Journal of Financial Studies Vol.10 No.3 December 2002 (33-61) 33

蒙地卡羅模擬法在美式選擇權評價之應用
Pricing American Options Using Monte Carlo Simulation

張森林 San-Lin Chung *
National Central University
國立中央大學

何振文 Chen-Wen Ho
MasterLink Securities Corporation
元富證券

摘　要

文獻上已有學者利用蒙地卡羅模擬法來評價美式選擇權，其中Barraquand and Martineau（BM, 1995）將資產價格之狀態空間予以分隔，並觀察每條路徑在不同區域間移動的機率，再以類似二項式的方式回推加以求解。Raymar and Zwecher（RZ, 1997）則修正BM的模型，將資產價格之狀態空間分隔成兩個維度以提高估計值的準確性。在本文中，我們發現BM及RZ兩模型對於持有價值的估計有所偏誤，並進一步提出修正模型，模擬分析的結果顯示：（1）、修正模型較BM模型或RZ模型而言，可以增加對於美式選擇權價值估計的準確程度；（2）、不同的區塊分隔方式以及不同的區塊分隔因子會影響到估計值的準確程度和收斂速度；（3）、修正模型對於五種美式選擇權評價均有不錯的效果。

Abstract

This paper modifies Barraquand and Martineau (BM, 1995) and Raymar and Zwecher (RZ, 1997) models to value American options using Monte Carlo simulation. The contribution of this article is threefold. First, we point out that the holding values in the BM and RZ models are biased. We then propose a correction model and show that the point estimate, low estimate, and high estimate of American option values calculated from our model are more accurate than those obtained from the BM and RZ models. Second, we investigate how the bucket formation method and the number of buckets will affect the accuracy and convergence of price estimates. Third, we show that our model is appropriate for valuing many American-style options such as barrier, lookback, and Asian options etc..

關鍵字: 蒙地卡羅模擬法，選擇權評價，美式選擇權，持有價值
Keywords: Monte Carlo simulation, option valuation, American option, holding value

---

* Corresponding Author, Department of Finance, National Central University, Taiwan, R.O.C. Tel: 886-3-4227151 ext. 6263, Fax: 886-3-4252961, e-mail: chungs@mgt.ncu.edu.tw。作者感謝張傳章教授、馬黛教授(主編)及三位匿名評審所提供的寶貴意見，文章中所有錯誤均屬作者的責任。

蒙地卡羅模擬法在美式選擇權評價之應用

壹、前　　言

對於選擇權的評價模型，在學術界以及實務界均是相當受矚目的話題，在70年代以前，一直不能得到令人滿意的評價模型，直到1973年，Black和Scholes兩位學者才在標的資產價格符合幾何布朗運動（geometric Brownian motion）的假設下，成功推導出歐式標準買權及歐式標準賣權的評價模型。但是類似Black and Scholes這類的封閉式解（closed-form solution）畢竟是可遇而不可求，尤其是對於具有提前履約性質的美式選擇權以及許許多多的新奇選擇權（exotic options）而言，到目前為止都沒有所謂的封閉式解，所以僅能藉由數值分析的方法來加以求解。

一般來說，常用的數值分析方法可以區分為三大類，包括了Cox, Ross, and Rubinstein（1979）所推導的二項式模型（binomial tree）、Boyle（1977）所應用之蒙地卡羅模擬（Monte Carlo simulation）以及有限差分法(finite difference method)三種方法。其中，二項式模型屬於後向解法（backward solving），可用來解決美式選擇權提前履約的問題。不過隨著選擇權市場的蓬勃發展，各種新金融商品也隨著市場需求而不斷地推陳出新，一些新奇選擇權的標的資產已不再侷限於單一資產，且到期日的收益（payoff）可能存在路徑相依（path dependent）的特性，此時利用二項式模型來評價可能隨著節點數呈指數增加而變得不可行。而蒙地卡羅模擬在處理多項標的資產以及路徑相依的問題上則相當有效且具有彈性。但蒙地卡羅模擬屬於前向解法（forward solving），基於此一特性，Hull（1993）提出蒙地卡羅模擬只能用於評價歐式之衍生性證券。

這個問題直到Tilley（1993）首先提出利用蒙地卡羅模擬來解決美式選擇權提前履約的問題後，才初步獲得解決。陸續也有許多學者相繼提出解決之道，包括Barraquand and Martineau（1995）、Grant, Vora, and Weeks（1996）、Broadie and Glasserman（1997）、Raymar and Zwecher（1997）等。綜合而言，上述各種方法都是分兩階段（或三階段）進行模擬，第一階段先設法找出美式選擇權在未來各個時點各種股價下的持有價值(holding value)，以決定臨界股價(critical exercise price)為何，此階段通常只做少數路徑（如2000條路徑）的模擬。第二階段時則進行大量路徑的模擬，並且依照第一階段所決定的臨界股價來判斷是否提前履約

，將每一條路徑對應之收益值以無風險利率折現[1]後再加以平均，即可求算出美式選擇權價格的一個估計值。

本文的主要貢獻有三:（1）、針對BM模型與RZ模型對於持有價值估計的偏誤提出修正模型，模擬結果顯示修正模型所計算出來美式選擇權價格的點估計值、上限和下限都較BM模型或RZ模型準確；（2）、本文分析不同的區塊(bucket)分隔方式以及不同的區塊分隔因子(factor)對於美式選擇權價格估計值準確程度和收斂速度的影響；（3）、將修正模型廣泛應用於五種美式選擇權的評價，結果顯示修正模型適用於各種型態的選擇權。

本文共分為五節，除了前言之外，第二節首先簡單介紹蒙地卡羅模擬如何應用於選擇權之評價上，並將重心放在與本文極具相關性之Barraquand and Martineau（BM, 1995）與Raymar and Zwecher（RZ, 1997）兩模型之探討。第三節則針對BM模型與RZ模型對於持有價值估計的偏誤提出改進之道，發展出修正模型，並進一步將原模型與修正模型應用於美式標準買權之結果加以分析。第四節則是探討在不同的區塊分隔方式以及不同的區塊分隔因子下，利用蒙地卡羅模擬評價五種美式選擇權之結果與分析[2]。最後一節為本文之結論與建議。

貳、文獻回顧

一、蒙地卡羅模擬之簡介

蒙地卡羅模擬是數值方法的一種，乃是對於衍生性商品標的資產價格變動之隨機過程進行模擬，並進而求算出此一衍生性商品的價值。假設有一衍生性商品，其收益可能不僅受到到期日（date T）資產價格的影響，也可能受到從發行日（date 0）至到期日間資產價格的路徑所影響，故此一衍生性商品在到期日的收益為 $f(S_0,....,S_T)$，其中 $S_0,....,S_T$ 為自發行日至到期日間資產價格所行經的路徑， $f(\bullet)$ 為此一衍生性商品的收益函數。則此一衍生性商品在發行日之價值為

$$f=\hat{E}[e^{-\int_o^T r(\tau)d\tau}\cdot f(S_0,....,S_T)] \tag{1}$$

[1] 應注意如果有提前履約的情況，其折現天數是從起始日到履約日，而非從起始日到到期日。

[2] 本文所評價之美式選擇權，嚴格來說為有限提前履約機會的百慕達選擇權（Bermudan options），而非真正的美式選擇權，然而當提前履約機會次數很大時（例如20次），兩者的價格將非常接近。

其中 $\hat{E}$ 為風險中立下之期望值，r(τ)為時間 τ 之瞬間即期利率（instantaneous short rate），若假設短期無風險利率為常數，則（1）式可簡化為

$$f = e^{-rT} \cdot \hat{E}[f(S_0,....,S_T)] \tag{2}$$

而蒙地卡羅模擬法即是利用（1）式或（2）式，來對衍生性商品進行評價之方法。

若影響衍生性商品價值的標的資產僅有一個，如股票選擇權，此時假設其標的股票價格服從幾何布朗運動

$$\frac{dS}{S} = \mu\, dt + \sigma\, \mathrm{dZ} \tag{3}$$

其中dS為短時間內股價之變動，μ為單位時間內股票之報酬率，σ為單位時間內股價之波動性，Z為Wiener process。利用Ito's Lemma可將（3）式改寫成

$$d \ln S = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\, dt + \sigma\, \mathrm{dZ} \tag{4}$$

亦即ln S在一段時間內（如時點t至T）之變動，乃服從一常態分配：

$$\ln S_T - \ln S_t \sim \phi[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t), \sigma\sqrt{\mathrm{T - t}}] \tag{5}$$

其中ψ(m , s)是平均數為m，標準差為s之常態分配，在風險中立之評價下（risk-neutral valuation），我們以無風險利率r代替 μ

$$\ln S_T \sim \phi[\ln S_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t), \sigma\sqrt{\mathrm{T - t}}] \tag{6}$$

故在時點T之股價可表示為

$$S_T = S_t \cdot \exp[(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma\sqrt{T-t} \cdot \varepsilon] \tag{7}$$

