
 11. 佟俊桓, 多孔纖維材質吸音特性之分析研究, 碩士論文 (1999).

表 1 實驗材料(玻璃棉)參數表

	Thickness e (mm)	Density of frame ρ K (kgm^{-3})	Flow resistivity σ (Nm^{-4}s)	Porosity ϕ	Shear modulus N (Ncm^{-2})	Tortuosity α_{∞}	Poisson coefficient ν	Form factors c
1	25	24	13438	0.975	10(1+0.1i)	1.06	0	1
2	25	32	14102	0.9649	10(1+0.1i)	1.06	0	1
3	25	48	47954	0.9518	10(1+0.1i)	1.06	0	1
4	50	24	8172	0.9825	10(1+0.1i)	1.06	0	1
5	50	32	9140	0.9731	10(1+0.1i)	1.06	0	1
6	50	48	9361	0.9627	10(1+0.1i)	1.06	0	1