其中ε為自平均數為0，標準差為1之標準常態分配中所抽取之隨機樣本。在股價模擬時，將選擇權的存續期間分割成N期，每期皆為Δt（＝T/N），然後自標準常態分配中抽出N個獨立之隨機樣本後，依據（7）式即可計算出在時點0，Δt，2Δt，....，T時之股價，如此便產生一條股價模擬之路徑，並可以求算其收益值。在本文中產生亂數的方法是依據Press et al.（1992）所提供的Ran 2演算法，此演算法所產生之亂數為符合均勻分配（uniform distribution）之亂數。因此必須將這些亂數轉換為符合標準常態分配後才可進一步地進行模擬，變數轉換方法請參考附錄A。如同上述每一條股價路徑與收益值之計算過程，即稱為一次的模擬試行（simulation trial）。在經過大量的模擬試行之後，如50,000次，可以得到50,000條股價變動的路徑及其對應的選擇權收益值，此時我們可以利用（2）式來計算選擇權之價值，將模擬所得之50,000個收益值予以平均，得出$\hat{E}[f(S_0,....,S_T)]$，再以無風險利率折現，即可求算出該選擇權價值的一個估計值。

二、蒙地卡羅模擬用於美式選擇權之評價

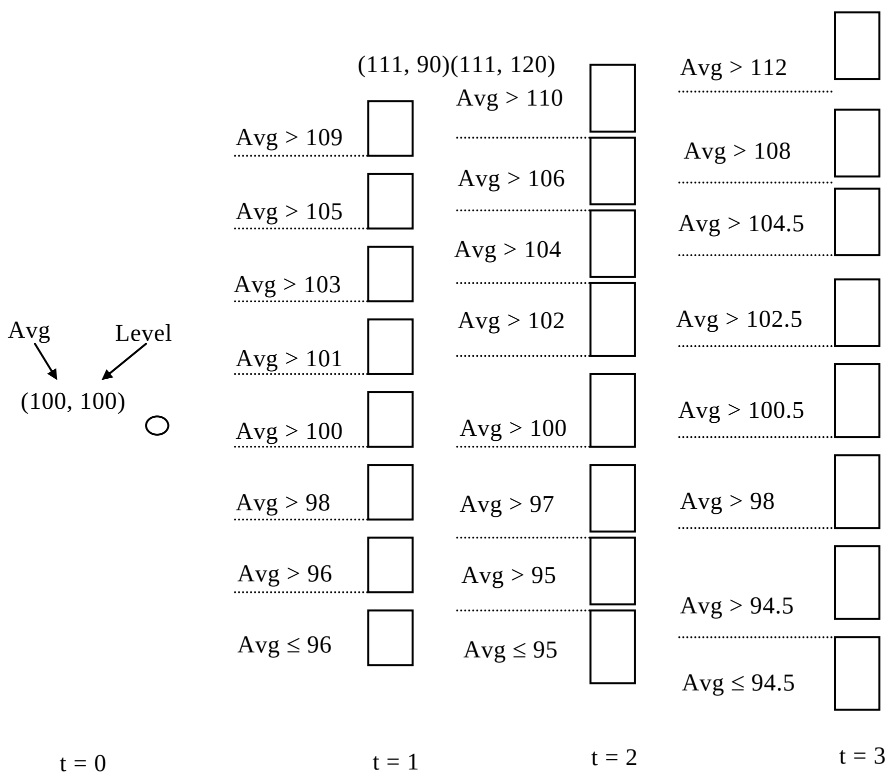
文獻上利用蒙地卡羅模擬來評價美式選擇權之文章最早為Tilley（1993）提出利用蒙地卡羅模擬來解決美式選擇權提前履約的問題，其方法是紀錄標的資產價格變動的路徑並利用排序的方式，來估計提前履約的決策是否為最適。其後陸續有許多學者也相繼提出解決之道，包括Barraquand and Martineau（1995）將資產價格之狀態空間（state space）予以分隔，並觀察每條路徑在不同區域間移動的機率，再以類似二項式的方式回推加以求解。Grant, Vora, and Weeks（1996）則是利用尋找臨界股價的方式來決定提前履約之決策。Broadie and Glasserman（1997）利用樹狀法來決定是否提前履約，並找出兩個估計值，一個為高估值（high estimator），另一則為低估值（low estimator），利用兩個估計值來找出選擇權價值的信賴區間。Raymar and Zwecher（1997）則是修正Barraquand and Martineau（1995）的模型，將資產價格之狀態空間分隔成兩個維度，然後同樣觀察每條路徑在不同區域間移動的機率，再以類似二項式的方式回推來加以求解。

由於本文和Barraquand and Martineau（1995）及Raymar and Zwecher（1997）兩篇文章有極為密切之關係，故在此詳細介紹之。

(一)Barraquand and Martineau（BM, 1995）模型

圖一為BM模型下，美式算術平均價格買權分成三期，每期分隔成八

個區塊的簡單例子。在圖中將每期分隔成八個區塊，並在每一期把所有路徑的算術平均股價由大至小依序排列，以決定出每一區塊的分隔點以使得每一期都有相同數目的路徑落入每一個區塊內。故在此例中有12.5%的路徑其算術平均股價在第一期時大於109，12.5%的路徑其算術平均股價在第一期時介於(105,109]之間，12.5%的路徑其算術平均股價在第一期時介於(103,105]之間，以此類推。此一分隔點的選定會受到參數的不同而有所差異。分隔點決定之後，接下來便可以計算出在第t期落入每一區塊的路徑在第t＋1期時移至每一個區塊的移轉機率（transition probability），此一移轉機率將在之後用來回推估計選擇權的價值。需特別注意的是，有許多的移轉機率值為0，例如當第一期算術平均股價落入最高的區塊時，不太可能在第二期算術平均股價落入最低的區塊之中。



Avg：算術平均股價，Level：當期股價

圖1　BM模型下，美式算術平均價格買權之區塊分隔

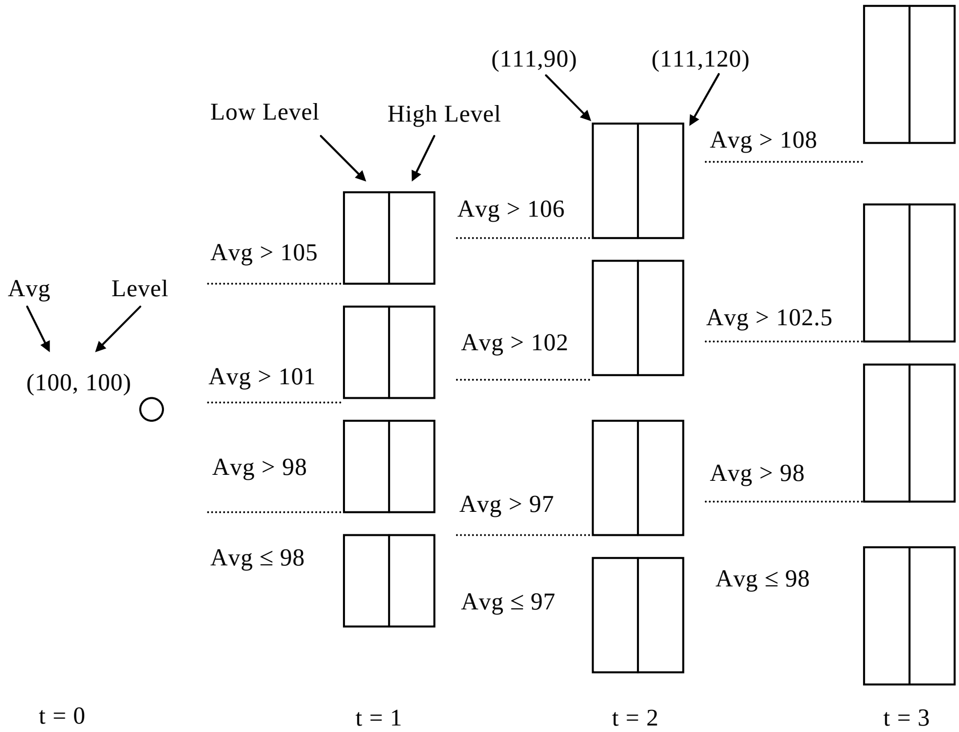
每一個區塊的提前履約價值（early exercise value）為此一區塊內所有路徑履約價值的平均值，所以在第三期時，可以計算出八個區塊的履約價值，由於是最後一期，所以此一履約價值即為該區塊的選擇權價值。接著往前回推至第二期，針對第二期每一個區塊來比較提前履約價值和持有價值以決定該區塊之選擇權價值，提前履約價值的算法同第三期，持有價值的算法則是計算下一期（第三期）選擇權價值期望值之折現值，也就是將移轉機率乘上對應之下一期每一區塊的選擇權價值再予以折現。若提前履約價值大於持有價值，代表該區塊應提前履約，故提前履約價值即為此一區塊的選擇權價值；相反地，若持有價值大於提前履約價值，代表該區塊不應提前履約，則持有價值即為此一區塊的選擇權價值。繼續重複此一步驟，直至回推至第0期為止，即可算出此一美式選擇權之價值。

BM模型僅根據算術平均股價（即收益）來分隔區塊，如此一來，對於每一區塊內持有價值的估計將有所偏誤，進而造成提前履約決策之錯誤判斷。例如圖一中，在第二期時，（111,90）與（111,120）這兩條路徑由於算術平均股價同為111，故均被分入最上層的區塊內。假設履約價格為100，則（111,90）這條路徑因當期股價僅有90，故有可能在第二期提前履約為最佳履約決策（optimal exercise policy）；而（111,120）這條路徑由於當期股價高達120，所以可能應該繼續持有。但BM模型卻無法將此兩條路徑加以區別，進而造成是否提前履約的決策並非最佳，故估計出來的美式選擇權價值也將不正確。

(二)Raymar and Zwecher（RZ, 1997）模型

針對BM模型的缺點，RZ提出模型加以修正，即對於區塊的分隔，除了收益外，再增加一個因子來對區塊進行分隔，此一因子的選擇必須與美式選擇權的持有價值密切相關。例如前述的美式算術平均價格買權，以算術平均股價作為進行區塊分隔的第一個因子，然後可以選取當期股價作為區塊分隔的第二個因子，如此一來可以降低BM模型對於提前履約決策判斷所造成的偏誤。圖二為RZ模型下，美式算術平均價格買權分成三期，每期先依算術平均股價分成四個區塊，每一區塊再依當期股價分成兩個區塊，總共分隔成八個區塊的例子。在圖中將每期分隔成八個區塊，並在每一期把所有路徑的算術平均股價由大至小依序排列，先分成四個區塊，然後在每一個區塊中，再依當期股價分成兩個區塊。經此分隔之後，(111,90)與(111,120)這兩條路徑將被分在不同的區塊中，如此一來，當期股價高的區塊之持有價值將大於當期股價低的區塊，故在每一區塊判斷是否應提前履約的決策上，將較BM模型來得正確。

此外，相較於BM模型的一階段模擬，RZ提出三階段的模擬過程。第一階段的模擬用來決定每一期每一區塊的分隔點，此一分隔點確定後即不再變動，接下來的第二以及第三階段的模擬皆依照此分隔點來決定每一條路徑所落入的區塊。需要注意的是，由於第二階段與第三階段模擬所用的樣本與第一階段模擬不同，所以每一階段落入每一區塊的路徑數僅大致相等而不會完全相等。假設價格的估計是根據50,000條路徑且每期分隔成100個區塊，則大約有500條路徑落入每一期的每一區塊內，然後便可以依據這些路徑計算出在第t期每一個區塊移至第t＋1期每一個區塊的移轉機率。



Avg：算術平均股價，Level：當期股價

圖2　RZ模型下，美式算術平均價格買權之區塊分隔

第二階段的模擬則是根據另外50,000條路徑以及先前第一階段模擬所決定之區塊分隔點以及移轉機率來計算每一區塊的平均提前履約價值以及持有價值，以判斷在每一區塊是否應提前履約。平均提前履約價值

以及持有價值的計算方法與BM模型相同。最後第三階段的模擬則是再根據另外50,000條路徑以及第二階段模擬所決定的提前履約決策來進行模擬，也就是每一條路徑一旦在某一期落入需提前履約的區塊時，則立刻提前履約，否則便繼續持有，如此一來便可求得該路徑的美式選擇權估計值，最後將50,000條路徑的估計值個別折現後再予以平均，便可求出該次模擬的美式選擇權估計值。之所以要再進行第三階段的模擬，而不從第二階段直接回推求出估計值，是因為Broadie and Glasserman（1997）提出若用同一樣本來決定是否應提前履約的決策以及選擇權價值，將產生高估選擇權價值的現象。原因在於若知道下一期股價的路徑，就買權而言，當預知下一期股價是上漲時，即使在本期應提前履約，但因知道下期股價即將上漲，故可能不會在本期提前履約[3]；同樣地，當預知下一期股價是下跌時，即使在本期不應提前履約，但因知道下期股價即將下跌，故可能會在本期提前履約。這兩種力量均會造成選擇權價值被高估，也就是因為有預知未來股價能力所造成的誤差（foresight bias）。此一預知未來股價的能力所產生的誤差在模擬路徑數不夠多時，高估的情況將會越嚴重。

參、BM模型與RZ模型之修正

不論是BM模型或是RZ模型，如前一節所述，均是利用每一區塊中所有路徑提前履約價值之平均作為該區塊的提前履約價值，再將下一期每一區塊的選擇權價值乘上對應的移轉機率予以折現作為該區塊的持有價值，兩相比較後決定出該區塊的履約決策，亦即落入該區塊的路徑應繼續持有或立刻予以履約。但若每一期分隔的區塊不夠多時，此兩模型對於每一區塊持有價值的估計將有所偏誤，其原因解釋如下。圖三為分成三期，每期分隔成八個區塊的美式標準買權，當往前回推一期時，以區塊A為例，在BM模型與RZ模型下，該區塊的持有價值為區塊C　J的選擇權價值乘上對應移轉機率之折現值，但實際上，第二期落入區塊A的路徑在第三期時，應傾向於落在區塊C　J的上半部，故這些路徑的價值應較其所落入區塊之平均價值來得大，但BM模型與RZ模型卻以每一區塊的平均價值乘上對應之移轉機率予以折現來計算持有價值，造成區塊A的持有價值被低估。如此一來，即使原本區塊A的最佳履約決策為繼續持有，但因其持有價值被低估，有可能造成該區塊的決策變為立刻履約，因而產

[3] 所謂本期應提前履約是因為本期的提前履約價值大於持有價值的期望值，在已知下期股價是上漲的條件下，若持有價值的條件期望值（conditional expectation）大於本期的提前履約價值，將造成持有者不會在本期提前履約。

生了錯誤的決策。位置在越上層的區塊，此一持有價值被低估的現象將越嚴重。同理，第二期落入區塊B的路徑在第三期時，應傾向於落在區塊C　J的下半部，但由於前述兩模型以每一區塊的平均價值來代表所有落入該區塊路徑之價值，因而造成區塊B的持有價值被高估，因此有可能產生錯誤的決策。位置在越下層的區塊，此一持有價值被高估的現象將越嚴重。總而言之，位置在越上層的區塊，其持有價值越傾向於被低估，而位置在越下層的區塊，其持有價值越傾向於被高估

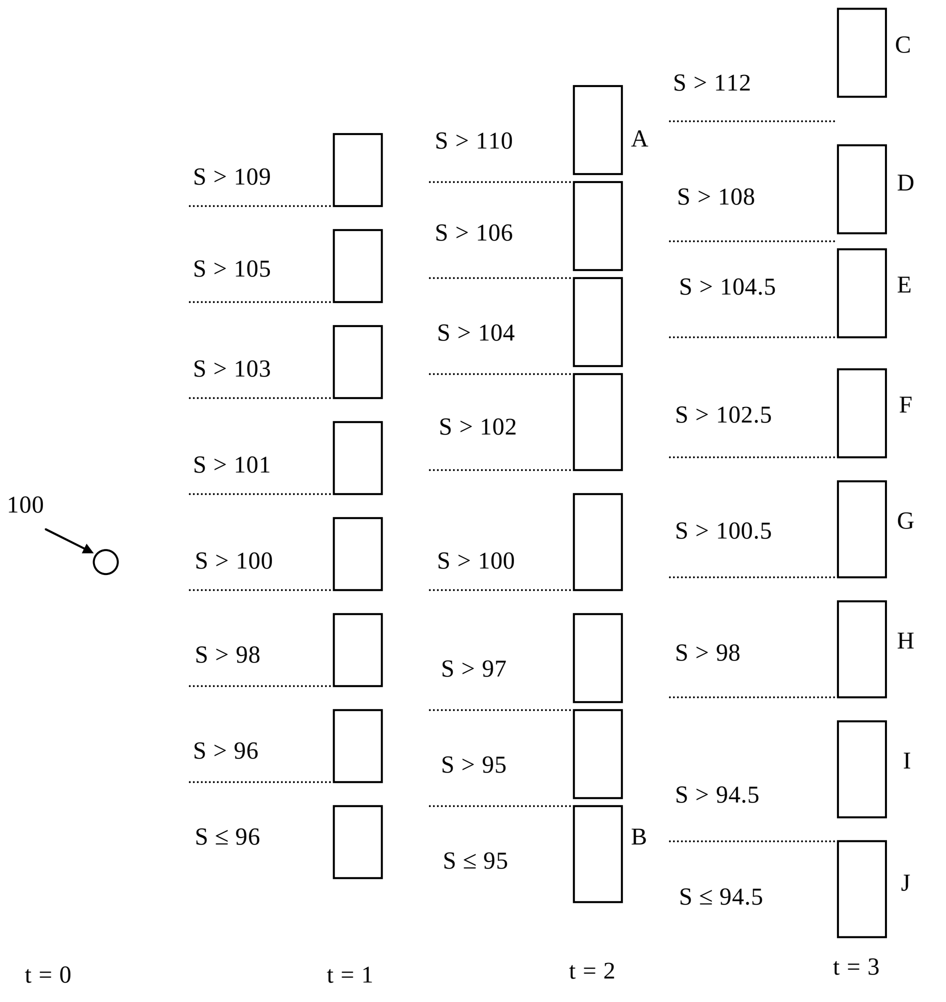


圖3　美式標準買權之區塊分隔

，至於位置在較中間的區塊，持有價值較不會因此而產生偏誤。就買權而言，越上層的區塊其履約價值越大，原本就傾向於提前履約，故持有價值低估對於該區塊選擇權價值的決定以及履約決策的判斷上影響並不大；相反地，越下層的區塊其履約價值越小，原本就傾向於繼續持有，故持有價值高估對於履約決策判斷的影響也不大，但就RZ模型而言，此一持有價值高估的現象將使得這些決策為繼續持有的下層區塊選擇權價值被高估，進而造成第二階段模擬所估計的選擇權價值被高估。所以持有價值估計的偏誤將使得RZ模型下，第二階段模擬的估計值高估，但因持有價值估計的偏誤對履約決策判斷的正確與否影響並不大，所以第三階段模擬所估計的選擇權價值將可能只因少數的錯誤履約決策而略為被低估。

針對上述所提兩模型對於持有價值估計偏誤的缺點，我們在此提出修正模型以改進此一缺點。修正模型與原模型最主要的差別在於對每一區塊持有價值估計方法的不同，修正模型不再利用移轉機率乘上對應區塊的選擇權價值折現來求得持有價值，而是根據落入每一區塊的每一條路徑所對應之下期選擇權價值折現以求得該區塊的平均持有價值[4]。以圖三來說，假設我們利用50,000條路徑來估計美式標準買權的價值，就第三期而言，因其為最後一期，故每一條路徑的履約價值即為該路徑所對應之選擇權價值。接著假設落入A區塊的6,250條路徑中（佔50,000條路徑的12.5%），在第三期有2,500條落入C區塊，2,500條落入D區塊，剩下的1,250條均落入E區塊，如此一來，我們可以將這6,250條路徑在第三期的選擇權價值（即履約價值）一一予以折現，平均後即為區塊A的平均持有價值，至於區塊A的平均提前履約價值算法與前述兩模型相同，也就是將這6,250條路徑在第二期的提前履約價值加總後再平均。最後將這兩個值加以比較，若平均持有價值大於平均提前履約價值，代表應繼續持有，則此6,250條路徑在第二期的選擇權價值即為其在第三期選擇權價值的折現值；相反地，若平均提前履約價值大於平均持有價值，代表應立刻履約，則此6,250條路徑在第二期的選擇權價值即為其個別在第二期的提前履約價值。依照同樣的步驟，一期一期回推回去，便可以求得第二階段模擬所估計的美式標準買權價值以及每一區塊的履約決策。接著利用第二階段模擬所決定的履約決策，再進行第三階段模擬，每一條路徑一旦落入需提前履約的區塊時，則立刻提前履約，否則繼續持有下去直至到期日為止。然後將50,000條路徑的美式標準買權價值一一予以折現後再平均，即可求得第三階段美式標準買權的估計值。

[4] 值得注意的是我們的修正模型和RZ模型的計算速度並無差異，因為RZ的方法一樣需要針對每一區塊下依其路徑的落點逐一紀錄以計算其移轉機率。

為了進一步說明BM模型與RZ模型對於持有價值的錯誤估計所造成的影響，我們以實際的例子來證明其對於持有價值的錯誤估計進而造成選擇權價值估計上的偏誤，並與前述我們所提修正模型之估計值加以比較。假設一美式標準買權其標的資產為發放股利之股票，其期初價格為50元，股利率為每年10%，波動性為每年20%，履約價格為50元，到期期間為1年，無風險利率為每年10%，切割成40期（time steps）。表一為RZ模型與修正模型在不同的分隔區塊下之模擬結果。從表中可以明顯發現，當分隔區塊越少時，RZ模型在第二階段高估的情況越嚴重，這是因為RZ模型在回推的過程中，利用平均價值作為每一區塊的選擇權價值，進而產生了高估下半部區塊持有價值的現象，此一高估程度將隨分隔區塊越少而越明顯，但由於持有價值的估計錯誤對於履約決策的正確性影響並不大，故RZ模型下第三階段模擬估計值低估的情況並不嚴重。而修正模型因解決了對於持有價值錯誤估計的問題，因此不論分隔區塊的多寡，其誤差均在0.4%以下。

從表1來看，區塊數由10、25、50增至100時，本文模型誤差分別為-0.392%、-0.038%、+0.099%、+0.334%呈現上下振動之不穩定現象[5]，造成此種現象的原因可能有二。第一，一般數值方法在其收斂過程中常有上下振動的現象，這在二項樹模型(binomial model)尤其明顯。第二，由於表一的模擬路徑數固定為50000條，當區塊數增加時，每一區塊所包含的路徑個數也會減少，因而可能造成履約判斷錯誤及價格誤差。由表一的結果發現，區塊數增加時，修正模型相對於RZ模型的優點逐漸減少，這很可能是修正模型受到第二點原因影響較大，因此建議在使用修正模型時，增加區塊數時宜同時增加模擬路徑數。

表2為RZ模型與修正模型在不同履約價格下之模擬結果。從表中可以發現，當履約價格越高時，RZ模型在第二階段高估的情況越嚴重，這是因為RZ模型在回推的過程中，高估了下半部區塊的持有價值，當履約價格越高時，越多的區塊不會提前履約，因此在回推的過程中會選擇持有價值作為選擇權價值，故履約價格越高造成越多的區塊持有價值被高估，所以造成第二階段模擬高估的情況越嚴重。而修正模型則不受履約價格的不同所影響，誤差均在0.4%以下。此外，由表一以及表二中也可以發現修正模型的標準差大致上較RZ模型的標準差稍微來得小，這意謂著修正模型在選擇權評價上的穩定性較RZ模型來得高。總結起來，表一和表二的結果顯現：在相同的計算時間下,修正模型明顯改進RZ模型的誤差和上下限估計值的差距。

[5] 感謝匿名評審細心地指出此現象。

表1　RZ模型與修正模型對於美式標準買權價值在不同分隔區塊下之估計值

分隔區塊	評價模型	二階段	三階段	點估計值	二項式估計值	誤　差
10	RZ模型	4.6865 (0.0243)	3.6250 (0.0206)	4.1557	3.6970	12.408%
	修正模型	3.6881 (0.0215)	3.6770 (0.0225)	3.6825	3.6970	-0.392%
25	RZ模型	4.1068 (0.0258)	3.6537 (0.0237)	3.8803	3.6970	4.957%
	修正模型	3.7056 (0.0213)	3.6856 (0.0213)	3.6956	3.6970	-0.038%
50	RZ模型	3.8941 (0.0258)	3.6577 (0.0238)	3.7759	3.6970	2.134%
	修正模型	3.7197 (0.0214)	3.6816 (0.0213)	3.7007	3.6970	0.099%
100	RZ模型	3.7958 (0.0250)	3.6640 (0.0234)	3.7299	3.6970	0.890%
	修正模型	3.7412 (0.0217)	3.6775 (0.0215)	3.7094	3.6970	0.334%

註：　起始日股價為50，履約價格為50，無風險利率為10%（每年），股利率為10%（每年），波動性為20%（每年），選擇權到期期間為1年，切割成40個期間（Time Steps），模擬路　徑 數為50,000條。

二階段為第二階段模擬所得之平均估計值。

三階段為第三階段模擬所得之平均估計值。

點估計值為第二階段模擬與第三階段模擬所得兩估計值之平均值。

二項式估計值為利用樹狀法切40,000期，共40個提前履約機會，即每兩提前履約機會間再切1,000期所得，在此作為比較基準。

誤差為（點估計值－二項式估計值）/二項式估計值。

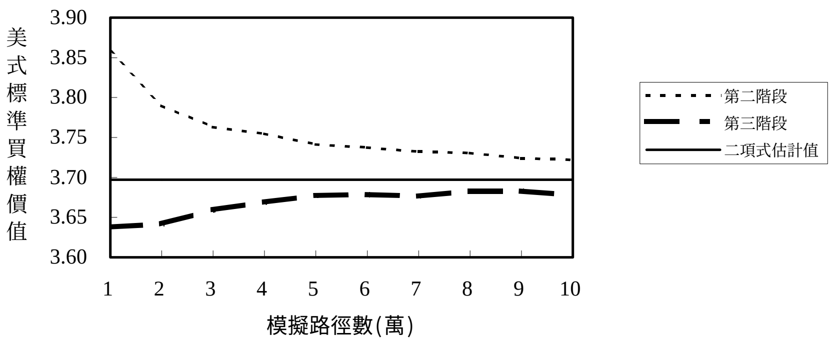
括弧內之數值為進行蒙地卡羅模擬100次之標準差。

表2　RZ模型與修正模型對於美式標準買權價值在不同履約價格下之估計值

履約價格	模型	二階段	三階段	點估計值	二項式估計值	誤　差
45	RZ模型	6.4629 (0.0264)	6.3245 (0.0290)	6.3937	6.3883	0.085%
	修正模型	6.4698 (0.0254)	6.3330 (0.0263)	6.4014	6.3883	0.206%
50	RZ模型	3.7958 (0.0250)	3.6640 (0.0234)	3.7299	3.6970	0.890%
	修正模型	3.7412 (0.0217)	3.6775 (0.0215)	3.7094	3.6970	0.334%
55	RZ模型	2.0785 (0.0201)	1.9565 (0.0188)	2.0175	1.9765	2.070%
	修正模型	1.9998 (0.0178)	1.9616 (0.0174)	1.9807	1.9765	0.211%

註：每期分隔成100個區塊，其餘同表一。

接下來我們藉由模擬路徑數的增加來觀察修正模型的收斂情形。圖四顯示修正模型的誤差隨著模擬路徑數的增加而逐漸減少，當模擬路徑數只有10,000條時，第二階段模擬與第三階段模擬估計值的差距為0.2139元；當模擬路徑數增加到50,000條時，兩者差距縮小至0.0637元；當模擬路徑數再增加到100,000條時，兩者間的差距更進一步縮小至0.0439元。當模擬路徑數較少時，第二階段模擬與第三階段模擬差距較大的原因有二。首先，當模擬路徑數較少時，所模擬的股價不足以代表真正股價的分配，因此第二階段模擬時預知未來股價能力所造成的誤差也就越嚴重，因此高估的情形也越嚴重。第二，根據較少模擬路徑數所決定出的履約策略也較可能不是最佳的履約策略，因此第三階段模擬低估的情況也越嚴重。因此當模擬路徑數增加時，第二階段模擬的估計值逐漸變小，而第三階段模擬的估計值則逐漸加大，兩者有逐漸收斂至真值的現象。



註：起始日股價為50，履約價格為50，無風險利率為10%（每年），股利率為10%（每年），波動性為20%（每年），選擇權到期期間為1年，切割成40個期間（Time Steps），每期分隔成100個區塊。

利用樹狀法切40,000期，共40個提前履約機會，即每兩提前履約機會間再切1,000期所得之二項式估計值為3.6970。

圖4　修正模型下美式標準買權第二階段模擬與第三階段模擬之收斂情形

肆、蒙地卡羅模擬結果與分析

在本文我們利用蒙地卡羅模擬與前一節所介紹之修正模型對於五種美式選擇權進行評價，根據最近文獻上利用其他方法所評價之選擇權價值當作比較基準（benchmark），以分析蒙地卡羅模擬法所得估計值的準

確程度，我們所欲評價之選擇權包括有標準買權、間斷觀察型下終賣權（Duan, Dudley, Gauthier, and Simonato (1999)）、間斷觀察型回顧賣權（Barraquand and Pudet（1996））、算術平均價格買權（Hull and White（1993））以及最大值買權（Raymer and Zwecher (1997)）共五種選擇權。其中標準買權及最大值買權屬於路徑獨立選擇權，即其收益僅會受到到期日或履約日資產價格所影響，與到期前或履約前資產價格之路徑無關。而其餘三種選擇權則為路徑相依選擇權，即其收益不僅受到期日或履約日資產價格影響，還會受到期前或履約前資產價格之路徑所影響。以下分別簡單介紹這五種選擇權在到期日或履約日的收益函數。

一、標準買權（plain vanilla call option）

$$\text{標準買權價值} = \text{Max}(S_t - X, 0) \tag{8}$$

其中S_t為標的資產在t時的價格，X則為此一標準買權之履約價格。

二、間斷觀察型下終賣權(discretely monitored down-and-out put option)

間斷觀察型下終賣權價值

$$= \begin{cases} Max(X - S_t, 0) & \text{當所有時點 } \tau, S_\tau > H \\ 0 & \text{當任何時點 } \tau, S_\tau \le H \end{cases} \tag{9}$$

其中S_t為標的資產在t時的價格，X則為此一下終賣權之履約價格，τ為任一觀察時點，H為此一下終賣權之界限，即一但存續期間內任一觀察時點的股價低於H，則此一下終賣權隨即失效。

三、間斷觀察型回顧賣權（discretely monitored lookback put option）

$$\text{間斷觀察型回顧賣權價值} = \text{Max}(S_t^{Max} - S_t, 0) \tag{10}$$

其中S_t^{Max}為截至t時所觀察到股價之最大值，S_t則為t時之股價。

四、算術平均價格買權（arithmetic average price call option）

$$\text{算術平均價格買權價值} = \text{Max}(\overline{S}_t - X, 0) \tag{11}$$

其中$\overline{S}_t$為截至t時每一觀察時點股價之算術平均，X則為此一算術平均價

格買權之履約價格。

五、最大值買權（maximum of two asset call option）

$$\text{最大值買權價值} = \text{Max}[\ \text{Max}(S_{1,t}\ ,\ S_{2,t}) - X\ ,\ 0\ ] \tag{12}$$

其中$S_{1,t}$及$S_{2,t}$分別為兩標的資產在t時的價格，X則為此一最大值買權之履約價格。

表3　表6主要觀察在不同區塊分隔方式及不同區塊分隔因子下，利用修正模型評價美式下終賣權、美式回顧賣權、美式算術平均價格買權以及美式最大值買權的準確程度，有關美式標準買權的部分請參見表2。我們將每一期分隔成100個區塊，分隔原則是先依據第一個因子分隔成m個區塊，再將這m個區塊依據第二個因子再個別分隔成n個區塊，以m×n來表示，我們共探討100×1、20×5、5×20以及2×50四種區塊分隔方式。我們先利用50,000條路徑進行第一階段模擬，決定出每一區塊的分隔點，此一分隔點將用於之後的第二以及第三階段模擬。再利用另外50,000條路徑進行第二階段模擬，決定出每一區塊的履約決策，並同時計算出第二階段模擬的選擇權估計值。最後再利用另外50,000條路徑進行第三階段模擬，並利用第二階段模擬決定出的履約決策，估計出選擇權價值。由於第二階段估計值存在著預知未來股價能力的偏誤，因此有高估的現象，而第三階段模擬可能因提前履約決策並非最佳，因此有低估實際值的現象，於是我們將第二階段與第三階段所得的估計值加以平均，作為我們對於美式選擇權價值的點估計值。此一方法與Broadie and Glasserman（1997）的做法類似，其以模擬法建立股價樹（stock price tree），若提前履約與否的決策與美式選擇權價格的估計用的是同一樣本，則產生高估的估計值；若用的是不同樣本，則得到低估的估計值，然後將兩者平均作為點估計值。

在我們欲評價的五種美式選擇權中，其中美式標準買權及美式下終賣權除了股價外，沒有其他因子可以影響其提前履約決策的判斷，故對於美式標準買權及美式下終賣權僅依據股價來作區塊的分隔因子。而美式回顧賣權的部分，Raymar and Zwecher（1996）是以過去最高股價作為第一個因子，而以當期股價作為第二個因子。但我們認為影響美式回顧賣權提前履約與否的關鍵因素應該是此賣權價內的程度，Hull（1993）也曾提出利用價內程度來建構二項樹，相較於利用股價建構而言，計算上將較有效率。而Raymar and Zwecher（1996）的區塊分隔法可能無法完全捕捉到美式回顧賣權價內的程度，進而造成評價上的誤差，因此我們另

外以兩種區塊分隔法來加以比較。一為以過去最高股價減去當期股價作為第一個因子，再以當期股價作為第二個因子；另一則是以過去最高股價除以當期股價（即價內程度）作為第一個因子，然後再以當期股價作為第二個因子[6]。至於美式算術平均價格買權，除了算術平均股價會影響其提前履約與否外，當期股價也是影響持有價值進而影響提前履約與否的關鍵因素，因此，我們首先以算術平均股價作為區塊分隔的第一個因子，再以當期股價作為區塊分隔的第二個因子。至於有關美式最大值買權，Raymar and Zwecher（1997）是以最高股價作為第一個因子，而以最低股價作為第二個因子。不過我們認為影響美式最大值買權提前履約與否的因素除了價內程度外，兩股票間價格差距的程度應該是影響持有價值的關鍵因素。當價內程度相同時，若兩股票間差距的程度越大，則持有價值越小，越有可能提前履約，因此我們也另外採用兩種區塊分隔法來加以比較，一種是以最高股價作為第一個因子，再以最高股價與最低股價的差作為第二個因子；另一種則是以最高股價作為第一個因子，然後以最高股價與最低股價的比值作為第二個因子。

由表2可以發現利用修正模型評價美式標準買權的準確程度相當高，誤差均在0.4%以下，其中以價平買權的誤差最大，可能的原因為修正模型對於每一區塊是否應提前履約的判斷上，當該區塊屬於價內（價外）程度很高時，提前履約價值（持有價值）明顯大於持有價值（提前履約價值），則提前履約（繼續持有）的判斷不會有問題，但當該區塊屬於價內（價外）程度不高時，由於提前履約價值與持有價值兩者差距不大，因此當每一區塊的路徑數不夠多時，可能不足以完全代表股價真正的分配，因而容易造成提前履約與否的決策判斷錯誤，進而產生錯誤的履約決策而影響了選擇權價值的估計。而價平買權，因大部分這些容易判斷錯誤的區塊都位於較中間的區塊上，而中間的區塊因分隔點較為密集，所以判斷錯誤的區塊數也可能較多[7]，因此在回推的過程中對於選擇權價值的影響就越大，故錯誤判斷對於價平買權的影響較大。而價內（價外）買權，因大部分這些容易判斷錯誤的區塊位於中間偏下（中間偏上）的區塊上，因此錯誤判斷對於選擇權價值估計的影響較小，故誤差

[6] 就美式回顧賣權而言，三種不同的區塊分隔法在第一階段模擬的分隔點選取上均會產生在某些時點有許多路徑其第一個因子之值皆相同的問題，例如第一種區塊分隔法，也就是以過去最高股價作為第一個因子，再以當期股價作為第二個因子時，在第一期大約有一半的路徑其過去最高股價均為起始股價，發生這種情況時，這些路徑就僅以第二個因子，也就是當期股價來分隔區塊，以使得每一期的總區塊數維持在100個。

[7] 因每一區塊內的路徑數皆相同，而股價分配集中在中間的區塊附近，因此中間區塊的分隔點將較為密集，故中間每一區塊的平均提前履約價值皆相當接近，所以持有價值估計的正確與否將大大影響這些區塊對於提前履約與否決策的判斷，因此在每一區塊的路徑數不夠多時，可能不足以代表股價真正的分配，進而造成較多中間區塊提前履約決策的判斷錯誤。

相對較小。不過總體而言，修正模型對於美式標準買權的評價有相當不錯的效果。

此外，由表2的結果我們可以發現，修正模型對於RZ原有模型的修正在out-of-the-money的選擇權時最明顯，誤差由RZ模型的2.07%降為0.21%，因此修正模型相對上特別適用於out-of-the-money options。

由表3可以得知利用修正模型評價美式下終賣權的準確程度也相當高，對於不同的界限值（barrier），誤差均在0.2%以下。而且高估值（第二階段模擬估計值）和低估值（第三階段模擬估計值）也含括了DDGS的估計值。

表3　修正模型評價美式間斷觀察型下終賣權之準確程度

界限	二階段	三階段	點估計值	DDGS 估計值	誤差
85	2.8420 (0.0171)	2.8005 (0.0181)	2.8212	2.8158	0.192%
93	2.6145 (0.0123)	2.6043 (0.0127)	2.6094	2.6099	-0.020%
99	0.2861 (0.0014)	0.2858 (0.0014)	0.2860	0.2862	-0.086%

註：起始日股價為100，履約價格為100，無風險利率為10%（每年），標的資產無任何孳息，波動性為20%（每年），選擇權到期期間為0.2年，切割成50個期間（Time Steps），模擬路徑數為50,000條。

二階段為第二階段模擬所得之平均估計值。

三階段為第三階段模擬所得之平均估計值。

點估計值為第二階段模擬與第三階段模擬所得兩估計值之平均值。

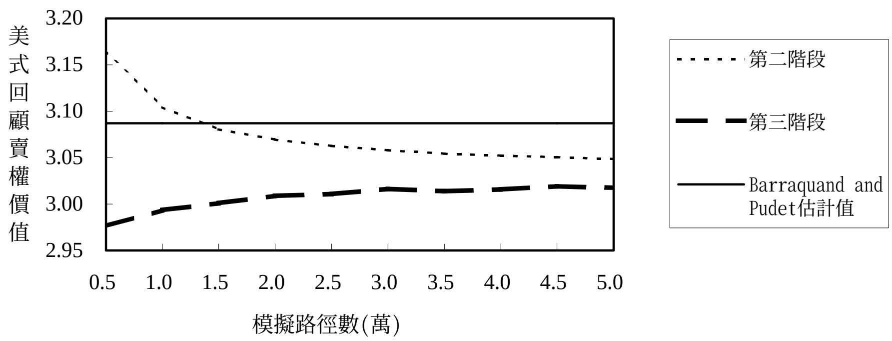
DDGS估計值取自Duan, Dudley, Gauthier, and Simonato (1999)，在此作為比較基準。

誤差為（點估計值－DDGS估計值）/ DDGS估計值。

括弧內之數值為進行蒙地卡羅模擬100次之標準差。

表4可以發現對於美式回顧賣權，依照Raymar and Zwecher（1996）的區塊分隔法，以最高股價作為第一個分隔因子，而以當期股價作為第

二個分隔因子時，100×1的區塊分隔方式因僅考慮最高股價而未對當期股價作分隔，因此不能將持有價值準確判斷出來，故效果最差。而當區塊分隔方式為5×20時，由於對當期股價作了較細的分隔，可以適當地捕捉回顧賣權價內的程度，故效果最好，不過誤差仍介於1.478％ 2.670%之間。當我們利用第二種區塊分隔法，也就是以最高股價與當期股價的差作為第一個因子，而以當期股價作為第二個因子時，由於第一個因子就已經適當地捕捉了影響選擇權價值的重要因素—價內金額，因此再加入當期股價這第二個因子對於評價的準確度上已經沒有任何的助益，所以以100×1的區塊分隔方式評價效果最佳。最後我們利用第三種區塊分隔法，以最高股價與當期股價的比值，即價內程度作為第一個因子，再以當期股價作為第二個因子時，其效果更加明顯，評價誤差也較前兩種區塊分隔法來得小，評價誤差介於1.233% 1.747%之間。而在三種不同的波動程度下，波動程度越大評價誤差越小，其原因與先前相似，即波動程度越大，則美式回顧賣權履約時價內的程度也越高，當價內程度越高時，受提前履約決策錯誤判斷的影響就越小，因此評價誤差也越小。此外，需特別注意的是，對於回顧賣權，第二階段模擬的估計值雖因預知未來股價能力造成其值的高估，但仍較真值為低，可能的原因為路徑相依的特性造成兩因子的區塊分隔法仍無法完全正確判斷是否需提前履



註：起始日股價為100，無風險利率為10%（每年），標的資產無任何孳息，波動性為10%（每　年），選擇權到期期間為3個月，切割成91個期間（Time Steps），每期依據過去最高股價／當期股價分隔成100個區塊。

Barraquand and Pudet估計值為3.087。

圖5　美式間斷觀察型回顧賣權第二階段模擬與第三階段模擬之收斂情形

約，進而造成其值的低估，即使有預知未來股價能力來抵銷此一力量，

但仍不足以完全抵銷，故造成第二階段估計值雖較第三階段估計值來得大，但仍較真值為低的情況發生，接下來的美式算術平均價格買權也有類似的情形。從圖五中更可以明顯看出此一趨勢，當模擬路徑數較少時，因預知未來股價能力較大，此一力量造成估計值高估的部分甚至大過因兩因子無法完全正確判斷是否需提前履約所造成低估的力量，因此第二階段估計值較真值來得大；但當路徑數逐漸增加時，因預知未來股價的能力逐漸降低，此一高估的力量逐漸減弱，所以造成第二階段的估計值低於真值的情況發生。

而從表5可以發現對於算術平均價格買權，當區塊分隔方式為100×1，也就是僅依據算術平均股價來分隔時，修正模型的評價效果最差，這是因為算術平均股價雖然是決定算術平均價格選擇權收益的唯一因子，但當期股價的高低對於持有價值卻有相當大的影響，進一步影響到是否應提前履約決策的決定。故當我們逐漸將當期股價分隔的較細時，誤差也逐漸地縮小，當區塊分隔方式為5×20時，誤差最小。但當區塊分隔方式為2×50時，因太過於重視當期股價，而將算術平均股價分得過於粗略，反而造成誤差的加大。當區塊分隔方式為5×20時，其估計誤差均在1.3%以下。與美式標準買權相同，同樣是以價平買權的估計誤差最大，其原因也是價平買權受提前履約決策錯誤判斷的影響較大所造成。此外，我們發現對於算術平均價格買權，第二階段模擬因預知未來股價能力所造成估計值高估的程度較前面所探討的幾種選擇權來得小。相較於第三階段模擬的估計值，高估的程度均不超過0.25%，相較於前面評價的幾種選擇權，第二階段模擬估計值多較第三階段模擬估計值高估達1%以上而言，可謂小了許多，其原因在於影響算術平均價格買權收益的唯一因子—算術平均股價，在相鄰兩期之間變化的程度相對較小，故因預知未來股價能力導致第二階段模擬估計值高估的程度也因而較小。

表6可以發現對於美式最大值買權，依照Raymar and Zwecher（1997）的區塊分隔法，以最高股價作為第一個分隔因子，而以最低股價作為第二個分隔因子，當履約價格為130，也就是深度價外時[8]，因大部分的路徑其最高股價仍處於價外，故最低股價對於持有價值的影響並不大，所以僅針對最高股價加以分隔，而不對最低股價作分隔，也就是100×1的區塊分隔方式效果最好。而當最大值買權為價平或深度價內時，最低

表5 修正模型在不同區塊分隔方式下評價美式算術平均價格

[8] Rubinstein(1985)將標的資產價格(S)除以履約價格(X)，然後區分為五等級：若S/X<0.85為深度價外(deep out-of-the-money)，若0.85<S/X<0.95為價外(out-of-the-money)，若0.95<S/X<1.05為價平(at-the-money)，若1.05<S/X<1.15為價內(in-the-money)，若S/X>1.15為深度價內(deep in-the-money)。

買權之準確程度

區塊分隔	履約價格	二階段	三階段	點估計值	Hull and White 估計值	誤差
	45	7.6462 (0.0379)	7.6345 (0.0330)	7.6403	8.551	-10.650%
100×1	50	4.5081 (0.0272)	4.5081 (0.0272)	4.5081	4.892	-7.847%
	55	2.4139 (0.0214)	2.4139 (0.0214)	2.4139	2.536	-4.815%
	45	8.4012 (0.0285)	8.3840 (0.0288)	8.3926	8.551	-1.852%
20×5	50	4.7766 (0.0263)	4.7699 (0.0265)	4.7732	4.892	-2.428%
	55	2.4833 (0.0211)	2.4813 (0.0212)	2.4823	2.536	-2.117%
	45	8.5040 (0.0286)	8.4950 (0.0284)	8.4995	8.551	-0.602%
5×20	50	4.8304 (0.0263)	4.8274 (0.0264)	4.8289	4.892	-1.290%
	55	2.5057 (0.0209)	2.5051 (0.0209)	2.5054	2.536	-1.208%
	45	8.3492 (0.0312)	8.3359 (0.0311)	8.3425	8.551	-2.438%
2×50	50	4.7927 (0.0267)	4.7891 (0.0263)	4.7909	4.892	-2.066%
	55	2.4819 (0.0211)	2.4813 (0.0211)	2.4816	2.536	-2.146%

註：起始日股價為50，無風險利率為10%（每年），標的資產無任何孳息，波動性為30%（每年），選擇權到期期間為1年，切割成40個期間（Time Steps），模擬路徑數為50,000條。

二階段為第二階段模擬所得之平均估計值。三階段為第三階段模擬所得之平均估計值。

點估計值為第二階段模擬與第三階段模擬所得兩估計值之平均值。

Hull and White估計值取自Hull and White (1993)，在此作為比較基準。

誤差為（點估計值－Hull and White估計值）/ Hull and White估計值。

括弧內之數值為進行蒙地卡羅模擬100次之標準差。

股價對於持有價值的影響較為顯著，當區塊分隔方式為20×5時，由於對

最低股價作了適度的分隔，可以適當地分辨出不同路徑的持有價值，故效果最好，價平及深度價內的誤差分別為0.324%及0.148％。當我們利用第二種區塊分隔法，也就是以最高股價作為第一個因子，而以最高股價與最低股價之差作為第二個因子，當選擇權為價平或深度價內時，由於第二個因子較第一種區塊分隔法更能適當地分辨出不同路徑的持有價值，所以效果較第一種區塊分隔法為佳。最後我們再利用第三種區塊分隔法，以最高股價作為第一個因子，再以最高股價與最低股價的比值作為第二個因子時，對於深度價內的選擇權效果更加明顯，評價誤差也較前兩種區塊分隔法來得小。

綜合而言，修正模型對於五種美式選擇權的評價都相當精確，雖然本文考慮的美式選擇權都已有其他方法(如binomial，DDGS及Barraquand and Pudet(1996))可以求解，然而蒙地卡羅模擬法的最大優點就是其彈性較大，其他複雜的(如路徑相依、多資產)美式選擇權評價一樣可以適用蒙地卡羅模擬法，而且即使資產價格遵循複雜的隨機過程(亦即非Black-Scholes的幾何布朗運動)亦適用。

最後，由於蒙地卡羅模擬法的計算速度和估計值的收斂速度最為大家所質疑[9]，因此本文就此部份加以討論。在計算效率方面，本文所考慮的五種美式選擇權，係在本校DEC機器上進行計算，其所需CPU time皆在一分鐘以內，如果有資訊工程或數值運算專家協助將程式改良，計算時間還可以再降低。因此修正模型在實務運用上是可行的。在收斂速度方面，理論上蒙地卡羅模擬法估計值的誤差和抽樣路徑數的平方根(square root)成反比，然而在實際數值模擬過程中，修正模型和所有其他蒙地卡羅模擬法在美式選擇權評價運用時，都很難去驗證其收斂速度，因為所有蒙地卡羅模擬法(包括本文的修正模型)所計算的只是美式選擇權的高估值或低估值，這可能是蒙地卡羅模擬法的一大限制。在修正模型部份，從圖四和圖五似乎可看出其收斂情況尚佳。

伍、結論與建議

本文主要是發現Barraquand and Martineau（1995）及Raymar and Zwecher（1997）兩美式選擇權定價模型對於持有價值的估計有所偏誤

[9] 感謝匿名評審提醒作者釐清此一部份。

，並進一步提出改進之道，建構修正模型，並將修正模型應用於美式標

準買權、美式下終賣權、美式回顧賣權、美式算術平均價格買權以及美式最大值買權共五種美式選擇權評價之上，針對不同的區塊分隔方式以及不同的區塊分隔因子加以探討，並以最近文獻上的估計值作為比較基準，檢視修正模型是否適用於這五種選擇權的評價。

由本文之研究分析我們得到下列幾點結論：（1）、修正模型相較於BM模型或RZ模型而言，的確可以改善對於持有價值估計的準確性，進而增加對於美式選擇權價值估計的準確程度；（2）、根據選擇權的特性選擇不同的區塊分隔方式以及不同的區塊分隔因子是相當重要的，因為這會影響到估計值的準確程度和收斂速度；（3）、修正模型對於五種美式選擇權評價均有不錯的效果，且對於價外或價內的選擇權，準確度較價平選擇權來得高。

修正模型雖可應用於多種美式選擇權的評價上，但其模型仍建構在傳統的Black and Scholes模型假設下，故未來的研究可朝向修正模型假設（例如放寬波動性為定值的假設）發展。此外，將修正模型與降低變異（variance reduction）方法，如相反變異法（antithetic variable technique）、動差配適法（moment matching method）、控制變數法（control variate technique）、分層抽樣法（stratified sampling）等相結合，以降低模擬所得估計值的標準差，也是未來可以加以研究的主題。最後，將修正模型與準蒙地卡羅模擬（Quasi-Monte Carlo simulation），如Halton、Faure、Sobol sequences相互結合，以縮短模擬時間，也是值得未來加以探討的課題。

附錄A　變數轉換方法之介紹

在進行蒙地卡羅模擬的過程中，須自標準常態分配抽取亂數來模擬標的資產之價格，在本文中產生亂數的方法是依據Press et al.（1992）所提供的Ran 2演算法，此演算法所產生之亂數為符合均勻分配之亂數。因此必須將這些亂數轉換為標準常態分配才可進一步進行模擬。常見的變數轉換方法有Box-Muller演算法、Moro演算法等，我們在本文所選用的是Moro演算法（1995），Moro指出其演算法較一般常用的Box-Muller演算法為快且最大的誤差為3×10^{-9}。

Moro演算法對於值是介於$10^{-12}\le\Phi(x)\le1-10^{-12}$區間的常態累積密度函數Φ(x)有相當高的準確度，其中

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt \tag{A .1}$$

根據Joy, Boyle, and Tan（1996）所述，Moro演算法運用到兩個估計值，一為針對標準常態分配的中央部分，即$0.08\le\Phi(x)\le0.92$；另一則針對標準常態分配的雙尾部分，即$\Phi(x)<0.08$和$\Phi(x)>0.92$。就標準常態分配的中央部分而言，其反函數$\Phi^{-1}(x)$的估計值為

$$\Phi^{-1}(x)=y\frac{\sum_{n=0}^{3}a_n y^{2n}}{\sum_{n=0}^{4}b_n y^{2n}} \qquad 當|y|\le0.42 \tag{A .2}$$

其中y＝Φ(x)－0.5，而常數a_n和b_n的值則如表A-1所示。而就標準常態分配的雙尾部分（即$|y|>0.42$）而言，其反函數$\Phi^{-1}(x)$的估計值則依據截切（truncated）的Chebyschev數列而得

$$\Phi^{-1}(x)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{8}c_nT_n(z)-\frac{c_0}{2} & 當0.42<y<0.5\\ \frac{c_0}{2}-\sum_{n=0}^{8}c_nT_n(z) & 當-0.5<y<-0.42\end{cases} \tag{A .3}$$

其中$z=k_1\{2\ln[-\ln(0.5-|y|)]-k_2\}$，而常數$c_n$、$k_1$和$k_2$的值則如表A-1所示。下述的Clenshaw遞迴公式則可以有效地用來估計截切的Chebyschev數

列（見Press et al.（1992））。

若

$$f(z)=\sum_{n=0}^{8}c_nT_n(z)-\frac{c_0}{2} \qquad (A.4)$$

則f(z)可藉由下述遞迴公式獲得

$$d_{10}\equiv d_9\equiv 0 \qquad (A.5)$$

$$d_j=2zd_{j+1}-d_{j+2}+c_j \qquad j=8,7,....,1 \qquad (A.6)$$

$$f(z)=d_0=zd_1-d_2+\frac{c_0}{2} \qquad (A.7)$$

表A-1　Moro演算法之常數

n	a_n	b_n	n	c_n
0	2.50662823884	1.00	0	7.7108870705487895
1	－18.61500062529	－8.47351093090	1	2.7772013533685169
2	41.39119773534	23.08336743743	2	0.3614964129261002
3	－25.44106049637	－21.06224101826	3	0.0373418233434554
4		3.13082909833	4	0.0028297143036967
			5	0.0001625716917922
			6	0.0000080173304740
	k_1	k_2	7	0.0000003840919865
	0.4179886424926431	4.2454686881376569	8	0.0000000129707170

參考文獻

1. Barraquand, J., and D. Martineau, 1995, "Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate American Securities," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 30, 3, 383-405.

2. Barraquand, J., and T. Pudet, 1996, "Pricing of American Path-Dependent Contingent Claims," *Mathematical Finance*, 6, 17-51.

3. Black, F. and M. Scholes, 1973, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economics*, 81, 637-659.

4. Boyle, P., 1977, "Options: A Monte Carlo Approach," *Journal of Financial Economics*, 4, 323-338.

5. Broadie, M., and P. Glasserman, 1997, "Pricing American-Style Securities Using Simulation," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21, 8-9, 1323-1352.

6. Cox, J., S. Ross and M. Rubinstein, 1979, "Option Pricing: A Simplified Approach," *Journal of Financial Economics*, 7, 229-264.

7. Duan, J.C., E. Dudley, G. Gauthier, and J.G. Simonato, 1999, "Pricing Discretely Monitored Barrier Options by a Markov Chain," Working Paper.

8. Grant, D., G. Vora, and D. Weeks, 1996, "Simulation and the Early-Exercise Option Problem," *Journal of Financial Engineering*, 5(3), 211-227.

9. Hull, J. C., 1993, "*Options, Futures, and Other Derivative Securities*," 3th edition, Prentice Hall.

10. Hull, J., and A. White, 1993, "Efficient Procedure for Valuation European and American Path-Dependent Options," *Journal of Derivatives*, 1, 21-31.

11. Joy, C., P. Boyle, and K.S. Tan, 1996, "Quasi Monte Carlo Methods in Numerical Finance," *Management Science*, 42(6), 926-936.

12. Moro, B., 1995, "The Full Monte," *Risk*, 8(2), 57-58.

13. Press, W., S. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, 1992, Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing, 2nd edition. (Cambridge University Press, Cambridge)

14. Raymar, S., and M. Zwecher, 1996, "Monte Carlo Valuation of Multidimensional American Path-Depedent Options," Working paper, Fordham University, December.

15. Raymar, S., and M. Zwecher, 1997, "Monte Carlo Estimation of American Call Options on the Maximum of Several Stocks," *The Journal of*

Derivatives, 5, 1, 7-23.

16. Rubinstein, M., 1985, "Nonparametric Tests of Alternative Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 Through 31, 1978," *Journal of Finance*, 40, 455-480.

17. Tilley, J. A., 1993, "Valuing American Options in a Path Simulation Model," *Transactions of the Society of Actuaries*, 45, 83-104.

表4　修正模型在不同區塊分隔方式以及不同區塊分隔因子下評價美式間斷觀察型回顧賣權之準確程度

	分隔因子		因子1：過去最高股價 因子2：當期股價				因子1：過去最高股價－當期股價 因子2：當期股價				因子1：過去最高股價/當期股價 因子2：當期股價			
區塊分隔	σ	Barraquand and Pudet 估計值	二階段	三階段	點估計	誤差	二階段	三階段	點估計	誤差	二階段	三階段	點估計	誤差
100×1	0.1	3.087	2.7205 (0.0091)	2.6900 (0.0093)	2.7053	-12.365%	3.0477 (0.0066)	3.0180 (0.0064)	3.0329	-1.753%	3.0484 (0.0067)	3.0177 (0.0066)	3.0331	-1.747%
	0.2	6.845	6.4311 (0.0200)	6.3726 (0.0208)	6.4018	-6.474%	6.7877 (0.0151)	6.7005 (0.0147)	6.7441	-1.474%	6.7895 (0.0152)	6.7015 (0.0157)	6.7455	-1.454%
	0.4	14.811	14.3063 (0.0425)	14.2061 (0.0425)	14.2562	-3.746%	14.7230 (0.0326)	14.5048 (0.0344)	14.6139	-1.331%	14.7357 (0.0329)	14.5210 (0.0339)	14.6284	-1.233%
20×5	0.1	3.087	3.0069 (0.0068)	2.9725 (0.0072)	2.9897	-3.153%	3.0457 (0.0066)	3.0163 (0.0065)	3.0310	-1.814%	3.0458 (0.0066)	3.0162 (0.0064)	3.0310	-1.814%
	0.2	6.845	6.7473 (0.0159)	6.6584 (0.0165)	6.7028	-2.077%	6.7862 (0.0153)	6.6947 (0.0151)	6.7405	-1.527%	6.7863 (0.0150)	6.6975 (0.0144)	6.7419	-1.506%
	0.4	14.811	14.6798 (0.0355)	14.4649 (0.0366)	14.5724	-1.611%	14.7257 (0.0339)	14.4930 (0.0330)	14.6093	-1.362%	14.7275 (0.0338)	14.5096 (0.0349)	14.6185	-1.299%
5×20	0.1	3.087	3.0188 (0.0065)	2.9903 (0.0066)	3.0046	-2.670%	3.0306 (0.0064)	2.9992 (0.0066)	3.0149	-2.336%	3.0300 (0.0064)	2.9993 (0.0063)	3.0147	-2.343%
	0.2	6.845	6.7571 (0.0152)	6.6786 (0.0157)	6.7178	-1.858%	6.7723 (0.0156)	6.6812 (0.0166)	6.7267	-1.728%	6.7706 (0.0159)	6.6805 (0.0155)	6.7256	-1.745%
	0.4	14.811	14.6871 (0.0349)	14.4972 (0.0364)	14.5922	-1.478%	14.7121 (0.0348)	14.5130 (0.0354)	14.6125	-1.340%	14.7092 (0.0351)	14.5003 (0.0374)	14.6048	-1.392%
2×50	0.1	3.087	2.9803 (0.0074)	2.9530 (0.0074)	2.9666	-3.899%	2.9873 (0.0077)	2.9506 (0.0074)	2.9690	-3.824%	2.9869 (0.0077)	2.9525 (0.0073)	2.9697	-3.800%
	0.2	6.845	6.7181 (0.0165)	6.6456 (0.0167)	6.6818	-2.384%	6.7308 (0.0164)	6.6453 (0.0165)	6.6881	-2.293%	6.7285 (0.0161)	6.6438 (0.0176)	6.6862	-2.320%
	0.4	14.811	14.6415 (0.0355)	14.4797 (0.0360)	14.5606	-1.691%	14.6643 (0.0349)	14.4915 (0.0365)	14.5779	-1.574%	14.6587 (0.0366)	14.4832 (0.0373)	14.5710	-1.621%

註：起始日股價為100，無風險利率為10%（每年），標的資產無任何孳息，選擇權到期期間為3個月，切割成91個期間（Time Steps），模擬路徑數為50,000條。
二階段為第二階段模擬所得之平均估計值。三階段為第三階段模擬所得之平均估計值。點估計值為第二階段模擬與第三階段模擬所得兩估計值之平均值。
Barraquand and Pudet估計值取自Barraquand and Pudet (1996)，在此作為比較基準。
誤差為（點估計值－Barraquand and Pudet估計值）/ Barraquand and Pudet估計值。括弧內之數值為進行蒙地卡羅模擬100次之標準差。

表6　修正模型在不同區塊分隔方式以及不同區塊分隔因子下評價美式最大值買權之準確程度

分隔因子			因子1：最高股價 因子2：最低股價				因子1：最高股價 因子2：最高股價－最低股價				因子1：最高股價 因子2：最高股價/最低股價			
區塊分隔	履約價格	二項式估計值	二階段	三階段	點估計	誤差	二階段	三階段	點估計	誤差	二階段	三階段	點估計	誤差
100×1	70	34.525	33.8309 (0.0542)	33.5466 (0.0565)	33.6888	-2.422%	33.8309 (0.0542)	33.5466 (0.0565)	33.6888	-2.422%	33.8309 (0.0542)	33.5466 (0.0565)	33.6888	-2.422%
	100	9.543	9.4026 (0.0435)	9.3116 (0.0443)	9.3571	-1.948%	9.4026 (0.0435)	9.3116 (0.0443)	9.3571	-1.948%	9.4026 (0.0435)	9.3116 (0.0443)	9.3571	-1.948%
	130	1.062	1.0586 (0.0173)	1.0544 (0.0176)	1.0565	-0.519%	1.0586 (0.0173)	1.0544 (0.0176)	1.0565	-0.519%	1.0586 (0.0173)	1.0544 (0.0176)	1.0565	-0.519%
20×5	70	34.525	34.5541 (0.0567)	34.3940 (0.0620)	34.4741	-0.148%	34.5674 (0.0564)	34.3858 (0.0597)	34.4766	-0.140%	34.5661 (0.0571)	34.3990 (0.0583)	34.4826	-0.123%
	100	9.543	9.5503 (0.0435)	9.4738 (0.0443)	9.5120	-0.324%	9.5626 (0.0439)	9.4909 (0.0428)	9.5267	-0.170%	9.5615 (0.0439)	9.4888 (0.0435)	9.5251	-0.187%
	130	1.062	1.0382 (0.0169)	1.0300 (0.0166)	1.0341	-2.627%	1.0432 (0.0173)	1.0381 (0.0171)	1.0406	-2.013%	1.0412 (0.0174)	1.0316 (0.0171)	1.0364	-2.410%
5×20	70	34.525	34.4555 (0.0550)	34.2859 (0.0556)	34.3707	-0.447%	34.5969 (0.0554)	34.4284 (0.0580)	34.5127	-0.036%	34.5952 (0.0546)	34.4360 (0.0591)	34.5156	-0.027%
	100	9.543	9.4612 (0.0444)	9.3726 (0.0433)	9.4169	-1.322%	9.5474 (0.0446)	9.4450 (0.0450)	9.4962	-0.490%	9.5402 (0.0457)	9.4439 (0.0430)	9.4921	-0.534%
	130	1.062	1.0211 (0.0193)	1.0211 (0.0193)	1.0211	-3.850%	1.0255 (0.0184)	1.0180 (0.0183)	1.0218	-3.788%	1.0214 (0.0192)	1.0159 (0.0193)	1.0186	-4.082%
2×50	70	34.525	34.1456 (0.0528)	33.9084 (0.0583)	34.0270	-1.442%	34.5992 (0.0552)	34.4325 (0.0587)	34.5159	-0.026%	34.5941 (0.0539)	34.4626 (0.0577)	34.5284	0.010%
	100	9.543	9.0951 (0.0477)	8.9278 (0.0451)	9.0114	-5.570%	9.4020 (0.0444)	9.2930 (0.0469)	9.3475	-2.049%	9.3407 (0.0445)	9.2179 (0.0446)	9.2793	-2.763%
	130	1.062	1.0213 (0.0193)	1.0183 (0.0193)	1.0198	-3.973%	1.0256 (0.0184)	1.0187 (0.0182)	1.0222	-3.752%	1.0217 (0.0191)	1.0105 (0.0187)	1.0161	-4.322%

註：起始日兩股票股價皆為100，無風險利率為5%（每年），兩股票股利率皆為10%（每年），波動性皆為20%（每年），相關係數為0.3，選擇權到期期間為1年，切割成10個期間（Time Steps），模擬路徑數為50,000條。

二階段為第二階段模擬所得之平均估計值。三階段為第三階段模擬所得之平均估計值。點估計值為第二階段模擬與第三階段模擬所得兩估計值之平均值。

二項式估計值取自Raymer and Zwecher (1997)，為利用樹狀法切500期，共10個提前履約機會，即每兩提前履約機會間再切50期所得，在此作為比較基準。誤差為（點估計值－二項式估計值）/ 二項式估計值。

括弧內之數值為進行蒙地卡羅模擬100次之標準差。